



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

TESIS DOCTORAL

METODOLOGÍA PROYECTIVA EN ESPACIOS
NO CONVENCIONALES:
Aplicación a variedades unicursales y
curvas de diseño

Dirigida por:

Dr. Francisco Montes Tubío

Dra. M^a Humildad Camacho Sánchez

Autor: Federico Prieto Muñoz

Septiembre 2013

TITULO: *Metodología proyectiva en espacios no convencionales: Aplicación a variedades unicursales y curvas de diseño*

AUTOR: *Federico Prieto Muñoz*

© Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba. 2014
Campus de Rabanales
Ctra. Nacional IV, Km. 396 A
14071 Córdoba

www.uco.es/publicaciones
publicaciones@uco.es



TÍTULO DE LA TESIS: METODOLOGÍA PROYECTIVA EN ESPACIOS NO CONVENCIONALES: APLICACIÓN A VARIETADES UNICURSALES Y CURVAS DE DISEÑO.

DOCTORANDO/A: FEDERICO PRIETO MUÑOZ.

INFORME RAZONADO DEL/DE LOS DIRECTOR/ES DE LA TESIS

(se hará mención a la evolución y desarrollo de la tesis, así como a trabajos y publicaciones derivados de la misma).

Las aplicaciones de la Geometría Proyectiva clásica que hemos conocido a lo largo del siglo XX no se ha salido de los espacios proyectivos convencionales: series de puntos, haces de rectas, haces de planos, etc. Ello ha traído como consecuencia que su utilización se viese limitada prácticamente al campo de las cónicas y cuádricas.

La incorporación a los planes de estudio de la idea estructuralista del Álgebra, llevada a cabo a raíz de la revolución bourbakista, ha traído como consecuencia la consideración de nuevos espacios proyectivos a los que son aplicables, con un ropaje matemático muy distinto, todas las conclusiones del campo convencional.

La presente tesis es la cuarta que ya se realiza con la idea de rescatar para nuevos entornos, los teoremas y propiedades gráficas de lo que hemos llamado espacios convencionales.

A lo largo del trabajo realizado se consideran como espacios proyectivos los conjuntos de puntos y tangentes de curvas clásicas como pueden ser la estrofoide, deltoide, lemniscata de Bernoulli, etc. Se han considerado espacios totalmente novedosos como pueden ser los de multipuntos o multirrayos y se ha generalizado el concepto de involución.

Consecuencia de todo ello ha sido la obtención de nuevos métodos de generación de las citadas curvas así como su posible tratamiento dentro del canon clásico de regla y compás de la Geometría griega.

Para no olvidar el aspecto aplicado, primera finalidad de las titulaciones técnicas, se ha desarrollado un capítulo dedicado a las consideraciones proyectivas de las curvas de Bezier utilizadas en los actuales sistemas de Diseño Asistido.

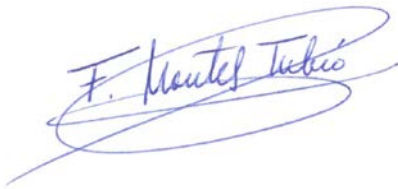
El susodicho capítulo ha sido aceptado para su publicación en la revista "Ingeniería Aeronáutica y Astronáutica".

Parte del contenido del resto de capítulos serán incluidos como capítulo, dentro del libro sobre "Curiosidades geométricas", que está preparando el doctorando y que será publicado por editorial ADI.

Por todo ello, se autoriza la presentación de la tesis doctoral.

Córdoba, 24 de septiembre de 2.013

Firma del/de los director/es

A handwritten signature in blue ink, reading "F. Montes Tubío", enclosed within a large, loopy circular flourish.

Fdo.: Francisco Montes Tubío

A handwritten signature in blue ink, reading "Humildad Camacho Sánchez", enclosed within a large, loopy circular flourish.

Fdo.: Humildad Camacho Sánchez

Wohl können wir einen Sachverhalt räumlich darstellen, welcher den Gesetzen der Physik, der den Gesetzen der Geometrie zuwiderliefe.

Ludwig J.J. Wittgenstein

(Podemos sin duda representar espacialmente un estado de cosas que vaya contra las leyes de la Física, pero no uno que vaya contra las de la Geometría)

DEDICATORIA

A los maestros que antes me enseñaron y a los alumnos a los que ahora enseño. Nuestra humilde labor contribuye a mantener viva la llama de la sabiduría.

Agradecimientos

La lista de agradecimientos para la realización de un trabajo como éste puede ser inacabable, incluyendo maestros, alumnos, amigos, etc. Solamente me referiré a los muy cercanos.

En primer lugar quiero agradecer a mis directores de tesis Humildad Camacho y Francisco Montes su generoso trabajo y el cariño con que he sido acogido en mis visitas de trabajo. Su inestimable ayuda y apoyo han sido indispensables para mantener la ilusión y el empuje en un proyecto como este.

Igualmente, no puedo dejar de mostrar mis agradecimientos a Lola Sondesa, Esther Pascual y nuevamente a Humildad Camacho por su labor precursora en esta línea de investigación. Albergo el deseo de que mi trabajo esté a la altura del realizado por ellas con anterioridad.

En toda esta línea de investigación de Geometría Proyectiva es obligado hablar de Manuel Prieto, mi padre. De su grupo de cátedra en la Universidad Politécnica de Madrid surgió esta línea de trabajo, y sin su dedicación, entrega y amor al estudio de la Geometría Proyectiva ninguna de estas investigaciones habría dado sus frutos. Empleando la frase de Bernardo de Chartres “somos como enanos a hombros de gigantes”. De su mano, el conocimiento se hace alcanzable a nuestros ojos.

No quiero olvidar a mis compañeras Laura Hernando (mil gracias por las traducciones), Consuelo Fernández y Maribel Castilla. Su ayuda y apoyo son incommensurables. Trabajar a su lado es una suerte grande, y verlas casi a diario una fortuna inmensa.

Finalmente no quiero dejar de dar las gracias a mi mujer, Maya, a mis padres(nuevamente) y a mis hermanos por su apoyo, comprensión y ayuda. No me imagino una vida sin vosotros.

Abstract

The first chapter is devoted to set out the working plan; it justifies the content and outlines novel and applied aspects of this work.

Chapter II includes the basic concepts behind the entire dissertation. The abstract concept of projective space is briefly recalled here and all those spaces considered as conventional spaces that have been widely analyzed by classical authors are also mentioned in this chapter.

Below, some of them whose study had scarcely been approached by the structuralist principles of the Algebra have been listed within the graphical environment.

This chapter ends with the introduction of what we consider is a new concept. We are speaking of spaces of bipoins, birays, tripoints, etc. Those spaces will greatly assist us in deducing certain graphical properties.

Chapter III is entirely devoted to the generalization, in all its forms, of the concept of involution, there we establish results as curious as the fact that the involutions of the points of a line are the lines of the two-dimensional space of bipoins contained in it.

Once the foundations of the work are established, we move into the Chapter IV to develop the main concept of this dissertation: unicursal varieties.

The general concept of unicursal variety is defined at that point, and then we focus immediately on the explanation of the very unicursal varieties.

We pushed aside a huge number of useful spaces such as ruled surfaces with unicursal cuspidal edge, polar surfaces of unicursal curves, twisted cubics, unicursal twisted quartics, etc. Any of these topics duly developed could be the subject of a new thesis.

In this chapter a general theorem about involutions is discussed, it widespread generalize theorems as classic as the Descargues' theorem applied to families of conics.

Some examples of certain complexity are shown in this chapter, where the power of the theorem can be appreciated for deducing complex graphical properties through scant calculations. At some stage, we resort to use symbolic computation in order to save some tedious steps.

Next chapter still includes a significant theoretical component. We are talking about the projective generation of cubics, a subject of great importance due to its computer-aided design applications.

Following the conics, cubics are highly complex curves, and although there are very comprehensive studies about them, we go back to the same old considerations. They were carried out before the algebraic structuration.

In the remaining chapters we included several applications. A projective analysis of the strophoid is performed on chapter VI; this is perhaps the most used curve among the cubics. Afterwards we analyze different punctual projective generation and we finish this chapter filling in the gap which Sondesa [31] left open when she studied bicircular quartics as envelopes of a circumference orthogonal to a fixed circumference whose deferent is a conic.

In the case of this conic being a parabola, the quartic becomes a cubic, and this is just the case we present here.

In chapter VII we perform a detailed study of a largely unknown topic: the deltoid. It first caught our attention due to its potential mechanical applications in the field of the trochoidal motor, but as we moved into this study, we discovered a great number of surprises regarding the mentioned curve. Maybe the greatest one was to realize that, besides their distinct appearance, deltoid and cardioid are the same curve from an algebraic point of view, and they may be related through a projective transformation with complex coefficients. We have even gone so far as to determine one of those transformations for a particular position of both curves.

A punctual projective generation has been studied as quartic as well as a tangential generation as curve of class three. At the end of this chapter we relate the deltoid to the Simons line, giving a projective meaning to this line we all know, whose place in Geometry has always been considered far removed from the projective field.

Conics, which have been addressed from so many points of view, could not fail to be present on this dissertation about unicursal varieties. Chapter VIII is devoted to a brief comment on them. There could be many topics to deal with, but we focus our attention only on the concyclic points that define a quaternary involution upon the conic. This subject is in line with the one of the points with concurrent normal lines defining a quaternary involution of rank two. This brief reference finishes with an explanation, under this point of view, of an old preciousness: the Joachimsthal's circle.

Chapter IX covers the Lemniscate of Bernoulli. The conditions of aligned points and concyclic points as well as different involutions that may be defined on the curve are studied in this chapter. Various generation forms are included following the Steiner school and extending it for new projective spaces.

For completing this dissertation with an applied issue, chapter X discusses a projective analysis of the cubic Bezier curves as the source of all the curves employed in Computer-Aided Design.

Throughout this dissertation a significant amount of lines of research has been opened for future researchers.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	17
1.1. Justificación	17
1.2. Aspectos novedosos	19
1.3. Aspectos aplicados	20
1.4. Plan de trabajo	21
1.5. Líneas abiertas	23
2. ESPACIOS PROYECTIVOS	25
2.1. Definición	25
2.1.1. Coordenadas homogéneas de un punto	27
2.2. Espacios no convencionales	28
2.2.1. Bipuntos y birrayos	28
2.2.2. Interpretación gráfica	30
2.2.3. Cónicas del plano	31
2.3. Tripuntos, tetrapuntos, etc.	32
3. OTROS ASPECTOS DE LA INVOLUCIÓN	35
3.1. Nueva forma de ver la involución	35
3.1.1. Coordenadas homogéneas	36
3.1.2. Interpretación gráfica de la ecuación generatriz	37
3.1.3. Interpretación gráfica de la ecuación general	40
3.2. Rectas del espacio de bipuntos	41
3.3. Razón doble de cuatro bipuntos	43
3.4. Involuciones generalizadas	48
3.4.1. Involuciones ternarias	48
3.5. Rango de una involución	50

4. VARIEDADES	
UNICURSALES	51
4.1. Introducción	51
4.2. Concepto de curva unicursal	53
4.3. Aspectos proyectivos	60
4.4. Haces de cónicas	61
4.5. Teorema general sobre involuciones binarias	77
4.6. Siguiendo a Steiner	109
4.7. Pertenencia a transformación cuadrática	127
4.8. Teorema sobre involuciones generalizadas	128
5. Generación de cúbicas	131
5.1. Introducción	131
5.2. Haces de curvas: propiedad fundamental	131
5.3. Propiedades de las cúbicas	134
5.4. Generación al modo Steiner	136
5.4.1. Demostración gráfica	137
5.4.2. Demostración analítica	138
5.4.3. Propiedades de la generación	139
5.5. Búsqueda del mecanismo de generación	148
5.5.1. Intersección de cónicas	149
5.5.2. Cónica capaz	150
6. ESTROFOIDE	157
6.1. Generación métrica	157
6.2. Parametrización racional	158
6.3. Condición de puntos alineados: Involuciones	159
6.3.1. Recta que pasa por dos puntos	161
6.4. Clase de la estrofoide: focos	164
6.5. Punto tangencial: puntos asociados	166
6.6. Generación como envolvente de círculos	167
7. DELTOIDE	173
7.1. Definiciones	173
7.1.1. Interpretación de Cremona-Lemoine	174
7.1.2. Interpretación cinemática	177
7.2. Primeras propiedades	181
7.2.1. Propiedades de las tangentes	181

7.3.	Generación Proyectiva	185
7.3.1.	Generación como cúbica tangencial	185
7.3.2.	Generación como cuártica puntual	190
7.4.	Deltoide y cardioide	193
7.5.	Deltoide y recta de Simson	195
7.6.	Recta de Steiner	196
7.6.1.	Envolventes de las rectas de Simson	202
7.6.2.	Rectas de Simson como asíntotas de hperbolas equiláteras	204
8.	LAS CÓNICAS COMO VARIEDADES UNICURSALES.....	207
8.1.	Generalidades	207
8.2.	Puntos concíclicos	207
8.2.1.	Ternas singulares	209
8.3.	Puntos de normales concurrentes	212
8.3.1.	Circunferencia de Joachimstal	214
9.	LEMNISCATA DE BERNOULLI	215
9.1.	Parametrización	215
9.1.1.	Puntos alineados	216
9.1.2.	Puntos concíclicos	217
9.1.3.	Consecuencias	218
9.2.	Generaciones proyectivas	220
9.2.1.	Generación por puntos	220
9.2.2.	Generación con bipuntos	224
10.	¿QUÉ HAY DETRÁS DE LAS CÚBICAS DE BEZIER?	229
10.1.	Introducción	229
10.2.	Teoremas fundamentales	229
10.2.1.	Teorema I	229
10.2.2.	Teorema II	230
10.3.	Puntos alineados	231
10.3.1.	Punto corresidual	232
10.3.2.	Punto nodal	232
10.3.3.	Puntos de inflexión	233
10.3.4.	Cónica de retrocesos	233
10.4.	Puntos alineados	234

10.5. Involuciones 235

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. JUSTIFICACIÓN

SIN ningún género de dudas, la revolución bourbakista, acaecida a finales del primer tercio del siglo XX ha supuesto un cambio radical en la forma de concebir las Matemáticas.

Haciendo balance, puede afirmarse que la Matemática pura se ha visto altamente beneficiada al prestarse atención a un contenido eminentemente estructuralista que cuida más de la propia esencia del hecho matemático que de determinadas aplicaciones en un campo concreto.

En contrapartida, la Matemática aplicada utilizada por el técnico, no ha salido bien parada con la nueva filosofía. Al contrario, contenidos matemáticos de alto interés para un técnico se han visto agriamente vilipendiados por el matemático puro que los considera como un subproducto que no es digno de su atención.

Consideremos por ejemplo la propiedad elemental de que la normal a una parábola es la bisectriz de la paralela al eje y de la recta que le une al foco.

Dicha propiedad es de importancia vital para el fabricante de faros de automóvil y por supuesto para el técnico que planifica su producción.

Sin embargo, para el matemático puro, puede ser una propiedad de orden muy secundario en un escenario en el que las cónicas *son los elementos del conjunto cociente* $\{\mathbf{Q} - \{Q_0\}\}/\mathfrak{R}$ donde:

- \mathbf{Q} es el conjunto de formas cuadráticas de un K -espacio vectorial sobre un cuerpo \underline{K} de característica distinta de dos.
- \mathfrak{R} es la relación de equivalencia definida sobre $\mathbf{Q} - \{Q_0\}$ donde Q_0 es la forma cuadrática cero y tal que

$$Q\mathfrak{R}Q' \iff Q' = \lambda Q | \lambda \in K; \{Q, Q'\} \subset \{\mathbf{Q} - \{Q_0\}\}.$$

Resulta evidente el enorme esfuerzo que hay que llevar a cabo antes de que a partir de esta definición lleguemos a la susodicha propiedad de las parábolas.

Sin embargo, el técnico no puede ni ignorar ni infravalorar la obra de Bourbaki [24]. Al contrario, debe conocerla a fondo y sacar de ella un provecho que le lleve a mejorar su producto o sus métodos de producción.

La Geometría es una rama de la ciencia que tiene más de dos milenios de antigüedad. En ella han trabajado eminentes científicos que nos han legado una valiosísima herencia, pero prácticamente toda ella se ha desarrollado en el campo convencional de la propia Geometría.

Y sin embargo, la Geometría, en el sentido convencional antes mencionado fue lo primero que cayó en la revolución bourbakista. Recordemos los famosos congresos de Melun y Royaumont donde se llegó a lanzar el famoso grito de “Abajo Euclides ”o aquel otro comentario sobre los teoremas de Geometría que son “como las vitrinas polvorientas de un museo que hay que destruir . . .”

Y estas salidas de tono, que solamente pretendieron ser comentarios jocosos del momento, posiblemente a la hora del café, fueron tomados muy en serio por muchos de los asistentes. Tanto es así, que prácticamente, la mayoría de los conocimientos geométricos con los que se cursan las carreras técnicas son los que han llegado a los alumnos de la mano del Álgebra Lineal.

Todos los considerados viejos preciosismos, como la circunferencia de Feuerbach, por ejemplo, o el mismo teorema de Ptolomeo, base de la Trigonometría han sido erradicados de los programas oficiales.

Solamente en el área del Dibujo Técnico se siguen recordando con cierta timidez alguno de estos conceptos por la utilidad que suponen para el mundo del diseño, pero sin disponer del tiempo necesario para cubrir dignamente unas materias que anteriormente se cubrían en el área de Matemáticas.

Y sin embargo, es mucho lo que la vieja Geometría puede aportar a otras ramas de la Matemática pura a través del concepto estructuralista implantado por el bourbakismo.

La idea ya fue expuesta en nuestro IV Congreso de Ingeniería Gráfica celebrado en Gijón en 1993. En síntesis, la idea se expuso en los siguientes términos: Muy bien, la Humanidad ha trabajado de forma ímproba durante más de dos milenios para llegar a elaborar una ciencia muy completa, pero su avance lo ha hecho, si se nos permite el símil, llevando puestas unas anteojeras que le han impedido ver lo que hay a los lados de su camino.

En cambio, la revolución bourbakista, realmente gestada a lo largo de un siglo, ha venido a establecer unos principios doctrinales que acogen, no solamente a la propia Geometría, sino a otras muchas más ramas de las Matemáticas.

Es como si la Humanidad hubiese avanzado por una galería muy estrecha que ha venido a desembocar en una gran estancia circular que representa la estructuración bourbakista.

Ahora bien, de esta gran estancia circular, aparte de la Geometría, salen otras muchas galerías cuyos contenidos no son necesariamente geométricos, pero que sí son isomorfos con ellos puesto que vienen de la misma madre. Puesto que la galería geométrica está tan desarrollada ¿no sería posible exportar sus logros, debidamente traducidos, a otras galerías que no estén tan desarrolladas?

En realidad, la Geometría tangencial, introducida por Plücker ya obedeció a esta idea. Toda la Geometría desarrollada hasta el momento era la Geometría puntual, puesto que consideraba el punto como la entidad geométrica más elemental. Pero desde el punto de vista algebraico ¿qué es un punto? Es un conjunto de infinitas ternas (x, y, t) proporcionales a sí mismas, que son sus coordenadas homogéneas.

¿Y qué es una recta? Es un conjunto de infinitas ternas (u, v, w) proporcionales a sí mismas que son los coeficientes de su ecuación $ux + vy + wt = 0$. Desde el punto de vista algebraico punto y recta vienen a ser la misma cosa. Todo teorema de incidencia relativo a puntos ha de tener una traducción en el mundo de las rectas puesto que ambas entidades tienen el mismo respaldo algebraico.

Pero Plücker lo tuvo muy fácil, puesto que cayó de forma muy natural en el espacio dual de un espacio proyectivo.

Vamos a ponerlo algo más difícil y más extemporáneo. ¿Qué es una ecuación de segundo grado? Es un conjunto de ternas (a, b, c) proporcionales a sí mismas que dan lugar a la ecuación única $ax^2 + bx + c = 0$. Todo teorema de incidencia relativo a puntos ha de tener su repercusión en las ecuaciones de segundo grado. Así, podemos hablar de ecuaciones de segundo grado que estén alineadas, razón doble de cuatro ecuaciones etc. Estamos definiendo una Geometría Proyectiva no convencional.

Hora es ya de que la metodología abstracta desarrollada recientemente en el campo bourbakista rescate esos métodos milenarios y los exporte a otros contextos, geométricos o no, pero siempre válidos y aprovechables para el campo aplicado.

Este trabajo de investigación es el cuarto que se acomete con esta filosofía de rescate. Los anteriores ya fueron desarrollados por las doctoras Sondesa [31], Camacho [5] y Pascual [18], cuyas investigaciones me han servido de base.

1.2. ASPECTOS NOVEDOSOS

EN un trabajo de tesis como el presente es muy normal preguntarse acerca de los aportes reales y novedosos que se han hecho al conocimiento humano.

No pretendo pecar de presuntuoso y atribuirme la total autoría de todo lo expuesto aquí, sobre todo recordando lo que me decía uno de mis profesores que a él se lo recordaba su viejo maestro cuando le decía que había descubierto algo: “*Usted busque, busque, y si no*

lo encuentra hecho es que está mal”.

O aquel otro comentario del crítico, *...el trabajo presenta muchos puntos buenos y originales, lo que ocurre es que los primeros no coinciden con los segundos...*

El nivel actual de conocimientos es tan elevado, que se hace muy difícil aportar algo nuevo. Solamente después de haber estudiado muy profundamente a los que nos han precedido en una determinada materia se logra entrever algún resquicio de conocimientos que pueden actualizarse o generalizarse a la luz de nuevos métodos, pero el germen de la idea ya estaba lanzado. Como decía Bernard de Chartres: *Caminamos a hombros de gigantes.*

El presente trabajo no es ajeno a esta forma de pensar y reconozco que han sido mis maestros los que se han encargado de bucear en este pasado para sacar a la luz esos resquicios de posible actualización antes mencionados.

A lo largo del presente trabajo pretendo creer que abundan las pinceladas novedosas en los tratamientos de los temas expuestos, como pueden ser los espacios de bipuntos y birrayos, aspectos gráficos de involuciones, involuciones generalizadas, etc. Pero si se me permite llamar la atención, puede que los puntos clave que suponen una verdadera síntesis doctrinal, los podemos encontrar en los tres teoremas básicos expuestos en el capítulo 4 sobre variedades unicursales.

El primero de los teoremas expuestos sobre involuciones viene a generalizar teoremas tan clásicos y fecundos como el teorema de Desargues sobre los haces de cónicas. Además, abre un campo extenso de aplicaciones para las relaciones gráficas de cúbicas y cuárticas, permitiendo el uso de las mismas en los actuales sistemas de Diseño Asistido.

Los otros dos, de escuela netamente steineriana, dan una generalización a las teorías expuestas por las doctoras Sondesa, Camacho y Pascual, dando así un enfoque proyectivo a las podarias e inversas de cónicas.

Las situaciones y casos particulares de estos teoremas pueden contarse por decenas, desembocando, a veces, en teoremas clásicos de la Geometría más elemental, lo que nos recuerda la obra de Klein sobre *Cuestiones elementales vistas desde un punto de vista superior.*

1.3. ASPECTOS APLICADOS

TAMBIÉN es frecuente preguntarse, sobre todo en centros politécnicos como el nuestro, qué influencia tiene la labor desarrollada en el mundo aplicado. Traigo a colación la máxima que hay escrita en el dintel de la puerta de entrada en nuestra escuela de Ingenieros de Montes de Madrid: *Saber es hacer.*

Nuestro trabajo estaría muy incompleto si no aportásemos alguna aplicación que venga a enriquecernos en este campo.

Cuidando este aspecto, han sido muy numerosos los ejemplos y ejercicios de aplicación de casi todos los teoremas expuestos. Muchos de ellos han sido desarrollados con la idea de afianzar la teoría expuesta para disipar cualquier posible error deductivo. Más de una vez, un sencillo ejemplo pone de manifiesto un fallo teórico en el que no se ha tenido en cuenta algún detalle que invalida todo un razonamiento que deja de ser válido en circunstancias muy particulares.

Como colofón a los aspectos aplicados se ha desarrollado el capítulo concerniente a las cúbicas de Bezier, altamente utilizadas en el mundo de Diseño Asistido, y cuyo conocimiento apenas estaba limitado a las cuatro recetas sobre su uso. Su análisis detallado estaba muy abandonado por parte de los estudiosos de la Matemática pura, lo cual no es de extrañar, dada la procedencia de tales curvas gestadas en la oficina de proyectos de un fabricante de automóviles.

1.4. PLAN DE TRABAJO

EN el capítulo II se exponen los conceptos básicos que dan fundamento a toda la tesis. Se recuerda muy brevemente el concepto abstracto de espacio proyectivo y se hace mención de todos los que se han considerado espacios convencionales ampliamente estudiados por los tratadistas clásicos.

A continuación se relacionan algunos, que sin salirse del entorno gráfico, su estudio apenas si ha sido abordado bajo la luz estructuralista del Álgebra. Sabemos, por ejemplo, que ha habido autores que han hecho estudios muy completos de cónicas homofocales, pero mucho de su trabajo se habría efectuado con mucha más facilidad y mayor rendimiento si hubiesen partido de la base de que forman espacio proyectivo unidimensional.

El capítulo se termina introduciendo lo que creemos un concepto novedoso. Nos referimos a los espacios de bipuntos, birrayos, tripuntos, etc. Estos espacios nos serán de gran utilidad para la deducción de determinadas propiedades gráficas.

El capítulo III está dedicado por completo a la generalización bajo todos sus aspectos del concepto de involución donde se establecen resultados tan curiosos como que las involuciones de los puntos de una recta son las rectas del espacio bidimensional de bipuntos contenidos en ella.

Una vez establecidas las bases del trabajo, entramos de lleno en el capítulo IV con la idea central de la tesis: las variedades unicursales.

Se define el concepto general de variedad unicursal para centrarse enseguida en lo que son las curvas unicursales en sí mismas.

A un lado quedan infinidad de espacios útiles como pueden ser superficies regladas con arista de retroceso unicursal, superficies polares de curvas unicursales, cúbicas alabeadas,

cuárticas unicursales alabeadas, etc. Cualquiera de estos temas debidamente desarrollados podría ser motivo una nueva tesis.

En este capítulo se expone un teorema general sobre involuciones que viene a generalizar ampliamente teoremas tan clásicos como el de Desargues aplicado a los haces de cónicas.

Se exponen ejemplos de cierta complejidad donde se muestra la potencia del teorema para deducir con algunos cálculos escasos propiedades gráficas de carácter complicado. En algún momento, para ahorrar algún paso tedioso se ha recurrido a un calculador simbólico.

El capítulo siguiente todavía tiene una importante componente teórica. Nos estamos refiriendo a la generación proyectiva de cúbicas, tema del más alto interés por sus aplicaciones al mundo del Diseño Asistido.

Después de las cónicas, las cúbicas son las siguientes en complejidad y, aunque hay estudios muy completos sobre ellas, volvemos a las mismas consideraciones de siempre. Fueron hechos antes de la estructuración algebraica.

Los restantes capítulos podemos decir que son aplicaciones. En el capítulo VI se hace un análisis proyectivo de la estrofoide, que tal vez sea la más utilizada dentro de las cúbicas.

Estudiamos distintas generaciones puntuales proyectivas y terminamos rellenando un hueco que dejó abierto Sondesa [31] al estudiar las cuárticas bicirculares como envolventes de circunferencia ortogonales a una circunferencia fija y cuya deferente es una cónica.

En el caso en que esta cónica es parábola la cuártica se convierte en cúbica y es precisamente el caso que exponemos aquí.

En el capítulo VII hacemos un estudio medianamente detallado de una gran desconocida: la deltoide. En principio llamó nuestra atención por las posibles aplicaciones mecánicas en el campo del motor trocoidal, pero a medida que nos adentramos en su estudio han sido numerosas las sorpresas que hemos ido descubriendo de la citada curva. Tal vez la mayor de ellas haya sido el ver que, a pesar de su apariencia tan distinta, deltoide y cardioide son la misma curva desde el punto de vista algebraico y que pueden estar relacionadas por una transformación proyectiva de coeficientes complejos. Hemos llegado, incluso a determinar una de estas transformaciones para una posición particular de ambas curvas.

Se estudia una generación proyectiva puntual como cuártica y asimismo una generación tangencial como curva de clase tres. El capítulo se termina relacionando la deltoide con la recta de Simson dando así un significado proyectivo a esta recta tan conocida por todos, pero que su entrada en la Geometría siempre se ha considerado muy alejada del campo proyectivo.

Las cónicas, que se han estudiado bajo tantos aspectos, no podían faltar en una tesis sobre variedades unicursales. En el capítulo VIII hemos dedicado una breve pincelada sobre las mismas. Podían ser innumerables los temas a tratar, pero hemos dedicado nuestra atención

solamente a los puntos concíclicos que definen una involución cuaternaria sobre la cónica. El tema se entronca con el de puntos de normales concurrentes que definen una involución cuaternaria de rango dos. Esta breve mención la terminamos exponiendo bajo este punto de vista un viejo preciosismo: la circunferencia de Joachimstal.

El capítulo IX está dedicado a la lemniscata de Bernoulli. Se estudian las condiciones de puntos alineados y puntos concíclicos así como las distintas involuciones que pueden definirse sobre la curva. Se incluyen diversas formas de generación siguiendo la escuela de Steiner generalizándola para los nuevos espacios proyectivos.

El capítulo X, para cerrar la exposición con un aspecto aplicado se hace un estudio proyectivo de las cúbicas de Bezier, germen de todas las curvas que se utilizan en el Diseño Asistido.

1.5. LÍNEAS ABIERTAS

LAS líneas abiertas en un trabajo de investigación surgen a medida que se desarrolla. Cuando se inicia el trabajo, que es cuando se etiqueta su contenido no se sabe exactamente cuanto puede dar de sí, y el presente no es una excepción.

Habíamos pretendido aplicar las metodologías proyectivas tradicionales a variedades unicursales. Ya de entrada, se estimaba la gran diversidad que pueden presentar las citadas variedades, pero al desarrollar el tema es cuando verdaderamente se aprecia la cantidad de ramas colaterales que surgen y que necesitarían la dedicación de todo un equipo investigador para adentrarse en ellas.

A lo largo del trabajo veremos que han surgido estos temas colaterales a los que apenas hemos podido asomarnos. Algunos de ellos, como la generación de cuárticas, por ejemplo, pueden constituir el tema de una nueva tesis doctoral. Esto forma parte del trabajo investigador. Nunca se agota completamente un tema. Siempre hay un resquicio que puede ser origen de futuros trabajos.

A lo largo de nuestra exposición haremos ver cuando estas circunstancias se presentan.

Capítulo 2

ESPACIOS PROYECTIVOS

2.1. DEFINICIÓN

EL establecimiento preciso del concepto de espacio proyectivo ha sido uno de los aportes más ricos de la reestructuración bourbakista.

Los grandes tratadistas anteriores a esta reestructuración solamente consideraban lo que nosotros llamamos *espacios convencionales* y que ellos llamaban *figuras* agregando el distintivo de *categoría* según la dimensión del mismo.

Así, consideraban las siguientes figuras:

a) De primera categoría

- Puntos de una recta.
- Haz de rectas.
- Haz de planos.
- Puntos de una cónica.
- Tangentes a una cónica.

b) De segunda categoría

- Puntos de un plano.
- Rectas de un plano.
- Radiación de rectas.
- Radiación de planos.

c) De tercera categoría

- Espacio de puntos.
- Espacio de planos.

Suponemos que de forma intencionada, para no sembrar la confusión en el lector, todos estos tratadistas clásicos eludían exponer nada acerca del espacio de rectas, lo cual ha contribuido a plantearse más de una duda en el estudioso.

La razón nos dice que una recta del espacio geométrico ordinario necesita cuatro parámetros para ser definida, ¿pero ello nos autoriza a asegurar que su conjunto puede constituir un espacio proyectivo de dimensión cuatro?

La respuesta es negativa. Dicho conjunto constituye lo que se ha denominado *cuádrica de Klein*, que es una cuádrica en un espacio proyectivo de dimensión cinco. Véase por ejemplo [20] y [32].

El hecho de que la totalidad de las rectas del espacio no tenga estructura de espacio proyectivo no impide que determinados subconjuntos de rectas lo formen. Nos estamos refiriendo, por ejemplo, a determinados complejos y congruencias de rectas así como a infinidad de superficies regladas.

Para exponer el concepto moderno de espacio proyectivo, nos permitimos transcribir una nota que, por su claridad, hemos tomado de [20].

El conocimiento de esta estructura matemática y sus propiedades es, a la postre, lo que está sustentando toda la Geometría Proyectiva y lo que permitirá extrapolar sus métodos incluso a conjuntos de entes no gráficos.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo de operadores K .

Sea V^* el conjunto de vectores obtenido al suprimir en V el vector nulo, que ya no será espacio vectorial por faltarle dicho vector.

Análogamente, sea K^* el conjunto formado por los elementos de K al eliminar del mismo el elemento neutro de la suma, es decir

$$V^* = V - \{0\}$$

$$K^* = K - \{0\}$$

Definamos en V^* una relación binaria \mathcal{C} denominada *colinealidad* y consistente en que dos elementos \mathbf{V} y \mathbf{V}' pertenecientes a V^* están relacionados si existe algún elemento λ de K^* tal que $\mathbf{V}' = \lambda \mathbf{V}$.

La relación anterior es evidentemente una relación de equivalencia.

Pues bien, definimos el *espacio proyectivo* \mathcal{P} derivado de V como el *conjunto cociente* V^*/\mathcal{C} formado por las clases de equivalencia de colinealidad.

Los elementos de \mathcal{P} se denominan *puntos* y por la forma en que está definida la relación de colinealidad serán subespacios unidimensionales de V a los que se le ha extirpado el vector nulo.

Esta circunstancia permite también definir a \mathcal{P} como el conjunto de los subespacios unidimensionales de V . Tanto en V como en cada uno de dichos subespacios unidimensionales ha de extirparse el vector nulo.

Sea M un punto de \mathcal{P} . Cualquier vector $\mathbf{M} \in V^*$ que engendra a M se dice que es un *representante homogéneo* de M en V^* .

Evidentemente, cualquier punto M tiene infinitos representantes homogéneos en V^* . Si \mathbf{M} es uno de ellos, también lo es cualquier $\lambda \mathbf{M}$ con $\lambda \in K^*$.

Un espacio proyectivo \mathcal{P} *no es espacio vectorial* puesto que no está dotado de la operación suma.

En efecto, sean M, M' dos puntos de \mathcal{P} y \mathbf{M}, \mathbf{M}' dos representantes homogéneos de ambos puntos.

Entre \mathbf{M} y \mathbf{M}' sí está definida la operación suma que sería la existente en V^* .

Parecería lógico que $\mathbf{M} + \mathbf{M}'$ fuese a su vez el representante homogéneo de la posible operación $M + M'$, pero ello no es posible puesto que si \mathbf{M} y \mathbf{M}' son dos representantes homogéneos de M y M' también lo serían $\lambda \mathbf{M}$ y $\mu \mathbf{M}'$ con $\lambda \in K^*, \mu \in K^*$ y la clase engendada por $\lambda \mathbf{M} + \mu \mathbf{M}'$ dependería de λ y μ pues para valores arbitrarios de estos parámetros vamos obteniendo vectores que no son colineales.

El resultado de la suma $M + M'$ dependería de los representantes homogéneos elegidos para los sumandos M y M' , operación que no tendría sentido.

Si el espacio vectorial V tiene dimensión n , se conviene en que el espacio proyectivo deducido de él tiene dimensión $n - 1$.

Los espacios proyectivos de dimensión uno se denominan *rectas* y los de dimensión dos *planos*.

2.1.1. Coordenadas homogéneas de un punto

Sea

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n+1}\}$$

una base de V .

Sea \mathbf{M} un representante homogéneo de M en V^* .

Si expresamos \mathbf{M} en la base \mathcal{U} en la forma

$$\mathbf{M} = \sum_1^{n+1} x_i \mathbf{u}_i, \quad x_i \in K$$

se dice que $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ son las coordenadas homogéneas del punto M del espacio proyectivo \mathcal{P} .

Como λM es también un representante homogéneo del mismo punto M de \mathcal{P} , deducimos que si

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

son coordenadas homogéneas de M también lo son

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_{n+1})$$

con $\lambda \in K^*$, es decir, si un conjunto de escalares son las coordenadas homogéneas de un punto, también lo son cualquier conjunto de proporcionales a ellos.

2.2. ESPACIOS NO CONVENCIONALES

EN un lenguaje menos formalista y con carácter enfocado a las aplicaciones útiles a la técnica, la introducción del concepto de coordenadas homogéneas nos hace concebir como espacio proyectivo a todo conjunto de entes matemáticos que se puedan poner en correspondencia biunívoca con los espacios vectoriales unidimensionales engendrados por el vector

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

con el vector nulo extirpado y donde los x_i pertenecen a \mathbb{R} .

Bajo este punto de vista son muy numerosos los espacios proyectivos que pueden ser considerados y que pueden ser objeto de investigación extrapolando a ellos la metodología clásica desarrollada para los espacios convencionales.

Entre estos espacios podemos citar los siguientes:

2.2.1. Bipuntos y birrayos

Consideremos la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.1}$$

Consideremos asimismo una recta orientada en la que hemos definido un origen O y tracemos sobre ella los puntos cuyas abscisas vienen dadas por las raíces x_1 y x_2 de la ecuación dada.

Definimos así el conjunto de las infinitas parejas de puntos de la recta que tienen estructura de espacio proyectivo de dimensión dos.

Efectivamente, cualquier terna de números (a, b, c) proporcionales a sí mismos define la misma ecuación 2.1, con lo que dicha terna puede ser considerada como las *coordenadas* de la susodicha pareja a la que nos referiremos en lo sucesivo con el nombre de *bipunto*.

Entre tales parejas están comprendidas:

- Un mismo punto formando pareja consigo mismo. Corresponde al caso en que

$$b^2 - 4ac = 0.$$

- Parejas de puntos imaginarios conjugados correspondientes al caso en que

$$b^2 - 4ac < 0.$$

- Cualquier pareja de puntos formada por un punto propio y el punto impropio de la recta correspondiente al caso en que $a = 0$ y $b \neq 0$, $c \neq 0$.
- El punto impropio de la recta formando pareja consigo mismo. Corresponde al caso en que $a = b = 0$ y $c \neq 0$.

Como es característico de un espacio proyectivo, al caso $a = b = c = 0$ no corresponde ninguna pareja de puntos.

Consideremos ahora la ecuación homogénea

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \tag{2.2}$$

Supongamos ahora que estamos en presencia de un sistema cartesiano Oxy de ejes no necesariamente ortogonales.

La ecuación anterior representa una pareja de rectas que pasan por O . A cada terna de números (a, b, c) proporcionales a sí mismos corresponde la misma pareja de rectas a excepción de la terna $(0, 0, 0)$ a la que no corresponde pareja alguna. A cada una de estas parejas nos referiremos en lo sucesivo como *birrayo*.

Podemos decir entonces que los que pasan por un punto también tienen estructura de espacio proyectivo de dimensión dos. Entre los elementos que integran este espacio proyectivo figuran:

- Una misma recta formando pareja consigo misma. Corresponde al caso en que $b^2 - 4ac = 0$.
- Parejas de rectas imaginarias conjugadas correspondientes al caso en que $b^2 - 4ac < 0$.
- Cualquier pareja de recta formada por una recta de coeficiente angular finito y otra de coeficiente angular infinito correspondiente al caso en que $c = 0$ y $b \neq 0$, $a \neq 0$.
- La recta de coeficiente angular infinito formando pareja consigo misma. Corresponde al caso en que $c = b = 0$ y $a \neq 0$.

2.2.2. Interpretación gráfica

A los espacios de bipuntos y birrayos podemos dar una interpretación gráfica que los haga más amigables. Puede resultar de utilidad para cuando estudiemos las involuciones, por ejemplo.

Como cada uno de sus elementos (bipunto o birrayo) está determinado, como ya sabemos, por tres números a , b y c . Podemos definir una transformación proyectiva que haga corresponder a cada elemento un punto de un plano cartesiano ordinario referido a un sistema ortogonal Oxy para mayor comodidad.

Si definimos la proyectividad

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

a cada bipunto o birrayo definido por (a, b, c) va a corresponder un punto $P(x, y, t)$ del plano.

Hemos puesto en tercer lugar la coordenada a porque, al igual que la t , su anulación está ligada a elementos impropios, pero podíamos haber hecho otra ordenación diferente.

Siguiendo a Sondesa [31], Camacho [5] y Pascual [18], que ya utilizaron esta proyectividad en contextos parecidos, la llamaremos *proyectividad canónica* porque es la que nos da una asociación más sencilla entre bipuntos, birrayos y puntos del plano.

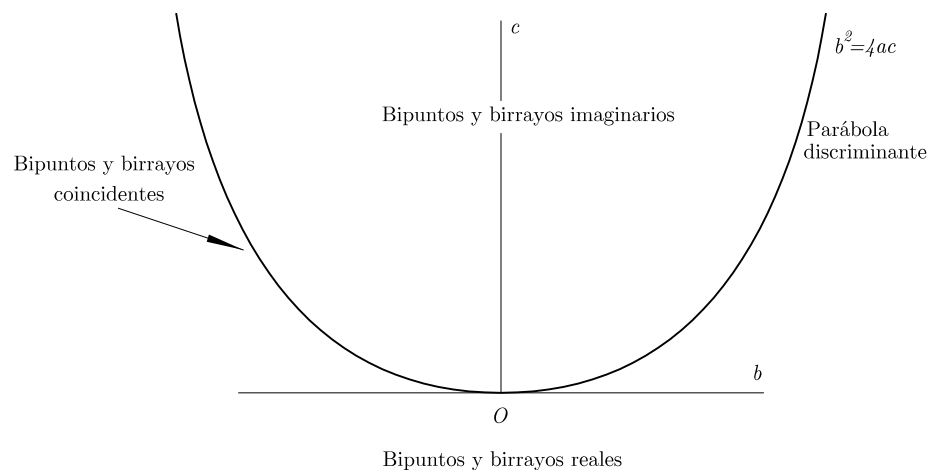


Fig. 2.1.-Representación gráfica de birrayos y bipuntos

En esta representación tiene especial importancia lo que ha venido a llamarse *parábola*

discriminante de ecuación $b^2 - 4ac = 0$, que viene a dividir el plano en dos zonas, una correspondiente a parejas de elementos reales y la otra a parejas de elementos imaginarios.

2.2.3. Cónicas del plano

Sabemos que en coordenadas puntuales el conjunto de todas las cónicas del plano viene dado por la ecuación

$$\Sigma a_{ij}x_i x_j = 0 \quad \{i = 1, 3 | j = 1, 3\} \quad (2.4)$$

Vemos entonces que cada cónica viene dada por cualquier conjunto de seis coeficientes a_{ij} que se mantiene proporcional a sí mismo, salvo el conjunto $\{a_{ij} = 0 | \forall i, j\}$ al que no corresponde ninguna cónica.

Estas condiciones nos indican que el conjunto de las cónicas puntuales del plano constituyen un espacio proyectivo de dimensión cinco. En este espacio de cónicas hay que incluir cónicas imaginarias y degeneradas.

Otro tanto puede decirse de las cónicas tangenciales que vienen dadas por la ecuación tangencial

$$\Sigma a_{ij}u_i u_j = 0 \quad \{i = 1, 3 | j = 1, 3\} \quad (2.5)$$

Subespacios importantes de este gran espacio de las cónicas son los siguientes:

Hipercomplejo de cónicas

Son las cónicas cuya ecuación viene dada por la combinación lineal de cinco cónicas independientes del plano

$$\Sigma \lambda_k f_k(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \{k = 1, 5\} \quad (2.6)$$

donde las f_k son funciones cuadráticas de las x_i .

Los hipercomplejos de cónicas constituyen un espacio proyectivo de dimensión cuatro.

Complejo de cónicas

Son las cónicas cuya ecuación viene dada por la combinación lineal de cuatro cónicas independientes del plano

$$\Sigma \lambda_k f_k(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \{k = 1, 4\} \quad (2.7)$$

donde las f_k son funciones cuadráticas de las x_i .

Los complejos de cónicas constituyen un espacio proyectivo de dimensión tres.

No conocemos estudios llevados a cabo tanto de los complejos como de los hipercomplejos de cónicas.

Redes de cónicas

Son las cónicas cuya ecuación viene dada por la combinación lineal de tres cónicas independientes del plano

$$\sum \lambda_k f_k(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \{k = 1, 3\} \quad (2.8)$$

donde las f_k son funciones cuadráticas de las x_i .

Las redes de cónicas constituyen espacio proyectivo de dimensión dos y han sido estudiadas con bastante amplitud por algunos autores, si bien desde un punto más analítico que proyectivo.

Haces de cónicas

Son las cónicas cuya ecuación viene dada por la combinación lineal de dos cónicas independientes del plano

$$\sum \lambda_k f_k(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \{k = 1, 2\} \quad (2.9)$$

donde las f_k son funciones cuadráticas de las x_i .

Los haces de cónicas constituyen espacio proyectivo de dimensión uno y han sido ampliamente estudiados por numerosos autores prebourbakistas. Queremos hacer notar con ello que es mucho lo que aún queda por investigar sobre los mismos extrapolando a ellos propiedades conocidas de otros espacios convencionales y derivadas de la propia esencia estructural que poseen.

2.3. TRIPUNTOS, TETRAPUNTOS, ETC.

LOS conceptos de bipuntos y birrayos son generalizables a tripuntos, trirrayos, etc. Si consideramos, por ejemplo la ecuación

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2.10)$$

y tomamos sobre una recta los puntos cuyas abscisas son las raíces de la ecuación podemos considerar que los coeficientes a, b, c, d de la ecuación son las coordenadas del nuevo ente matemático constituido por una terna de puntos sobre la recta.

El concepto es generalizable a una terna de puntos sobre una curva unicursal o a cualquier terna de entes definida sobre una variedad unicursal.

En este conjunto de ternas hay que considerar no solamente las constituidas por puntos reales, sino que habrá ternas formadas por una pareja de imaginarios y un punto real. De la misma forma hay que admitir ternas tales que dos de sus elementos son coincidentes y ternas constituidas por un solo punto en el que han coincidido los tres.

Igual que en el caso bidimensional podemos establecer una relación proyectiva muy fácil haciendo corresponder a la terna de coordenadas (a, b, c, d) el punto del espacio tridimensional ordinario cuyas coordenadas homogéneas son (b, c, d, a) habiendo adoptado el coeficiente a como coordenada homogénea para hacer que se correspondan elementos del infinito, aunque, verdaderamente, no hay necesidad de ello.

Así como en el plano teníamos una parábola discriminante aquí tenemos una superficie cuártica

$$-b^2c^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 18abcd + 27a^2d^2 = 0$$

que separa en el espacio los puntos correspondientes a ternas reales de aquéllos que tienen una pareja de imaginarios.

Capítulo 3

OTROS ASPECTOS DE LA INVOLUCIÓN

3.1. NUEVA FORMA DE VER LA INVOLUCIÓN

SIGUIENDO a [20] y [34] si observamos la ecuación clásica de una involución

$$AXX' + B(X + X') + C = 0 \quad (3.1)$$

vemos que no es obligatorio enfocarla como una transformación entre puntos o rectas de formas superpuestas. Entre otros enfoques, puede tener el de la forma de elección de unas determinadas parejas de puntos biunívocamente dependientes que van a jugar un papel simétrico desde un punto de vista algebraico.

Este hecho se pone de manifiesto en la ecuación 3.1, donde vemos que los elementos entran de forma simétrica agrupados en dos bloques que son la suma y el producto de sus coordenadas. Definir una involución es seleccionar determinadas parejas de puntos que verifican una cierta relación entre su suma y producto de coordenadas.

Bajo este punto de vista, la involución no es una transformación entre elementos, sino una forma simétrica de asociarse entre ellos. El elemento en sí mismo no ha de tener una identidad individual y sí lo tiene la pareja. Desde el punto de vista matemático, el ente no tiene coordenadas, lo que sí las tiene es la pareja.

Para estudiar este nuevo punto de vista, consideremos una serie rectilínea de puntos referida a un origen O mediante sus abscisas absolutas. La introducción de las coordenadas homogéneas que permitan el manejo de elementos impropios se hará posteriormente, una vez que las ideas estén afianzadas.

Consideremos una ecuación de segundo grado cuyo primer miembro es la combinación

lineal de dos polinomios conocidos de segundo grado

$$aX^2 + 2bX + c + \lambda(a'X^2 + 2b'X + c') = 0 \quad (3.2)$$

Al ir dando distintos valores a λ vamos a ir obteniendo sucesivas ecuaciones de segundo grado cuyas raíces (X_1, X_2) tomadas como coordenadas de dos puntos de la serie rectilínea nos van a definir parejas de puntos de una involución.

En efecto, la suma y el producto de las raíces de esta ecuación valen respectivamente

$$s = -\frac{2(b + b'\lambda)}{a + a'\lambda}, \quad p = \frac{c + c'\lambda}{a + a'\lambda}$$

La eliminación de λ entre estas ecuaciones nos conduciría a una relación lineal entre s y p que sería la ecuación de una involución en el sentido clásico.

A la ecuación (3.2) la vamos a llamar *ecuación generatriz* por la faceta que muestra de generar simultáneamente parejas de puntos homólogos.

El parámetro λ podrá ser entonces considerado como una *coordenada* de la pareja.

En la referencia [20] podemos encontrar el paso de la forma 3.1 a la 3.2, así como el método de expresar bajo esta nueva forma todas las propiedades clásicas de la involución (centro, puntos dobles, potencia, rayos principales, etc).

3.1.1. Coordenadas homogéneas

Hemos visto que las dos parejas de raíces correspondientes a las ecuaciones

$$aX^2 + 2bX + c = 0, \quad a'X^2 + 2b'X + c' = 0$$

constituyen también parejas de homólogos en la involución definida por (3.2), sin embargo, no existe ningún valor de λ que nos haga obtener la segunda de estas ecuaciones a partir de (3.2). Es el problema que siempre se presenta con los elementos impropios.

El problema se resuelve, como es obligado en los espacios proyectivos, introduciendo un nuevo parámetro μ para que (3.2) se exprese en la forma

$$\mu(aX^2 + 2bX + c) + \lambda(a'X^2 + 2b'X + c') = 0 \quad (3.3)$$

De esta manera el valor $\mu = 0$ nos da la segunda ecuación que antes era inalcanzable. Como siempre, las parejas de puntos de la involución no tendrán una sola coordenada λ sino dos (λ, μ) . La variación de los valores de estos dos parámetros en forma proporcional no cambia la pareja asignada en la involución.

Esta última afirmación da a la involución un nuevo enfoque más enriquecedor aún:

Las parejas de elementos homólogos de una involución tienen estructura de espacio proyectivo.

Como tal espacio, podremos definir proyectividades entre tales parejas y elementos de otros espacios proyectivos, como pueden ser series de puntos, haces de rectas etc.

En el ejemplo que mostramos a continuación tendremos ocasión de comprobarlo.

Todavía tenemos un último escollo que también podemos salvar. Los puntos del infinito de la serie rectilínea estamos asumiendo que se presentan cuando se anula uno o dos de los coeficientes de mayor grado en la ecuación (3.2). Podemos también introducir una coordenada homogénea t de modo que la absoluta sea x/t . La ecuación adoptaría la forma

$$\mu(ax^2 + 2bxt + ct^2) + \lambda(a'x^2 + 2b'xt + c't^2) = 0 \quad (3.4)$$

donde ya hay que pensar que para unos valores dados de λ y μ la ecuación resultante no la resolvemos en x , sino que la *factorizamos* en dos binomios homogéneos de primer grado en las variables (x, t) cada uno de los cuales nos va a dar un punto. Si uno de estos binomios se reduce a la variable t estamos ante el punto impropio de la recta.

3.1.2. Interpretación gráfica de la ecuación generatriz

A la ecuación (3.2) y a la teoría expuesta derivada de ella se le puede dar la siguiente interpretación gráfica:

Consideremos un sistema ortogonal de ejes $Ox\lambda$ y representemos en él la curva

$$\lambda = -\frac{aX^2 + 2bX + c}{a'X^2 + 2b'X + c'}$$

Dicha curva va a presentar una asíntota paralela a Ox a distancia $-a/a'$ y otras dos asíntotas paralelas a $O\lambda$ correspondientes a los valores X_1 y X_2 que anulan al denominador.

Si estos valores fuesen imaginarios tales asíntotas no existirían y la curva tendría el aspecto presentado en la figura Fig. 3.3.- de la página 39.

Si esta curva la cortamos con rectas paralelas a Ox , la proyección sobre este eje de las parejas de puntos de corte, son parejas de homólogos en la involución.

De las propiedades de la involución y de la curva se van deduciendo detalles que enriquecen ambos conceptos.

En todo caso, la curva presenta un punto de corte C_1 con la asíntota horizontal. La proyección, C , de este punto va a ser el centro de la involución.

Si la curva presenta dos puntos M_1 y N_1 de tangentes paralelas a Ox , la proyección de estos puntos sobre Ox nos ha de proporcionar los puntos dobles, luego ello obliga a que, en esta curva, los puntos M_1 y N_1 no pueden ocupar posiciones cualesquiera, sino que sus abscisas han de ser simétricas respecto a C_1 .

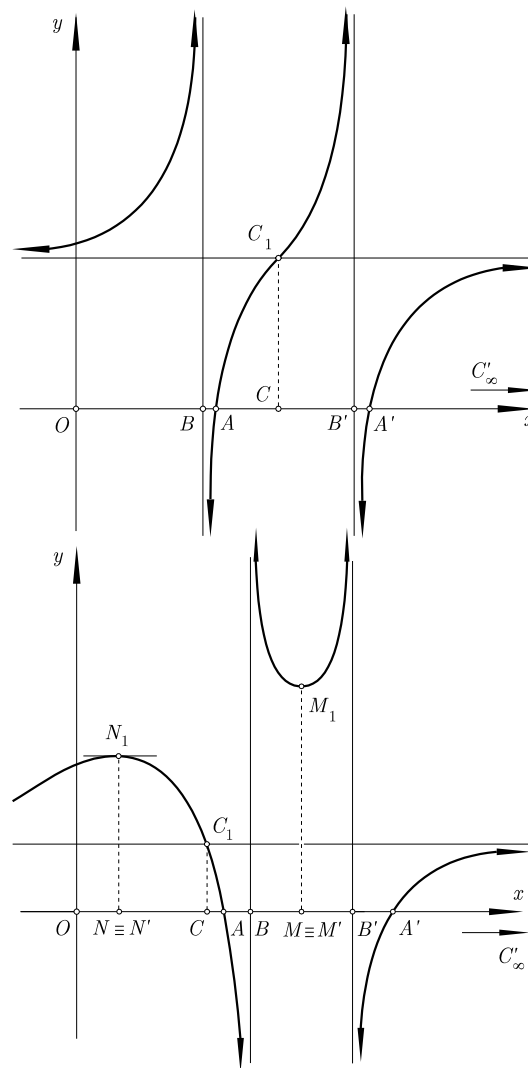


Fig. 3.2.-Interpretación gráfica de la nueva forma de presentar la involución.

Observemos que estamos empezando a deducir propiedades de esta curva a partir del concepto de involución. Son las deducciones típicas del mundo proyectivo, que con un esfuerzo mínimo llegamos a conclusiones complicadas.

He aquí otra deducción, que ya veremos al hablar de cúbicas unicursales.

Si proyectamos desde el punto impropio λ_∞ de $O\lambda$, los pares de puntos de corte de la curva con las paralelas a Ox , vamos a tener parejas de rayos de vértice impropio que van a estar en involución.

Una transformación proyectiva de la curva en su plano, la convertiría en una cúbica y el punto λ_∞ se transformaría en un punto doble de la misma, puesto que la doble asíntota

paralela a $O\lambda$ indica que esta curva pasa dos veces por λ_∞ .

Por otro lado, el punto impropio H_∞ de Ox se transformaría en un punto H' ordinario de la cúbica y las rectas paralelas a Ox se transformarían en el haz de rectas de vértice H' .

Resumiendo los resultados anteriores, podríamos enunciar el siguiente

Teorema 3.-I

Si tenemos una cúbica con punto doble, las rectas que proyectan desde este punto los puntos de corte con la misma de los rayos de un haz cuyo vértice pertenece a la cúbica están en involución.

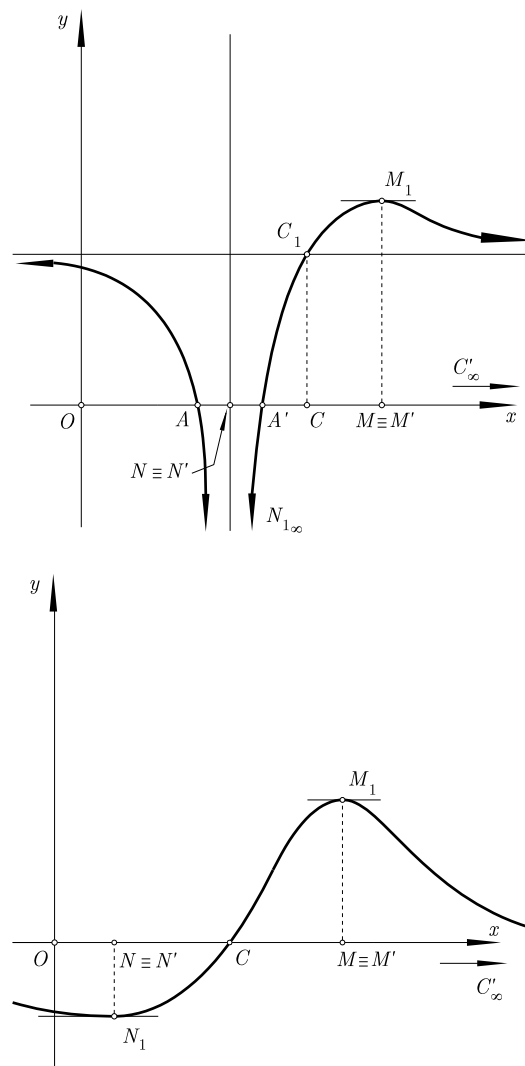


Fig. 3.3.-Variante cuando el denominador no tiene raíces reales.

3.1.3. Interpretación gráfica de la ecuación general

Para usos posteriores, hemos improvisado también una interpretación gráfica de la ecuación 3.1, pero hemos de comenzar interpretando la representación para una homografía general; así distinguiremos la diferencia al llegar a la involución.

Consideremos una homografía general dada por la ecuación

$$AX_1X_2 + BX_1 + CX_2 + D = 0 \tag{3.5}$$

Si consideramos que (X_1, X_2) son las coordenadas cartesianas de un punto de un plano referido a un sistema ortogonal OX_1X_2 , la ecuación anterior representa la siguiente hipérbola equilátera

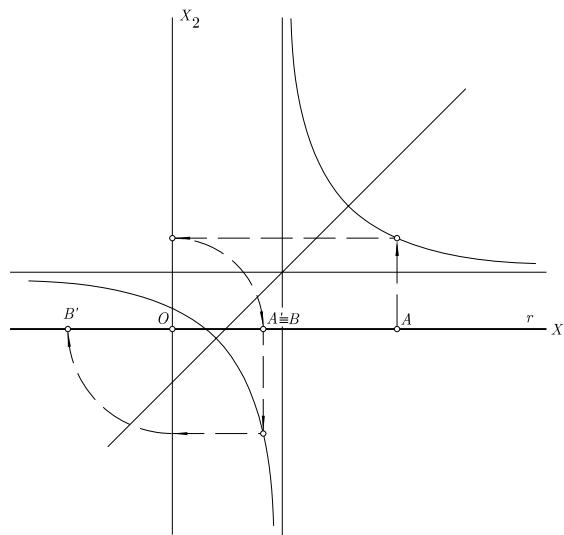


Fig. 3.4.-Algoritmo gráfico para representar una homografía general.

Si queremos hallar el homólogo de un punto A , lo referimos a la hipérbola, por el punto de corte trazamos una paralela a la recta soporte hasta cortar al eje OX_2 . El nuevo punto de corte lo giramos alrededor del origen hasta cortar a la recta base. De esta forma obtenemos el punto transformado A' mediante la homografía.

Si repetimos la operación considerando ahora que el punto A' es un punto B de la primera serie, el punto B' obtenido no coincide con el A . Es lo típico de una homografía general.

Repetamos ahora el mismo proceso para una involución. La simetría de variables en la ecuación 3.1 nos va a obligar a que la hipérbola equilátera sea simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante, como podemos ver en la figura siguiente.

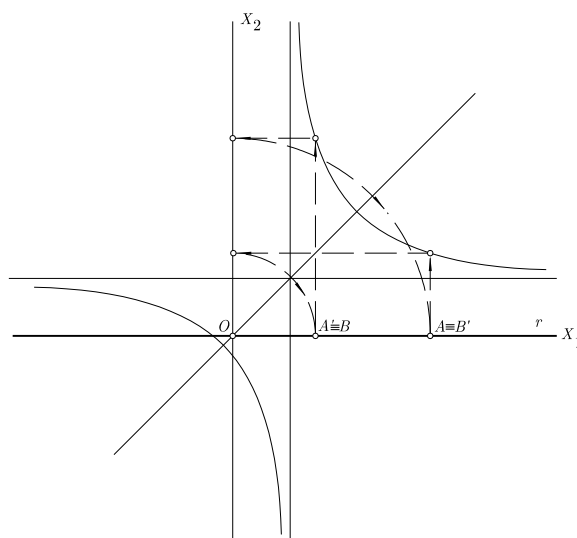


Fig. 3.5.-En el caso de involución la hipérbola es simétrica respecto a $X_1 = X_2$.

En este caso podemos apreciar que el homólogo de B nos retrotrae al punto A . Esta interpretación nos será de utilidad al hablar de la intersección de involuciones ternarias.

3.2. RECTAS EN EL ESPACIO DE BIPUNTOS

EN 2.2.1 vimos que los bipuntos de una recta tienen estructura espacio proyectivo de dimensión dos. Incluso en 2.2.2 los pusimos en correspondencia con los puntos de un plano. Llegados aquí, cabe preguntarnos: ¿cuáles son las rectas de este espacio bidimensional?

Si las coordenadas de un bipunto son (a, b, c) una *recta* de bipuntos va a estar constituida por el conjunto de parejas que cumplan una relación lineal del tipo

$$Aa + Bb + Cc = 0 \tag{3.6}$$

Ahora bien, las abscisas X_1, X_2 de los puntos de la pareja son las raíces de

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

luego entre su suma y su producto se verifica

$$X_1 + X_2 = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = -a(X_1 + X_2)$$

$$X_1 X_2 = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = a(X_1 X_2)$$

Llevado estos valores de b y c a 3.6 llegamos a

$$A - B(X_1 + X_2) + CX_1 X_2 = 0$$

ecuación que es del tipo 3.1, luego llegamos al resultado sorprendente de que *una recta de un espacio de bipuntos es el conjunto de las parejas de homólogos de una involución.*

Esta conclusión nos permite utilizar las parejas de homólogos de una involución como si fueran *puntos* de una recta abstracta que tendrá las mismas atribuciones que una recta convencional. En el ejemplo siguiente vamos a establecer una proyectividad entre los *puntos* de una de estas rectas abstractas y los rayos de una haz convencional.

Análogamente, las *rectas* de un espacio de birrayos serán las parejas de birrayos que estén en involución.

Ejemplo I

Sobre un sistema ortogonal de coordenadas Oxy definimos dos espacios proyectivos.

El primero es el conjunto de parejas de puntos de Ox que son simétricos respecto a O .

El segundo es el haz de rectas de vértice O .

Entre ambos espacios vamos a definir una proyectividad mediante dos ternas de elementos homólogos.

Al punto O , como doble de la simetría le hacemos corresponder el eje Ox .

Al punto del infinito de Ox , como doble también de la simetría, le hacemos corresponder la bisectriz $y = x$.

Finalmente, a la pareja $[A(a, 0), A'(-a, 0)]$ le hacemos corresponder el eje Oy .

Hallar la ecuación de la proyectividad y la pareja homóloga de la recta $y = -x$.

La simetría la podemos expresar mediante la ecuación generatriz homogénea

$$\mu x^2 - \lambda t^2 = 0$$

donde cada pareja (λ, μ) va a representar una pareja de puntos simétricos.

Al punto O como doble le corresponden las coordenadas homogéneas $\lambda = 0, \mu = 1$, al punto impropio de la recta corresponden $\lambda = 1, \mu = 0$ y a la pareja $(a, -a)$ corresponden $\lambda = a^2, \mu = 1$.

Para el haz de rectas de vértice O , como interviene también el eje Oy que tiene pendiente infinita vamos a tomar unas coordenadas homogéneas (m, t) en las que la verdadera pendiente sea m/t .

Así, al eje Ox corresponden las coordenadas $m = 0, t = 1$, a la bisectriz $y = x$ corresponden las $m = t = 1$ y al eje Oy corresponden $m = 1, t = 0$.

Sea

$$Am\lambda + Bm\mu + C\lambda t + D\mu t = 0$$

la ecuación de la proyectividad que se establece entre un espacio y otro.

Obligüemos a que la cumplan las tres parejas de homólogos que la definen y tenemos las ecuaciones

$$D = 0, \quad A + C = 0, \quad a^2A + B = 0$$

La ecuación de la proyectividad va a ser entonces

$$m\lambda - a^2m\mu - \lambda t = 0$$

A la recta $y = -x$ de coordenadas $m = 1, t = -1$ va a corresponder

$$\lambda - a^2\mu + \lambda = 0 \quad \implies \quad \lambda = \mu a^2/2$$

Llevando este valor a la ecuación generatriz obtenemos fácilmente la pareja buscada que, en términos absolutos, es $x = \pm a\sqrt{2}/2$.

3.3. RAZÓN DOBLE DE CUATRO BIPUNTOS

UNA vez que hemos visto que las *rectas* de los espacios de bipuntos y de birrayos están constituidas por las parejas de elementos homólogos de una misma involución, lo inmediato es preguntarse sobre la forma de localizar gráficamente la razón doble de cuatro de estas parejas.

Como veremos, podemos disponer de varias formas de obtener dicha razón doble estableciendo conexión con los espacios convencionales.

Teorema 3.-II

La razón doble de cuatro bipuntos de una involución es la misma que la de los puntos medios de las respectivas parejas.

En efecto, sea

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0 \quad (3.7)$$

la ecuación generatriz de la involución a la que pertenecen los bipuntos. El parámetro λ es la *abscisa* de cada bipunto considerado. El punto medio de un par de puntos homólogos definidos por un valor de λ viene dado por

$$x_M = -\frac{b + \lambda b'}{2(a + \lambda a')} \quad (3.8)$$

ecuación que muestra la existencia de proyectividad entre los entes definidos por λ (bipuntos) y los definidos por x_M .

Esta proyectividad nos garantiza la conservación de la razón doble entre los entes matemáticos definidos por λ y por x_M .

Teorema 3.-III

La razón doble de cuatro bipuntos es la misma que la de los cuatro birrayos que se obtienen al proyectarlos desde un punto exterior.

En efecto, supongamos que los bipuntos dados por 3.7 están sobre la recta $y = h$ y que los proyectamos desde el origen de coordenadas.

La ecuación de los birrayos correspondientes la obtendremos eliminando la variable de homogeneidad t entre las ecuaciones

$$ax^2 + bxt + ct^2 + \lambda(a'x^2 + b'xt + c't^2) = 0, \quad y = ht$$

con lo que obtenemos

$$ah^2x^2 + bhxy + cy^2 + \lambda(a'h^2x^2 + b'hxy + c'y^2) = 0$$

que, efectivamente, es la ecuación de un birrayo cuya *abscisa* λ es la misma que la del bipunto del que procede. La conservación de la razón doble está asegurada.

Teorema 3.-IV

La razón doble de cuatro birrayos $(a - a', b - b', c - c', d - d')$ es la misma que la de las cuatro rectas AA', BB', CC', DD' que se obtienen al cortar los birrayos con una cónica cualquiera que pase por su vértice.

En efecto, refiramos la cónica a un sistema de ejes, no necesariamente ortogonales, que tengan su origen en el vértice de los birrayos. Supongamos, además, que elegimos el eje Ox tangente a la cónica cuya ecuación adoptará la forma

$$f(x, y, t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yt = 0.$$

Sea

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \lambda(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2) = 0$$

la ecuación generatriz de la involución a la que pertenecen los birrayos.

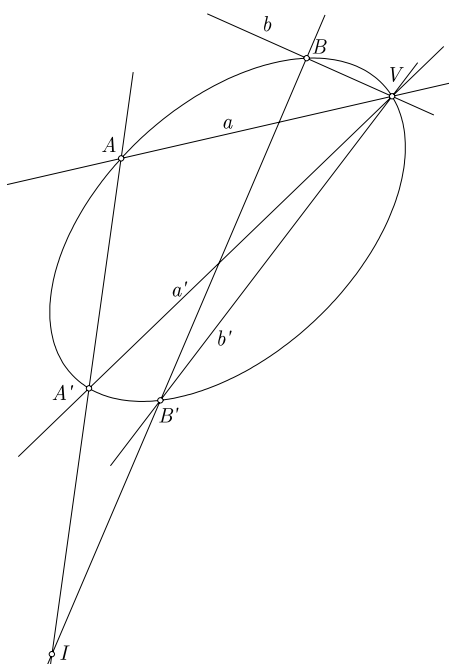


Fig. 3.6.-

Por las propiedades de la involución de puntos sobre la cónica sabemos que las rectas $A - A', B - B' \dots$ concurren en el centro I de la involución. Consideremos una de tales rectas, la $A - A'$, por ejemplo. Hemos de ver que dicha recta depende linealmente del parámetro λ que fija la posición del birrayo correspondiente.

Consideremos momentáneamente que λ tiene un valor constante y definamos el haz de cónicas definido por el birrayo $a - a'$ y la cónica introducida. La ecuación de dicho haz será

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \lambda(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2) + \mu f(x, y, t) = 0$$

Busquemos los valores de μ que hacen que las cónicas del haz degeneren.

$$\begin{vmatrix} a + \lambda a' + \mu a_{11} & b + \lambda b' + \mu a_{12} & 0 \\ b + \lambda b' + \mu a_{12} & c + \lambda c' + \mu a_{22} & \mu a_{23} \\ 0 & \mu a_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

El desarrollo del determinante nos conduce a

$$(\mu a_{23})^2(a + \lambda a' + \mu a_{11}) = 0$$

Tenemos las raíces $\mu_1 = 0$ (doble) y la $\mu_2 = -(a + \lambda a')/a_{11}$

El valor μ_1 nos da dos veces el birrayo $a - a'$ como cónica degenerada.

El valor μ_2 nos da

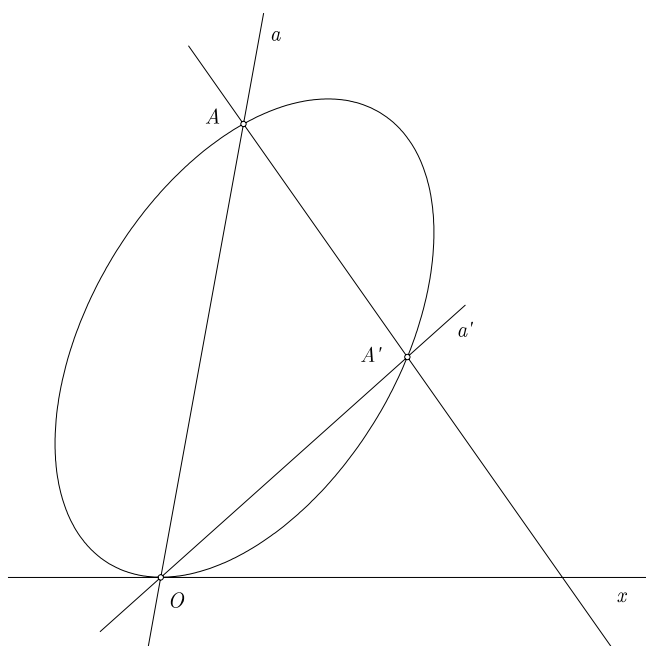


Fig. 3.7.-

$$2bxy + cy^2 + \lambda(2b'xy + c'y^2) - \frac{a + \lambda a'}{a_{11}}(2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yt) = 0$$

que, separando el factor $y = 0$ nos da una recta que, efectivamente, depende linealmente de λ .

Esta dependencia lineal de las rectas $A - A', B - B' \dots$ con los birrayos, nos permite establecer que hay proyectividad entre ambos espacios proyectivos, el de los birrayos y el de las cuerdas concurrentes de la cónica.

La razón doble de los birrayos la tenemos localizada en la de las cuerdas como queríamos demostrar.

Teorema 3.-V

Sean c_1 y c_2 dos cónicas pertenecientes a un haz de puntos fundamentales A, B, C, D . Tracemos por uno cualquiera de los puntos fundamentales, el A por ejemplo, dos rectas m y n . Dichas rectas vuelven a cortar a c_1 y c_2 en los puntos M_1, M_2 y N_1, N_2 respectivamente.

Sean t_{M_1}, t_{N_1} y t_{M_2}, t_{N_2} las tangentes respectivas a c_1 y c_2 en los puntos M_1, N_1, M_2, N_2 .

Sean I_1 e I_2 los puntos de intersección de (t_{M_1}, t_{N_1}) y de (t_{M_2}, t_{N_2}) .

Sean finalmente P y Q las intersecciones respectivas de t_{M_1} con t_{M_2} y de t_{N_1} con t_{N_2} .

Existe una cónica que pasa por los siete puntos B, C, D, I_1, I_2, P y Q .

Este teorema, de apariencia complicada, es una consecuencia casi evidente de la siguiente cadena de proyectividades: Definamos en A una involución cualquiera. Las parejas de homólogos de esta involución, consideradas como birrayos, van a estar en proyectividad con las cuerdas que interceptan en cada una de las cónicas, luego dichas cuerdas, como pertenecientes a una u otra cónica van a formar haces pertenecientes a una proyectividad \mathcal{P} , luego su intersección van a definir una cónica c .

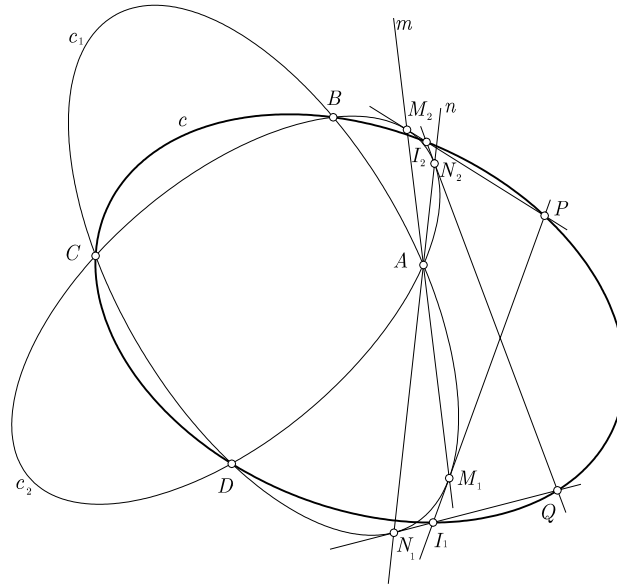


Fig. 3.8.-

En nuestro caso hemos de definir una involución cuyos rayos dobles sean precisamente m y n .

La citada involución va a definir en cada cónica una involución de puntos cuyos centros respectivos van a ser precisamente I_1 e I_2 , luego la cónica c antes mencionada ha de pasar por estos puntos.

Por otro lado, las tangentes (t_{M_1}, t_{M_2}) van a ser un par de cuerdas homólogas de \mathcal{P} , luego su punto P de intersección también ha de pertenecer a c . A la misma conclusión llegamos al considerar las tangentes (t_{N_1}, t_{N_2}) que se cortan en Q .

Finalmente, los puntos de intersección B, C y D de las cónicas también van a ser puntos de intersección de cuerdas homólogas en \mathcal{P} , luego la cónica c también ha de pasar por ellos.

3.4. INVOLUCIONES GENERALIZADAS

HEMOS presentado las involuciones bajo dos aspectos: como correspondencia doble entre elementos o como asociación de parejas de elementos con criterio simétrico.

Bajo ambos aspectos es un concepto generalizable, si bien bajo el primero, la involución no podrá ser considerada como transformación biunívoca de puntos.

Supongamos que en (3.2), en vez de combinar linealmente ecuaciones de segundo grado, hacemos combinaciones del tipo $f(x) + \lambda\varphi(x) = 0$ donde f y φ son polinomios de grado n de x .

Al ir dando valores a λ obtendríamos agrupaciones de n elementos que estarían en una involución generalizada.

3.4.1. Involuciones ternarias

Para afianzar algo más las ideas consideremos, por ejemplo, una involución ternaria. Su ecuación puntual habría de ser de la forma

$$AX_1X_2X_3 + B(X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3) + C(X_1 + X_2 + X_3) + D = 0 \quad (3.9)$$

Involución asociada

Evidentemente, si en 3.9 fijamos un punto de la terna, el X_1 por ejemplo, la ecuación anterior nos muestra que aparece una involución binaria entre X_2 y X_3 a la que llamaremos *involución asociada* a X_1 .

Dicho de otra forma un punto forma parte de infinitas ternas y las parejas que le acompañan constituyen una involución ordinaria.

Puntos singulares

Siguiendo con lo expuesto en el último párrafo, nos surge una pregunta. ¿Es posible la existencia de puntos que formen terna con cualquier pareja de puntos de la recta? o lo que es lo mismo, que su involución asociada degenerare.

Supongamos que fijamos el X_1 . La involución que aparece entre X_2 y X_3 es

$$(AX_1 + B)X_2X_3 + (BX_1 + C)(X_2 + X_3) + CX_1 + D = 0$$

La condición de que esta involución degenerare es

$$(BX_1 + C)^2 - (AX_1 + B)(CX_1 + D) = 0$$

$$(B^2 - AC)X_1^2 + (BC - AD)X_1 + C^2 - BD = 0 \quad (3.10)$$

ecuación que nos dice que, en general, existirán dos *puntos singulares* que podrán ser reales o imaginarios, distintos o confundidos.

Parejas singulares

Si en la involución ternaria dada por 3.9 damos dos puntos de una terna, el tercero viene unívocamente determinado, salvo determinadas parejas para los que el tercer elemento de la terna queda indeterminado.

Si en 3.9 suponemos conocidos X_1 y X_2 el tercer elemento viene dado por

$$X_3 = -\frac{BX_1X_2 + C(X_1 + X_2) + D}{AX_1X_2 + B(X_1 + X_2)} \quad (3.11)$$

Vemos que X_3 queda determinado si no se anulan simultáneamente el numerador y el denominador de la fracción anterior, pero si elegimos X_1 y X_2 de forma que satisfagan

$$\left. \begin{aligned} BX_1X_2 + C(X_1 + X_2) + D &= 0 \\ AX_1X_2 + B(X_1 + X_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

tendremos una pareja dada por (X_1, X_2) para la cual queda indeterminado el tercer elemento de la terna. Es la que denominamos *pareja singular*.

El sistema 3.12 es fácil de resolver expresándolo en función de $s = X_1 + X_2$ y $p = X_1X_2$. Aparte de una solución propia

tiene una solución doble impropia, interpretándose ésta diciendo que el punto impropio forma pareja singular consigo mismo.

Involución límite

Definimos como involución límite a la que está asociada al punto del infinito como punto simple.

Si en 3.9 dividimos por X_1 y hallamos el límite cuando $X_1 \rightarrow \infty$ obtenemos la ecuación de la involución límite que será

$$AX_2X_3 + B(X_2 + X_3) + C = 0$$

Puntos triples

Son los puntos que forman terna consigo mismos. Vendrán dados por la ecuación cúbica

$$AX^3 + 3BX^2 + 3CX + D = 0$$

obtenida de 3.9 haciendo $X = X_1 = X_2 = X_3$.

Existirá siempre al menos un punto triple real.

3.5. RANGO DE UNA INVOLUCIÓN

SEGÚN expusimos en 2.3 (pág. 32) el conjunto de tripuntos de una recta es isomorfo con los puntos del espacio geométrico tridimensional ordinario.

Una involución ternaria entre los tripuntos va a repercutir en una relación lineal entre los coeficientes de la ecuación 2.10 (pág. 32), lo que nos hace ver que la réplica en el espacio ordinario de los tripuntos de la citada involución va a ser un plano.

Dicho en otras palabras, las involuciones ternarias van a ser los planos en el espacio de tripuntos.

Supongamos ahora que definimos dos involuciones ternarias cada una de las cuales va a tener como réplica un plano en el espacio ordinario. Los elementos comunes a las dos involuciones primarias van a tener como réplica los puntos de la recta de intersección de los dos planos anteriores.

Podemos decir entonces que los elementos comunes a las dos involuciones ternarias también forman ternas simétricas de puntos, pero la dimensión del espacio que forman es una unidad inferior. Esto nos lleva a agregar un nuevo concepto dentro de las involuciones ternarias, el concepto de *rango* entendiendo como tal la dimensión del espacio de ternas que pertenecen a la involución.

Estamos edificando dentro del espacio de ternas toda una geometría isomorfa con la del espacio ordinario.

Evidentemente, el concepto es generalizable a involuciones de orden superior.

Al hablar de la circunferencia de Joachimstal (pág. 214) podemos ver una aplicación de lo expuesto aplicado a los puntos concíclicos de una cónica.

Capítulo 4

VARIEDADES UNICURSALES

4.1. INTRODUCCIÓN

DEFINIMOS como *variedad unicursal u homaloídica*, a todo conjunto de entes matemáticos (puntos, planos, curvas, transformaciones geométricas, etc) cuya definición puede hacerse depender de un parámetro de forma racional y biunívoca.

Este tipo de dependencia hace posible la definición de la razón doble entre cuatro entes de la variedad con independencia de la parametrización utilizada, pues la biunicidad de correspondencia con el parámetro exige que cualquier cambio que se produzca en éste haya de ser necesariamente bilineal, cayendo plenamente en lo que se entiende por transformación proyectiva.

Para poner de manifiesto la potencia metodológica que pretendemos aplicar, consideremos, por ejemplo, una curva de cierta complejidad, como puede ser la cuártica de Viviani obtenida como la intersección de una esfera de radio a con un cilindro de revolución de radio $a/2$ tangente a la misma.

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

Los puntos de esta curva constituyen una variedad unicursal, puesto que se pueden expresar en la forma

$$x = a \frac{(1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2}, \quad y = 2at \frac{(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}, \quad z = \frac{2at}{1 + t^2}$$

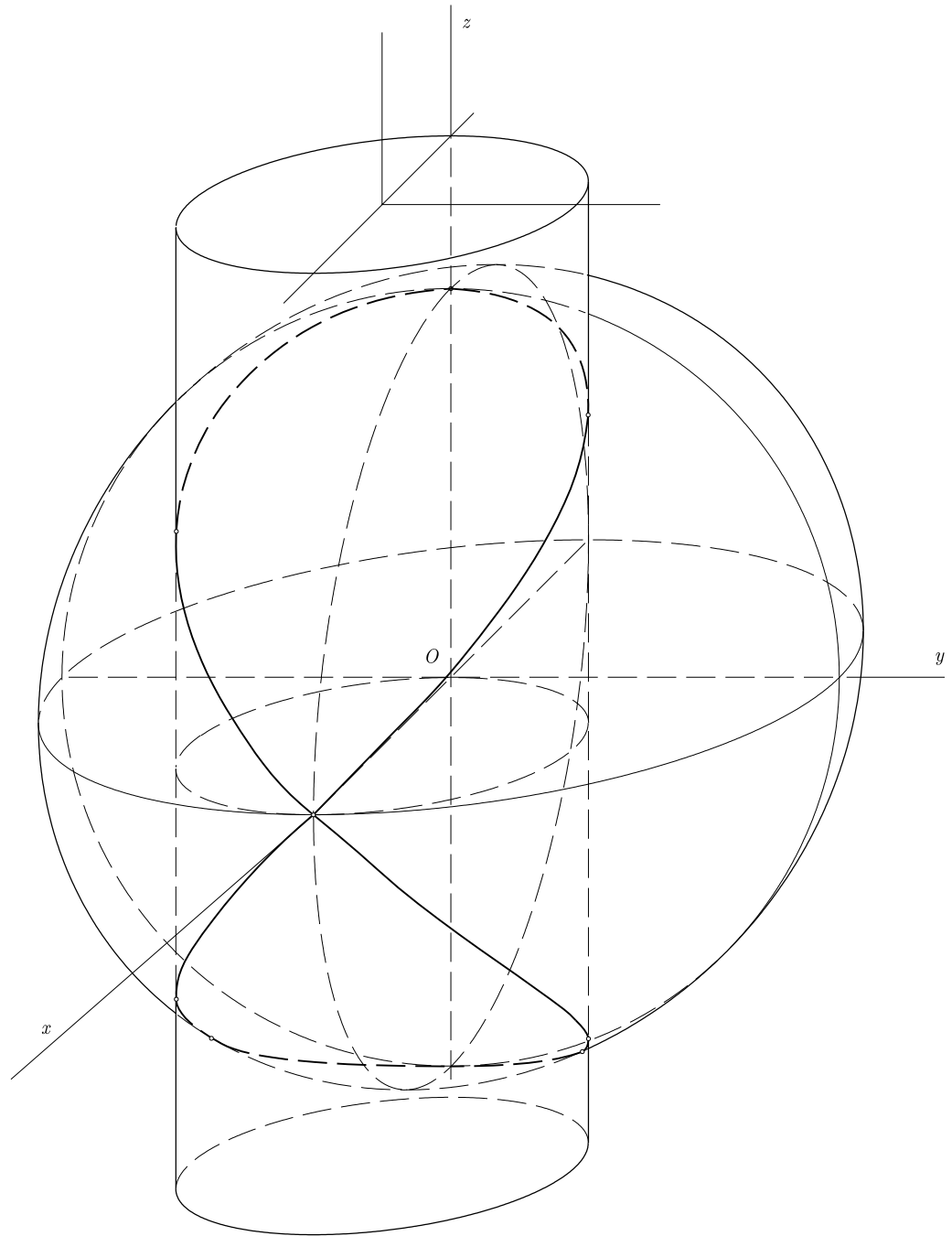


Fig. 4.1.-

Asimismo, cualquiera de los conjuntos de los elementos de su triedro intrínseco, planos osculadores o binormales, por ejemplo, constituyen a su vez variedad unicursal, puesto que su determinación depende racionalmente de un parámetro.

¿Imaginamos, por ejemplo, lo que supone poder definir la razón doble entre cuatro planos osculadores o entre cuatro binormales? Podemos hacer entrar de lleno a los entes que forman estas variedades dentro del mundo de relaciones propio de la Geometría Proyectiva, con la riqueza gráfica que ello puede traer consigo.

La mayor parte del contenido de la presente tesis pretende introducir en este campo alguna de las variedades que estamos utilizando a diario en el mundo del alto diseño en ingeniería.

Dentro de la diversidad que puede haber sobre la naturaleza gráfica de los entes que constituyen las variedades unicursales, comenzaremos con las curvas que constituyen el primer escalón de análisis y que, además, no por ser las más simples, no dejan de aportar resultados sorprendentes.

4.2. CONCEPTO DE CURVA UNICURSAL

COMENCEMOS recordando ciertos conceptos básicos de curvas algebraicas que, aunque elementales, no son demasiado conocidos.

Empecemos respondiendo a la siguiente pregunta: Si la definición de una recta necesita dos puntos de paso, una cónica necesita cinco, etc, ¿cuántos puntos de paso necesita una curva de grado n para estar definida?

Vamos a contar los coeficientes que tiene una curva de grado n . En general constará de:

- Un término independiente de (x, y) .
- Dos términos de primer grado, uno en x y otro en y .
- Tres términos de segundo grado, uno en x^2 , otro en xy y otro en y^2 .
- Cuatro términos de tercer grado.
-
- $n + 1$ términos de grado n .

El número total N de términos es

$$N = 1 + 2 + 3 + \dots + n + 1 = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

Como cada punto de paso supone una relación lineal entre los coeficientes, teniendo en cuenta que coeficientes independientes solamente hay $N - 1$, el número de puntos de paso

que definen una curva de grado n es

$$N - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

Así, una cúbica necesitará nueve puntos, una cuártica catorce, etc.

Según el teorema de Bezout dos curvas de grados m y n se cortan en mn puntos y si lo hicieran en más es que alguna de las curvas ha degenerado y tiene una parte común con la otra.

Así, por ejemplo, una cónica y una recta se cortan en dos puntos. Si en un determinado problema viésemos que se cortan en tres es que la cónica ha degenerado en dos rectas y la recta con la que queremos cortarla es una de ellas, en cuyo caso acaban teniendo infinitos puntos de corte.

Teorema 4.-I

Una curva de grado n no puede tener más de $(n-1)(n-2)/2$ puntos dobles sin que degenerare.

En efecto, supongamos que tuviese

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + k$$

puntos dobles. Tomando estos puntos de la curva y $n - k - 2$ puntos arbitrarios más de la misma se podría definir una curva de grado $n - 2$, pues

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + k + n - k - 2 = \frac{(n-2)(n+1)}{2}$$

son los puntos necesarios para definir una curva de grado $n - 2$.

Ahora bien, como los dobles cuentan dos veces a efectos de contar las intersecciones, el número de cortes de ambas curvas sería

$$2 \left[\frac{(n-2)(n+1)}{2} + k \right] + n - k - 2 = n(n-2) + k > n(n-2)$$

Como tendrían más cortes que el producto de sus grados, la curva de grado n habría que tener una parte común con la de grado $n - 2$ y, por tanto, habría degenerado.

Aprovechamos para recordar que el *género* de una curva algebraica es la diferencia entre el número máximo de puntos dobles que le permite su grado y los que realmente tiene.

Decimos que una curva algebraica de grado n es *unicursal* si su género es cero, es decir, si tiene el máximo número de puntos dobles que le permite su grado.

$$N_{\text{Dobles máx}} = (n-1)(n-2)/2$$

La propiedad fundamental de estas curvas es que las coordenadas de sus puntos se pueden expresar en función racional de un parámetro.

El tema de las curvas unicursales es tan importante, que merece la pena detenerse y analizar el problema con cierta minuciosidad.

Obtener una parametrización racional de una curva no es un problema obvio. Consideremos, en primer lugar, algunos casos elementales.

Pensemos en una cónica, que es de género cero. Vayamos a un punto de la misma y tomemos un haz de rectas de vértice en este punto. Analíticamente, dicho haz es una recta que lleva un parámetro en forma lineal. Si cortamos la cónica con las rectas del haz se nos presenta un sistema de ecuaciones en el que una es de segundo grado (la cónica) y no lleva ningún parámetro, mientras que otra es de primero (la recta) y lleva un parámetro en forma lineal.

Según el teorema de Bezout, el sistema de ecuaciones va a tener dos soluciones, es decir la ecuación resultante es de segundo grado y en sus coeficientes aparecerá un parámetro en forma no necesariamente lineal después de la eliminación de una de las incógnitas del sistema.

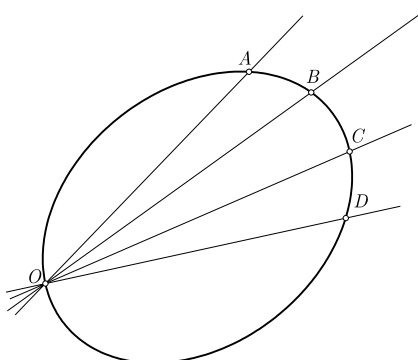


Fig. 4.2.-Una cónica siempre admite una parametrización racional cortándola con un haz de rectas con vértice en uno de sus puntos.

Ahora bien, de esa ecuación resultante conocemos una de sus raíces, que corresponderá al vértice del haz de rectas que hemos considerado. Separamos con la regla de Ruffini esa raíz conocida y nos quedará una ecuación lineal en la incógnita que, como consecuencia, se expresará en función racional de un parámetro.

Las ocasiones en las que esta racionalización es de utilidad son muy numerosas. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 4.-I

Hallar un cambio de variable que racionalice la integral

$$\int (\sqrt{x^2 + 2x} + x) dx$$

Sabemos que en los problemas de cambio de variable en la integración, lo que se pretende es que la nueva variable racionalice tanto el irracional presente como la propia variable x y no siempre es fácil encontrar un cambio que satisfaga estas condiciones.

Si consideramos la cónica $y = \sqrt{x^2 + 2x}$ bastaría con encontrar una parametrización racional de la misma. Como un punto de la cónica es el propio origen, cortemos con el haz de rectas que pasa por este punto y tenemos

$$\sqrt{x^2 + 2x} = tx \Rightarrow x^2 + 2x = t^2 x^2 \Rightarrow x = \frac{2}{t^2 - 1}$$

Este cambio convierte la integral en

$$\int \left[\frac{2t}{t^2 - 1} + \frac{2}{t^2 - 1} \right] \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt = \int \frac{-8t}{(t - 1)^3(t + 1)^2} dt$$

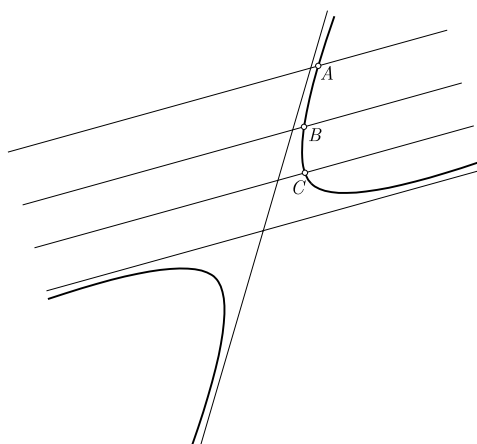


Fig. 4.3.-Si la cónica es hipérbola puede parametrizarse cortándola con un haz de rectas paralelas a una de sus asíntotas.

Alternativamente, aprovechando que la cónica es una hipérbola con una asíntota paralela a $y = x$, podemos cortar con el haz de rectas de vértice impropio $y = x + t$. Tendríamos entonces

$$\sqrt{x^2 + 2x} = x + t \Rightarrow x^2 + 2x = (x + t)^2 \Rightarrow x = \frac{t^2}{2(1 - t)}$$

y la integral se convierte en

$$\int \left[\frac{t^2}{1-t} + t \right] \frac{2t-t^2}{2(1-t)^2} dt = \int \frac{t^2(2-t)}{2(1-t)^3} dt$$

Vemos de esta forma que, en una cónica, el problema tiene muy fácil solución. Basta con cortar la cónica con un haz de rectas cuyo vértice pertenezca a la misma. En la ecuación resultante siempre podremos separar una raíz conocida mediante la regla de Ruffini.

Pensemos ahora lo que ocurriría en una cúbica. Intentemos repetir el proceso. Vayamos a un punto de ella y definamos un haz de rectas con vértice en él. Intentemos cortar la cúbica con la recta. Tendremos una ecuación resultante de tercer grado de la cual separamos una raíz conocida, la correspondiente al vértice del haz. Nos quedará una ecuación cuadrática en la incógnita que no nos permitirá expresarla como función racional del parámetro del haz.

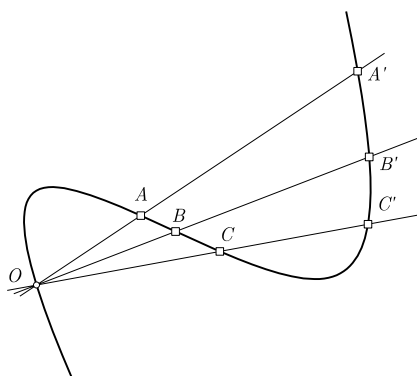


Fig.

4.4.-Si cortamos una cúbica general con un haz de rectas con vértice en uno de sus puntos, no conseguimos una parametrización racional, pues las rectas van cortando en parejas de puntos $A, A', B, B', C, C', \dots$

A la vista del fracaso, puede ocurrirnos cambiar de táctica. ¿Y si cortásemos la cúbica con un haz de cónicas? Muy bien, elijamos cuatro puntos conocidos de la cúbica y definamos un haz de cónicas que pase por estos puntos. Se nos presenta ahora un sistema que consta de una ecuación de tercer grado (la cúbica) que no contiene parámetro y una ecuación de segundo grado (la cónica) que lleva un parámetro en forma lineal.

Al eliminar una de las incógnitas vamos a tener una resultante de sexto grado con un parámetro en sus coeficientes que ya no irá en forma lineal. De esta ecuación de sexto grado conocemos cuatro raíces, las correspondientes a los puntos fundamentales del haz de cónicas. Si las separamos con la regla de Ruffini, todavía nos queda una ecuación cuadrática que no nos garantiza la racionalidad de sus raíces. No hemos conseguido nada.

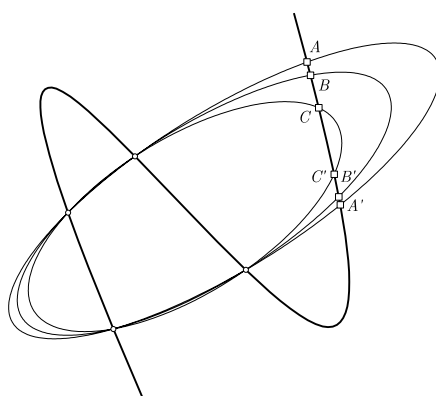


Fig. 4.5.-Si cortamos la cúbica con un haz de cónicas cuyos puntos fundamentales pertenecen a la misma, tampoco conseguimos una parametrización racional, pues seguimos teniendo parejas de puntos en la ecuación resultante.

Consideremos ahora lo que ocurre si la cúbica tiene un punto doble. Definamos un haz de rectas con vértice en el punto doble e intentemos cortar la cúbica con él. Como anteriormente, tendremos una resultante de tercer grado, pero ahora le separamos no una raíz, sino dos, porque el vértice del haz es raíz doble. Nos queda entonces una ecuación lineal en la incógnita que nos permite expresarla como función racional de un parámetro. La cúbica con punto doble sí ha resultado ser unicursal.

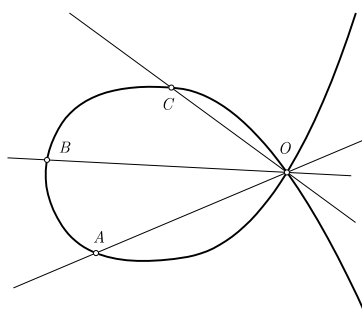


Fig. 4.6.-Sin embargo, una cúbica con punto doble admite una parametrización racional cuando se corta con rectas que pasan por este punto.

Tratemos ahora de generalizar el éxito conseguido. Vayamos a una curva de grado n que tiene $N = (n - 1)(n - 2)/2$ puntos dobles, que es lo máximo que le permite su grado. Vamos a definir un haz de curvas de grado $n - 2$ al que nos referiremos en lo sucesivo como *haz auxiliar*.

Como una curva de grado $n - 2$ necesita $(n - 2)(n + 1)/2$ puntos para su definición, si

lo que queremos es determinar un haz de grado $n - 2$, hemos de fijar en él un punto menos, es decir, $n_d = (n - 2)(n + 1)/2 - 1$. Ahora bien, estos n_d puntos los conseguimos con los N dobles más

$$n_d - N = \frac{(n - 2)(n + 1)}{2} - 1 - \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} = n - 3$$

puntos adicionales, que también tomaremos sobre la curva para poderlos separar con la regla de Ruffini.

Supongamos que hemos definido este haz auxiliar de curvas de grado $n - 2$. Intentemos cortar la curva de grado n con él. Nos vamos a encontrar con una ecuación resultante de grado $n(n - 2)$ de la cual conocemos

$$2 \times \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} + n - 3 = n(n - 2) - 1$$

donde hemos contado como dobles las raíces correspondientes a los puntos dobles de la curva.

Separadas estas raíces, tendremos siempre una ecuación lineal en la incógnita que aparecerá expresada, por tanto, como función racional del parámetro presente en el haz. Estamos ante una curva unicursal.

La forma expuesta de parametrizar una unicursal, aunque metodológicamente segura, no es única. Puede haber variantes.

Consideremos de nuevo la cúbica con punto doble. Definamos un haz de cónicas cuyos puntos fundamentales estén sobre la cúbica y que uno de ellos sea el punto doble. Al tratar de hallar la intersección de las cónicas del haz con la cúbica vamos a tener una ecuación resultante de sexto grado de la cual conoceremos cinco raíces, una por cada punto fundamental más el punto doble que contará dos veces. Separadas las raíces conocidas, nos quedará una ecuación lineal que nos expresará las coordenadas de los puntos de la cúbica como función racional del parámetro del haz.

Otras variantes para tomar el haz pueden ser:

- Que solamente tenga tres puntos fundamentales sobre la cúbica, siendo uno de ellos el punto doble. El cuarto punto fundamental se sustituye por la condición de tangencia en el punto doble a una de las ramas de la cúbica que pasa por el mismo.
- Que las cónicas del haz sean bitangentes a la cúbica en dos de sus puntos, uno de ellos el doble, efectuándose la tangencia en una de las ramas que pasan por éste.
- Que las cónicas del haz sean tangentes a la cúbica en uno de sus puntos y tengan dos puntos fundamentales sobre la cúbica, uno de ellos el doble.
- Que las cónicas del haz sean osculadoras a la cúbica en una de las ramas del punto doble y que pasen, además, por otro punto de la cúbica.

El ejemplo 4.-II tendremos ocasión de ver más de una forma de parametrización.

4.3. ASPECTOS PROYECTIVOS

LA condición de unicursal confiere a las curvas que la poseen unas grandes ventajas. Nos estamos refiriendo a que tales curvas pueden entrar de lleno dentro de las metodologías proyectivas, ya que se puede definir el concepto de razón doble entre cuatro de sus puntos.

En efecto, si son (a, b, c, d) los valores que el parámetro toma en cuatro de sus puntos (A, B, C, D) , se puede definir

$$(ABCD) = \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b}$$

y a partir de este valor tenemos entrada en lo que podríamos llamar el mundo mágico de las relaciones proyectivas, como tendremos ocasión de ver.

Cabría preguntarnos qué ocurriría si hiciésemos una reparametrización de la curva. La razón doble debe ser algo intrínseco a los cuatro puntos y no a los valores del parámetro en ellos. La respuesta es fácil. La biunicidad *punto* \Leftrightarrow *parámetro* que la condición de unicursal lleva consigo exige que exista una relación bilineal entre los parámetros correspondientes a dos parametrizaciones diferentes y sabemos que tal relación conserva la razón doble.

El haz de curvas auxiliares también tiene naturaleza de espacio proyectivo. Los elementos que lo integran, lo que en la teoría abstracta denominamos *puntos*, son las curvas que lo forman. Las dos coordenadas homogéneas que pueden intervenir en el haz, y cuyo cociente es el parámetro con el que se expresa la unicursal, son las coordenadas del *punto* en el citado espacio proyectivo. La razón doble de los cuatro puntos de la unicursal va a pasar a ser la razón doble que va a existir entre las cuatro curvas auxiliares que pasan por tales puntos. Las curvas auxiliares vienen así a ser una generalización del concepto de la operación de *proyectar* utilizada en la Geometría Proyectiva convencional.

Habría que desarrollar herramientas que terminen localizando dicha razón doble en los espacios elementales conocidos de fácil tratamiento gráfico. Nos estamos refiriendo a localizar dicha razón en una serie rectilínea de puntos o en un haz de rectas.

A estos métodos que permiten localizar la razón doble de cuatro puntos de una curva unicursal en la de cuatro puntos de una serie rectilínea o los cuatro rayos de un haz le llamaremos *métodos de rescate o de apeo* por la misión que tienen de rescatar una razón doble de cuatro entes matemáticos no convencionales y llevarla a espacios en los que dicha razón tiene una interpretación geométrica sencilla.

Para ello nos vamos a limitar, en un principio, a tratar cúbicas y cuárticas en las que los haces auxiliares son de rectas o de cónicas. Como los haces de rectas son bastante conocidos,

dedicaremos una atención especial al estudio de dónde localizar la razón doble que poseen cuatro cónicas de un haz.

4.4. HACES DE CÓNICAS

EN el manejo gráfico de curvas unicursales van a jugar un papel especial los haces de rectas y los haces de cónicas. Los primeros han sido ampliamente estudiados dentro de toda la Geometría convencional. Los segundos, aunque sí son conocidos, presentan unos aspectos ignorados que queremos resaltar.

Un haz de cónicas

$$f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 0$$

tiene estructura de espacio proyectivo en el que los entes que lo constituyen son las cónicas del propio haz. Estos entes son lo que llamamos *puntos* dentro de la teoría abstracta. Los haces de cónicas son las rectas del espacio proyectivo de dimensión cinco constituido por todas las cónicas del plano.

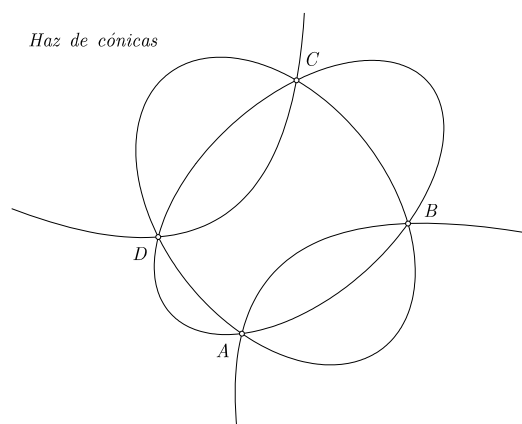


Fig. 4.7.- Los haces de cónicas son rectas generalizadas cuyos puntos son las cónicas que constituyen el haz.

La coordenada que fija la situación de un *punto* (cónica) sobre esta *recta* (haz) es el parámetro λ . El punto del infinito de la *recta* (haz) es la cónica $\varphi(x, y) = 0$. Para evitar tener que dar valores infinitos al parámetro, es común utilizar para los haces la pareja de parámetros homogéneos (α, β) , expresando el haz en la forma

$$\alpha f(x, y) + \beta\varphi(x, y) = 0$$

con lo que una cónica viene dada por cualquier pareja de parámetros (α, β) proporcionales a sí mismos. Es lo que establece la teoría abstracta de espacios proyectivos.

Mientras no sea necesario, solamente utilizaremos la coordenada absoluta λ que nos proporcionará un mayor sentido físico del problema.

Se nos ocurren dos preguntas de entrada:

- Si un haz de cónicas es una recta del espacio proyectivo de las cónicas del plano y sus puntos son las cónicas del haz ¿Cómo se define la razón doble de cuatro cónicas del haz?
- ¿Existe alguna figura convencional (serie rectilínea o haz de rectas) donde se puedan localizar cuatro puntos o cuatro rectas cuya razón doble sea la de las cuatro cónicas?

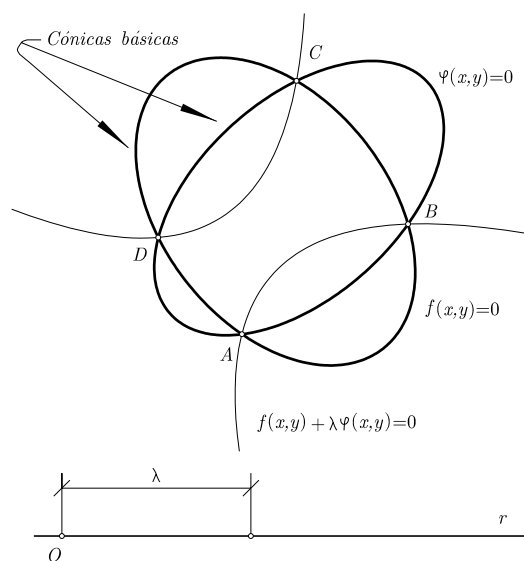


Fig. 4.8.- Existe biyección entre las cónicas de un haz y los puntos de una recta.

La razón doble de las cuatro cónicas correspondientes a los valores $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ del parámetro se define a través de dichos valores en la forma

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

Es como si imaginásemos una recta convencional r y a cada cónica asociáramos un punto sobre esta recta cuya abscisa respecto a un origen O elegido sobre ella fuese precisamente el valor de λ de la cónica considerada.

En cuanto a la localización geométrica de cuatro puntos o cuatro rectas que tuviesen la misma razón doble de las cuatro cónicas, podemos conseguirlos de muchas formas. Veamos algunas de ellas.

Consideremos una recta cualquiera k que pase por uno de los puntos fundamentales del haz, por ejemplo, el punto A . Las cuatro cónicas cuya razón doble buscamos cortan a la

recta k en cuatro puntos (además del punto A). La razón doble de las cuatro cónicas es la de estos cuatro puntos.

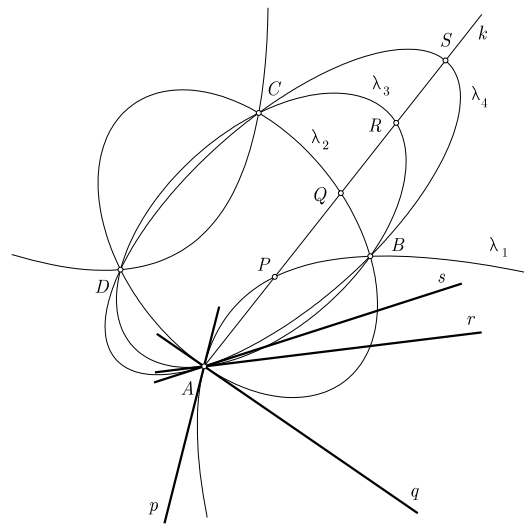


Fig. 4.9.- La razón doble de las cuatro cónicas correspondientes a los valores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ es igual a la de los cuatro puntos $(PQRS)$ o a la de las cuatro rectas $(pqr s)$.

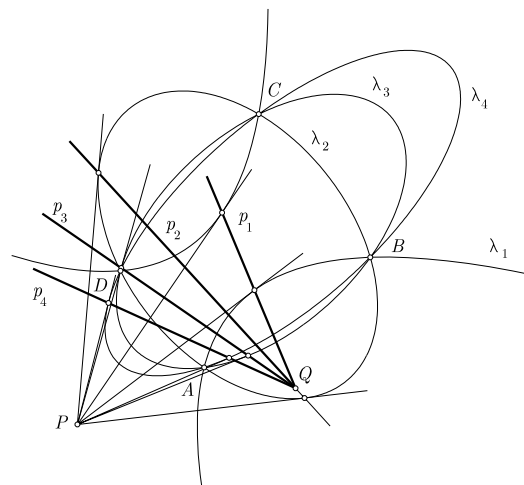


Fig. 4.10.- La razón doble de las cuatro cónicas es igual a la de las cuatro polares $(p_1p_2p_3p_4)$ del punto P respecto a las cónicas consideradas.

En efecto, imaginemos que tomamos la recta k como el eje Ax de un sistema cartesiano con origen en A . Los puntos de intersección de las cónicas del haz con esta recta vendrán dados por una ecuación del tipo

$$(a\lambda + b)x + (c\lambda + d) = 0 \implies x = -\frac{c\lambda + d}{a\lambda + b}$$

donde (a, b, c, d) son constantes. Lo anterior demuestra la existencia de proyectividad entre estos puntos de corte y los de una recta cuyas abscisas viniesen dadas por los valores de λ .

Vayamos ahora a uno de los puntos fundamentales, el A por ejemplo. Tracemos en él las tangentes a las cuatro cónicas cuya razón doble queremos localizar. Dicha razón doble es la que forman las cuatro tangentes.

En efecto, tratemos de hallar la pendiente m de una de estas tangentes. Para ello, derivemos implícitamente en la ecuación del haz.

$$(f'_x + y'f'_y) + \lambda(\varphi'_x + y'\varphi'_y) = 0 \implies m = y' = -\frac{f'_x + \lambda\varphi'_x}{f'_y + \lambda\varphi'_y}$$

donde las derivadas parciales $f'_x, f'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$ tendrán los valores numéricos correspondientes al punto A .

El resultado anterior demuestra la existencia de proyectividad entre las tangentes y los puntos de una recta cuyas abscisas viniesen dadas por λ .

Las polares de un punto fijo P del plano respecto a las distintas cónicas de un haz pasan por un punto Q al ir variando la cónica. De esta forma, a cada cónica se asocia una recta que pasa por Q . La razón doble de las cónicas es la de las cuatro polares asociadas.

En efecto, imaginemos que adoptamos el punto P como origen de coordenadas $P(0, 0, 1)$. Su polar respecto a una cónica cualquiera del haz sería simplemente la derivada parcial respecto a la coordenada homogénea, es decir, $f'_t = 0$. Ahora bien, esta recta llevará en su ecuación el parámetro λ del haz en forma lineal, luego su pendiente será de la forma

$$\frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$$

que muestra de nuevo la proyectividad existente entre las rectas del haz y los puntos de abscisa λ tomados sobre una recta.

Citemos, finalmente, un nuevo lugar donde también se puede localizar fácilmente la razón doble de las cónicas. El lugar geométrico de los polos de una recta, respecto a las distintas cónicas de un haz, es una cónica; pero si la recta es uno de los lados del cuadrilátero fundamental, dicho lugar degenera en dos rectas, una que es el propio lado del cuadrilátero y otra más. Pues bien, en esta segunda recta, las cuatro cónicas darían lugar a cuatro polos alineados cuya razón doble es la de las cuatro cónicas.

Un caso particular interesante del anterior se presenta cuando el haz de cónicas es un haz de circunferencias. En este caso, uno de los lados del cuadrilátero fundamental es la recta impropia. La razón doble de las cuatro circunferencias sería la razón doble de sus centros.

La propiedad de que los polos de una recta fija r respecto a las cónicas de un haz describen una cónica constituye el punto de partida de una elegante teoría muy rica en aplicaciones. Su justificación puede hacerse de múltiples maneras. Tal vez la de mayor elegancia sea la expuesta en la teoría de las características de Chasles aplicada a los haces de cónicas.

Invitamos a conocerla al lector interesado. No obstante, con carácter de urgencia, podemos dar una razón analítica que no exige mucho esfuerzo de comprensión.

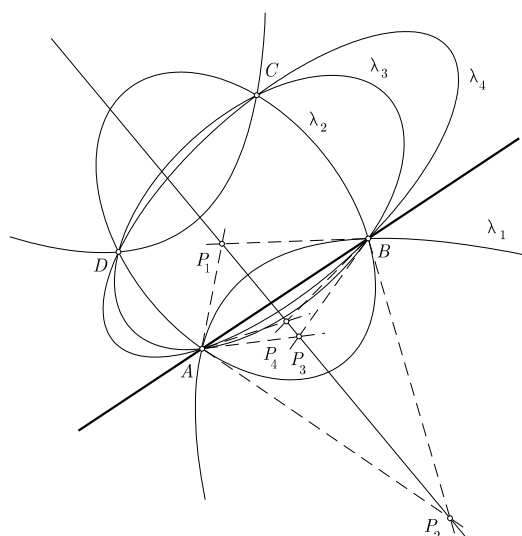


Fig. 4.11.- La razón doble de las cuatro cónicas correspondientes a los valores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ es igual a la de los cuatro puntos $(P_1P_2P_3P_4)$ que son los polos de la recta AB respecto a dichas cónicas.

Sea

$$ux + vy + wt = 0$$

la ecuación homogénea de la recta fija r considerada y supongamos que el punto $P(x_0, y_0, t_0)$ es su polo; tratemos de encontrarlo.

La polar de este punto respecto a una cónica del haz sería

$$x(f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0}) + y(f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0}) + t(f'_{t_0} + \lambda\varphi'_{t_0}) = 0$$

Como esta recta ha de coincidir con la recta dada r , se ha de verificar que

$$\frac{f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0}}{u} = \frac{f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0}}{v} = \frac{f'_{t_0} + \lambda\varphi'_{t_0}}{w}$$

La eliminación de λ entre ambas ecuaciones nos conduce a

$$\begin{vmatrix} f'_{x_0} & \varphi'_{x_0} & u \\ f'_{y_0} & \varphi'_{y_0} & v \\ f'_{t_0} & \varphi'_{t_0} & w \end{vmatrix} = 0$$

Como (u, v, w) se suponen constantes dadas y las derivadas f', φ' son de primer grado en (x_0, y_0, t_0) , la ecuación anterior es de segundo grado en (x_0, y_0, t_0) , lo que demuestra que $P(x_0, y_0, t_0)$ describe una cónica.

Supongamos ahora que la cónica $f(x, y) = 0$ se descompone en el producto de dos rectas $QR = 0$ y que P sea un punto situado en una de ellas, la $Q = 0$ por ejemplo. El determinante anterior se convierte en

$$\begin{vmatrix} R'_{x_0} Q_0 + R_0 Q'_{x_0} & \varphi'_{x_0} & u \\ R'_{y_0} Q_0 + R_0 Q'_{y_0} & \varphi'_{y_0} & v \\ R'_{t_0} Q_0 + R_0 Q'_{t_0} & \varphi'_{t_0} & w \end{vmatrix} = 0$$

Ahora bien, $Q_0 = 0$ por pertenecer P a la recta $Q = 0$. El lugar anterior se reduce a

$$R_0 \begin{vmatrix} Q'_{x_0} & \varphi'_{x_0} & u \\ Q'_{y_0} & \varphi'_{y_0} & v \\ Q'_{t_0} & \varphi'_{t_0} & w \end{vmatrix} = 0$$

donde, tanto R_0 como los valores de Q' son constantes, el primero por ser el polinomio R particularizado para un punto que no lo anula y los segundos por ser derivadas parciales de polinomios de primer grado. En estas condiciones, el lugar geométrico viene expresado por una forma lineal en (x_0, y_0, t_0) y será, en consecuencia, una recta.

A continuación presentamos un ejemplo de cierta dificultad con una cuártica que tiene tres puntos dobles propios.

Ejercicio 4.-II

Representar la curva

$$y^2 = 1 \pm x\sqrt{2x+3}$$

Comprobar que los puntos $Q(-1, 0)$, $R(0, 1)$ y $S(0, -1)$ son puntos dobles de la misma obteniendo con ello naturaleza de unicursal.

Hacer una parametrización de la misma cortándola con un haz de cónicas cuyos puntos fundamentales sean Q , R , S y el punto del infinito de Ox .

Hacer una segunda parametrización definiendo un haz auxiliar de cónicas que pase por los puntos Q , R y S y que sea tangente en Q a una de las ramas de la curva dada.

Comprobar que entre ambas parametrizaciones existe una relación proyectiva.

Empezaremos representando la curva

$$y_1 = x^2(2x+3)$$

La función anterior se anula en $x = -3/2$ (corte simple) y en $x = 0$ (tangente horizontal). Además, aparecen ramas parabólicas cuando $x \rightarrow \pm\infty$. En $x = -1$ la curva presenta un máximo relativo; este hecho se confirma al anular la derivada primera de y_1 :

$$y'_1 = 6x^2 + 6x = 6x(x+1) = 0$$

Con estos datos es fácil trazar la curva y_1 .

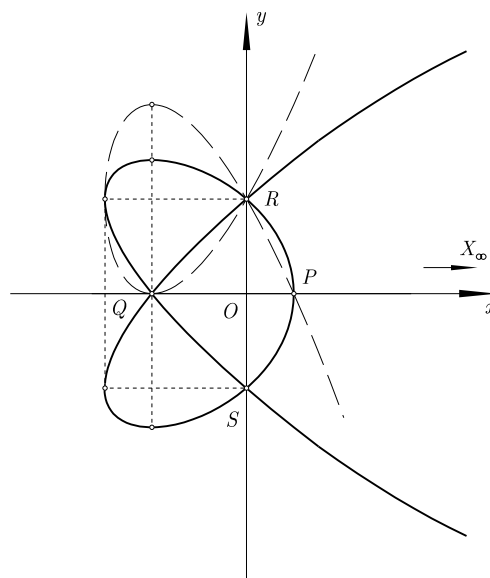
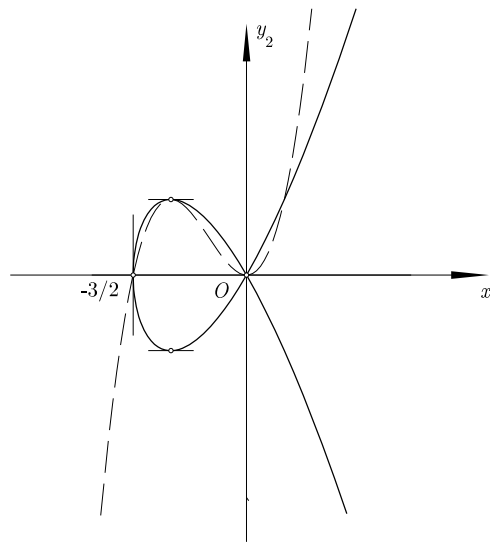
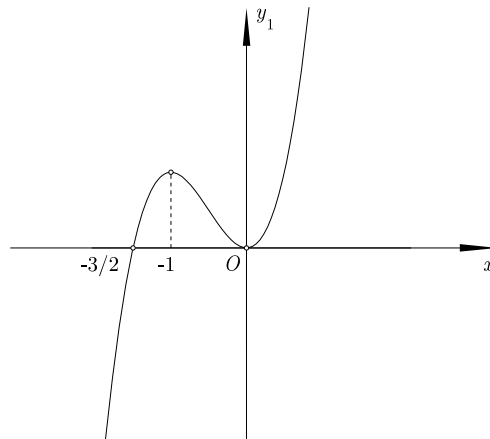


Fig. 4.12.-

A continuación, representaremos

$$y_2 = \pm \sqrt{x^2(2x + 3)}$$

El radicando es negativo en el intervalo $(-\infty, -3/2)$, luego y_2 no tomará valores en dicho intervalo. En $x = -3/2$ la tangente es vertical. En $x = 0$ tendremos un punto doble. Se mantendrá la rama parabólica en sentido Oy puesto que $k/n = 3/2 > 1$.

$$y_3 = 1 \pm \sqrt{x^2(2x + 3)}$$

La curva y_3 es la resultante al aplicar una traslación de valor unidad en la dirección del eje Oy a la curva y_2 .

Finalmente

$$y = \pm \sqrt{y_3} = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{x^2(2x + 3)}}$$

La rama parabólica en sentido Oy se convierte en rama parabólica en sentido Ox , puesto que ahora $k/n = (3/2)/2 = 3/4 < 1$. En el punto P la tangente será vertical (la abscisa de P será la solución de $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ distinta de $x = -1$ (doble); es decir $x_P = 1/2$). El trazado de esta última función no ofrece mayores dificultades.

La curva es de cuarto grado y posee tres puntos dobles (el máximo número que puede contener sin que degenera); ello nos permite asegurar que la curva estudiada

$$(y^2 - 1)^2 - x^2(2x + 3) = 0$$

es UNICURSAL.

En teoría, la búsqueda de una parametrización para la curva estudiada no resulta excesivamente compleja, pero, en la práctica, la resolución no puede hacerse de forma manual debido al aparatoso cálculo que conlleva.

Para realizar los cálculos engorrosos, se puede utilizar una de las numerosas herramientas de cálculo simbólico que existen en la actualidad (MAPLE, MATHEMATICA, MATHCAD, ...) y, de esta manera, el problema se resuelve sin mayores dificultades.

El procedimiento a seguir para la parametrización propuesta será el siguiente:

- Definamos un haz de cónicas que pase por los tres puntos dobles de la cuártica considerada y por el punto impropio X_∞ de la misma. La expresión analítica del haz, considerando como cónicas degeneradas las parejas de rectas $RX_\infty - QS$ y $SX_\infty - RQ$, será

$$(y - x - 1)(y + 1) + \lambda(y + x + 1)(y - 1) = 0$$

$$(1 + \lambda)y^2 + (\lambda - 1)xy - x(1 + \lambda) - (1 + \lambda) = 0$$

La cuártica y el haz recién definido poseen, según el teorema de Bezout, $4 \times 2 = 8$ puntos comunes. Al plantear el sistema algebraico formado por el haz y la curva

inicial, conocemos a priori siete de esas raíces (dos por cada punto doble Q, R, S y, el séptimo, correspondiente al punto impropio X_∞). Parametrizar la curva va a consistir en resolver el sistema de ecuaciones formado por la propia curva y el haz anterior, separando las raíces conocidas para obtener la octava raíz en función racional del parámetro λ del haz.

- La resolución del sistema formado por la curva y el haz se hará siguiendo el método convencional de eliminar una variable entre ambas ecuaciones. Para ello vamos a emplear el método de eliminación de Euler-Sylvester que, sin un medio de cálculo simbólico, sería impracticable.

Siguiendo este método de eliminación, ordenaremos ambas ecuaciones en la variable y para eliminar dicha variable. La ecuación de la curva adopta la forma

$$(y^2 - 1)^2 = x^2(2x + 3)$$

$$y^4 - 2y^2 + 1 - 2x^3 - 3x^2 = 0$$

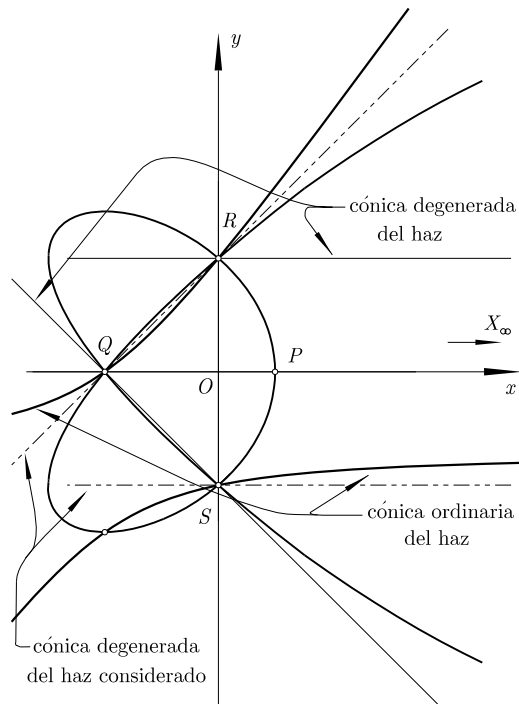


Fig. 4.13.-

Haciendo la misma ordenación en la ecuación del haz de cónicas, se tiene

$$(1 + \lambda)y^2 + (\lambda - 1)xy - (x + 1)(1 + \lambda) = 0$$

La eliminante de Sylvester será el determinante de la siguiente matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 - 2x^3 - 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 - 2x^3 - 3x^2 \\ 1 + \lambda & (\lambda - 1)x & -(x + 1)(1 + \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda & (\lambda - 1)x & -(x + 1)(1 + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda & (\lambda - 1)x & -(x + 1)(1 + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda & (\lambda - 1)x & -(x + 1)(1 + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

El determinante anterior, factorizado, resulta ser:

$$-x^4(1 + x)^2[3 + 2x - 4\lambda(3 + 2x) - 4\lambda^3(3 + 2x) + \lambda^4(3 + 2x) + 2\lambda^2(-23 + 6x)] = 0$$

Obsérvese que la expresión obtenida es de séptimo grado, debido a que una de las raíces que intervienen es impropia.

El último factor de la expresión previa nos proporciona una de las ecuaciones paramétricas buscada:

$$x = \frac{-3\lambda^4 + 12\lambda^3 + 46\lambda^2 + 12\lambda - 3}{2\lambda^4 - 8\lambda^3 + 12\lambda^2 - 8\lambda + 2}$$

Para obtener la ecuación paramétrica en la variable y , el camino a recorrer es idéntico, *mutatis mutandis*.

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & y^4 - 2y^2 + 1 \\ (\lambda - 1)y - (1 + \lambda) & (y^2 - 1)(1 + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)y - (1 + \lambda) & (y^2 - 1)(1 + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)y - (1 + \lambda) & (y^2 - 1)(1 + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

La expresión anterior es la eliminante de Sylvester que se obtendría a partir de las ecuaciones de la curva y el haz de cónicas ordenadas, ahora, respecto a la variable x :

$$\begin{aligned} -2x^3 - 3x^2 + y^4 - 2y^2 + 1 &= 0 \\ [(\lambda - 1)y - (\lambda + 1)]x + (1 + \lambda)(y^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

El resultado del determinante es:

$$2y^2(-1 + y^2)^2[-1 - 3\lambda^2(-3 + y) + \lambda^3(-1 + y) - y + 3\lambda(3 + y)] = 0$$

Despejando la variable y en el último paréntesis, se obtiene

$$y = \frac{\lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 1}{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1}$$

La parametrización obtenida no es única, sino que depende del haz que se haya definido. Existen infinitas posibilidades para elegir el haz; sólo se requiere que los tres puntos dobles intervengan en su definición y que el cuarto punto también pertenezca a la curva. Pero se puede sustituir este último punto por la tangente en uno de los anteriores, con la condición de que dicha tangente lo sea también a la cuártica analizada. Vamos a mostrar la parametrización que se obtendría eligiendo el haz de cónicas que pasa por los puntos dobles Q , R , y S y tiene, en el punto Q , la tangente de pendiente positiva que posee la cuártica en dicho punto. En primer lugar, debemos calcular la pendiente de la tangente en Q :

$$y = \pm \sqrt{1 - \sqrt{2x^3 + 3x^2}}$$

$$y' = \pm \frac{\frac{6x^2 + 6x}{2\sqrt{2x^3 + 3x^2}}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2x^3 + 3x^2}}}$$

$$y' = \pm \frac{3x(x+1)\sqrt{1 - \sqrt{2x^3 + 3x^2}}}{2\sqrt{2x^3 + 3x^2}\sqrt{1 + \sqrt{2x^3 + 3x^2}}\sqrt{1 - \sqrt{2x^3 + 3x^2}}}$$

$$y' = \pm \frac{3x(x+1)\sqrt{1 + \sqrt{2x^3 + 3x^2}}}{2x\sqrt{2x+3}\sqrt{(x+1)^2 \cdot (-2x+1)}}$$

$$y' = \pm \frac{3\sqrt{1 + \sqrt{2x^3 + 3x^2}}}{2\sqrt{2x+3}\sqrt{-2x+1}}$$

$$y'|_{x=-1} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

La tangente elegida en el punto Q tiene como ecuación:

$$t_Q : y = \sqrt{\frac{3}{2}}(x+1)$$

Las parejas de rectas t_{Q-p} y $m-n$ son dos cónicas degeneradas del haz. Analíticamente, podemos expresar la ecuación del haz mediante la siguiente combinación lineal:

$$[y - \sqrt{\frac{3}{2}}(x+1)]x + \mu(y - x - 1)(y + x + 1) = 0$$

En este caso, el método de eliminación de Euler-Sylvester nos conduce a los siguientes determinantes:

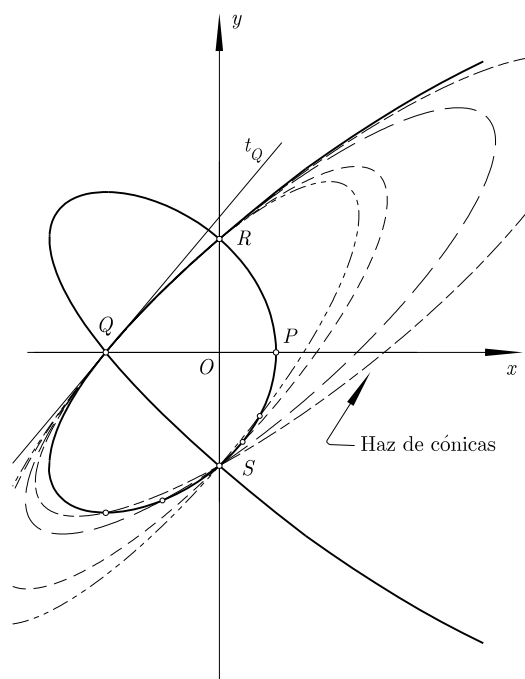


Fig. 4.14.-

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 - 2x^3 - 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 - 2x^3 - 3x^2 \\ \mu & x & A(\mu, x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & x & A(\mu, x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & x & A(\mu, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & x & A(\mu, x) \end{vmatrix} = 0$$

donde $A(\mu, x) = -(x + 1)\left[\sqrt{\frac{3}{2}}x - \mu(x + 1)\right]$.

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & y^4 - 2y^2 + 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & y^4 - 2y^2 + 1 \\ -(\sqrt{\frac{3}{2}} + \mu) & B(\mu, y) & C(\mu, y) & 0 & 0 \\ 0 & -(\sqrt{\frac{3}{2}} + \mu) & B(\mu, y) & C(\mu, y) & 0 \\ 0 & 0 & -(\sqrt{\frac{3}{2}} + \mu) & B(\mu, y) & C(\mu, y) \end{vmatrix} = 0$$

donde $B(\mu, y) = [y - \sqrt{\frac{3}{2}} - 2\mu]$ y $C(\mu, y) = \mu(y^2 - 1)$.

El primer determinante, factorizado, resulta ser:

$$\frac{1}{4}x^4(1+x)^3[1+9x+4\mu^4(1+x)+8\sqrt{6}\mu^3(2+x)+4\sqrt{6}\mu(3+2x)+\mu^2(52+36x)]=0$$

Despejando la variable x en el último factor, se obtiene una de las ecuaciones paramétricas buscada:

$$x = \frac{-(1+8\sqrt{6}\mu+52\mu^2+16\sqrt{6}\mu^3+4\mu^4)}{9+12\sqrt{6}\mu+36\mu^2+8\sqrt{6}\mu^3+4\mu^4}$$

El segundo determinante, factorizado, resulta ser:

$$\frac{1}{4}y^3(-1+y^2)^2[-4\sqrt{6}+9y+4\mu^4y+\mu^2(-24\sqrt{6}+36y)+8\mu^3(-3+\sqrt{6}y)+4\mu(-11+3\sqrt{6}y)]=0$$

y despejando la variable y en el último factor de la expresión anterior, se obtiene la segunda ecuación paramétrica:

$$y = \frac{4\sqrt{6}+44\mu+24\sqrt{6}\mu^2+24\mu^3}{9+12\sqrt{6}\mu+36\mu^2+8\sqrt{6}\mu^3+4\mu^4}$$

Hagamos un paréntesis para resumir y meditar sobre todas las operaciones que hemos realizado. Hemos calculado dos representaciones paramétricas distintas de la cuártica unicursal del enunciado. Ello significa que cada punto P de la curva puede obtenerse de forma unívoca dando el valor correspondiente λ en la primera parametrización o el valor correspondiente μ en la segunda. Nos surge la primera cuestión: ¿Existe algún tipo de relación entre ambos parámetros? Sí, entre λ y μ debe existir una correspondencia algebraica y biyectiva, luego entre ambos parámetros debe existir una relación proyectiva de la forma

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0$$

La segunda pregunta es inmediata: ¿Cómo podemos calcular los valores de las constantes A , B , C y D para establecer dicha correspondencia? La forma más cómoda de realizar el cálculo consiste en seleccionar tres puntos de la curva y determinar las parejas de valores (λ, μ) que les corresponden y resolver el sistema homogéneo que resulta.

Elijamos, en primer lugar, el punto $P(1/2, 0)$. Sustituyendo sus coordenadas en la ecuación del primer haz, se obtiene $\lambda = -1$. Haciendo lo propio en el segundo haz, se obtiene $\mu = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Tomemos ahora el punto impropio del eje de abscisas, que en coordenadas homogéneas será el punto $X_\infty(1, 0, 0)$. Para conseguir este punto, en el primer haz debemos tener un valor de λ que nos produzca una parábola. En la ecuación del haz es fácil observar que ésta se obtiene para $\lambda = 1$

$$\text{Si } \lambda = 1 \implies y^2 - x - 1 = 0 \quad \text{parábola del haz}$$

El segundo haz de cónicas, escrito en homogéneas, es

$$\left. \begin{aligned} [y - \sqrt{\frac{3}{2}}(x + t)]x + \mu(y - x - t)(y + x + t) = 0 \\ X_\infty = (1, 0, 0) \end{aligned} \right\} \mu = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

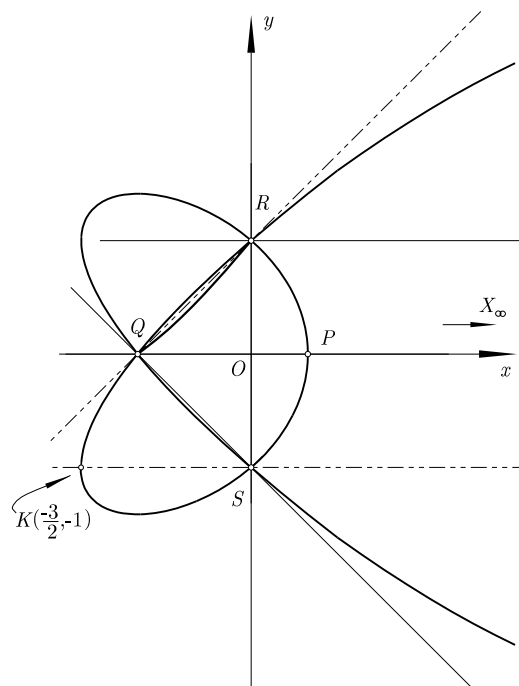


Fig. 4.15.-

Para obtener la última pareja de valores, vamos a considerar que $\lambda = 0$. Para este valor de λ , el punto de paso es el punto $K(-3/2, -1)$ (K es el segundo punto de corte de la recta $y = -1$ con la cuártica, dado que para $\lambda = 0$ se obtiene la cónica degenerada formada por las rectas QR y SX_∞ .) Entrando con las coordenadas de $K(-3/2, -1)$ en el segundo haz, el parámetro μ vale

$$\mu = \sqrt{\frac{3}{2}} - 2$$

Con estas tres parejas de valores (λ, μ) ya podemos calcular la relación bilineal que

existe entre ambos parámetros, que resultará al resolver el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & -1 & -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & 1 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} - 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La relación proyectiva entre λ y μ será la siguiente:

$$(12 - 5\sqrt{6})\lambda\mu + (4\sqrt{6} - 9)\lambda + \sqrt{6}\mu - 3 + 2\sqrt{6} = 0$$

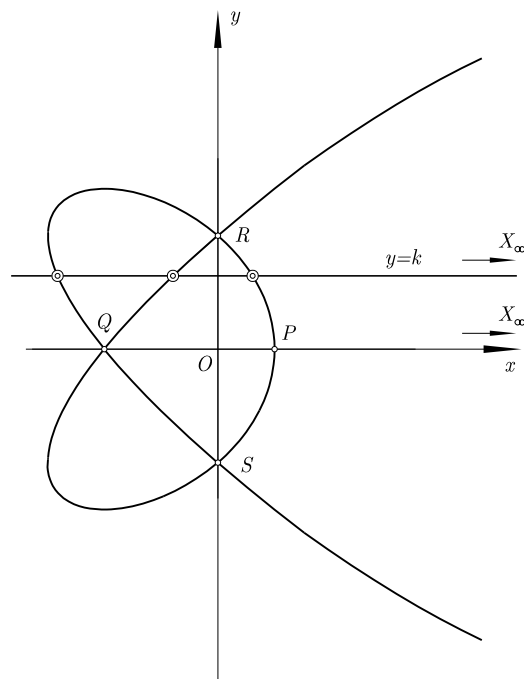


Fig. 4.16.-

Si despejáramos en la expresión anterior λ en función de μ e introdujéramos este valor en la primera parametrización de y , esto es, en $y = f(\lambda)/\varphi(\lambda)$, tendríamos que obtener la segunda parametrización de y , $y = g(\mu)/\xi(\mu)$, pero ocurre un hecho inquietante: el denominador de esta última expresión lleva la variable μ elevada a cuarto grado mientras que en la primera expresión sólo conseguimos llegar al tercer grado. ¿Qué es lo que ocurre?

Analicemos la situación con cuidado. Si tomamos una recta $y = k$, cortaremos a la curva en cuatro puntos: tres puntos propios más el impropio del eje de abscisas.

Si $k = f(\lambda)/\varphi(\lambda) \rightarrow k\varphi(\lambda) - f(\lambda) = 0$, este polinomio debe ser de tercer grado porque esperamos tres raíces propias. Pero en la segunda parametrización, ocurre que $k = g(\mu)/\xi(\mu) \rightarrow k\xi(\mu) - g(\mu) = 0$ y este polinomio, al ser de cuarto grado, nos hace sospechar que las funciones $\xi(\mu)$ y $g(\mu)$ deben contener ambas el factor $(\mu - \mu_o)$, siendo μ_o el parámetro que produce el punto X_∞ , es decir $\mu_o = -\sqrt{3/2} = -\sqrt{6}/2$. Comprobar la sospecha anterior es bien fácil; sólo tenemos que descomponer por Ruffini las funciones $\xi(\mu)$ y $g(\mu)$

coeficientes de $g(\mu)$	24	$24\sqrt{6}$	44	$4\sqrt{6}$	
			$-12\sqrt{6}$	-36	$-4\sqrt{6}$
	$-\sqrt{6}/2$	24	$12\sqrt{6}$	8	$\underline{0}$
coeficientes de $\xi(\mu)$	4	$8\sqrt{6}$	36	$12\sqrt{6}$	9
			$-2\sqrt{6}$	-18	$-9\sqrt{6}$
	$-\sqrt{6}/2$	4	$6\sqrt{6}$	18	$3\sqrt{6}$
					$\underline{0}$

luego la parametrización de x adopta la forma

$$y = \frac{24\mu^2 + 12\sqrt{6}\mu + 8}{4\mu^3 + 6\sqrt{6}\mu^2 + 18\mu + 3\sqrt{6}}$$

Todo esto nos advierte de un hecho significativo: los programas de cálculo simbólico son herramientas muy poderosas, pero también poseen sus propias limitaciones (en nuestro caso, el programa utilizado no fue capaz de detectar la raíz común $y = \mu_o$ presente en la parametrización). De aquí la importancia que tiene el saber interpretar los resultados que dichos programas ofrecen y tener un elevado espíritu crítico para cuestionarse determinados valores que puedan ser *sospechosos* de contener algún tipo de inconsistencia operativa.

Despejemos λ en la relación proyectiva para introducirla en la parametrización de y en función de λ con el objetivo de obtener la función $y(\mu)$ que acabamos de simplificar

$$\lambda = \frac{\sqrt{6}\mu + 2\sqrt{6} - 3}{(12 - 5\sqrt{6})\mu + 4\sqrt{6} - 9}$$

$$y = \frac{4(-54 + 22\sqrt{6} + (198 - 81\sqrt{6})\mu + 6(-27 + 11\sqrt{6})\mu^2)}{198 - 81\sqrt{6} + 18(-27 + 11\sqrt{6})\mu + (396 - 162\sqrt{6})\mu^2 + 4(-27 + 11\sqrt{6})\mu^3}$$

La última expresión es la sustitución de λ en la parametrización de y , realizada mediante el programa de cálculo simbólico. Se puede pensar que algo falla en el proceso, puesto que no hemos obtenido el resultado esperado. Pero observando detenidamente la expresión anterior, es fácil darse cuenta que tanto numerador como denominador son divisibles entre el factor $(-27 + 11\sqrt{6})$; si eliminamos dicho factor, es entonces cuando obtenemos el resultado que nos cierra el estudio emprendido al calcular dos posibles parametrizaciones distintas de la cuártica enunciada

$$y = \frac{24\mu^2 + 12\sqrt{6}\mu + 8}{4\mu^3 + 6\sqrt{6}\mu^2 + 18\mu + 3\sqrt{6}}$$

4.5. TEOREMA GENERAL SOBRE INVOLUCIONES BINARIAS

Teorema 4.-II

Sea \underline{c} una curva unicursal de grado \underline{n} y \mathcal{H} un haz de curvas algebraicas, no necesariamente unicursales, de grado \underline{m} que corta a \underline{c} en $\underline{mn}-2$ puntos fijos de la misma. Los otros dos puntos de intersección de las curvas de \mathcal{H} con \underline{c} definen una involución sobre esta curva.

Se trata de una consecuencia inmediata del teorema de Bezout, de la regla de Ruffini y de las relaciones de Cardano. Sea t el parámetro que va variando a lo largo de c . Sea λ el parámetro del que depende linealmente \mathcal{H} por su condición de haz.

Si establecemos la ecuación que nos da el corte de c con \mathcal{H} , vamos a tener una ecuación de grado mn cuyos coeficientes van a depender linealmente de λ . De esta ecuación podremos separar $mn - 2$ raíces que son fijas y conocidas. Nos quedará al final una ecuación de segundo grado en t cuyos coeficientes van a seguir dependiendo linealmente de λ , es decir, tendremos

$$(A + B\lambda)t^2 + (C + D\lambda)t + (E + F\lambda) = 0$$

Efectuemos el cambio de parámetro

$$A + B\lambda = 1/\mu$$

En estas condiciones, la ecuación anterior adopta la forma

$$t^2 + (a + b\mu)t + c + d\mu = 0$$

Si son (t_1, t_2) sus dos raíces, se ha de verificar que

$$t_1 + t_2 = -(a + b\mu) \quad t_1 t_2 = c + d\mu$$

La eliminación de μ nos conduce a la relación lineal

$$\begin{vmatrix} -(t_1 + t_2) - a & b \\ t_1 t_2 - c & d \end{vmatrix} = 0$$

entre la suma y el producto de los valores de t correspondientes a los puntos de corte, lo que indica la existencia de involución entre ellos.

Si pretendemos obtener ventajas gráficas de esta involución, habrá que llevar los puntos a una de las formas elementales conocidas a través de alguno de los mecanismos que nos sirven para parametrizar c .

Las consecuencias de este teorema general pueden ser insospechadas. Algunas de ellas nos pueden conducir por nuevos caminos a propiedades y teoremas ya conocidos. Veamos algunos.

Consecuencia 4.-I

Una cónica es cortada por las rectas de un haz en puntos que están en involución.

Venimos a caer sobre el concepto elemental de puntos sobre la cónica. El vértice del haz es el *centro* de la involución impropia llamado punto de Fregier.

Consecuencia 4.-II

Un haz de cónicas corta a una recta en puntos que están en involución sobre ella.

Venimos a caer en el teorema de Desargues clásico.

Consecuencia 4.-III

Las cónicas de un haz cortan a otra cónica que pasa por dos de los puntos fundamentales en pares de puntos que están en involución.

Si la cónica degenera en un par de rectas, una de las cuales pasa por los dos puntos fundamentales considerados, volvemos a caer sobre el teorema de Desargues clásico que queda entonces como caso particular.

Las aplicaciones de esta faceta del teorema general son muy numerosas. Recordamos, por ejemplo una propiedad clásica de la Geometría elemental: Las cuerdas comunes AA' , BB' , CC' , ... a una circunferencia fija c y a las circunferencias de un haz concurren todas en un punto P .

En este caso tanto la circunferencia fija c como todas las del haz están compartiendo los puntos cíclicos del plano.

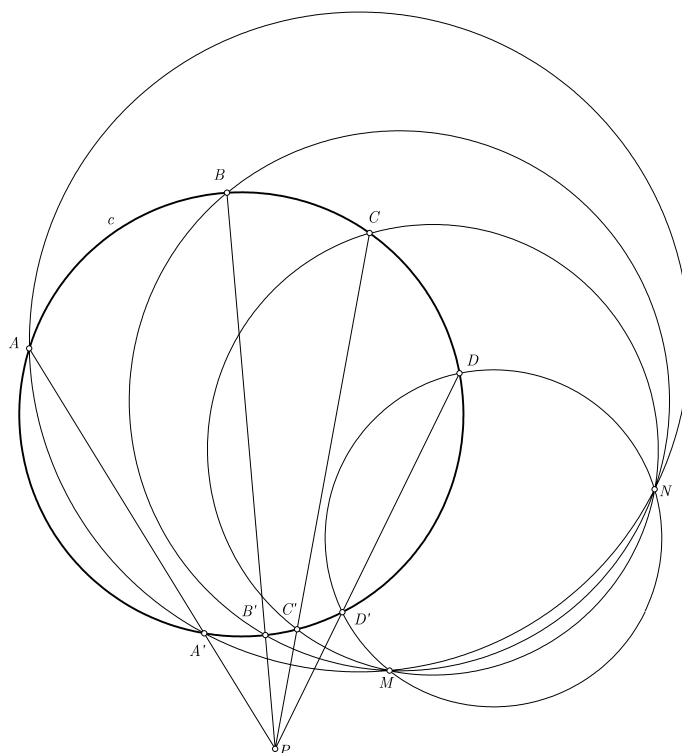


Fig. 4.17.-Una propiedad clásica de la Geometría elemental.

Consecuencia 4.-IV

Sean A, B, C, D los puntos fundamentales de un haz de cónicas, r una recta que pasa por A y r' otra recta que pasa por B . Las cónicas del haz cortan a las rectas en series perspectivas.

Si ambas rectas pasan por uno de los puntos fundamentales, el A por ejemplo, las cónicas las cortan en series proyectivas no perspectivas.

Es una subconsecuencia de la anterior, pues la pareja de rectas (r, r') constituye una cónica degenerada que pasa por dos de los puntos fundamentales del haz, el A y el B .

Podemos dar dos razones para la existencia de la perspectividad. La primera es la propia involución que se establece en la cónica degenerada que, en realidad, es una perspectividad, pues las rectas $M_1M'_1, M_2M'_2 \dots$ que unen parejas de puntos homólogos han de concurrir en el centro L de la involución que, bajo este aspecto se convierte en centro perspectivo.

La siguiente razón que podemos aducir es de tipo analítico y resulta válida para la segunda parte de la consecuencia.

Imaginemos que sobre r y r' definimos sendos sistemas de referencia con orígenes res-

pectivos en A y en B , siendo r y r' los respectivos ejes de abscisas.

Las intersecciones del haz de cónicas con estas rectas serían del tipo

$$(a + bx) + \lambda(c + dx) = 0$$

$$(a' + b'x') + \lambda(c' + d'x') = 0$$

La eliminación de λ entre estas ecuaciones nos va a conducir a una expresión bilineal en (x, x') que pone de manifiesto la existencia de proyectividad.

La condición de perspectividad se presenta porque el punto K de intersección de r con r' es doble, pues existe una cónica del haz que pasa por este punto.

Esta justificación es válida también para la segunda parte, si bien ahora se pierde la perspectividad, pues la cónica del haz que es tangente a r en A no es la misma que es tangente a r' . Ello acarrea que dicho punto no sea doble.

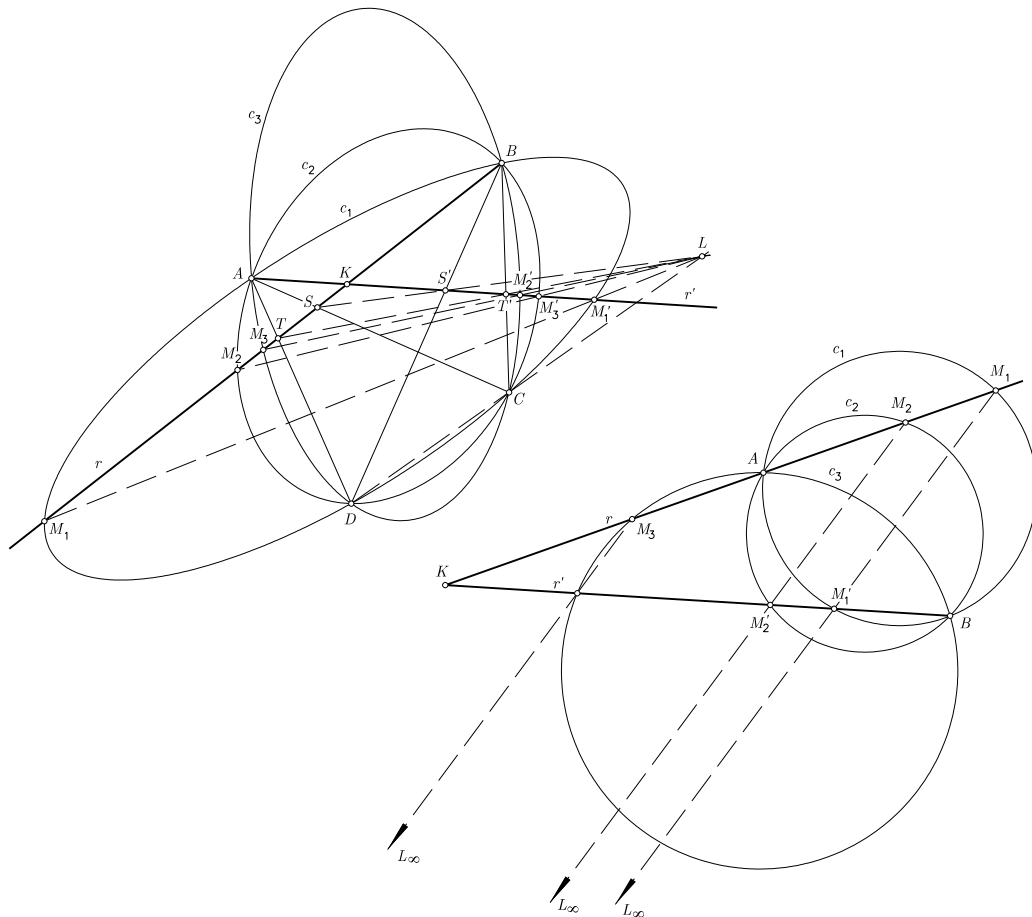


Fig. 4.18.-

Obsérvese en la figura que las cónicas degeneradas $AD - BC$ y $AC - BD$ también han

de formar parte del juego, así como la semicónica degenerada CD . Esto trae consigo que la recta CD también pase por el centro de perspectiva L .

Caso particular

Consideremos el caso particular en el que el haz de cónicas sea un haz elíptico de circunferencias de puntos fundamentales A y B .

Los otros dos puntos básicos del haz son los puntos cíclicos. La única cónica degenerada real es la constituida por la recta AB y la recta del infinito, que, según lo visto ha de pasar por el centro de perspectiva L que ha de estar también en el infinito.

Esto repercute en que las rectas tengan que ser paralelas. Traducida a la Geometría elemental la propiedad vendría a decir que *las cuerdas definidas por intersección de las circunferencias de un haz con un par de rectas r y r' cualesquiera, que pasan respectivamente por cada uno de los puntos fundamentales, son cuerdas paralelas.*

Consecuencia 4.-V

Una cúbica unicursal es cortada por las rectas de un haz que tienen su vértice sobre ella en puntos que están en involución.

Al proyectar estas parejas de puntos desde el punto doble obtendremos haces en involución.

Es una de las consecuencias a las que le sacaremos más provecho, dada la proximidad de las cúbicas con las cónicas.

El haz de rectas de vértice P llevará un parámetro λ en forma lineal. Al cortar la cúbica expresada en paramétricas con el haz de rectas nos quedará una ecuación cúbica en el parámetro t que seguirá llevando en sus coeficientes el parámetro λ en forma lineal. Si separamos con Ruffini de esta ecuación la t del punto P , que es conocida nos quedará una ecuación cuadrática en t en la que nuevamente se manifiesta el parámetro λ en forma lineal.

Esta misma ecuación ya expresa la involución en la forma 3.2. Si queremos rescatar la involución para llevarla a un espacio más conocido no tenemos más que proyectar desde el punto doble y tendremos parejas de rayos en involución.

Conviene observar el hecho curioso de que las tangentes en el punto doble *no son los rayos dobles de la involución de rayos*, sino que son un par de homólogos más.

Los verdaderos rayos dobles (m, n) son los que proyectan los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde P que siempre habrá dos, pues al tratarse de una cúbica con punto doble su clase se rebaja a cuatro (ver las fórmulas de Plücker 6.9, pág. 164) y si trazamos las tangentes desde un punto de la cúbica solamente hay dos, pues dos de las cuatro se confunden en la tangente en el propio punto.

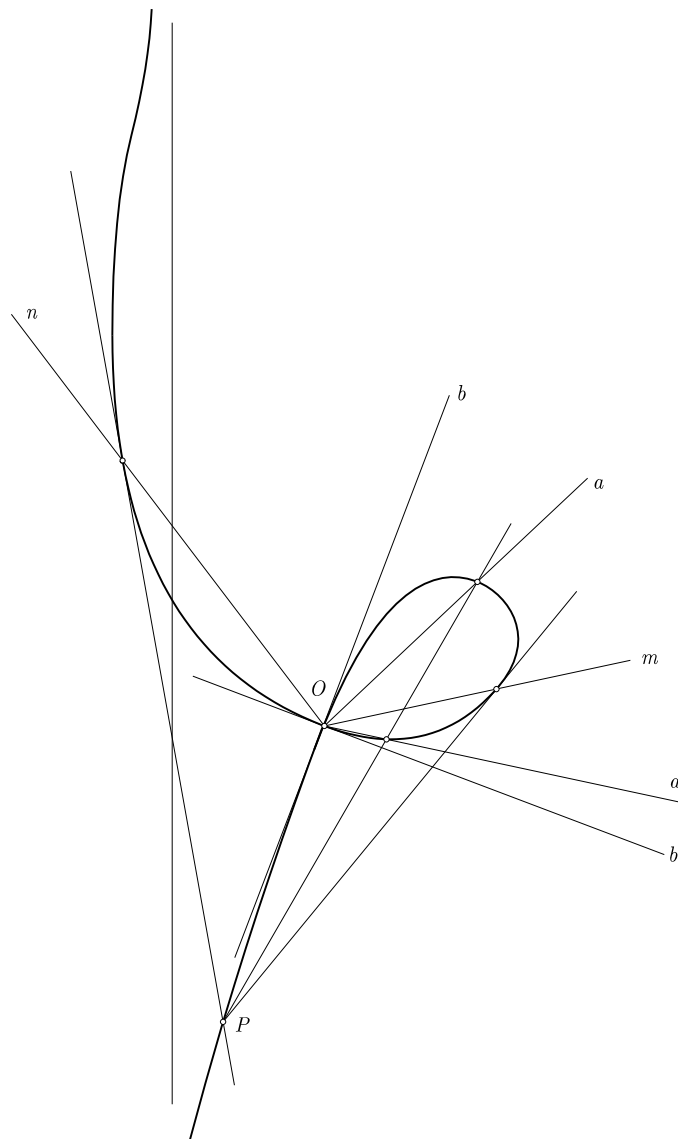


Fig. 4.19.-Las rectas de vértice P cortan a la cúbica en puntos de una involución, que se rescata al proyectar desde el punto doble.

He aquí una propiedad curiosa a la que esto da lugar. Si el punto doble fuese un punto aislado que admitiese como tangentes las rectas isotropas, dichas rectas serían una pareja de homólogas de la involución rescatada. Al tener que formar cuaterna armónica con los rayos dobles de la citada involución, dichos rayos han de ser ortogonales y la involución se convierte en una simetría respecto a cualquiera de ellos. Vamos a verlo en un ejemplo.

Ejercicio 4.-III

Dibujar la cúbica

$$a(x^2 + y^2) = x(y^2 - x^2)$$

y comprobar que los puntos de tangencia de las tangentes a la misma trazadas por uno de sus puntos son vistos desde el punto doble bajo un ángulo recto.

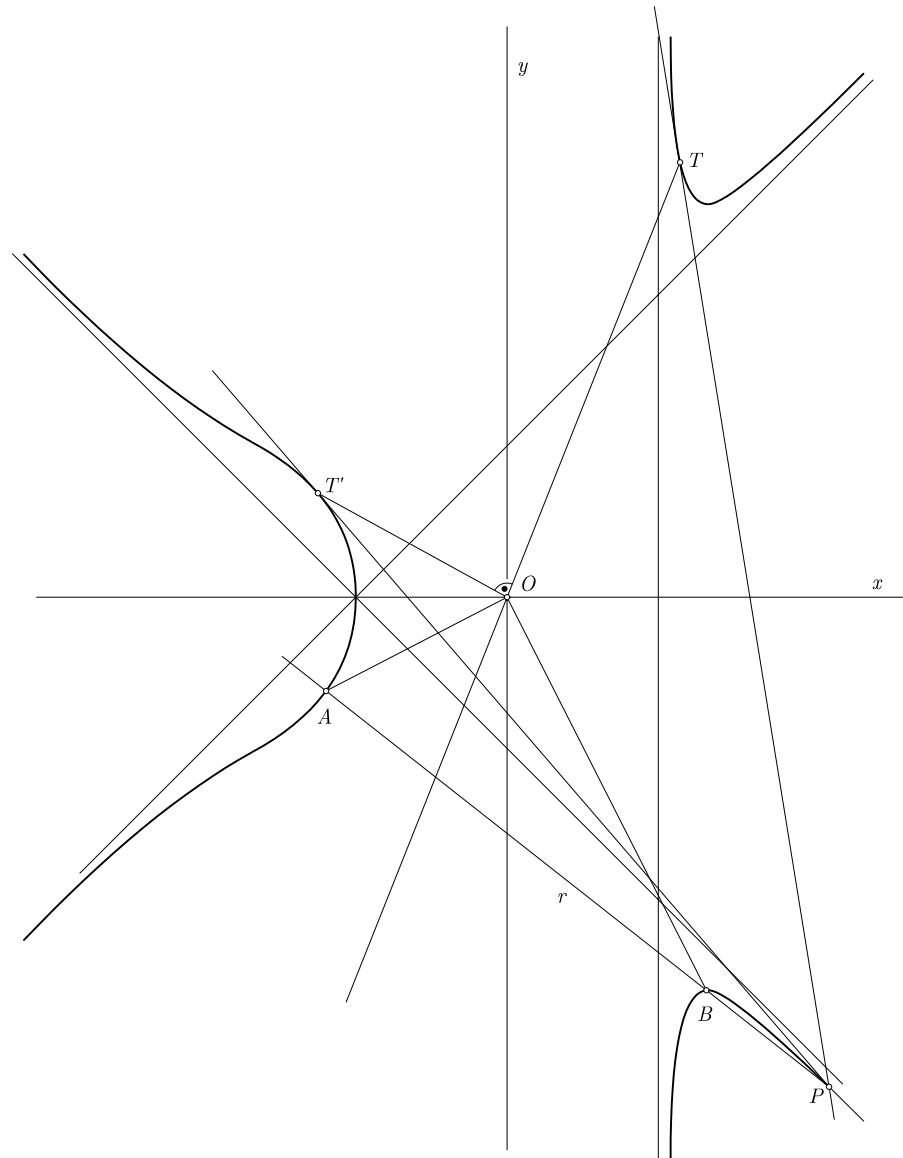


Fig. 4.20.-

Es una cúbica cuyas tangentes en el origen vienen dadas por $x^2 + y^2 = 0$, es decir son las rectas isotropas.

Presenta las asíntotas $x = a, y = \pm x \pm a$. Si trazamos las tangentes a la curva desde

cualquier punto P de ella los puntos de contacto T y T' son vistos desde el origen bajo ángulo recto.

Si trazamos por P una recta cualquiera r , vuelve a cortar a la cúbica en dos puntos A y B y las rectas OA y OB son simétricas respecto a cualquiera de rectas OT u OT' .

Consecuencia 4.-VI

Inversamente, las parejas de rayos homólogos de una involución cuyo vértice es el punto doble de una cúbica unicursal vuelven a cortar a la cúbica en parejas de puntos que determinan rectas concurrentes en un punto de la cúbica.

Es una aplicación de la tercera propiedad de las cúbicas en general expuesta en 5.3. En efecto, las parejas de rayos de una involución es una forma de haz degenerado de cónicas de sexta especie [20]. Los puntos fundamentales de este haz, que coinciden en su vértice pertenecen a la cúbica, puesto que están en su punto doble.

Consecuencia 4.-VII

Una cúbica unicursal es cortada por un haz de cónicas que tienen los puntos fundamentales sobre ella en parejas de puntos que están en involución.

Las rectas que los unen concurren en otro punto de la cúbica.

Además de ser consecuencia del teorema general, un detalle más para su justificación lo tenemos en la propiedad III de la página 135.

El punto de concurrencia de las cuerdas es lo que Sylvester definió como *punto correspondial* de los cuatro puntos fundamentales del haz.

Consecuencia 4.-VIII

Sea ABC un triángulo inscrito en una cúbica unicursal y P un punto de la misma. Los lados del triángulo vuelven a cortar a la cúbica en los vértices de otro triángulo $A''B''C''$ y las rectas PA , PB y PC la vuelven a cortar en tres nuevos puntos A' , B' y C' .

- *Las rectas $A'A''$, $B'B''$ y $C'C''$ son concurrentes en otro punto P' de la cúbica.*
- *Los triángulos $A''B''C''$ y $A'B'C'$ son homológicos.*
- *Si hacemos variar el punto P , también lo hace el P' y entre ambos puntos se establece una proyectividad que se rescata en una proyectividad de haces superpuestos si se proyectan ambos puntos desde el punto doble V de la cúbica. Los rayos dobles de esta última proyectividad son las tangentes en dicho punto doble.*

Es un caso particular de la consecuencia anterior. Si consideramos el haz de cónicas cuyos puntos fundamentales son A, B, C, P las parejas de rectas (PA, BC) , (PB, AC) y

(PC, AB) son las cónicas degeneradas de este haz. Las parejas de los puntos de corte de estas cónicas degeneradas con la cúbica son precisamente (A', A'') , (B', B'') y (C', C'') , luego las rectas que los unen han de concurrir en la cúbica.

La homología de los triángulos es una aplicación directa del teorema de Desargues sobre los triángulos homológicos.

La correspondencia que se establece entre P y P' es unívoca, pues con el punto P' podemos restaurar el P . A su vez, esta correspondencia puede establecerse a través de operaciones algebraicas, luego entre ambos puntos existe una proyectividad que va a repercutir en los rayos que proyectan a los puntos desde V , pues estamos aplicando, simplemente, la correspondencia que parametriza la curva.

El punto V resulta doble en la correspondencia $P \rightarrow P'$ y como a este punto podemos llegar a través de las dos ramas que concurren en P , las tangentes en este punto a la cúbica van a resultar dobles en la proyectividad subordinada en los rayos.

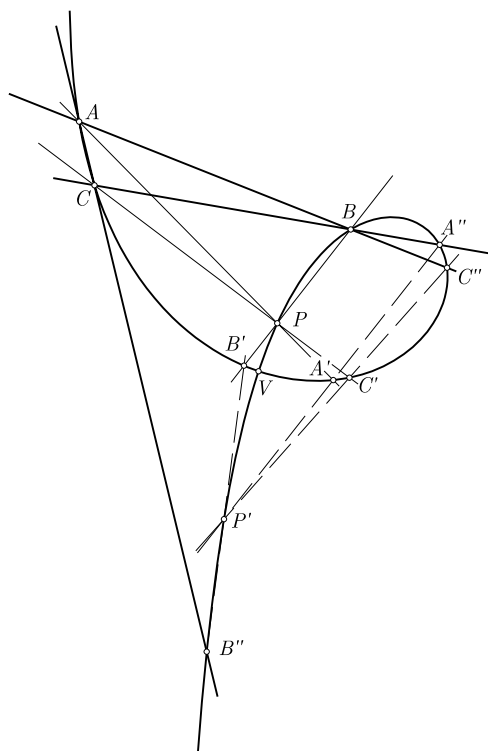


Fig. 4.21.-

Par establecer la correspondencia $P \rightarrow P'$ anterior no es necesario siquiera que los tres vértices del triángulo ABC sean reales. Basta con que tenga un vértice real, el A por ejemplo. El lado opuesto BC , aunque tenga los vértices imaginarios, el lado que definen

puede ser real, así como el punto A'' de su intersección con la cúbica.

Si fijamos el punto P , la intersección de PA con la cúbica nos dará el punto A' y la nueva intersección de $A'A''$ con ella nos dará el P' . Vamos a verlo con un ejemplo.

Ejercicio 4.-IV

Consideremos la estrofoide dada por 6.1 y correspondiente a $\alpha = \pi/4$. Definamos sobre ella el triángulo formado por su punto A de intersección con Ox , distinto del doble y por los dos puntos cíclicos. Hallar la ecuación de la proyectividad de rayos que se obtiene al proyectar $P \rightarrow P'$ desde el punto doble.

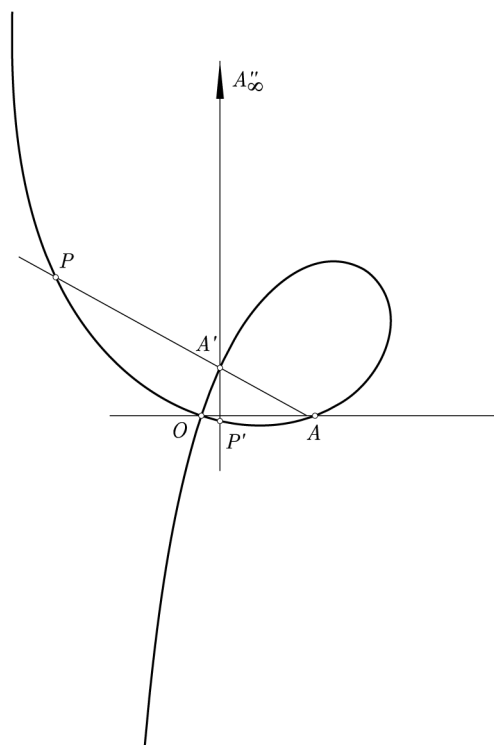


Fig. 4.22.-

Tenemos el triángulo ABC definido sobre la curva en el que B y C son los puntos cíclicos, pero la recta que definen es real, puesto que es la recta impropia. Su tercer punto de corte con la estrofoide es el punto impropio de la asíntota $A''(0, 1, 0)$ en el que el valor del parámetro t se hace infinito.

Para $\alpha = \pi/4$ la ecuación 6.5 se convierte en

$$S_3 + S_2 - S_1 + 3 = 0$$

es decir

$$t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 - t_1 - t_2 - t_3 + 3 = 0 \quad (4.1)$$

Cortemos la estrofoide con la recta AP definida por $T_A = 0$ y t_P . Si llamamos t' al valor del parámetro en A' , al aplicar la relación anterior tendremos

$$t_P t' - t_P - t' + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{3 - t_P}{1 - t_P}$$

Cortemos ahora con la recta $A'A''$. Como el valor del parámetro se hace infinito en A'' , para obtener el corte con $A'A''$ dividamos por t_3 en 4.1 y hagamos $t_3 \rightarrow \infty$ con lo que obtendremos

$$t' + t_{P'} + t' t_{P'} - 1 = 0$$

Si sustituimos el valor de t' anteriormente obtenido tenemos fácilmente la relación que liga los valores del parámetro en P y en P' .

$$t_P t_{P'} - 2t_{P'} - 1 = 0$$

y como el valor del parámetro es precisamente la pendiente de la recta obtenida al proyectar desde el origen, la ecuación de la proyectividad que liga OP con OP' es

$$mm' - 2m' - 1 = 0$$

Obsérvese que las pendientes de los rayos dobles son $1 \pm \sqrt{2}$ que son, precisamente, las pendientes de la estrofoide a su paso por el punto doble.

Consecuencia 4.-IX

Un cúbica circular y unicursal es cortada por las circunferencias de un haz que tiene los puntos fundamentales sobre ella en parejas de puntos que determinan cuerdas concurrentes en un punto de la cúbica.

Sigue siendo un nuevo aspecto de la consecuencia 4.-VII pues al pasar la cúbica por los puntos cíclicos y las circunferencia también se trata de un caso particular en el que los cuatro puntos fundamentales del haz de cónicas pertenecen a la cúbica.

Hemos hecho la representación con una estrofoide.

El haz de cuerdas obtenidas es proyectivo con los haces de tangentes a la circunferencia en los puntos fundamentales. Esta proyectividad puede ser de gran utilidad en aplicaciones posteriores.

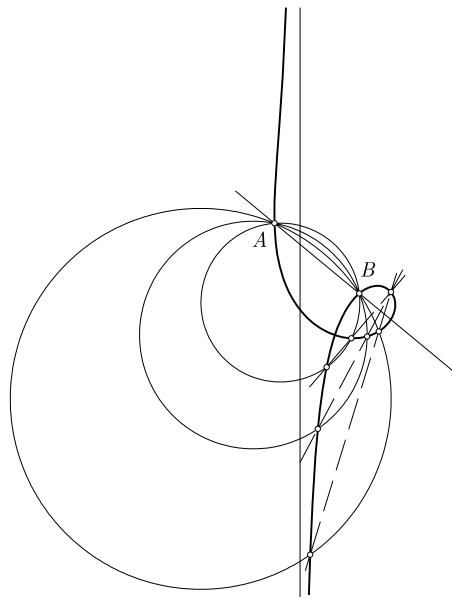


Fig. 4.23.-Las cuerdas comunes a la estrofoide y a las circunferencias concurren en un punto de aquélla.

Consecuencia 4.-X

Sean A y B dos de los puntos dobles de una cuártica unicursal y C, D otra pareja de puntos ordinarios de la misma. El haz de cónicas de puntos fundamentales A, B, C, D corta a la cuártica en puntos que están en involución.

Consecuencia 4.-XI

Una cuártica bicircular es cortada por un haz de circunferencias cuyos puntos fundamentales están sobre la cuártica en puntos que están en involución.

Consecuencia 4.-XII

Una cuártica circular y unicursal es cortada en puntos en involución por un haz de circunferencias cuyos puntos fundamentales son dos puntos dobles de la cuártica.

Ejemplo I

Consideremos la cardioide de ecuación polar $\rho = a(1 + \cos \theta)$. Sea P un punto de la misma. Tracemos la circunferencia c tangente en O al eje Ox y que pase por P . Sea M el centro de esta circunferencia. Tracemos también la circunferencia c' de centro M' que pasa por O, P y por el punto $Q(0, a)$, que también pertenece a la cardioide. Al variar el punto P , el punto M' recorre la recta $y = a/2$. Se pide:

1. Demostrar sin ecuaciones que los puntos M y M' describen series homográficas y obtener sus puntos límites.
2. Confirmar analíticamente los resultados anteriores.
3. Hallar la envolvente de la recta MM' .
4. Demostrar que la podaria de una circunferencia respecto a un punto de la misma es una cardioide.

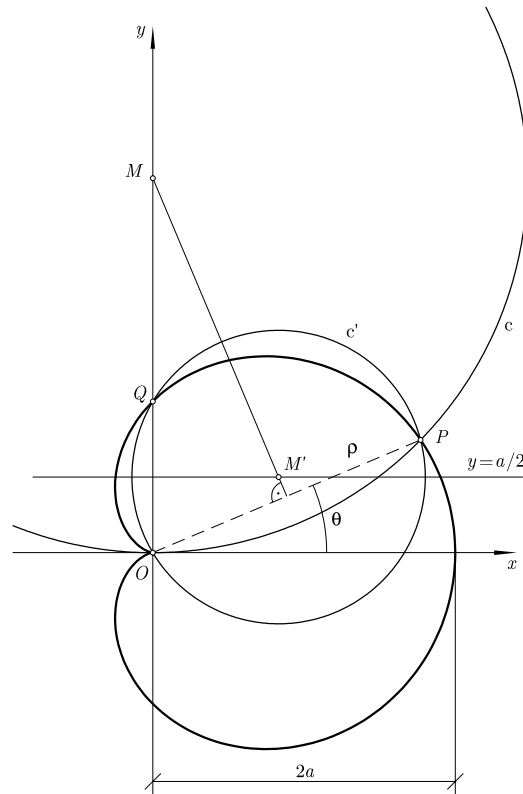


Fig. 4.24.- Ejemplo.

I

Dado que la cardioide es una cuártica, tendrá ocho puntos de intersección con una circunferencia. Cualquiera de las circunferencias c o c' poseen siete puntos fijos de corte. En efecto, al ser la cardioide una cuártica bicircular, ya tiene cuatro puntos de corte consumidos en el infinito (2 cíclicos dobles \times dos = cuatro). La circunferencia c consume en O tres raíces más, dos por ser O de retroceso y otra además por ser tangente a la tangente en el retroceso. La circunferencia c' consume dos raíces en O y una más en Q .

En estas circunstancias, vamos a tener transformación lineal entre los puntos de la cardioide y las circunferencias de los haces, lo que obligará a que estos haces de circunferencias sean proyectivos y, por tanto, lo van a ser las series que forman sus centros.

Cuando el centro M esté en el infinito, el punto P ha de estar en $P_1(2a, 0)$. La circunferencia c' será la circunscrita al triángulo QOP_1 y su centro estará en la posición $x_1 = a$, que será entonces un punto límite.

De la misma forma, cuando el centro de c' esté en el infinito, el punto P ha de estar en la posición $P_2(0, -a)$ y el centro de c estará en $y_1 = -a/2$, que será el otro punto límite.

II

De la geometría elemental deducimos que la ordenada de M vale

$$y_1 = \frac{\rho}{2 \sin \theta} = \frac{a(1 + \cos \theta)}{2 \sin \theta} = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2}$$

Llamando x_1 a la abscisa del centro de la circunferencia OPQ , su ecuación se expresará en la forma

$$x^2 + y^2 - 2x_1x - ay = 0$$

Obligemos a que pase por P para obtener x_1 :

$$a^2(1 + \cos \theta)^2 - 2x_1a(1 + \cos \theta) \cos \theta - a^2(1 + \cos \theta) \sin \theta = 0$$

$$x_1 = a \frac{1 + \cos \theta - \sin \theta}{2 \cos \theta} = a \frac{2 \cos^2 \theta/2 - 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2}{2(\cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2)}$$

$$x_1 = a \frac{1}{1 + \tan \theta/2}$$

La eliminación de θ nos conduce a la relación proyectiva

$$2x_1y_1 + ax_1 - 2ay_1 = 0$$

Los puntos límites que obtenemos aquí de forma analítica coinciden con los que ya hemos visto de forma gráfica.

III

Volvamos a la figura general. Prolonguemos MM' hasta cortar a Ox en el punto K . Fácilmente deducimos que la distancia del punto O a la recta MK vale

$$\overline{OH} = \overline{OM} \cdot \sin \theta = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} \sin \theta = a \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta)$$

Tomemos sobre Ox un punto Q tal que $\overline{OQ} = a/2$ y proyectémoslo sobre MK en R . La distancia \overline{QR} vale

$$\begin{aligned} \overline{QR} &= \overline{OH} - \overline{ON} = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta) - \overline{OQ} \cos \theta = \\ &= \frac{a}{2}(1 + \cos \theta) - \frac{a}{2} \cos \theta = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Si la distancia del punto Q a MK vale $a/2$, la recta MK envuelve una circunferencia C_1 de centro Q y radio $a/2$.

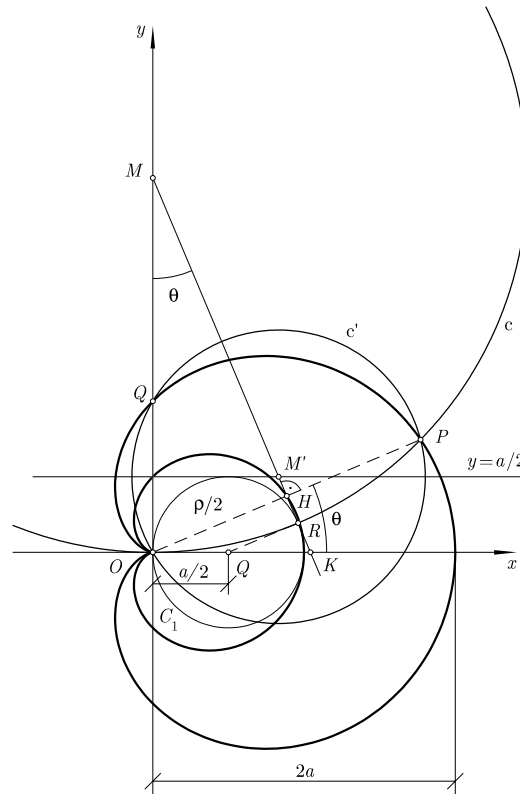


Fig. 4.25.-

IV

El punto H describe la podaria de C_1 respecto a O . Pero el punto H es el punto medio de OP . Si P describe una cardioide, el punto H también describirá una cardioide homotética.

Ejemplo II

Sean r y r' dos rectas del plano que se cortan en un punto O sobre las que se han definido sendas series homográficas de puntos M y M' .

Consideremos las circunferencias de diámetros respectivos OM y OM' que se cortan en un punto P distinto del O .

Se pide:

- 1° Demostrar que, al ir variando el punto M , el punto P , en general, describe una cuártica bicircular c que es unicursal.
 - 2° Demostrar que cuando las series M y M' son semejantes, la cuártica c degenera en una cúbica circular, también unicursal, y en la recta del infinito.
 - 3° La recta MM' tiene como envolvente una cónica c_1 . Demostrar que la cuártica c , o en su caso la cúbica, es la podaria de c_1 respecto al punto O .
 - 4° Demostrar que c y c_1 son tangentes en los puntos de corte de la cónica c_1 con la hipérbola de Apolonio relativa al punto O .
 - 5° Estudiar la naturaleza de las tangentes a la cuártica c en O según las posiciones que este punto ocupe respecto a c_1 .
Si las rectas r y r' son coincidentes, toda la construcción anterior cae en defecto, pero el concepto de podaria permanece por continuidad. ¿Qué tipo de singularidad presenta entonces dicha podaria en O ?
 - 6° En el caso en que la cónica c_1 sea una elipse, dibujar en un sistema de diseño asistido su podaria respecto a un punto de la circunferencia de Monge para observar la ortogonalidad de las tangentes en el punto doble. Considerar los casos en que el punto es exterior o interior a la evoluta y en particular cuando, siendo interior, ocupa una posición sobre la recta soporte del eje menor.
 - 7° ¿Qué ocurre si r y r' son las rectas isotropas que pasan por el punto O ?
 - 8° Consideremos el caso particular en que las rectas r y r' son ortogonales y el producto $\overline{OM} \cdot \overline{OM'}$ es constante. Demostrar que, en este caso, la cuártica c es una lemniscata de Bernoulli y la cónica c_1 es una hipérbola equilátera. Indicar un método rápido para obtener puntos de la lemniscata y estudiar la posibilidad del trazado de la tangente en un punto utilizando metodología proyectiva.
 - 9° Demostrar que, en el caso anterior, la podaria de la hipérbola respecto a uno de sus vértices es una cuártica piriforme.
 - 10° Consideremos el caso particular en que r y r' son ortogonales y $\overline{OM} + \overline{OM'}$ es constante. ¿Cuál es, en este caso, la cónica c_1 ? Demostrar que, ahora, la cuártica c degenera en una estrofoide recta más la recta impropia.
-

I

Las circunferencias de diámetro OM constituyen un haz parabólico que va a ser proyectivo con las de diámetro OM' que, asimismo, constituyen otro haz parabólico.

Ambos haces comparten tres puntos fundamentales, el O y los dos cíclicos del plano. Por intersección de circunferencias homólogas se engendrará una cuártica que ha de tener a estos puntos como puntos dobles, luego va a ser bicircular y unicursal.

Las tangentes a la cuártica en el punto doble O van a ser las perpendiculares a las rectas r y r' . En efecto, cuando el punto M coincide con O , la circunferencia de diámetro OM se reduce a un punto, lo cual no ocurrirá con la de diámetro OM' , puesto que las series dadas no son perspectivas. En estas circunstancias, estamos engendrando un punto de paso de la cuártica por O . La tangente a la misma en la rama correspondiente va a ser la tangente en O a la circunferencia de diámetro OM' , es decir, será la perpendicular a la recta r' .

De la misma forma razonamos cuando el punto M' ocupe la posición de O .

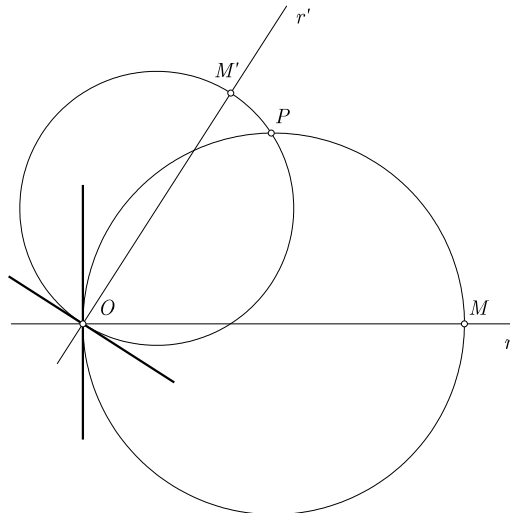


Fig. 4.26.-

Estas conclusiones pueden confirmarse fácilmente de forma analítica. En efecto, si elegimos un sistema ortogonal de referencia con origen en O y suponemos que las perpendiculares a r y r' en el origen son, respectivamente,

$$ax + by = 0 \quad a'x + b'y = 0$$

las ecuaciones de los haces de circunferencias serán

$$x^2 + y^2 - \lambda(ax + by) = 0 \quad x^2 + y^2 - \mu(a'x + b'y) = 0$$

La existencia de una proyectividad entre las circunferencias de ambos haces exige cumplir una relación del tipo

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0$$

La eliminación de los parámetros λ y μ nos proporciona el lugar geométrico de los puntos de corte que será, por tanto,

$$A(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)[B(a'x + b'y) + C(ax + by)] + D(ax + by)(a'x + b'y) = 0$$

ecuación que representa, efectivamente, una cuártica bicircular con un punto doble en el origen cuyas tangentes son las perpendiculares a las rectas r y r' .

II

Si las series dadas son semejantes, existe correspondencia de puntos impropios y a la circunferencia degenerada constituida por la normal a r y la recta impropia corresponde la constituida por la normal a r' y la recta impropia. Estas circunferencias degeneradas tienen como intersección, además del origen, la recta impropia. Dicha recta pasará entonces a formar parte del lugar geométrico engendrado.

La curva generada propiamente dicha será, por tanto, una cúbica que seguirá teniendo un punto doble en el origen y que seguirá pasando por los puntos cíclicos, que ya no tendrán el carácter de dobles en la cúbica.

La existencia del punto doble propio garantiza la unicursalidad de la cúbica engendrada.

III

Los ángulos MPO y $M'PO$ son rectos por ser OM y OM' diámetros de las circunferencias. Esta circunstancia asegura el alineamiento de los puntos M , P y M' , con lo que el punto P pasa a ser el pie de la perpendicular desde O a la recta MM' . El lugar geométrico de P será, entonces, la podaria de la envolvente de MM' (cónica c_1) respecto al punto O .

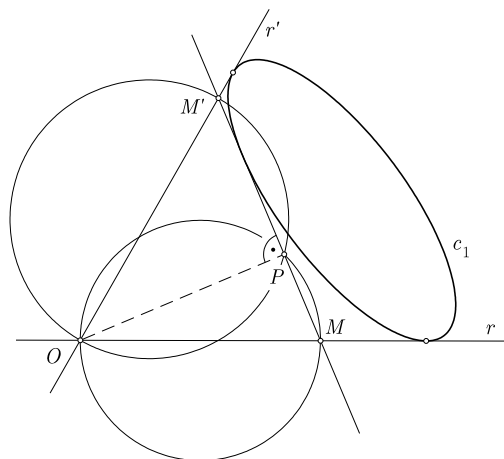


Fig. 4.27.-

IV

Para que P pertenezca a c_1 , ha de ser el punto de contacto de la cónica con MM' , con lo que OP ha de ser una normal trazada a la cónica. Los posibles pies de normales van a ser, por tanto, los de la intersección de la cónica con la hipérbola de Apolonio correspondiente a O . Como la podaria ha de quedar siempre en el exterior de c_1 , la curva c no puede penetrar en el interior de la cónica. La imposibilidad de existencia de puntos angulosos o de parada en curvas algebraicas va a exigir que estos puntos sean de tangencia entre las curvas c y c_1 .

V

Si las rectas r y r' son reales, también lo van a ser las tangentes en O a la cuártica, lo que se corrobora observando que el punto O va a ser exterior a la cónica c_1 y la podaria siempre va a quedar en el exterior de la cónica.

Si las rectas r y r' son imaginarias, también van a serlo las tangentes en O a la cuártica. El punto O va a ser en este caso interior a la cónica y pasa a ser un punto aislado de la cuártica podaria engendrada.

Si las rectas r y r' se confunden, toda la construcción cae en defecto, pero permanece el concepto de podaria. El punto O pertenecerá a la cónica y será un punto de retroceso de la cuártica.

VI

La figura contigua ha sido realizada en un sistema de diseño asistido y el punto P lo hemos tomado sobre la circunferencia de Monge y exterior a la evoluta de la elipse, lo que va a provocar la ortogonalidad de tangentes en P a la podaria construida.

El punto P está desempeñando las funciones del anterior punto O y las tangentes PH y PK a la cónica asumen el papel de las rectas r y r' .

Al haber tomado el punto P exterior a la evoluta, solamente existen dos normales a la cónica desde él, las rectas PA y PB . Obsérvense los correspondientes puntos de tangencia A' y B' con la evoluta.

Obsérvense, igualmente, las tangencias de la cuártica podaria con la cónica en los puntos A y B , que son los pies de las normales desde P . (Véase la figura de la página anterior.)

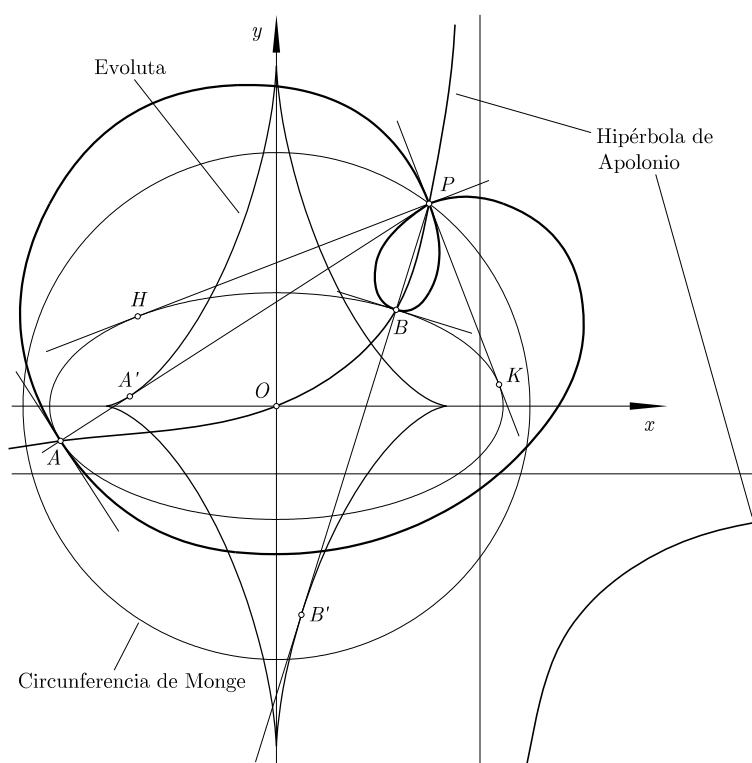


Fig. 4.28.-

En la figura siguiente, el punto P se ha tomado interior a la evoluta para tener un caso de cuatro normales reales a la cónica desde el punto P .

Obsérvense las tangencias en los pies correspondientes A, B, C y D . Obsérvense, asimismo, las respectivas tangencias de A', B', C' y D' de las normales con la evoluta.

No se ha tomado el punto sobre la circunferencia de Monge por ser excesivamente pequeña la parte de esta que es interior a la evoluta. El caso casi se confundiría con la figura inferior en el que P está sobre la citada circunferencia y sobre la recta soporte del eje menor de la elipse.

Para esta posición de P , los ocho puntos comunes de la elipse con la podaria de P son reales y están asociados en cuatro raíces dobles correspondientes a las tangencias en A, B, C y D .

Para esta posición de P , los ocho puntos comunes de la elipse con la podaria de P son reales y están asociados en cuatro raíces dobles correspondientes a las tangencias en A, B, C y D .

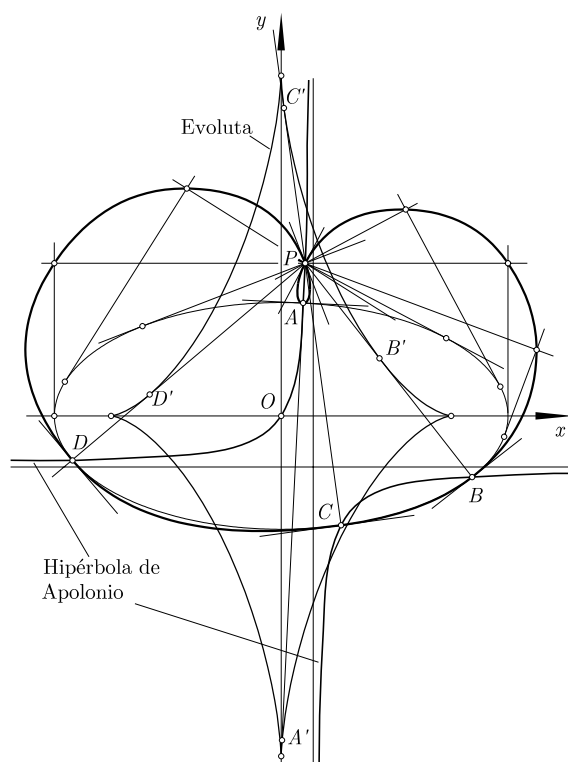


Fig. 4.29.-

VII

Si las rectas r y r' son las isótropas que pasan por O , resulta que O ha de ser entonces un foco de la cónica c_1 . La podaria se engendra como lugar de la intersección de la perpendicular por O a la tangente MM' a la cónica. Ahora bien, cuando MM' ocupa la posición de r y ésta es una isótropa, su perpendicular por O es ella misma y la intersección con ella misma vuelve a ser ella misma.

Esto nos hace ver que la isótropa ha de formar parte de la podaria. Como tenemos dos isótropas en O , que son r y r' , el conjunto de ambas va a pasar a formar parte de la podaria, que va a degenerar entonces en el producto de las dos isótropas más una cónica o una recta según que la podaria sea cuártica o cúbica.

Consideremos, en primer lugar, que la podaria es una cuártica, lo que corresponderá al caso en que c_1 sea elipse o hipérbola.

Como la cuártica podaria es bicircular y las isótropas que se han segregado de ella pasan una sola vez por los puntos cíclicos, la cónica restante ha de ser una circunferencia c_2 .

Esta circunferencia debe ser tangente a la cónica en los pies de las normales trazadas desde O . Si O es un foco, las normales desde él a la cónica son los vértices del eje mayor, si se trata de una elipse, o los vértices reales si se trata de una hipérbola.

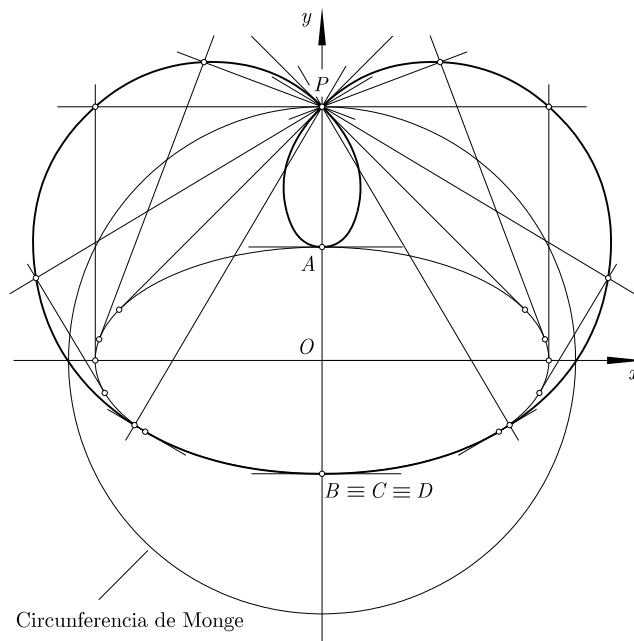


Fig. 4.30.-

En estas circunstancias, la cónica c_2 ha de ser la circunferencia principal, que como ya sabemos de la Geometría elemental es la podaria de los focos.

En el caso en que las series M y M' sean semejantes, la cónica c_1 es una parábola. Su podaria respecto al foco ha de degenerar en una cúbica compuesta de las dos isotropas concurrentes en el foco más una recta que ha de ser tangente a la parábola en el pie de la normal trazada desde el foco, es decir, la podaria buscada va a ser la tangente en el vértice, lo que ya conocemos de la Geometría elemental.

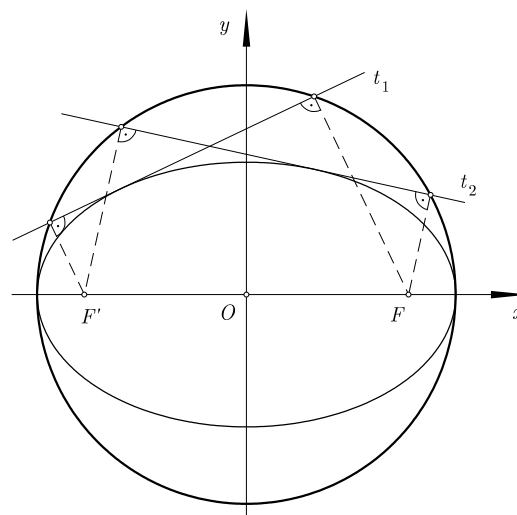


Fig. 4.31.-

VIII

Supongamos que r y r' son ortogonales y que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = a^2$. En este caso, el punto O es punto límite de ambas series proyectivas. El eje proyectivo va a ser la recta impropia, lo que indica que la cónica envolvente de MM' será una hipérbola equilátera.

De las propiedades de la hipérbola sabemos, además, que su punto de contacto con MM' va a ser el punto medio de este segmento, lo que nos va a permitir, como veremos, un método cinemático muy sencillo para trazar la tangente a la podaria.

Veamos la secuencia completa de operaciones en la obtención de un punto de la podaria y su tangente a la misma en él.

Definamos en $r \equiv Ox$ un punto Q tal que $\overline{OQ} = a$ y sobre $r' \equiv Oy$ otro punto Q' tal que $\overline{OQ'} = a$. Ambos puntos están a igual distancia de O y constituyen un par de homólogos, de manejo fácil, en la proyectividad. Si trazamos por ellos dos rectas paralelas de dirección variable, vamos obteniendo, por intersección de estas rectas con Ox y Oy , parejas variables de puntos homólogos (M, M') .

La proyección de O sobre MM' ya es un punto P de la podaria. Para hallar la tangente en él podemos considerar el movimiento de una escuadra OPM que se verifica de modo que uno de sus lados pasa por O y el otro permanece tangente a la hipérbola. Conocemos dos parejas de perfiles conjugados y podemos obtener su centro instantáneo por la intersección de las normales a los mismos.

De aquí deducimos la siguiente construcción: Hallamos MM' por el procedimiento descrito. Buscamos el punto medio de MM' . Trazamos la perpendicular OP a MM' , la perpendicular por O a OP y la perpendicular por N a MM' . La intersección de estas últimas nos proporciona el centro instantáneo I de la escuadra. La tangente en P a la podaria es la normal en P a IP .

También existe un método proyectivo puro para hallar la tangente a la podaria en P . La envolvente de la circunferencia de centro N y que pasa por O es una homotética de la podaria de centro de homotecia O y razón dos [31].

El punto característico K de esta circunferencia involuta es su intersección con OP , lo que hace que la tangente en P a la podaria sea paralela a la tangente en K a la circunferencia. Fácilmente se comprueba la coincidencia con el método cinemático antes expuesto.

En cuanto a la naturaleza de la podaria, disponemos en este caso de las ecuaciones

$$x^2 + y^2 - \lambda x = 0 \quad x^2 + y^2 - \mu y = 0 \quad \lambda\mu = a^2$$

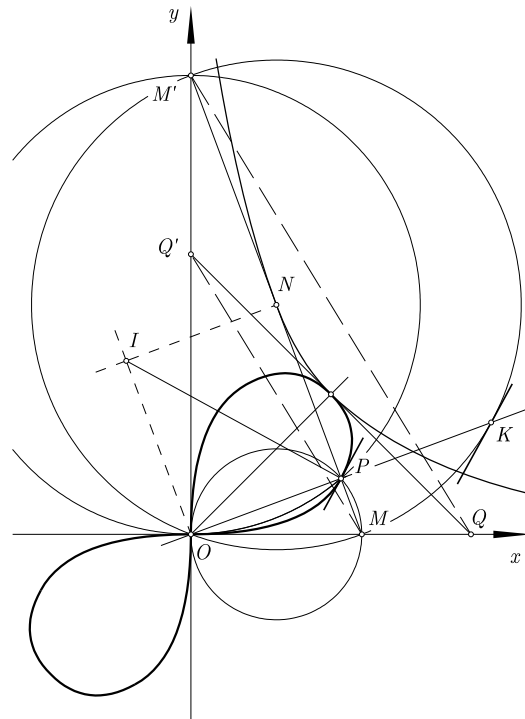


Fig. 4.32.-

La eliminación de λ y μ nos conduce a la lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2xy = 0$$

IX

Si hallamos la podaria respecto a un vértice de la hipérbola, en dicho vértice vamos a tener un punto de retroceso y en el otro hemos de tener un punto de tangencia con la hipérbola. La ausencia de puntos impropios y de otros puntos singulares de la cuártica podaria nos hace pensar en una curva piriforme. Para salir de dudas, hemos de recurrir a su ecuación y, para ello, es preferible adoptar unos ejes con origen en el propio vértice de la hipérbola y dirigidos según la tangente y normal a la misma.

Tenemos así la hipérbola

$$\frac{(x + a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de la que queremos hallar la podaria respecto al origen. Hemos supuesto, para mayor generalidad, que la hipérbola no es equilátera. Posteriormente haremos $b = a$.

La tangente en el punto (x_0, y_0) de la hipérbola y su perpendicular por el origen tienen por ecuaciones

$$\frac{x_0 + a}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y + \frac{x_0}{a} = 0$$

$$\frac{y_0}{b^2}x + \frac{x_0 + a}{a^2}y = 0$$

La eliminación de (x_0, y_0) entre estas ecuaciones, junto con la condición de pertenencia del punto a la hipérbola

$$\frac{(x_0 + a)^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

nos conduce a la ecuación de la podaria

$$(x^2 + y^2)^2 + 2ax(x^2 + y^2) + b^2y^2 = 0$$

que, efectivamente, presenta un punto de retroceso con tangente horizontal en el origen y un punto de tangente vertical en el vértice opuesto.

Es una cuártica bicircular piriforme, aunque no la que se conoce explícitamente con tal nombre en la bibliografía clásica como puede ser Gomes Teixeira [11]. La cuártica presentada por este autor como *piriforme* no pasa por los puntos cíclicos.

Una parametrización de la curva hallada la podemos tener cortándola con el haz de circunferencias

$$x^2 + y^2 - ty = 0$$

lo que nos conduce a las paramétricas

$$x = -\frac{2at^2(t^2 + b^2)}{(t^2 + b^2)^2 + 4a^2t^2} \quad y = \frac{4a^2t^3}{(t^2 + b^2)^2 + 4a^2t^2}$$

Otra parametrización cómoda puede obtenerse al cortar con el haz de circunferencias cuyos puntos fundamentales sean los vértices de la hipérbola.

Con dos parametrizaciones mediante haces de circunferencias se puede pensar en una generación proyectiva de la curva de cierta facilidad operativa.

Pasemos a dar algunos detalles adicionales relativos al caso correspondiente a la hipérbola equilátera, $a = b$, mostrado en la figura adjunta.

Las intersecciones de la podaria con el eje vertical de la hipérbola las tenemos fácilmente haciendo $x = -a$ en la ecuación implícita. Obtenemos así la ecuación bicuadrada

$$y^4 + a^2y^2 - a^4 = 0$$

que nos da las intersecciones reales

$$y = \pm a \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

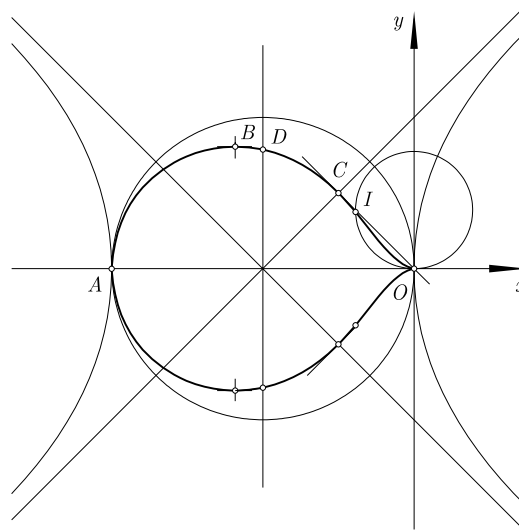


Fig. 4.33.-

Tenemos así el punto D y su simétrico.

Las asíntotas en la hipérbola representan un mínimo en la inclinación de las tangentes a la curva, lo cual va a producir un máximo en las pendientes de las cuerdas de la podaria que pasan por O . Si trazamos desde este punto la perpendicular a una asíntota, el punto de corte con ella nos va a dar un punto de la podaria en el que la tangente pasa por O . Obtenemos así el punto $C(-a/2, a/2)$ y su simétrico respecto a Ox .

Para obtener el punto B de tangente paralela a Ox podemos anular la derivada dy/dt en la ecuación paramétrica. Obtenemos así como valor del parámetro

$$t = \pm\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}a$$

que nos da para el punto B y su simétrico, las coordenadas

$$\left[-\frac{12 + 7\sqrt{3}}{10 + 6\sqrt{3}} a, \quad \pm \frac{(3 + 2\sqrt{3})^{2/3}}{10 + 6\sqrt{3}} a \right]$$

Para hallar el punto de inflexión I y su simétrico, podemos recurrir a una metodología propia de las curvas unicursales. Comenzamos calculando las relaciones que deben existir entre cuatro valores del parámetro $\{t_i | i = 1, 4\}$ para que los puntos que representan en la cuártica estén alineados.

Para ello cortamos con una recta cualquiera

$$ux + vy + w = 0$$

y buscamos qué relación deben verificar las raíces con independencia de la recta de corte.

Tenemos así la ecuación de corte

$$-u(2at^4 + 2a^3t^2) + 4a^2t^3v + w[(a^2 + t^2)^2 + 4a^2t^2] = 0$$

o bien, si ordenamos

$$(w - 2au)t^4 + 4a^2vt^3 + (6a^2w - 2a^3u)t^2 + wa^4 = 0$$

Si llamamos S_p a la suma de productos p -arios de las raíces, tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} 4a^2v &= -(w - 2au)S_1 \\ 6a^2w - 2a^3u &= (w - 2au)S_2 \\ 0 &= S_3 \\ wa^4 &= (w - 2au)S_4 \end{aligned}$$

que nos dan las siguientes ecuaciones independientes de los coeficientes de la recta de corte:

$$\begin{aligned} S_3 &= 0 \\ \begin{vmatrix} -2a^3 + 2aS_2 & 6a^2 - S_2 \\ 2aS_4 & a^4 - S_4 \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow -5S_4 + a^2S_2 - a^4 = 0 \end{aligned}$$

Sea t el valor que debe tomar el parámetro en un punto de inflexión de la curva y t_1 el valor del mismo en el punto de corte de la curva con la tangente en el punto de inflexión anterior. El punto t , contado tres veces junto el t_1 , han de verificar las relaciones anteriores, con lo que tenemos el siguiente sistema

$$\left. \begin{aligned} 3t_1 + t &= 0 \\ -5t^3t_1 + 3a^2(t^2 + tt_1) - a^4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que nos da el punto de inflexión y el de corte de la curva con la tangente en él.

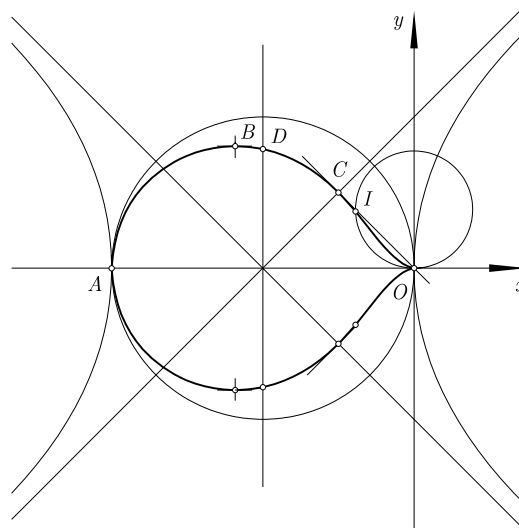


Fig. 4.34.-

Obtenemos así para el punto I el valor $t = \sqrt{3/5}$ y como coordenadas del punto

$$I(-12a/31, 15\sqrt{3/5}a/31)$$

X

Si $\overline{OM} + \overline{OM'} = 2a$, las series descritas por M y M' son semejantes, luego la cónica c_1 va a ser una parábola.

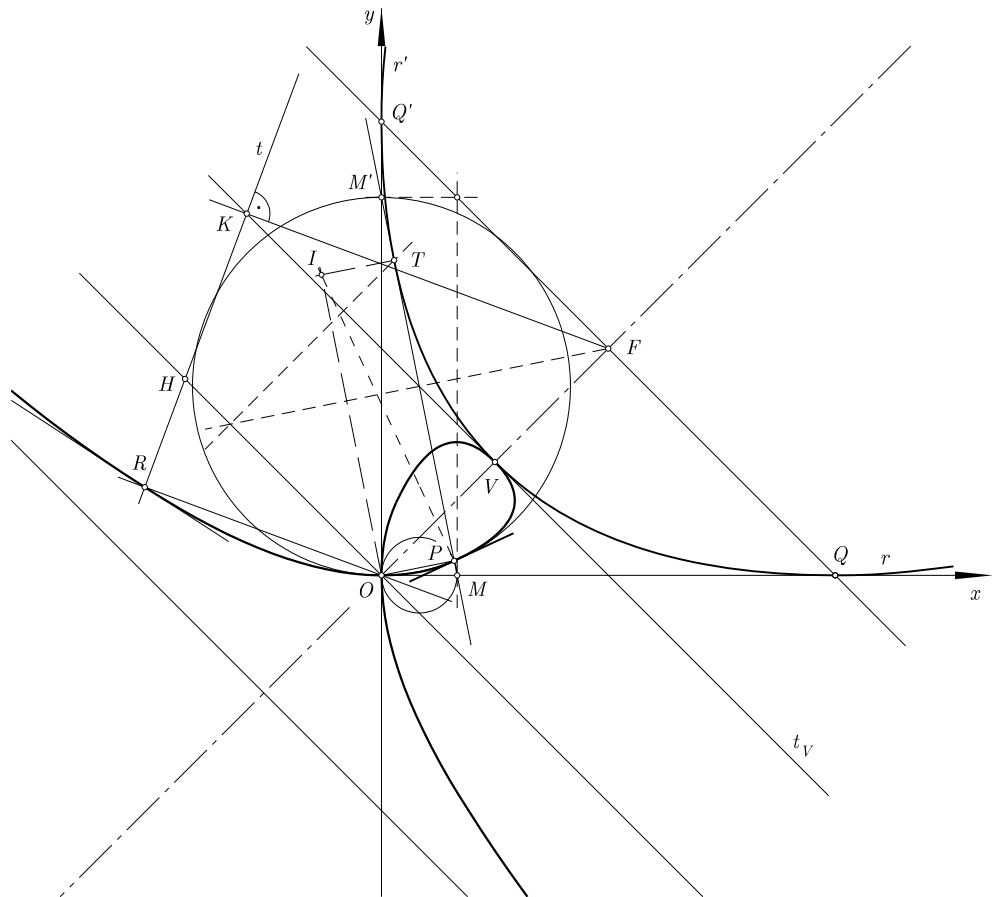


Fig. 4.35.-

Como ya expusimos, la podaria va a ser en este caso una cúbica circular. Como la parábola es tangente a las rectas r y r' y éstas son ortogonales, su punto de corte O ha de pertenecer a la directriz. El punto O va a ser doble en la podaria y las tangentes en el mismo van a ser las propias rectas r y r' . Como la cúbica engendrada es circular, ha de admitir una asíntota para completar sus intersecciones con la recta impropia. Con los datos que tenemos ya casi podemos asegurar que se trata de una estrofoide recta, dada la simetría del problema res-

pecto a la bisectriz de r y r' . Para confirmarlo plenamente, necesitamos conocer la posición de la asíntota.

El eje proyectivo de las series vendrá determinado por la recta QQ' siendo $\overline{OQ} = \overline{OQ'} = a$. En la figura siguiente tenemos indicada la obtención de un par de puntos genéricos M y M' , el punto de contacto de MM' con la parábola y el correspondiente punto P de la estrofoide.

La paralela media del triángulo OQQ' va a ser la tangente en el vértice V , el simétrico de O respecto a él va a ser el foco F y la paralela a QQ' por O será la directriz.

Para situar la asíntota de la estrofoide y confirmar su naturaleza, tracemos una tangente alejada t a la parábola. Para ello, basta con trazar la perpendicular por un punto K de la tangente en el vértice a la recta FK . La proyección R de O sobre t va a ser el correspondiente punto de la podaria.

Observemos que los triángulos FVK y HOR son semejantes y, además, $\overline{FV} = p/2$, siendo p el parámetro de la parábola. Cuando K se aleje al infinito, t tiende a ser ortogonal a la directriz, la razón de semejanza de los triángulos tiende a la unidad y \overline{HR} tenderá al valor $p/2$, con lo que tenemos confirmada la presencia de la asíntota.

Únicamente nos queda por observar que la tangente en P a un punto genérico de la estrofoide se puede obtener por el mismo procedimiento cinemático expuesto para la lemniscata.

Ejemplo III

Vamos a generalizar los resultados obtenidos en el caso de la parábola del ejemplo anterior y a poner de manifiesto el comportamiento proyectivo de la podaria.

Vamos a suponer la parábola referida a su eje y a su tangente en el vértice y vamos a hallar la podaria de un punto cualquiera O de su directriz.

Responderemos a las siguientes preguntas, utilizando operaciones realizables con regla y compás:

1. Localizar su asíntota.
2. Localizar las tangentes en O a la podaria buscada.
3. Hallar sus intersecciones con la tangente en el vértice
4. Sean D y G los puntos de la podaria cuya tangente es paralela a la asíntota. Determinar las rectas que pasan por O y que contienen respectivamente a los puntos mencionados.
5. Determinar el punto E de intersección de la podaria con su asíntota.
6. Sea B la proyección ortogonal de O sobre la tangente en el vértice a la parábola. Establecer una proyectividad que genere la podaria por intersección de elementos homólo-

gos entre las circunferencias del haz de puntos fundamentales O y B y el haz de rectas de vértice O .

7. Determinar completamente los puntos D y G antes mencionados.
8. Utilizando un sistema de diseño asistido, hallar el punto C de tangencia entre la parábola y su podaria.

Del ejemplo anterior podemos deducir que la podaria buscada va a ser una estrofoide oblicua con punto doble en O y una asíntota, cuya situación vamos a deducir. Una recta cualquiera que pase por el foco F corta en H a la tangente en el vértice. La perpendicular t a FH en H es una tangente a la parábola y la proyección ortogonal, M , de O sobre t es un punto de la podaria buscada.

Cuando FH tiende a ponerse ortogonal al eje de la parábola, la tangente t tiende a colocarse paralela al eje y el punto M va a tender al infinito en la dirección ortogonal a dicho eje. La asíntota buscada va a ser, entonces, también ortogonal al eje.

Los triángulos VHF y MOK son semejantes. Cuando $t \rightarrow \infty$ el cociente $\overline{KO}/\overline{HF}$ tiende a la unidad, luego el valor de MK tiende a ser $\overline{VF} = p/2$ siendo p el parámetro de la parábola. La asíntota buscada estará entonces a distancia $p/2$ de la directriz.

Los resultados anteriores los podemos obtener de forma más rigurosa en forma analítica. Si la parábola la expresamos mediante las paramétricas

$$x = 2pt^2 \quad y = 2pt$$

la tangente en uno de sus puntos es

$$2ty - x - 2pt^2 = 0$$

La perpendicular a esta recta por el punto $O(-p/2, y_0)$ es

$$y - y_0 = -2t(x + p/2)$$

La abscisa de M obedece a la ecuación

$$\frac{x + 2pt^2}{2t} - y_0 = -2t(x + p/2)$$

Dividiendo por $2t$ y efectuando el límite cuando $t \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\frac{p}{2} = -x_{M\infty} - \frac{p}{2} \implies x_{M\infty} = -p$$

lo que nos corrobora el resultado que ya sabíamos.

Comencemos determinando las intersecciones de la podaria buscada con la tangente en el vértice. La proyección B de O sobre esta tangente es una de las intersecciones buscadas.

Al unir O con el foco F , intersección A con VB es el otro punto buscado, ya que la perpendicular AA' por A a OF es una tangente a la parábola. No hay más puntos de intersección con la tangente en el vértice, pues el tercero sería el punto impropio de la misma.

Al estar O en la directriz, las tangentes desde dicho punto a la parábola van a ser ortogonales, luego ellas mismas van a ser también las tangentes a y b en O a la podaria.

Pasemos a determinar las rectas OG y OD que pasan por los puntos cuyas tangentes son paralelas a las asíntotas. Según la consecuencia quinta del teorema general sobre involuciones, las paralelas a la asíntota van a cortar a la podaria en puntos en involución, lo que nos va a proporcionar una involución ordinaria de rectas al proyectar dichas parejas desde O . Llamemos \mathbb{I} a esta involución para simplificar el lenguaje. Las rectas dobles de \mathbb{I} van a ser las rectas OG y OD buscadas.

Como las rectas que pasan por O van a cumplir distintas funciones a lo largo de esta exposición, agreguémosle el subíndice uno en todo lo relativo a la involución \mathbb{I} que nos ocupa. Tendremos así la pareja de homólogas (a_1, a'_1) constituida por las propias tangentes a y a' a la podaria. Una nueva pareja (b_1, b'_1) la tendremos proyectando desde O los puntos A y B ya obtenidos.

Existe una tercera pareja de homólogos en \mathbb{I} que también vamos a necesitar, pero que no es conocida todavía. Nos referimos a la paralela por O a la asíntota y la recta OE que une O con el punto de intersección E de la podaria y la asíntota.

Para la determinación de E , vamos a definir una involución \mathbb{I}_2 de puntos $(A_1, A'_1, B_1, B'_1, \dots)$, obtenida cortando \mathbb{I} con la asíntota. El punto E será el centro de esta nueva involución. En la figura está indicada la forma de obtener los puntos dobles M_1 y N_1 y el centro E .

Proyectando desde O tenemos las rectas dobles m_1 y n_1 que son las OG y OD buscadas, pero no conocemos, por el momento ni el punto G ni el D .

De las múltiples formas que podemos parametrizar racionalmente la podaria, vamos a considerar dos:

- **Mediante un haz de rectas de vértice O .**

Es la forma más clásica. Cada recta tiene dos intersecciones en O y queda una tercera para la parametrización.

- **Mediante un haz de circunferencias de puntos fundamentales O y B .**

Cada circunferencia tiene dos intersecciones en O , dos en los puntos cíclicos y una más en B . La sexta será la que parametriza racionalmente la curva.

La naturaleza unicursal de la curva exige entonces que haya una proyectividad entre las rectas y las circunferencias de los dos haces mencionados. Dicha proyectividad va a venir definida por tres parejas que sirvan para engendrar tres puntos conocidos de la curva.

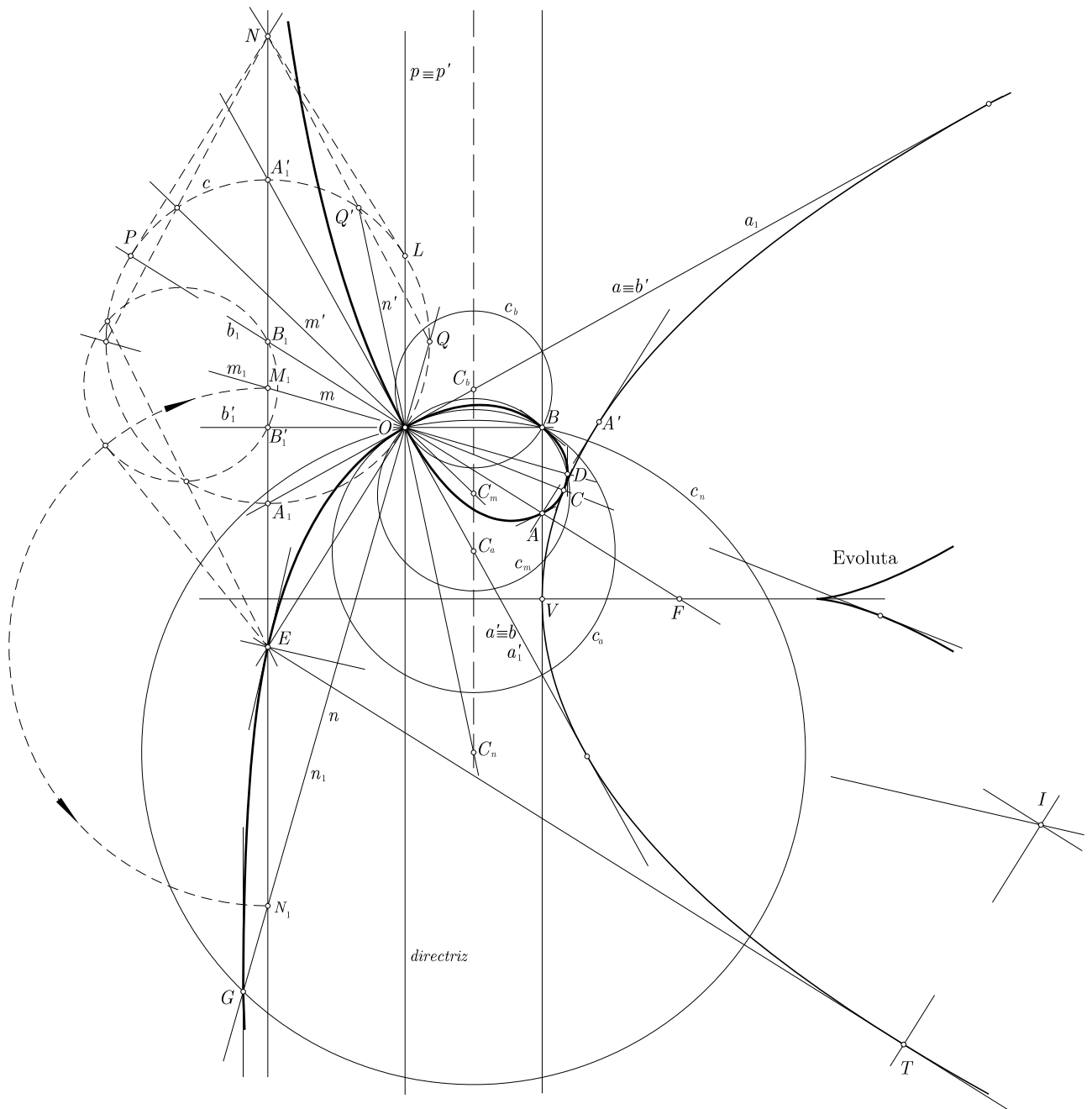


Fig. 4.36.- La podaria de una parábola respecto a un punto O de su directriz es una estrofoide oblicua.

Vamos a elegir como tales puntos el O en cada una de las ramas que pasan por él y el punto del infinito de la podaria.

El punto O se obtiene de dos formas:

- Por intersección de la tangente a a la parábola y una circunferencia c_a que tiene su centro en la tangente b .
- Por intersección de la tangente b a la parábola y una circunferencia c_b que tiene su centro en la tangente a .

El punto del infinito de la curva lo vamos a obtener por intersección de la paralela p a la asíntota con la circunferencia de radio infinito perteneciente al haz.

Ahora bien, como el haz de circunferencias no es uno de los espacios convencionales estudiados en el campo gráfico elemental, hemos de derivar de él un espacio conocido a través de operaciones válidas para ello. Optaremos, entre las diversas opciones, por el espacio (C_a, C_b, C_c, \dots) constituido por la serie de centros que, a su vez, vamos a proyectar desde O para obtener un nuevo haz (a', b', c', \dots) que nos va a quedar superpuesto al primero (a, b, c, \dots) .

Fácilmente observamos que la proyectividad de haces superpuestos así obtenida es una nueva involución \mathbb{I}_3 ya que existe correspondencia doble entre la pareja (a, a') y (b, b') . Asimismo, observamos que el rayo p es doble en \mathbb{I}_3 .

En esta nueva involución definida, los homólogos m' y n' de m y n nos proporcionan los centros C_m y C_n de las circunferencias que generan, por intersección con m y n , los puntos D y G .

Las tangentes en los puntos obtenidos de la estrofoide se pueden trazar por un método cinemático, pues si consideramos una escuadra que se va moviendo de manera que uno de sus lados quede tangente a la parábola y el otro vaya pasando por O , se tienen dos pares de perfiles conjugados que nos permitirán obtener el centro instantáneo I de la citada escuadra.

En la figura anterior se han dibujado todas las tangentes en los puntos generados de la estrofoide, pero solamente se ha dejado dibujado el correspondiente al punto E para no complicar aún más dicha figura. La tangente en E a la estrofoide es la perpendicular por E a la recta IE .

Finalmente, hay que indicar que el punto C de tangencia entre la estrofoide y la parábola no es construible con regla y compás, pues habría que tener un método de trazado de la normal desde O a la parábola, o bien la tangente desde O a la evoluta, o bien la intersección de la hipérbola de Apolonio correspondiente a O con la parábola.

Cualquiera de estos problemas es de naturaleza cúbica y, en principio, no parecen reducibles. La solución mostrada en la figura se ha obtenido con el sistema asistido por ordenador.

4.6. SIGUIENDO A STEINER

EL que introdujo el concepto de cónica como intersección de rayos homólogos de haces proyectivos fue Steiner. Verdaderamente, en su tiempo, no se había generali-

zado el concepto de espacio proyectivo como estructura algebraica tal y como lo conocemos hoy.

Es por ello por lo que creemos interesante aprovechar la idea de Steiner para la definición de curvas como intersección de elementos homólogos de espacios proyectivos no convencionales.

A sabiendas de que, dentro de la generalidad, no dejan de ser casos particulares entre los múltiples escenarios que podemos encontrar proponemos los siguientes teoremas de los que pueden derivarse, a su numerosos casos particulares que nos hacen conectar con teoremas clásicos ya conocidos o con situaciones totalmente novedosas.

Teorema 4.-III

Consideremos en el plano, una cónica c , una recta r y un punto V . Definamos en V una proyectividad \mathcal{P} de haces superpuestos que hace corresponder a cada rayo a su homólogo a' que corta a r en un punto A' en el que definimos el birrayo (a_1, a_2) constituido por las tangentes a c .

El lugar geométrico C , de los puntos de intersección de a con el birrayo (a_1, a_2) es una cuártica unicursal cuyos puntos dobles son el punto V y los puntos M y N de intersección con r de los rayos dobles de \mathcal{P} .

Hagamos, en primer lugar, un análisis gráfico de la situación en e que vamos a poder deducir alguna de las conclusiones, pero la certeza final de algunas de ellas solamente la podremos tener recurriendo al campo analítico. No en vano, el propio Steiner comentaba que la Analítica era la muleta en que se apoyaba el investigador para probar muchas de sus conjeturas, difíciles de probar de forma gráfica.

De toda la cadena de proyectividades

$$a \rightarrow a' \rightarrow A' \rightarrow (a_1, a_2)$$

el último escalón es el que no cae dentro del campo convencional sobradamente conocido, pero en realidad, estos birrayos no son más que los pares de homólogos de la involución de tangentes a c de eje r .

Además, si quisiésemos, estos birrayos, cuyos puntos de contacto T_1 y T_2 no hemos representado en la figura, se pueden poner en biyección con las rectas T_1T_2 que concurren en el polo R de r respecto a c .

Esta es una rama colateral del torema que no hemos considerado demomento, pero que también puede dar sus frutos, pues de la intersección de los puntos homólogos de los tres haces constituidos por a , a' y T_1T_2 nos van a resultar cónicas que van a estar altamente implicadas en los resultados del teorema que pretendemos establecer.

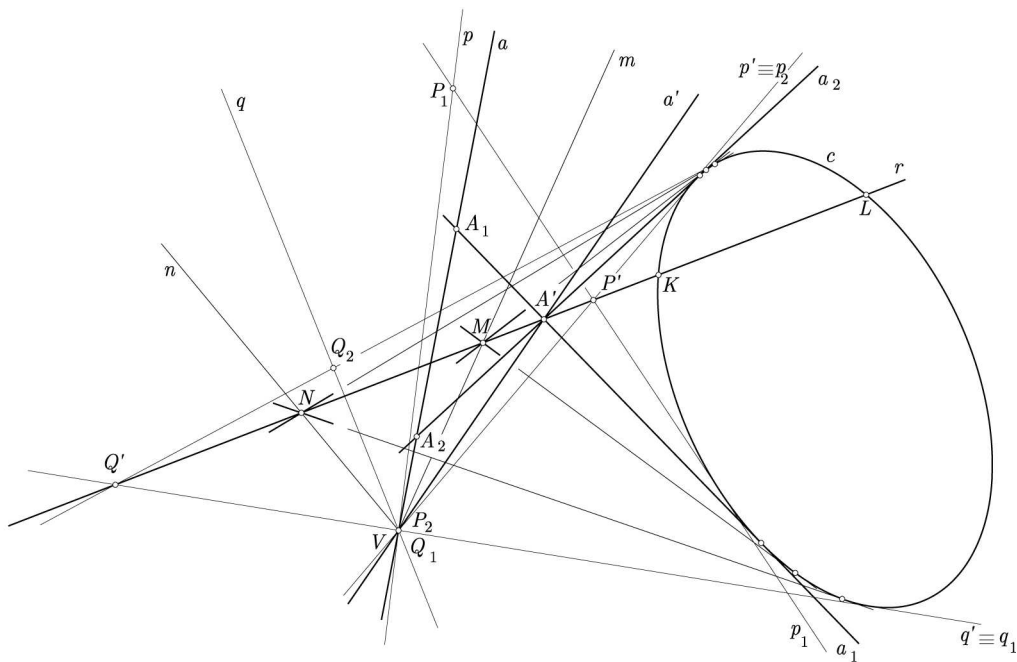


Fig. 4.37.-

Es evidente, que siendo algebraicas todas las operaciones involucradas, también han de serlo la curva C , pero de su grado no conocemos nada de antemano y mucho menos de su unicursalidad.

Analicemos las situaciones particulares de la cadena de proyectividades que nos van a arrojar mucha luz sobre el problema.

Como desde V se pueden trazar dos tangentes a c , habrá dos posiciones p y q de a para las cuales p' y q' van a quedar tangentes a c . En estas posiciones, uno de los rayos a_1 ó a_2 va a coincidir con p' ó q' . La consecuencia va a ser que la curva engendrada va a pasar por V , como vamos a ver.

Para fijar las ideas, supongamos que en esta situación el rayo p desemboca el birrayo $(p_1, p_2 \equiv p')$. La intersección de ambos nos da los puntos P_1 y V de la curva C con la información adicional de que la tangente en V va a ser el propio rayo p , puesto que va a ser la posición límite de una cuerda que tiende a este punto. Concluimos entonces que la curva engendrada tiene con p , de momento, tres cortes, dos en V , por la tangencia, que suponemos simple y no de osculación o más, y otro en P_1 .

Análogamente, supongamos que al rayo q le hacemos corresponder el birrayo $q' \equiv (q_1, q_2)$, donde q' es tangente a c . Los correspondientes puntos de C son el Q_2 y de nuevo el V con la información de que la tangente en V va a ser q .

De esta forma, la curva engendrada, ya se nos perfila como cuártica, aunque no ten-

dremos la certeza hasta recurrir a la Analítica, como preconizaba Steiner. Cada una de las rectas p y q tiene un triple corte en V (una tangencia más un corte simple) más otro corte simple fuera de V .

Sigamos analizando situaciones particulares de la cadena de proyectividades. En la correspondencia $a \rightarrow a'$ habrá dos rayos dobles (reales o imaginarios) m y n . Para estos rayos, los correspondientes birrayos (m_1, m_2) , (n_1, n_2) vuelven a tener un vértice concurriendo con m y n respectivamente. Esto va a traer como consecuencia que en estos puntos, M y N , se van a presentar sendos puntos dobles para la curva \mathcal{C} . Además, se observa que esta circunstancia es la única que se puede dar para que la recta r corte a la curva \mathcal{C} . Además, se observa que esta circunstancia es la única que se puede dar para que la recta r corte a la curva \mathcal{C} , lo que nos confirma como cuártica la curva engendrada, si bien, de estas observaciones, nunca nos podemos fiar. La Analítica nos dará la respuesta definitiva.

Si la recta r corta a c en dos puntos reales K y L , cuando a' pasa por ellos, el birrayo se convierte en una recta doble, lo que va a traer como consecuencia en la cuártica de la existencia de puntos cuya tangente pase por V . Vemos que la existencia de tales puntos está ligada a la condición de que r corte o no a c en puntos reales. Ambas posibilidades están separadas por el caso en que r es tangente a c que será motivo de análisis en la consecuencia ??.

Si la confirmación sobre el grado de la curva se produce, dicha curva ha de ser unicursal, pues presenta los puntos dobles V , M y N .

Pasemos a la esperada confirmación analítica. Supongamos que elegimos V como origen de un sistema de coordenadas. El haz de rectas a , primer elemento generador, tendrá como ecuación

$$y = \lambda x \quad (4.2)$$

Si son (x_1, y_1, t_1) , (x_2, y_2, t_2) las coordenadas de dos puntos de r , las paramétricas de esta recta serán

$$x = x_1 + ux_2, \quad y = y_1 + uy_2, \quad t = t_1 + ut_2.$$

La proyectividad existente entre a y a' permitirá expresar el parámetro u correspondiente al punto de corte con a' en la forma

$$u = \frac{A\lambda + B}{C\lambda + D}$$

Las coordenadas homogéneas del punto A' pueden ser entonces

$$x_{A'} = x_1(C\lambda + D) + x_2(A\lambda + B)$$

$$y_{A'} = y_1(C\lambda + D) + y_2(A\lambda + B)$$

$$t_{A'} = t_1(C\lambda + D) + t_2(A\lambda + B)$$

Si la ecuación de la cónica c es $f(x, y, t) = 0$, la ecuación del par de tangentes desde A' es [?]

$$(x_{A'}f'_x + y_{A'}f'_y + t_{A'}f'_t)^2 - 4f(x, y, t)f(x_{A'}, y_{A'}, t_{A'}) = 0$$

o bien

$$[(x_1(C\lambda + D) + x_2(A\lambda + B))f'_x + (y_1(C\lambda + D) + y_2(A\lambda + B))f'_y + (t_1(C\lambda + D) + t_2(A\lambda + B))f'_t]^2 - 4f(x, y, t)f[(x_1(C\lambda + D) + x_2(A\lambda + B)), \dots] = 0 \quad (4.3)$$

La ecuación del lugar geométrico buscado la tendremos eliminando λ entre las ecuaciones 4.2 y 4.3 con lo que tendríamos

$$[(x_1(Cy + Dx) + x_2(Ay + Bx))f'_x + (y_1(Cy + Dx) + y_2(Ay + Bx))f'_y + (t_1(Cy + Dx) + t_2(Ay + Bx))f'_t]^2 - 4f(x, y, t)f[(x_1(Cy + Dx) + x_2(Ay + Bx)), \dots] = 0$$

Como la función $f(x, y, t)$ es de segundo grado, sus derivadas parciales lo son de primero y fácilmente deducimos que la ecuación anterior es de cuarto grado. La eliminación, aunque engorrosa hecha manualmente, no presenta dificultad si se realiza con un programa de cálculo simbólico.

Los casos particulares que pueden presentarse para este teorema general son muy numerosos y nos pueden conducir a determinados teoremas conocidos que de otra forma tendrían difícil demostración.

Consecuencia 4.-I

Si la recta r es tangente a la cónica c , el lugar geométrico se descompone en dicha recta más una cúbica.

En efecto, la recta r va a ser, para todas las posiciones del rayo a una de las rectas que forman el birrayo (a_1, a_2) . La intersección de a considerado variable nos da un punto del lugar al que pertenece r .

Consecuencia 4.-II

Si el punto V pertenece a la cónica c la cuártica engendrada presenta un punto de retroceso en él.

Es un paso al límite del caso general. Las dos tangentes a c desde V se confunden en una sola. Considerada esta tangente única como rayo a' , tiene un único antecedente a y la cuártica engendrada presenta en V una tangente única, como límite de dos ramas que han confluído en este punto. Se trata de un punto de retroceso en la cuártica.

Consecuencia 4.-III

Si la recta r es la recta impropia y la proyectividad \mathcal{P} es la involución rectangular, el lugar geométrico buscado se convierte en la podaria de la cónica respecto a \underline{V} , que va a ser una cuártica bicircular.

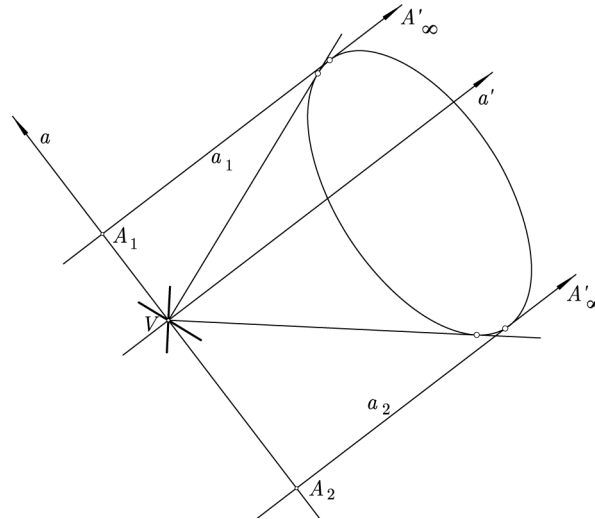


Fig. 4.38.-La podaria de una cónica con centro es una cuártica bicircular.

Efectivamente, observemos que en este caso el rayo a' es ortogonal a a y, al ser r la recta impropia, las rectas a_1 y a_2 se convierten en las tangentes a la cónica que son ortogonales a a . Si intersección con esta recta nos conduce a la podaria de la cónica respecto a V .

En este caso, los puntos dobles de la proyectividad que se subordina en r_∞ van a ser los puntos cíclicos. Como éstos han de ser dobles de la cuártica que se genera, estamos ante una cuártica bicircular.

El tercer punto doble de la cuártica es el propio punto V y las tangentes en él son las ortogonales a las tangentes trazadas a la cónica desde este punto.

Consecuencia 4.-IV

La podaria de una parábola es una cúbica circular.

Al ser la parábola tangente a la la recta impropia, estamos en un caso particular del anterior y de la consecuencia 4.-I.

Teorema 4.-IV

Sean \underline{V} y \underline{c} un punto y una cónica coplanaria con él a la que llamaremos cónica directriz.

Sea \underline{c}_1 otra cónica coplanaria y \underline{P} un punto variable de la misma.

El lugar geométrico de los puntos de intersección de la recta \underline{VP} con la polar de \underline{P} respecto a \underline{c} es una cuártica unicursal cuyos puntos dobles son el punto \underline{V} y los puntos de

tangencia con c de las tangentes trazadas desde V .

Como en el teorema anterior, muchas de las deducciones las podemos hacer razonando sobre la figura. Sea p_V la polar de V respecto a c . Dicha polar encontrará a la cónica c_1 en dos puntos A y B . Las polares de estos puntos respecto a c pasan por V , puesto que ambos puntos están sobre la polar de V .

En consecuencia, cuando P recorre c_1 , su correspondiente polar corta a VP en dos ocasiones, luego V es punto doble del lugar geométrico.

Adicionalmente, como VP va pasando en todo momento por V , las tangentes de la curva a su paso por este punto serán las rectas VA y VB .

Consideremos ahora las situaciones en las que el punto P ocupa las posiciones C, D o E, F contenidas en las tangentes trazadas desde V a c_1 . Razonemos con el punto C , por ejemplo. La polar de C respecto a c pasa por M , luego este punto es un punto del lugar. De forma análoga, la polar de D también pasa por M , luego el lugar va a pasar por M dos veces, con lo que tendrá un punto doble en M .

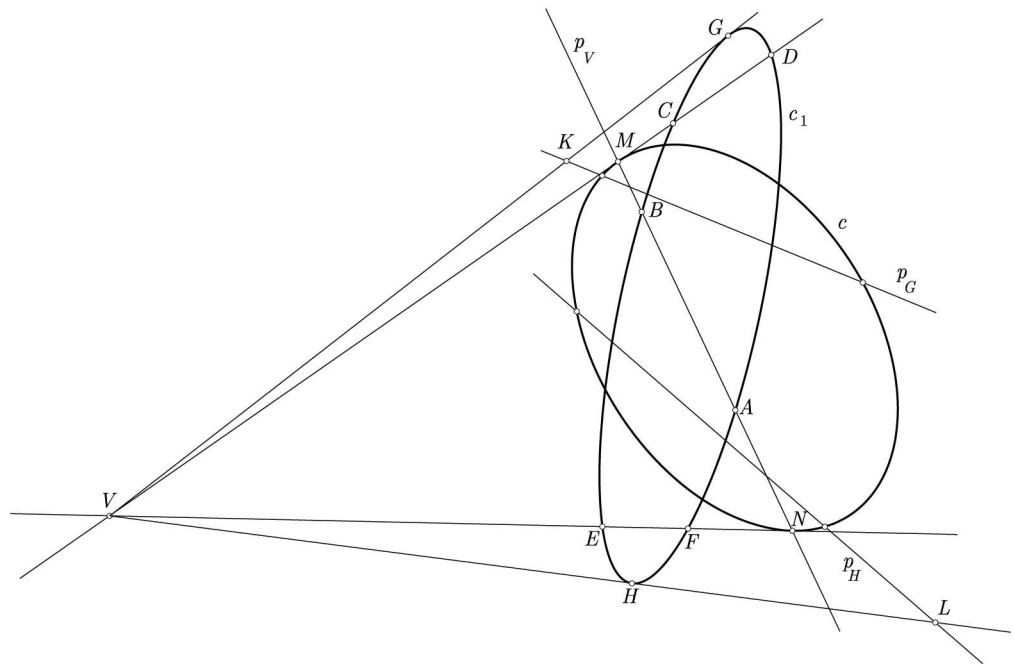


Fig. 4.39.-

Análogamente, el punto N también será doble, luego ya hemos localizado tres puntos dobles del lugar: V, M y N . Si confirmamos que la curva es de cuarto grado, ya hemos probado que es unicursal. De momento tenemos todos los indicios para que sea de cuarto grado, pues los lados del triángulo VMN cortan a la curva en dos puntos dobles cada uno.

Cuando el punto P ocupa las posiciones G y H , puntos de contacto de las tangentes a c_1

trazadas desde V engendraremos puntos del K y L cuyas tangentes pasan por V . Las rectas VG y VH son tangentes al lugar en K y L y lo cortan en el punto doble V , lo que nos afianza en la idea de que es de cuarto grado.

Expongamos unas últimas consideraciones que nos van a confirmar que el grado va a ser cuatro, pero nos van a surgir unas sutilezas que solamente puede resolver la Analítica. Está demasiado claro si consideramos el barrido de rayos pivotando alrededor de V . Cada rayo va a cortar a c_1 en dos puntos a los que van a corresponder dos polares respecto a c . La intersección con cada rayo nos da dos puntos del lugar, que unidos a los dos que supone el hecho de tener punto doble en V nos da un total de cuatro cortes para cada rayo del barrido.

La sutileza antes aludida es la siguiente: ¿qué ocurre si el punto V se encuentra sobre la cónica c_1 ? En este caso los rayos del barrido solamente la cortan en un punto además del propio V . Todo invita a pensar que la curva se convierte en cúbica, pero ¿hay algún tipo de degeneración que se escapa? Como siempre, la Analítica ha de ser la herramienta que nos dé la respuesta.

Adoptemos el punto V como origen de coordenadas. Si este punto pertenece a c_1 , existen unas paramétricas $x(u), y(u)$ de esta cónica tales que $y(u)/x(u) = u$. En este caso el rayo OP tendrá por ecuación

$$x(u)y - y(u)x = 0 \quad (4.4)$$

Si la ecuación de c es $f(x, y, t) = 0$, la polar del P es

$$x(u)f'_x + y(u)f'_y + f'_t = 0 \quad (4.5)$$

La ecuación del lugar buscado se obtendrá eliminando u entre 4.4 y 4.5. Como ambas ecuaciones son cuadráticas en u su eliminante va a ser de cuarto grado. Estamos, efectivamente, ante una cuártica.

Sin embargo, si el punto V pertenece a c_1 , existe una parametrización $x(u), y(u)$ tal que $y(u)/x(u) = u$. Es la que se obtiene al parametrizar la cónica con el haz de recta de vértice en uno de sus puntos. En este caso, el lugar se obtiene al eliminar entre

$$y = ux, \quad x(u)f'_x + y(u)f'_y + f'_t = 0$$

donde la primera ecuación es lineal en u y la segunda cuadrática. La eliminante nos va a conducir a una cúbica. No hay ningún tipo de degeneración en el proceso.

Obsérvese el gran emparentamiento de este teorema con el anterior. Consideremos la cónica c'_1 polar recíproca de c_1 respecto a c . En el plano polar recíproco, al punto V va a corresponder una recta v y a los pares de polares de los puntos de intersección de los rayos de V con c_1 van a corresponder parejas de birrayos tangentes a c'_1 desde los puntos de v .

La polaridad recíproca supone una relación proyectiva entre los rayos de V y los puntos de v y por ende, con los birrayos tangentes desde estos puntos. El teorema viene a establecer el lugar geométrico de las intersecciones de elementos homólogos de ambos espacios proyectivos.

En definitiva, no hacemos sino seguir los pasos de Steiner en su definición proyectiva de cónica. Estamos extrapolando la idea inicial a espacios no convencionales, fruto del desarrollo de la Geometría algebraica.

Ejercicio 4.-V

Supongamos que la cónica c es la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

tangente a los ejes coordenados y de centro (a, a) .

Sea V el propio origen de coordenadas y c_1 la parábola

$$y = \frac{a}{2} + \frac{x^2}{2a}$$

Se trata de hallar y representar la cuártica engendrada con el algoritmo anterior.

Unas paramétricas de la parábola pueden ser

$$x = u, \quad y = \frac{a}{2} + \frac{u^2}{2a}$$

La polar de un punto P de c_1 respecto a c es

$$u(x - a) + \left(\frac{a}{2} + \frac{u^2}{2a}\right)(y - a) + a^2 - ax - ay = 0$$

La ecuación de la recta OP es

$$2auy = (a^2 + u^2)x$$

La eliminación del parámetro u nos conduce a la cuártica

$$y^4 + 2xy^3 - x^2y^2 - 2x^4 - 2ay^3 - 2axy^2 + 4ax^3 - 2a^2x^2 + a^2y^2 = 0$$

La polar de O respecto a c es la recta $x + y = a$, que corta a c_1 en los puntos $A[(-1 + \sqrt{2})a, (2 - \sqrt{2})a]$ y $B[(-1 - \sqrt{2})a, (2 + \sqrt{2})a]$. Las proyecciones de estos puntos desde O hacen que este punto sea doble y que las pendientes de las tangentes en él valgan $\pm\sqrt{2}$, que son las pendientes de OA y OB .

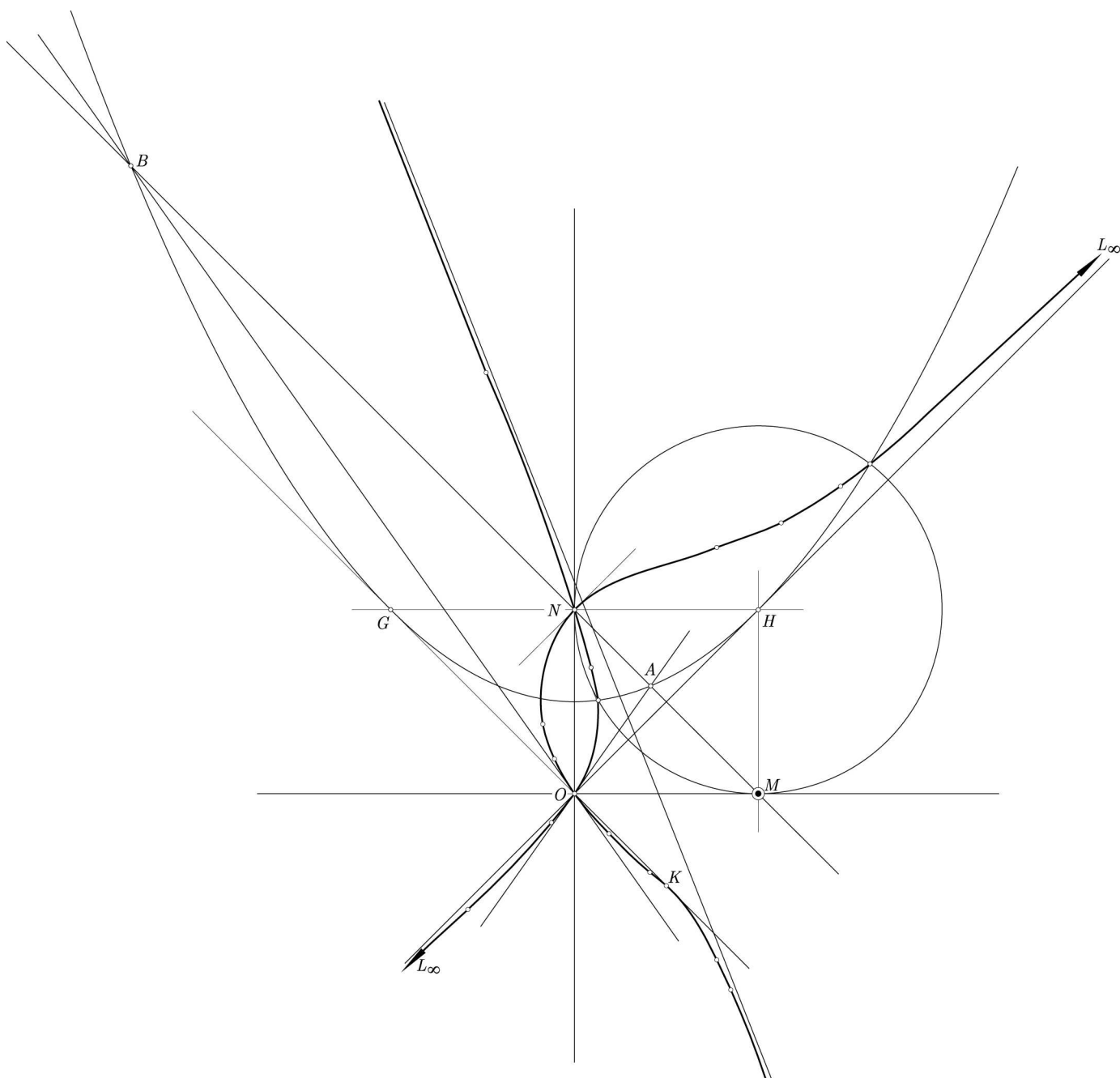


Fig. 4.40.-

Análogamente, los puntos $M(a, 0)$ y $N(0, a)$ de tangencia de c con las tangentes trazadas desde O a esta curva, van a ser también puntos dobles. El primero es aislado con tangentes en él las rectas isotropas y las tangentes en el segundo tienen por pendientes 1 y -3 obtenidas todas ellas de la ecuación de la curva.

Los puntos K , casi inapreciable en la figura, y L_∞ son puntos cuyas tangentes pasan por O y proceden de los puntos $G(-a, a)$ y $H(a, a)$ que son los puntos de tangencia de las tangentes trazadas desde O a c_1 .

Finalmente, resaltamos que la curva presenta dos asíntotas, que hemos calculado con el método de Newton-Cramer. La primera es la $y = x$, deducible sin esfuerzo y la segunda es $y = -2,52138x + 3,34593a$ para la que se ha necesitado un programa de cálculo simbólico.

Consecuencia 4.-I

Si el punto V pertenece a la cónica c_1 el lugar engendrado es una cúbica unicursal con punto doble en V .

Según lo que acabamos de exponer, el barrido de rayos que pasa por V corta a c_1 en un solo punto. Tendremos entonces en cada rayo un solo punto del lugar que, unido a la existencia del punto doble V que se mantiene, solamente nos da tres cortes para cada rayo. El lugar será una cúbica que, además, será unicursal por la existencia del punto doble.

Ejercicio 4.-VI

Supongamos que la cónica c sea la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

tangente a los ejes coordenados y centro (a, a) .

Sea V el propio origen de coordenadas y c_1 la parábola

$$y = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{a} + 1 \right) x$$

Comprobar que en este caso la cuártica se convierte en cúbica. Hallarla y representarla.

Unas paramétricas de la parábola pueden ser

$$x = u, \quad y = \frac{2}{3} \left(\frac{u}{a} - 1 \right) u$$

Se trata de eliminar u entre las ecuaciones

$$(x - a)u + (y - a)\frac{2}{3} \left(\frac{u}{a} + 1 \right) u + a^2 - ax - ay = 0$$

$$uy - \frac{2}{3} \left(\frac{u}{a} + 1 \right) ux = 0$$

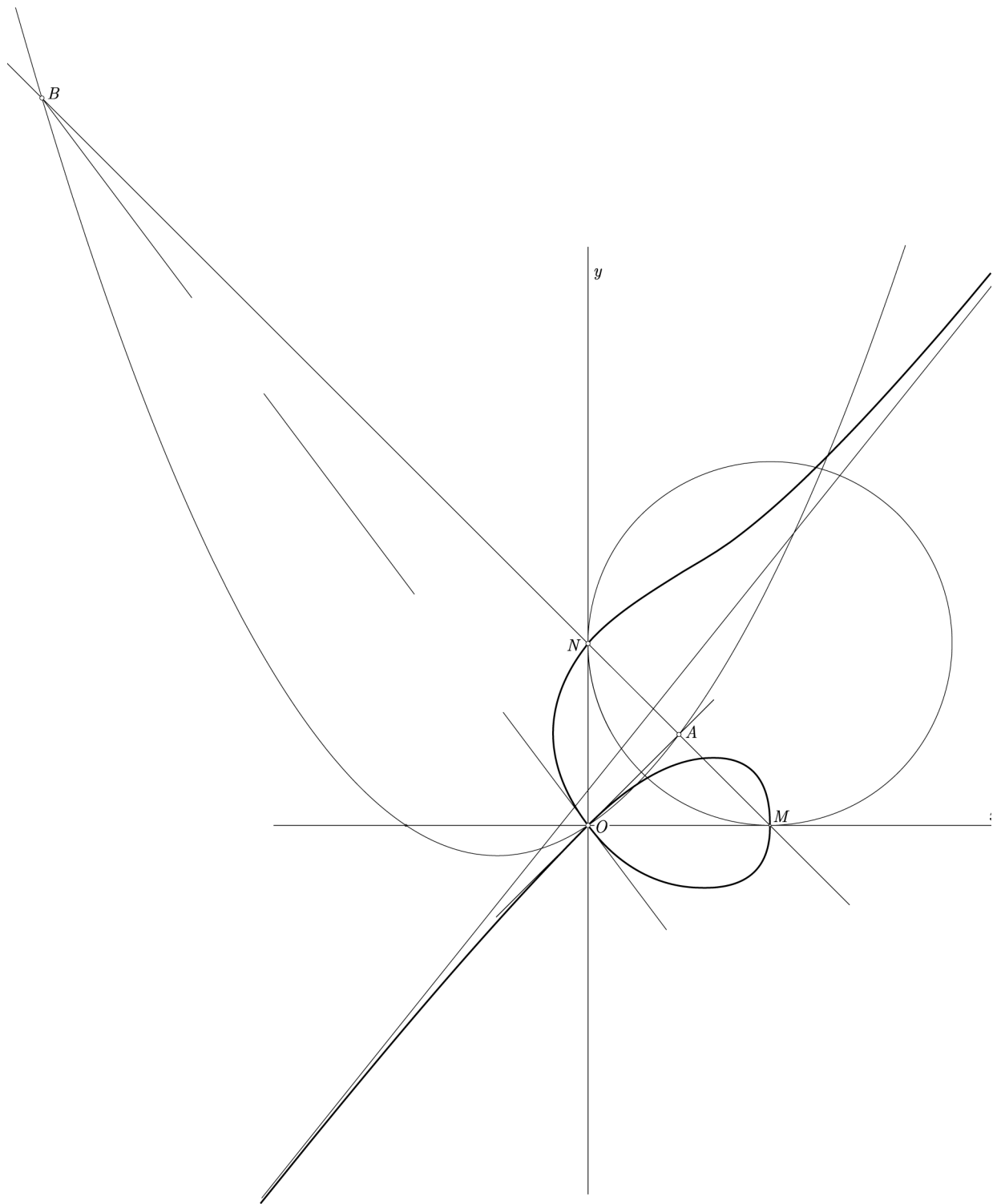


Fig. 4.41.-

Efectivamente, de la eliminación nos queda la cúbica

$$3ay^2 + axy - 4ax^2 - 3y^3 + 2xy^2 - x^2y + 4x^3 = 0$$

Presenta en O un punto doble cuyas tangentes vienen dadas por

$$3y^2 + xy - 4x^2 \equiv 3(y - x) \left(y + \frac{4}{3}x \right)$$

que, efectivamente, coinciden con las rectas OA y OB que unen el punto O con su polar respecto a la cónica c .

Presenta la asíntota $y = 1,25155x + 0,193305a$ que hemos obtenido con un calculador simbólico.

Consecuencia 4.-II

Si la cónica c_1 pasa por uno de los puntos de contacto M ó N de V las tangentes trazadas desde V a C , la tangente a c en el punto de coincidencia pertenece al lugar que degenerará en dicha tangente más una cúbica unicursal.

Si la cónica c_1 pasa por los dos puntos M y N las tangentes en estos puntos a c pertenecen al lugar, que degenerará entonces en estas dos tangentes más una cónica.

Resulta evidente. Cuando VP va recorriendo la cúbica c_1 , al llegar al citado punto de contacto, la polar de P es la propia tangente a c en este punto, que coincide entonces con VP . Su intersección va a ser toda la recta.

Ejercicio 4.-VII

Supongamos que c es la misma circunferencia de los ejercicios anteriores

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

que c_1 es la parábola

$$(y - x)^2 + a(x + y) - 2a^2 = 0$$

y que V es el origen.

Hallar el lugar geométrico engendrado para este caso.

Unas paramétricas de la parábola dada pueden ser

$$x = a - \frac{u^2}{2a} - \frac{u}{2}, \quad y = a - \frac{u^2}{2a} + \frac{u}{2}$$

El lugar geométrico lo tenemos eliminando entre las ecuaciones

$$(x - a) \left(a - \frac{u^2}{2a} - \frac{u}{2} \right) + (y - a) \left(a - \frac{u^2}{2a} + \frac{u}{2} \right) + a^2 - ax - ay = 0$$

$$\left(a - \frac{u^2}{2a} - \frac{u}{2}\right)y - \left(a - \frac{u^2}{2a} + \frac{u}{2}\right)x = 0$$

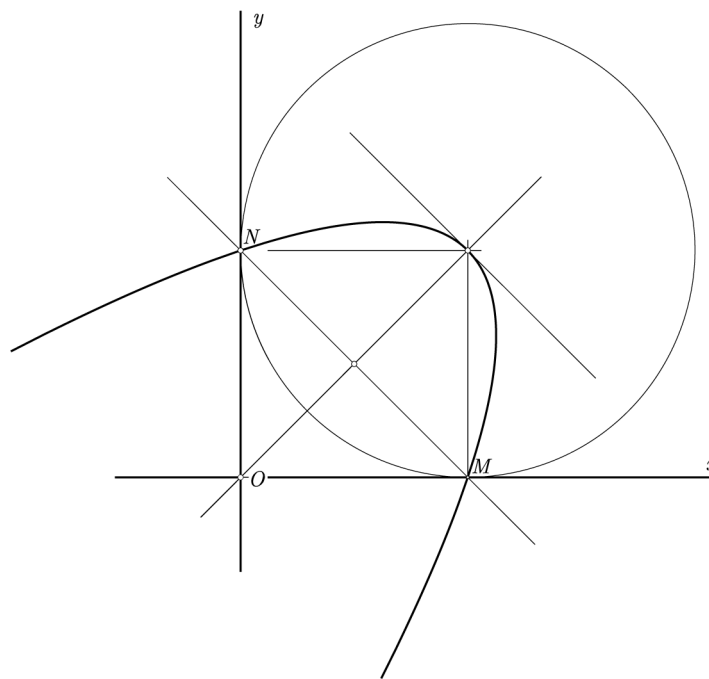


Fig. 4.42.-

La eliminación nos conduce a

$$xy[(y - x)^2 + a(x + y) - 2a^2] = 0$$

Vemos que el lugar degenera en las dos tangentes desde O ¡y la propia parábola de partida!

Este resultado parece sorprendente y merece la pena que sea analizado más detenidamente.

En los casos en que la cónica c_1 pasa por los puntos M y N sabemos que el lugar engendrado degenera en las dos tangentes más otra cónica. Si ignoramos las tangentes, el problema de generación del lugar geométrico podría interpretarse como el de una transformación que transforma cónicas en cónicas, lo que nos hace pensar en una transformación proyectiva, idea que luego hemos de desechar, como ya veremos.

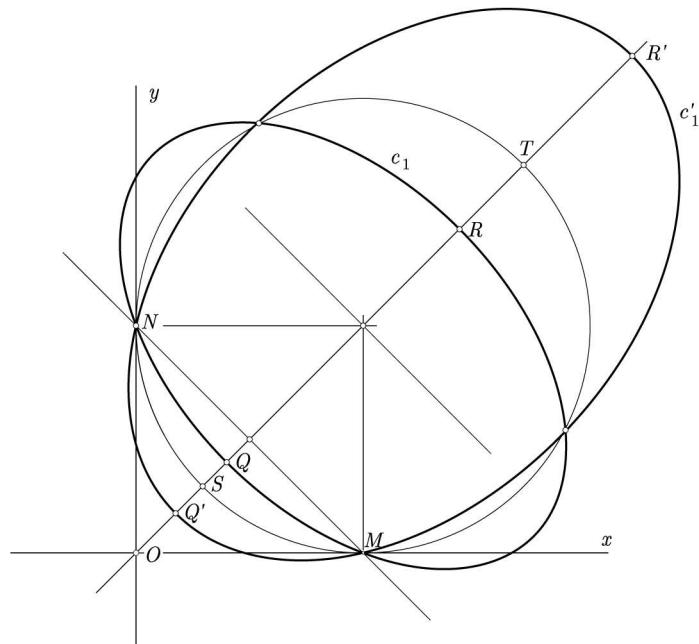


Fig. 4.43.-

Consideremos el haz de cónicas definido por los puntos fundamentales M y N y dos puntos adicionales más, los Q y R pertenecientes a la primera bisectriz de Oxy . Las cónicas transformadas han de formar otro haz que ha de pasar por M y N , por ser dobles, y por los Q' y R' conjugados armónicos de los Q y R respecto a S y T .

Si en ambos casos nos limitamos a la condición de que las cónicas sean simétricas respecto a la primera bisectriz de Oxy estamos considerando cónicas únicas que han de transformarse una en otra.

¿Qué ocurriría si los puntos Q y R los hubiésemos dado conjugados armónicos respecto a la pareja (S, T) ? Sus conjugados armónicos respecto a esta pareja serían ellos mismos intercambiados, con lo cual la cónica transformada coincide con sí misma.

Esto es lo que ha ocurrido con la parábola del ejemplo. Hemos hecho que pase por el centro de c y por el punto impropio de la primera bisectriz de Oxy que forman cuaterna armónica con (S, T) .

Idea de que en estas condiciones tan particulares se setá subordinando una transformación proyectiva en el plano hay que desecharla inmediatamente. Tendría cuatro puntos dobles, los (M, N) y los (S, T) , cosa que es imposible en una homografía plana, que solamente puede presentar tres, salvo los casos de homología que también se descartan en este caso.

Más adelante abriremos la sección 4.7 en la que será reanalizado el teorema general.

Consecuencia 4.-III

Si seguimos con la idea expuesta al final del ejercicio anterior, de salirnos de la cónica c_1 y extrapolar una transformación puntual al plano, podemos decir:

Sea P un punto del plano y c una circunferencia del mismo de centro O . Consideremos la transformación $P \rightarrow P'$ que hace corresponder al punto P el P' , intersección de OP con la polar de P respecto a c .

Dicha transformación es una inversión de centro O y circunferencia de autoinversión c .

Aparte de extrapolar la transformación al plano, estamos dentro del teorema general 4.-IV considerando que la cónica c circunferencia y que el punto V es su centro.

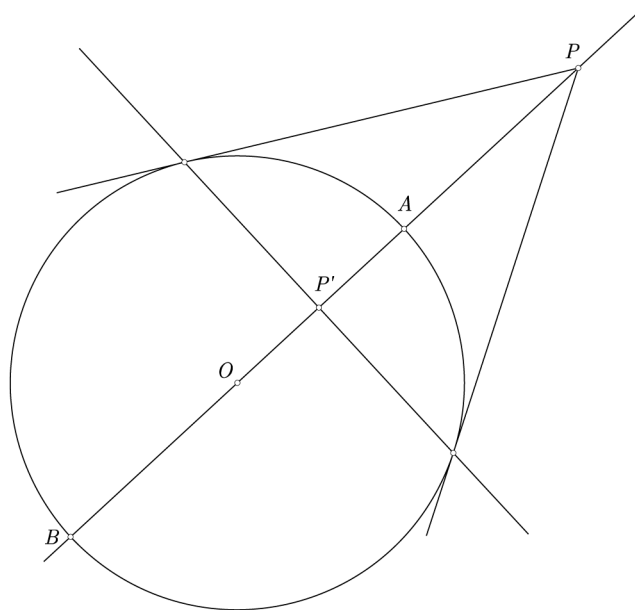


Fig. 4.44.-

Estamos cayendo en una propiedad de la Geometría elemental. La condición de que

$$(PP'AB) = -1$$

exige que

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OA}^2$$

lo que prueba que P y P' son puntos inversos respecto a O y con potencia de inversión \overline{OA}^2 .

Consecuencia 4.-IV

La inversa de una cónica con centro respecto a un punto O no perteneciente a ella es una cuártica bicircular.

El centro de inversión O es punto doble de la cuártica y las tangentes en el mismo son paralelas a las direcciones asintóticas de la cónica.

Es una propiedad ya conocida por los clásicos [2] y también citada por Sondesa [31] en su análisis del plano cíclico. Hoy la presentamos como consecuencia del teorema general 4.-IV y de la consecuencia 4.-III.

La condición de cuártica unicursal es consecuencia directa del enunciado del teorema 4.-IV. La condición de bicircular viene impuesta porque ha de tener como puntos dobles los puntos de contacto con c de las tangentes trazadas desde O , que, en este caso, son los puntos cíclicos.

Recordemos que la polar de O corta a la cónica c_1 en puntos que, proyectados desde O nos dan las tangentes a la cuártica en este punto. En este caso, la polar de O es la recta impropia que cortará a la cónica en los puntos impropios de la misma. Como consecuencia de ello, las tangentes en O a la curva inversa van a ser paralelas a las asíntotas.

Ejercicio 4.-VIII

Comprobar que la inversa de la hipérbola equilátera

$$x^2 - y^2 = a^2$$

respecto a su centro es una lemniscata de Bernoulli.

Efectivamente, si pasamos la hipérbola a coordenadas polares tenemos

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = a^2, \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$$

Supongamos que la potencia de inversión es a^2 . Si fuese distinta, obtendríamos una curva homotética respecto al origen. En nuestro caso tenemos

$$r r_{\text{inversa}} = a^2, \quad \Rightarrow \quad r_{\text{inversa}} = a^2 \cos 2\theta$$

que, en efecto, es una lemniscata de Bernoulli.

Consecuencia 4.-V

La inversa de una cónica respecto a un punto situado sobre ella es una cúbica circular con punto doble en el centro de inversión y tangentes en el mismo paralelas a las asíntotas de la cónica.

Es una nueva consecuencia en la que se dan las condiciones requeridas en las 4.-I y 4.-III ya justificadas. Creemos que puede resultar positivo comprobarlo con un resultado clásico.

Ejercicio 4.-IX

Comprobar que la inversa de una hipérbola equilátera

$$x^2 - y^2 = a^2$$

respecto al punto $V(\sqrt{3/2}a, \sqrt{1/2}a)$ es una estrofoide. Tómesese a^2 como potencia de inversión.

Trabajaremos de formamás fácil llevando el origen al centro de inversión, con lo cual, la ecuación de la hipérbola es

$$x^2 - y^2 + \sqrt{6}ax - \sqrt{2}ay = 0$$

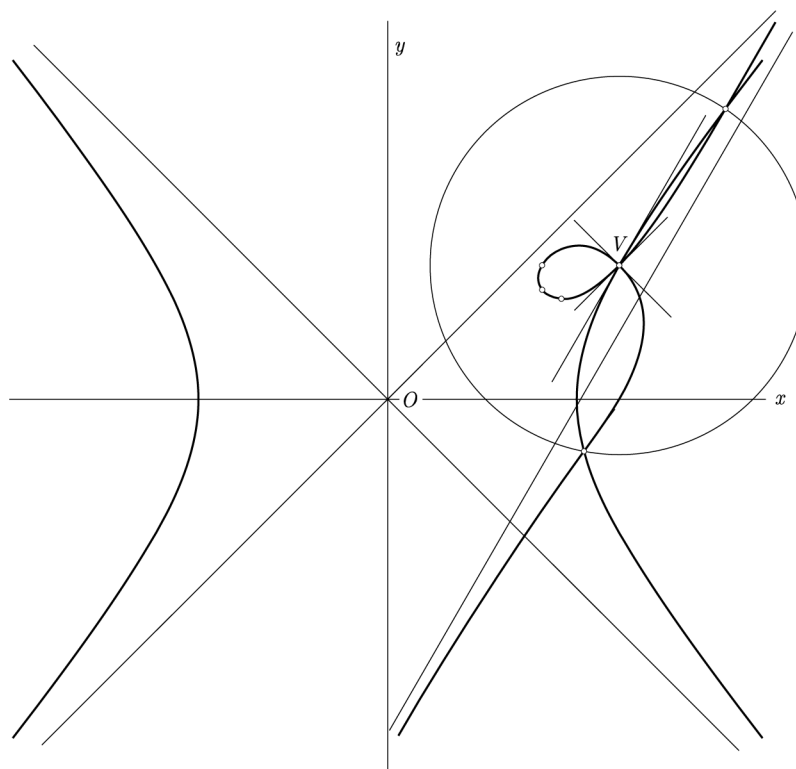


Fig. 4.45.-La inversa de una hipérbola equilátera respecto a un punto de ella es una estrofoide.

Si hacemos $y = ux$ podemos tener como paramétricas de la hipérbola

$$x = \frac{\sqrt{2}u - \sqrt{6}}{1 - u^2}a, \quad y = \frac{\sqrt{2}u - \sqrt{6}}{1 - u^2}au$$

Si seguimos la forma de operar requerida por el teorema 4.-IV, teniendo en cuenta que la cónica c es ahora la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, la curva engendrada la tendremos

eliminando el parámetro u entre las ecuaciones

$$y = ux$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{6})ax + (\sqrt{2} - \sqrt{6})a uy - a^2(1 - u^2) = 0$$

con lo que obtenemos la cúbica

$$6x^3 - 2\sqrt{3}x^2y + 6xy^2 - 2\sqrt{3}y^3 + \sqrt{6}a(x^2 - y^2) = 0$$

O bien, si queremos poner de manifiesto su naturaleza circular

$$2\sqrt{3}(x^2 + y^2)(y - \sqrt{3}x) - \sqrt{6}a(x^2 - y^2) = 0$$

Si hacemos una representación rápida con el método de Newton-Cramer vemos que en el nuevo origen tiene por tangentes las bisectrices de los ejes y que admite la asíntota $y = \sqrt{3}x - \sqrt{2}a/4$. Efectivamente, se trata de una estrofoide.

4.7. PERTENENCIA A TRANSFORMACIÓN CUADRÁTICA

EL resultado sorprendente que hemos obtenido en el ejercicio 4.-VII de la página 121 nos ha llevado a abrir una investigación sobre la naturaleza de la transformación que supone en el plano el algoritmo definido.

Habíamos lanzado la conjetura de que podía ser una transformación cuadrática y vamos a comprobar que así es.

Sea $P(x, y, t)$ un punto del plano y $f(x, y, t) = 0$ la ecuación de una cónica c del mismo que vamos a considerar como *cónica directriz*. Unamos P con un punto fijo O del plano que tomaremos como origen y hagamos corresponder a P el punto P' , conjugado de P respecto a c y situado sobre la recta OP .

Vamos a ver el algoritmo algebraico que nos hace obtener P' a partir de P . Las pertenencias de P' a la polar de P y a la recta OP las expresamos por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x'f'_x + y'f'_y + t'f'_t &= 0 \\ x'y - y'x &= 0 \end{aligned}$$

La resolución de este sistema homogéneo nos conduce a las ecuaciones de la transformación definida.

$$\frac{x'}{\begin{vmatrix} f'_y & f'_t \\ -x & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y'}{\begin{vmatrix} f'_t & f'_x \\ 0 & y \end{vmatrix}} = \frac{t'}{\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ y & -x \end{vmatrix}}$$

Efectivamente, estamos ante una transformación cuadrática, pues, al ser lineales en (x, y, t) las derivadas parciales de f , los denominadores anteriores son cuadráticos en (x, y, t) .

Acuciados por la curiosidad, hemos investigado en la bibliografía disponible y al final, Lemaire [14] ha venido a darnos la clave. La transformación es conocida como *Transformación de Hirst*.

A través de Internet hemos sabido que Thomas Archer Hirst, aunque inglés de nacimiento, fue discípulo de Steiner (todo cuadra) y se especializó en lo que eran entonces las *transformaciones de Cremona*, a cuyo grupo suponemos que debe pertenecer la suya.

El hallazgo encontrado nos pone de manifiesto la enorme cantera de aplicaciones que podemos llevar a cabo con los actuales sistemas asistidos. Seguro que la transformación de Hirst no fue mucho más allá de su concepción teórica. Los métodos de cálculo de la época la hacían impracticable, igual que las eliminantes de Sylvester, utilizadas aquí, y tantos otros algoritmos cuyo rescate nos está esperando. Esto nos hace reafirmarnos en idea de Bernard de Chartres de que *caminamos a hombros de gigantes*.

4.8. TEOREMA SOBRE INVOLUCIONES GENERALIZADAS

EN 4.5 (pág. 77) presentamos el teorema general sobre involuciones binarias, que son las que se han considerado de forma tradicional y de fácil tratamiento gráfico, pero la generalización del concepto de involución a involuciones ternarias, cuaternarias, etc. y al concepto de rango expuestos en 3.4 (pág. 48) y 3.5 (pág. 50) puede llevarnos a una generalización de dicho teorema que puede ser de utilidad para curvas de grado superior al segundo, como tendremos ocasión de ver.

Teorema 4.-V

Sea $f(x, y) = 0$ una curva fija, unicursal, de grado \underline{n} y $F(x, y) = 0$ una curva general, no necesariamente unicursal, de grado \underline{m} , que se mueve y/o se deforma por el plano dependiendo homogéneamente de \underline{k} parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ y que mantiene, aunque varíen los parámetros p puntos fijos de intersección con f .

Los puntos variables interceptados en la curva fija $f(x, y) = 0$ por la curva $F(x, y) = 0$ definen sobre f una involución $mn - p$ -aria de rango $k - 1$.

Sean $x(t), y(t)$ las ecuaciones paramétricas de f que, por su condición de unicursales serán funciones racionales de t . Las intersecciones con F vendrán dadas por la ecuación $F[x(t), y(t)] = 0$ que por el teorema de Bezout será ecuación de grado mn en t y con coeficientes paramétricos que llevarán en su interior los k parámetros λ_i .

Como ambas curvas se cortan en p puntos conocidos se podrán separar con la regla de

Ruffini p raíces de la ecuación anterior con lo que obtendremos una ecuación en t de la forma

$$A_0(\lambda_i)t^{mn-p} + A_1(\lambda_i)t^{mn-p-1} + \dots + A_{mn-p-1}(\lambda_i)t + A_{mn-p}(\lambda_i) = 0$$

Al aplicar las relaciones de Cardano a la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{A_1(\lambda_1)}{A_0(\lambda_i)} &\Rightarrow & A_0(\lambda_1)S_1 + A_1(\lambda_i) = 0 \\ S_2 &= \frac{A_2(\lambda_1)}{A_0(\lambda_i)} &\Rightarrow & A_0(\lambda_1)S_2 - A_2(\lambda_i) = 0 \\ S_3 &= -\frac{A_3(\lambda_1)}{A_0(\lambda_i)} &\Rightarrow & A_0(\lambda_1)S_3 + A_3(\lambda_i) = 0 \\ &\dots\dots\dots &\Rightarrow & \dots\dots\dots \\ S_{mn-p} &= (-1)^{mn-p} \frac{A_{mn-p}(\lambda_1)}{A_0(\lambda_i)} &\Rightarrow & A_0(\lambda_1)S_{mn-p} - (-1)^{mn-p} A_{mn-p}(\lambda_i) = 0 \end{aligned}$$

Las anteriores son $mn - p$ ecuaciones en las que hay k parámetros presentes de forma homogénea. Si fuese $k = mn - p$ tendríamos una eliminante única de los parámetros que nos daría una relación entre las S_i que representaría una involución k -aria entre los puntos de f . El rango de la misma sería $k - 1$.

Si tuviésemos más ecuaciones que parámetros ($mn - p > k$) tendríamos más de una eliminante de los parámetros, lo que va a repercutir en más de una relación entre los S_i . Los puntos de intersección con f han de cumplir las condiciones de varias involuciones $mn - p$ -arias o dicho de otra forma van a formar una involución de rango inferior a $mn - p - 1$ en tantas unidades como $mn - p$ supere a k . Dicho de otra forma el rango sería

$$mn - p - 1 - (mn - p - k) = k - 1$$

Si fuese $mn - p < k$ tendríamos demasiados parámetros y la eliminación no podría llevarse a efecto. No tiene sentido hablar de involuciones sobre f . Sería lo que tenemos, por ejemplo, si pretendemos cortar los puntos de una recta con las circunferencias del plano. Obtenemos simplemente bipuntos sin más.

Capítulo 5

GENERACIÓN DE CÚBICAS

5.1. INTRODUCCIÓN

PRESENTAMOS la generación de cúbicas y cuárticas como una aplicación de las proyectividades existentes entre haces de rectas, haces de cónicas y variedades lineales de birrayos.

Para dar un cierto autocontenido a esta exposición hemos de recordar ciertas propiedades básicas de las curvas algebraicas en general y de las cúbicas y cuárticas en particular.

5.2. HACES DE CURVAS: PROPIEDAD FUNDAMENTAL

SABEMOS que para determinar una curva de grado n hacen falta $N = n(n + 3)/2$ puntos y también sabemos por el teorema de Bezout que dos curvas de grado n se cortan en n^2 puntos. Considerando estas condiciones, hagamos una tabla con el grado de la curva, los puntos que la definen y el número de cortes con otra de igual grado.

Curva	n	$n(n + 3)/2$	n^2
Recta	1	2	1
Cónica	2	5	4
Cúbica	3	9	9
Cuártica	4	14	16

Observemos que, para grados inferiores a 3, el número de puntos necesarios para definir la curva es superior al número de puntos de intersección de dos curvas del mismo grado.

En las cúbicas, este número se iguala y a partir de ellas es inferior. Esto trae consigo una situación interesante, como vamos a ver.

Dos puntos definen una recta y un solo punto define un haz de rectas que pasa por él. Análogamente, cinco puntos definen una cónica y cuatro puntos definen todo un haz de cónicas que pasan por ellos, pero, con las cúbicas ¿qué ocurre? Si damos nueve puntos, es casi seguro que definimos una cúbica, pero como dos cúbicas se cortan precisamente en nueve puntos, si damos tales nueve puntos de intersección para definirla, no vamos a poder, como ya hemos expuesto. Quiere ello decir que hay determinadas agrupaciones de nueve puntos del plano que no nos sirven para definir una cúbica única, sino que nos definen todo un haz. Haría falta un décimo punto para salvar la indeterminación.

Utilizando la misma lógica que para las rectas y las cónicas, creemos que con ocho puntos vamos a definir un haz. Efectivamente que lo definimos, lo que no esperamos es que a los ocho puntos que nosotros damos se nos agrega un noveno por el que también pasan las cúbicas del haz que intentamos definir. En efecto, sean $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ dos de las cúbicas del haz definido.

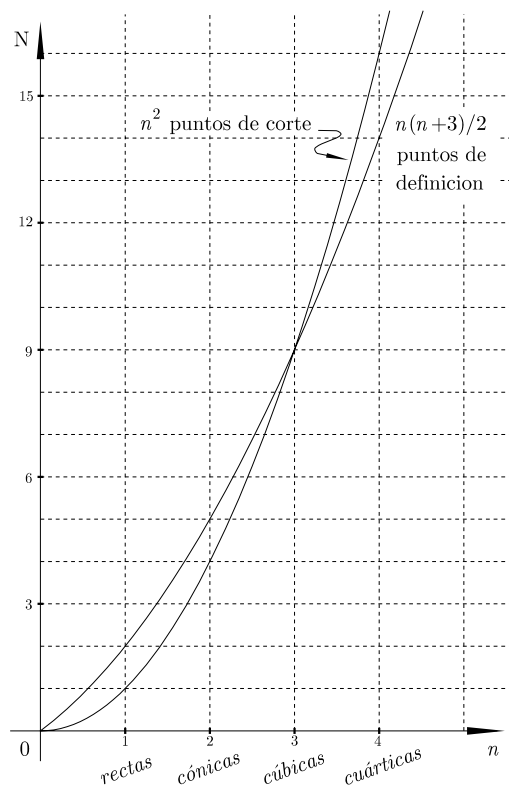


Fig. 5.46.-Comparación entre el número de puntos necesario para definir una curva de grado n y el número de puntos de intersección con otra curva del mismo grado.

Estas cúbicas se cortarán en un noveno punto además de los ocho que nosotros hemos dado y cualquier cúbica del haz cuya ecuación es $f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 0$ también va a pasar por este noveno punto. Dicho en sentido coloquial, *no hay ocho sin nueve*.

Este hecho da origen a situaciones sumamente curiosas y puede servir de método elegantísimo para ciertas demostraciones.

De la misma forma podríamos razonar con las cuárticas. En efecto, para definir una cuártica necesitamos catorce puntos. Si damos trece habremos definido un haz de cuárticas, pero el mecanismo algebraico hace que las curvas del haz que acabamos de definir pasen por otros tres puntos fijos adicionales más hasta completar los 16 puntos de intersección que poseen dos cuárticas. Utilizando de nuevo el lenguaje coloquial diremos que *no hay trece sin dieciseis*.

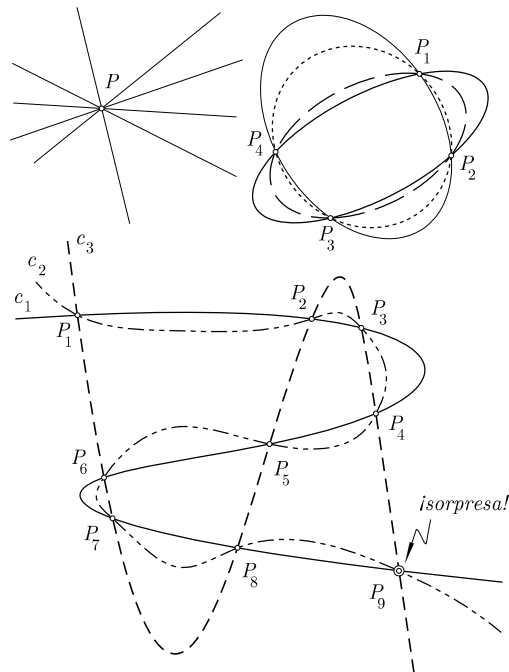


Fig. 5.47.-Un punto define un haz de rectas, cuatro un haz de cónicas y no existe ningún otro punto fijo por el que pasen las rectas o cónicas del haz. Sin embargo, ocho puntos definen un haz de cúbicas y existe un noveno, cuya aparición nos sorprende, por el que también pasan todas las cúbicas del haz.

Esta propiedad es fácilmente generalizable. Si damos $N - 1$ puntos para definir un haz de curvas de grado n , dichas curvas pasarán además por

$$n^2 - (N - 1) = n^2 - \frac{n(n + 3)}{2} + 1 = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}$$

puntos fijos a los que llamaremos en lo sucesivo *puntos adicionales*. Entre ellos y los $N - 1$ puntos dados tendremos un total de n^2 puntos de paso, que es lo que denominaremos *puntos fundamentales* del haz.

Esta propiedad básica de los haces es debida a Plücker.

5.3. PROPIEDADES DE LAS CÚBICAS

COMO consecuencia de lo anterior, recordamos tres propiedades de las cúbicas que serán de gran utilidad para exponer sus formas de generación.

Propiedad I

Consideremos una cúbica c que corta a una cónica en seis puntos M, N, P, Q, R, S . Los puntos de intersección A, B, C de la cúbica con las cuerdas MN, PQ y RS están alineados.

En efecto, las tres rectas MN, PQ y RS constituyen una cúbica degenerada que define un haz con la cúbica c . Los puntos fundamentales de este haz son los nueve puntos $A, B, C, M, N, P, Q, R, S$. Del mismo modo, la cónica y la recta AB definen otra cúbica degenerada perteneciente al haz. Pues bien, esta nueva cúbica degenerada, que por su definición ya pasa por ocho de los puntos fundamentales, ha de pasar por el noveno, el C . La única forma de cumplirlo es que la recta AB pase por él.

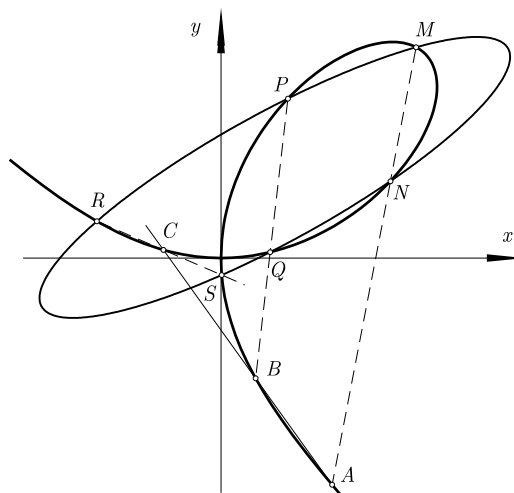


Fig. 5.48.-Los puntos de intersección A, B, C de la cúbica con las cuerdas MN, PQ y RS están alineados.

Propiedad II

Consideremos una recta que corta a una cúbica en tres puntos A, B y C . Tracemos por A, B y C , respectivamente, tres secantes que vuelven a cortar a la cúbica en las parejas de puntos $(M, N), (P, Q)$ y (R, S) . Los seis puntos M, N, P, Q, R y S pertenecen a una cónica.

Es la recíproca de la consecuencia anterior. Consideremos el haz formado por las dos cúbicas degeneradas siguientes:

- Las tres rectas MN, PQ y RS .
- La formada por la recta ABC y la cónica definida por M, N, P, Q y R .

La cúbica dada pasa por los ocho puntos $A, B, C, M, N, P, Q,$ y R , luego pertenece al haz. Como la primera cúbica degenerada y la cúbica dada pasan además por el punto S , la segunda cúbica degenerada también ha de pasar por él. Como la recta ABC no pasa, ha de hacerlo la cónica.

Propiedad III

Las cónicas de un haz cuyos puntos fundamentales están sobre una cúbica, vuelven a cortar a ésta en un par de puntos que definen una recta que pasa siempre por un punto fijo de la misma.

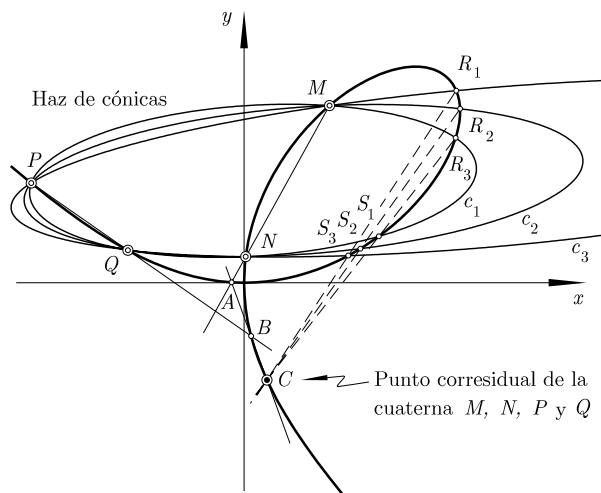


Fig. 5.49.-Las cuerdas comunes con un haz de cónicas vuelven a cortar la cúbica en dos puntos, que, a su vez, determinan una recta que corta a la cúbica en el punto *corresidual* de los puntos fundamentales.

Es una conclusión inmediata de la consecuencia anterior. Sean M, N, P y Q los puntos fundamentales del haz. La cúbica corta a las cuerdas MN y PQ en dos puntos A y B y la

recta AB vuelve a cortar a la cúbica en un punto C . Todos los puntos hasta ahora definidos, incluido el propio C , son independientes de la cónica del haz. Dicha cónica volverá a cortar a la cúbica en dos puntos R y S tales que la recta RS que definen ha de pasar por C en virtud de la propiedad I.

Observemos que este punto C solamente depende de los cuatro primeros M, N, P y Q , definiendo así un mecanismo geométrico por el cual a una cuaterna de puntos sobre la cúbica se le hace corresponder un punto de la misma. Este punto fue denominado por Sylvester *punto corresidual* de los cuatro primeros. Al mismo punto, Salmon designó en sus primeros escritos como *punto opuesto* de la cuaterna.

En el haz de cónicas de puntos fundamentales M, N, P y Q existen, en general, tres cónicas degeneradas y nos hemos apoyado en una de ellas (la formada por MN y PQ) para obtener el punto corresidual C . Al mismo punto habríamos llegado si hubiéramos utilizado cualquiera de las otras dos cónicas.

5.4. GENERACIÓN AL MODO STEINER

A la luz de la nueva concepción estructuralista de los haces de cónicas y de rectas como espacios proyectivos exponemos a continuación el siguiente método para generar cúbicas cuyos antecedentes hay que buscarlos en Chasles y en Steiner según expusimos en 4.6.

Sean A, B, C, D cuatro puntos del plano que tomamos como puntos fundamentales de un haz de cónicas. Sea V un quinto punto que vamos a tomar como vértice de un haz de rectas.

Pretendemos definir una proyectividad entre las cónicas y las rectas de uno y otro haz.

Para ello, consideremos tres puntos más E, F y G del plano. Por cada uno de estos puntos pasan tanto una cónica única del haz de cónicas como una recta única del haz de rectas.

Si hacemos corresponder a la terna de cónicas la terna de rectas ya tenemos definida la proyectividad.

Pues bien, las cónicas y rectas homólogas engendran por intersección una cúbica que pasa por los ocho puntos considerados y en la que el punto V es el corresidual de los cuatro primeros.

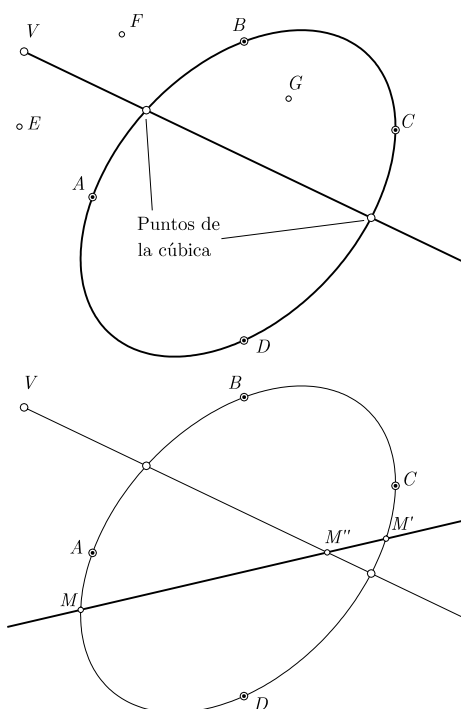


Fig. 5.50.-Generación de cúbicas mediante proyectividad entre un haz de cónicas y otro de rectas.

5.4.1. Demostración gráfica

Podemos hacer una demostración gráfica de esta generación aplicando el principio de correspondencia de Chasles.¹

En efecto, sea r una recta cualquiera del plano. Una cónica del haz la corta en dos puntos (M, M') y la recta homóloga la corta en un punto M'' .

La proyectividad existente entre recta y cónica subordina una correspondencia $(2,1)$ [29] entre los puntos de r . En esta correspondencia asignamos a la pareja (M, M') el punto M'' .

En tales correspondencias el número de elementos coincidentes con alguno de sus homólogos es tres, luego el lugar geométrico engendrado por intersección cortará a r en tres puntos, lo que indica la naturaleza cúbica del mismo.

¹En su forma fundamental dice lo siguiente: *Cuando tenemos sobre una recta dos series de puntos X y X' y establecemos una correspondencia algebraica tal que a un punto X corresponden α puntos X' y a un punto X' β puntos X , el número de puntos X que coinciden con su correspondiente X' es $\alpha + \beta$.*

5.4.2. Demostración analítica

Sea $f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = 0$ la ecuación del haz de cónicas y $R(x, y) - \mu S(x, y) = 0$ la ecuación del haz de rectas. La correspondencia proyectiva existente entre los elementos de ambos haces exige que haya una relación

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0$$

La eliminación de los parámetros λ, μ entre las ecuaciones anteriores nos proporciona la ecuación del lugar. Tendremos entonces

$$A\frac{f}{\varphi}\frac{R}{S} + B\frac{f}{\varphi} + C\frac{R}{S} + D = 0$$

O bien

$$AfR + BfS + CR\varphi + D\varphi S = 0$$

que evidentemente es la ecuación de una cúbica, puesto que f y φ son cuadráticas y R y S son lineales.

Observaciones

Este tipo de generación suscita varias preguntas. Si una cúbica necesita nueve puntos para su generación ¿cómo es que aquí estamos utilizando solamente ocho? ¿es que se trata de algún tipo restringido de cúbicas?. La respuesta es sencilla una vez meditada. No estamos dando ocho puntos cualesquiera de la cúbica. Estamos dando un conjunto de ocho, de los que uno de ellos, el V , es el corresidual de los cuatro primeros. Pensemos en casos parecidos que ocurren en las cónicas. Una cónica está determinada por cinco puntos, sin embargo, podrían ser tres si decimos que dos de ellos son los extremos de un eje. Estamos dando información adicional.

Si nos diesen ocho puntos y no nos dicen cuál es el corresidual de otros cuatro ¿cuántas cúbicas se podrían generar? Tendríamos que empezar eligiendo cuatro de los ocho dados, lo cual podemos hacerlo de $\binom{8}{4}$ maneras. De los cuatro puntos restantes, todavía podríamos elegir cualquiera de ellos como corresidual de los cuatro primeros. Podríamos entonces definir un total de $4 \times \binom{8}{4} = 280$ cúbicas.

Supongamos ahora que nos dan una cúbica determinada. ¿Cómo podemos definir una generación proyectiva cualquiera? Hay infinitas de estas generaciones. En efecto, tomemos cuatro puntos cualesquiera de la curva A, B, C, D y hagamos pasar por ellos una cónica cualquiera. Dicha cónica vuelve a cortar a la cúbica en dos puntos A y B . La recta AB , a su vez, vuelve a cortar a la cúbica en un punto único V , corresidual de los primeros, que

solamente depende de ellos y no de la cónica elegida. El resto es fácil, basta con utilizar tres puntos más de la cúbica para definir la proyectividad entre haz de cónicas y haz de rectas.

5.4.3. Propiedades de la generación

Salvo casos especiales, como ahora veremos, nada puede asegurarse sobre la naturaleza unicursal de la cúbica engendrada, pero sí existen unas propiedades generales que se verifican en todos los casos.

Propiedad I

La cúbica engendada proyectivamente de la forma expuesta pasa por el vértice V del haz generador y su tangente en dicho punto es el rayo correspondiente a la cónica del haz generador que pasa por V .

La razón del paso por V es evidente. Existe una sola cónica c_1 del haz generador que pase por V y a esta cónica ha de corresponder un rayo r_1 en la proyectividad generadora. Ambos elementos, cónica y rayo homólogo se cortan en V , luego la cúbica generada pasa por este punto.

En cuanto a la tangencia, hemos de ir a la definición de tangencia como límite de la cuerda.

En efecto, sea c la cónica que pasa por V y r el rayo correspondiente. Sea r_1 un rayo cercano a r y c_1 la correspondiente cónica. Su punto de intersección P va a ser un punto próximo de la cúbica y VP será una cuerda de la misma. Cuando c tiende a c_1 , r_1 tiende a r y VP , cuerda de la cúbica y contenida en r_1 , también lo hará, luego r va a ser la tangente a la cúbica en P .

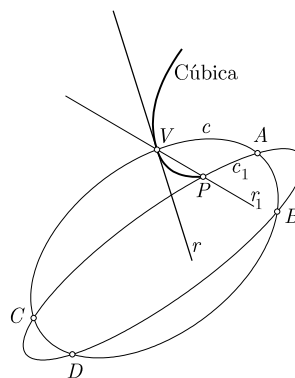


Fig. 5.51.-La tangente a la cúbica en V es el rayo que corresponde a la cónica que pasa por V .

Propiedad II

La cúbica engendrada pasa por los puntos fundamentales del haz de cónicas que la genera y su tangente en uno de estos es la misma que la de la cónica homóloga del rayo que pasa por él.

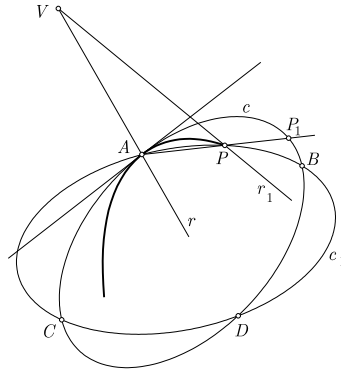


Fig. 5.52.-La tangente a la cúbica en un punto fundamental del haz generador es la tangente a la cónica homóloga del rayo que pasa por él.

Efectivamente, para cada punto fundamental existe un rayo del haz generador que pasa por él. A este rayo ha de corresponder una cónica que también pasa por este punto, luego también ha de hacerlo la cúbica engendrada.

Para ver que la tangente a la cúbica es la misma que la tangente a la cónica generadora, si partimos, como antes, de una posición próxima y razonamos con el paso al límite, hay una falta de rigor, porque ahora no estamos razonando con el paso al límite de cuerdas rectilíneas, sino con arcos de cónica. Hay que recurrir a un razonamiento analítico.

Siguiendo con las mismas notaciones de 5.4.2, sea

$$F(x, y) \equiv AR\varphi + BfS + CR\varphi + D\varphi S = 0$$

la ecuación de la cúbica engendrada y P uno de los puntos fundamentales del haz de cónicas.

Por un lado la pendiente de la cúbica engendrada a su paso por P es

$$m = - \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \right)_0 = - \left(\frac{A(R'_x f + R f'_x) + B(S'_x f + S f'_x) + C(R'_x \varphi + R \varphi'_x) + D(S'_x \varphi + S \varphi'_x)}{A(R'_y f + R f'_y) + B(S'_y f + S f'_y) + C(R'_y \varphi + R \varphi'_y) + D(S'_y \varphi + S \varphi'_y)} \right)_0$$

donde el subíndice 0 indica que todos los polinomios y sus derivadas han de estar particularizados para el punto P .

Ahor bien, por ser este punto uno de los fundamentales del haz en él se anulan tanto f

como φ , luego la ecuación anterior queda reducida a

$$m = -\frac{(AR_0 + BS_0)f'_{x_0} + (CR_0 + DS_0)\varphi'_{x_0}}{(AR_0 + BS_0)f'_{y_0} + (CR_0 + DS_0)\varphi'_{y_0}}$$

Por otro lado la pendiente de la cónica generadora en el mismo punto es

$$m_1 = -\frac{f'_{x_0} - \lambda_0\varphi'_{x_0}}{f'_{y_0} - \lambda_0\varphi'_{y_0}}$$

donde λ_0 es el valor de λ para que la recta generadora pase por P , lo que exige que

$$\lambda_0 = -\frac{D + C\mu_0}{B + A\mu_0}, \quad \mu_0 = \frac{R_0}{S_0}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = -\frac{DS_0 + CR_0}{BS_0 + AR_0}$$

Llevando este valor de λ_0 al valor que habíamos obtenido para m_1 vemos que

$$m_1 = -\frac{(AR_0 + BS_0)f'_{x_0} + (CR_0 + DS_0)\varphi'_{x_0}}{(AR_0 + BS_0)f'_{y_0} + (CR_0 + DS_0)\varphi'_{y_0}}$$

lo que nos hace ver que $m = m_1$ y la pendiente de la cónica generada a su paso por el punto fundamental coincide con la de la cónica correspondiente.

Ejercicio 5-I

Consideremos el haz de cónicas cuyos puntos fundamentales son los vértices del cuadrado definido por los puntos $(\pm a, \pm a)$ y el haz de rectas cuyo vértice es el punto $V(2a, 0)$. Entre ambos haces vamos a establecer una relación proyectiva que haga corresponder al par de rectas $y = \pm a$ la recta $y = 0$. Al par de rectas $x = \pm a$ le va a corresponder la recta $x = 2a$. Finalmente, a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$, le va a corresponder la recta $y = x - 2a$.

Se pide:

- Ecuación de la cónica engendrada.
- Representación de la misma.
- Diagnosticar si se trata de una cónica unicursal.

Sean

$$y^2 - a^2 - \lambda(x^2 - a^2) = 0 \quad y = \mu(x - 2a)$$

las ecuaciones respectivas de los haces definidos.

La correspondencia definida entre sus elementos podemos comprobar fácilmente que nos conduce a la relación paramétrica

$$\lambda + \mu = 0$$

que nos lleva a la cúbica

$$\frac{y^2 - a^2}{x^2 - a^2} + \frac{y}{x - 2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad (y^2 - a^2)(x - 2a) = y(a^2 - x^2)$$

La factorización presente en su definición nos permite fácilmente una exclusión de regiones en el plano y una serie de puntos de paso.

Para auxiliarnos del método de Newton-Cramer para hacer un análisis del infinito, obtenemos todos los términos de la curva.

$$f(x, y) = y^2x + x^2y - 2ay^2 - a^2x - a^2y + 2a^3 = 0$$

Vemos que la cúbica presenta las tres asíntotas

$$y = 0 \quad x = 2a \quad y = -x - 2a$$

Las intersecciones propias con el eje Oy son la pareja de puntos $[0, (-1 \pm \sqrt{17})a/4]$.

La pendiente en un punto de la curva viene dada por

$$m = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y^2 + 2xy - a^2}{x^2 + 2xy - 4ay - a^2}$$

Merecen especial mención las pendientes en los puntos fundamentales del haz de cónicas generadoras y en el vértice del haz de rectas. Así tenemos:

$$(a, a) \Rightarrow m = 1, \quad (-a, a) \Rightarrow m = -1/3, \quad (-a, -a) \Rightarrow m = -1/3,$$

$$(a, -a) \Rightarrow m = 1, \quad (2a, 0) \Rightarrow m = 1/3$$

La curva es de clase seis como corresponde a una cúbica general. Podemos observar las tangentes trazadas desde el vértice del haz de rectas que son, la propia tangente en el punto, que ya consume dos de las seis, las dos asíntotas que pasan por el punto y las tangentes en los puntos $(-a, a)$ y $(a, -a)$.

Las tangentes paralelas al eje Ox son la asíntota horizontal, que consume dos de las seis tangentes, y las tangentes en los cuatro puntos propios de intersección de la cúbica con la hipérbola $f'_x = y^2 + 2xy - a^2 = 0$.

Tangentes reales paralelas al eje Oy solamente hay la asíntota vertical, que consume dos de las seis existentes. Las otras cuatro son imaginarias y corresponden a los puntos de intersección de la cúbica con la hipérbola $f'_y = x^2 + 2xy - 4ay - a^2 = 0$.

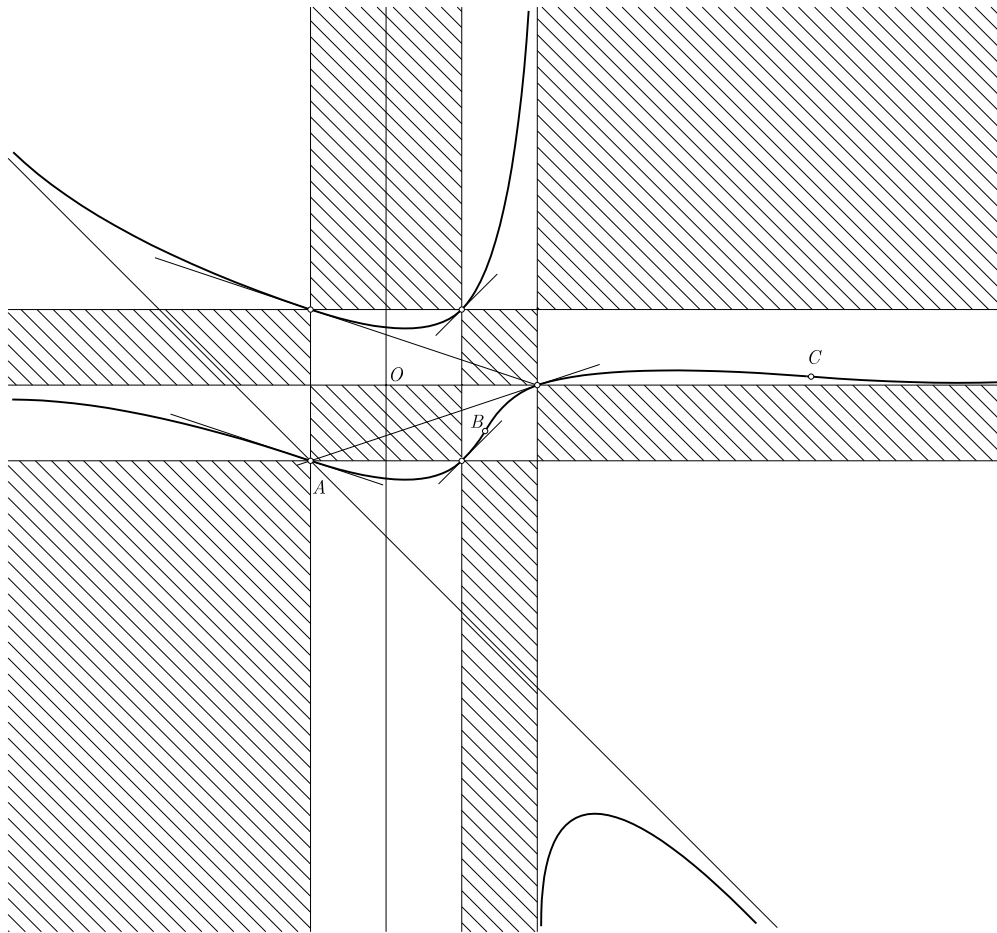


Fig. 5.53.-

Los puntos de inflexión A , B y C se han obtenido de forma aproximada con un calculador simbólico anulando la derivada segunda. Se han obtenido las soluciones $A(-a, -a)$, $B(1,311a, -0,606a)$ y $C(0,117a, 5,559a)$ que, como es preceptivo en las cúbicas, están alineados.

Al carecer de punto doble *no se trata de una cúbica unicursal*.

Propiedad III

Si el vértice V del haz de rectas coincide con uno de los puntos fundamentales del haz de cónicas generador, la cúbica engendrada es unicursal presentando un punto doble en este vértice de coincidencia.

Las tangentes en el punto doble van a ser los rayos dobles de la proyectividad de haces que se establece en V entre las rectas del haz generador y las cónicas en el mismo punto.

La razón resulta evidente, pues en el barrido de rectas en V hay dos momentos de coincidencia entre rayo y tangente. Son los dobles de la proyectividad subordinada.

Resulta conveniente verlo con un ejercicio de afianzamiento.

Ejercicio 5.-II

Se considera el haz de circunferencias

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - ax - ay + a\lambda x = 0$$

que relacionamos proyectivamente con el haz de rectas $y = \mu x$ mediante la relación

$$\lambda\mu - \mu - 1 = 0$$

Determinar, dibujar e identificar la cúbica que generan.

Al tratarse de un haz de circunferencias los puntos fundamentales del haz de cónicas en este caso son los cíclicos, el origen y el punto $A(0, a)$.

Como el haz de rectas tiene por vértice el origen, estamos ante un caso de coincidencia de dicho vértice con uno de los puntos fundamentales del haz.

Hallemos la ecuación de la proyectividad que liga las tangentes en O a las circunferencias con las rectas del haz.

Si llamamos m a la pendiente de estas tangentes tendremos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=y=0} + m \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \lambda - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = m + 1$$

Si llevamos este valor de λ a la ecuación de la proyectividad que nos han dado tenemos la relación proyectiva que liga la recta del haz con la pendiente de la tangente a la circunferencia del haz. Nos queda así la involución $m\mu = 1$, cuyos rayos dobles son las bisectrices de ambos cuadrantes.

Si eliminamos λ y μ entre las ecuaciones del haz de circunferencias y el de rectas para obtener la cúbica venimos a desembocar en la estrofoide recta

$$y(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0$$

que, efectivamente, presenta como tangentes en el origen las bisectrices del primer cuadrante.

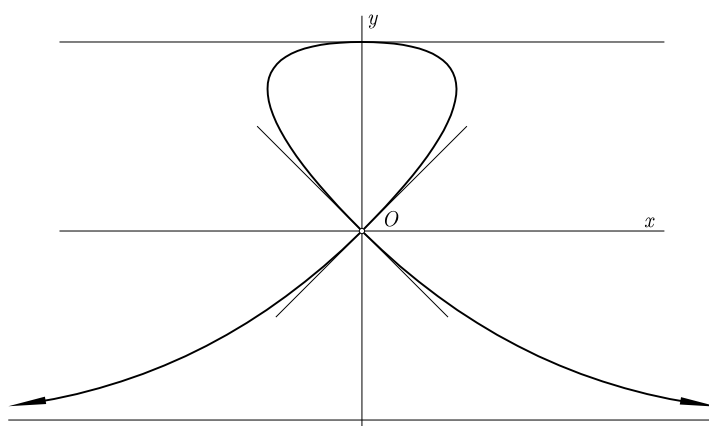


Fig. 5.54.-

Propiedad IV

El caso expuesto en III tiene una situación particular no considerada. ¿Qué ocurre cuando el haz de cónicas es un haz de segunda especie en el que todas las tangentes en V coinciden? En este caso degenera la proyectividad entre las rectas del haz y el haz de tangentes. ¿Sigue teniendo la cúbica un punto doble en V ? En caso afirmativo, ¿cuáles son las tangentes en él?

Si el vértice V del haz de rectas coincide con uno de los puntos fundamentales del haz de cónicas en el que todas ellas tienen la misma tangente, la cúbica engendrada sigue teniendo un punto doble en V y las tangente en él son:

- *La tangente común del haz de cónicas.*
- *La recta del haz V correspondiente a la cónica degenerada del haz compuesta por las dos rectas que concurren en V .*

Vamos a verlo de forma analítica. Elijamos unos ejes en los que el origen es el vértice V y el eje Ox la tangente común.

El haz de cónicas adoptará la forma

$$(y - ax)(y - bx) - \lambda y(mx + ny + h) = 0$$

y el haz de rectas será

$$y - \mu x = 0$$

Si la ecuación de la proyectividad entre ambos haces es

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0$$

la ecuación de la cúbica engendrada, obtenida por la eliminación de λ y μ será

$$(Ay + Bx)(y - ax)(y - bx) + y(Cy + Dx)(mx + ny + h) = 0$$

Con este planteamiento de ejes, las tangentes a la cúbica engendrada en el origen son los términos de segundo grado de la ecuación anterior, es decir

$$Chy^2 + Dhxy = 0$$

que se desglosan en

$$y = 0, \quad y = -\frac{D}{C}x$$

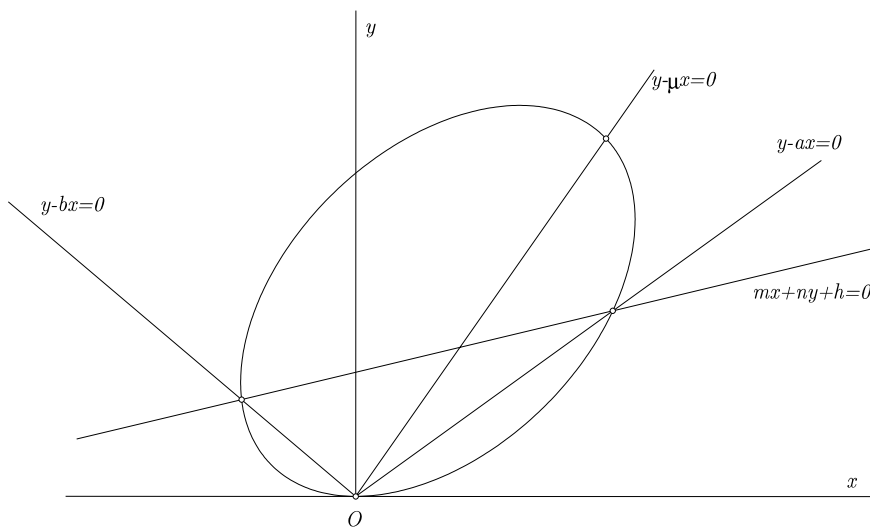


Fig. 5.55.-Generación con haz de segunda especie.

La primera, evidentemente, es la tangente común en O . Para ver el significado de la segunda, observemos que la cónica degenerada del haz que se descompone en dos rectas que pasan por O corresponde a $\lambda = 0$. A este valor corresponde en la ecuación de la proyectividad el $\mu = -D/C$ y si entramos con él en la ecuación del haz de rectas obtenemos la segunda tangente.

Vamos a ver un ejemplo de aplicación.

Ejercicio 5.-III

Consideremos un haz de cúbicas. Sea A uno de sus puntos fundamentales y t la tangente en él a una cúbica del haz. Sea r una recta que pasa por dos de los puntos fundamentales del haz y M su tercer punto de corte con una cúbica del mismo. Tanto t como M constituyen sendos espacios proyectivos apeados del constituido por el haz de cúbicas.

Tracemos desde M la perpendicular p a t y sea P el pie de la misma.

- Demostrar que las rectas p envuelven una parábola p_1 .
- Demostrar que las circunferencias que pasan por A , P y M constituyen un haz.
- Demostrar que el lugar de P es una cúbica circular que tiene un punto doble en A .
- Tracemos desde A una tangente a p_1 y sea K su punto de corte con p . Demostrar que las circunferencias que pasan por A , P y K constituyen un haz parabólico que por intersección con t nos engendra la misma cúbica anterior.
- Comprobar que las tangentes en el punto doble A de la cúbica son las perpendiculares a las tangentes trazadas desde A a p_1 .

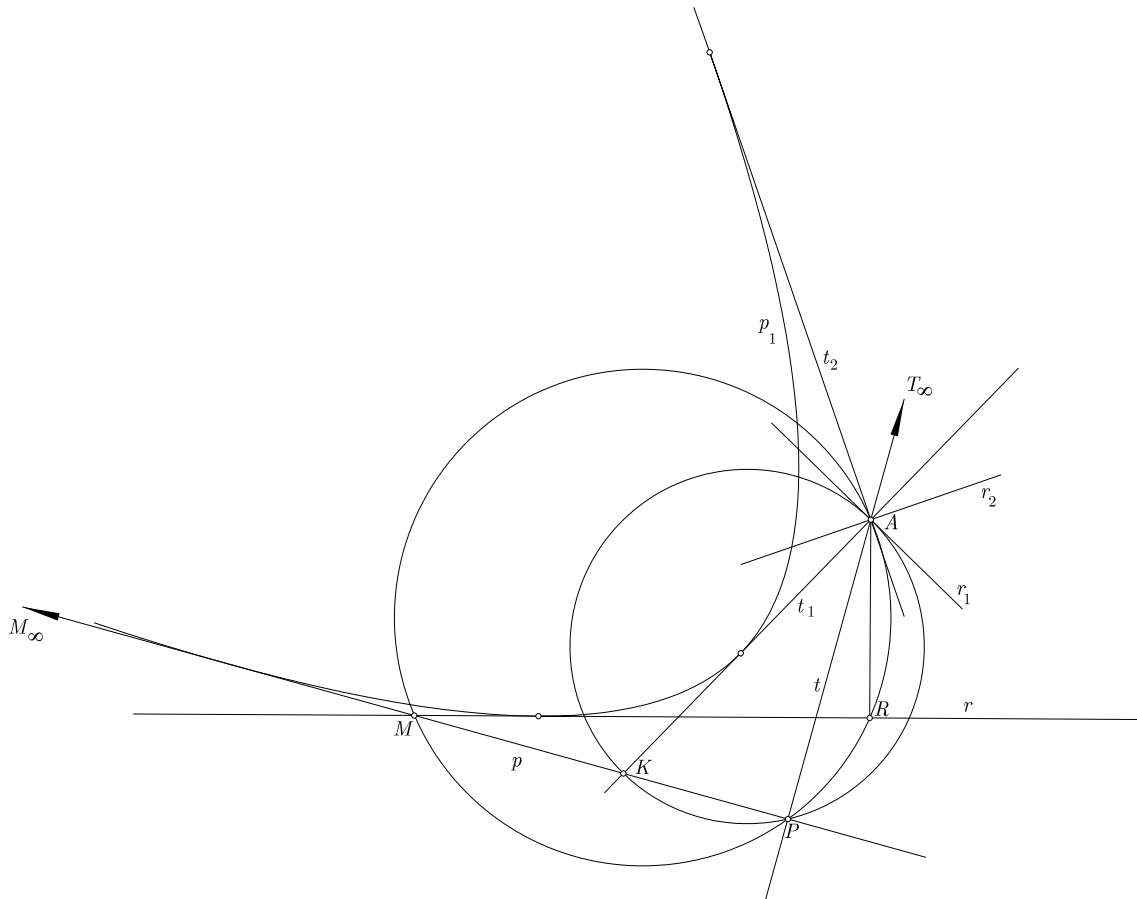


Fig. 5.56.-

Cortemos t y p con la recta impropia para obtener los puntos T_∞ y M_∞ que van a resultar ser homólogos en la involución absoluta.

La serie de puntos M y el haz de rectas t son proyectivos porque ambos espacios son apeos distintos de un mismo haz de cúbicas.

Las series definidas por M y M_∞ van a resultar homográficas y como consecuencia la envolvente de las rectas p que unen puntos homólogos envuelven una cónica, que en este caso será forzosamente parábola, ya que una de las series tiene como base la recta impropia.

Tracemos desde A la perpendicular a la recta fija r . Sea R el pie de esta perpendicular, que va a ser un punto fijo sobre r . Las circunferencias que pasan por A , P y M van a pasar también por R , luego estas circunferencias constituyen un haz cuyas circunferencias van a ser también proyectivas con la serie de puntos M .

Como las circunferencias anteriores y las rectas t van a resultar ser dos espacios proyectivos, el lugar geométrico de su intersección va a ser una cúbica, que será circular porque ha de pasar por los puntos cíclicos que son fundamentales en el haz de circunferencias.

El punto A ha de ser doble porque coinciden uno de los puntos fundamentales del haz de cónicas con el vértice del haz generador.

Sea t_1 una de las tangentes trazadas desde A a la parábola p_1 y K su punto de corte con p . El ángulo KPA es recto y K recorre la tangente fija t_1 .

En estas circunstancias, las circunferencias circunscritas a KPA van a constituir un haz parabólico cuya línea de centros es la tangente t_1 . El punto P también va a resultar ser el lugar de los cortes de las circunferencias de este haz con el haz formado por t . Va a ser otra forma de engendrar la cúbica descrita por P .

Sea r_1 el eje radical del haz parabólico considerado, que será la perpendicular por A a t_1 .

En la proyectividad definida entre circunferencias del haz parabólico y rectas que pasan por A , a la recta r_1 ha de corresponder una circunferencia del haz. Su intersección va a ser una tangencia en A . Se está engendrando en esta posición uno de los puntos de paso por A de la cúbica, que va a ser entonces tangente a r_1 .

El proceso es repetible con la segunda tangente t_2 trazada desde A a la parábola p_1 .

5.5. BÚSQUEDA DEL MECANISMO DE GENERACIÓN

SUPONGAMOS que una cúbica está dada mediante nueve puntos de paso. ¿Cómo podemos montar el mecanismo de generación que acabamos de exponer? Teniendo en cuenta lo expuesto en las observaciones de la página 138, de entre los nueve puntos dados, podemos elegir de forma arbitraria cuatro de ellos como puntos fundamentales del

haz de cónicas generador, pero ¿dónde está el vértice V del haz de rectas que le hace compañía en la generación?

El punto buscado, corresidual de los cuatro elegidos, no será, en general, ninguno de los cinco puntos restantes, pero dichos puntos nos van a servir para dos fines:

- Búsqueda del corresidual.
- Establecimiento de la proyectividad entre el haz de rectas y el de cónicas.

La búsqueda del corresidual necesita apoyarse en algunos conceptos o problemas previos relativos a las cónicas. Estos problemas son:

- Intersección de dos cónicas con dos o tres comunes.
- Cónica capaz de una razón doble.

5.5.1. Intersección de cónicas

La intersección de dos cónicas, en general, conduce a un problema de cuarto grado que, como tal, no va a ser resoluble con regla y compás.

No obstante, si se conocen dos o tres de los puntos de intersección, el problema va a ser reducible a un problema de segundo grado o de primero respectivamente, que podrá ser resoluble dentro del canon clásico.

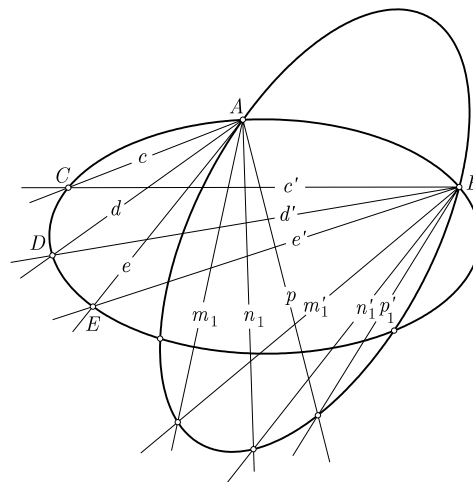


Fig. 5.57.-Si dos cónicas tienen dos puntos comunes, las otras dos intersecciones pueden hallarse con regla y compás.

Veamos una forma general de solución sin menoscabo de otras soluciones más elegantes, que pueda haber, aplicables a determinados casos particulares.

Supongamos dos cónicas dadas por cinco puntos, dos de los cuales son comunes a ambas. Sean así los puntos A, B, C, D, E y A, B, M, N, P .

Proyectando desde A y B los puntos C, D, E tenemos dos ternas de rayos c, d, e y c', d', e' que definen una proyectividad \mathcal{P}_1 que engendra la primera cónica que pasa por A y B . De la misma forma, proyectando desde los mismos puntos los M, N, P obtenemos dos ternas m_1, n_1, p_1 y m'_1, n'_1, p'_1 que definen otra proyectividad \mathcal{P}_2 generadora de la segunda cónica.

Definamos en A una proyectividad de rayos superpuestos $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2^{-1}$. Tomaríamos el rayo c , hallaríamos c' mediante \mathcal{P}_1 . A este rayo, considerado como c'_1 correspondería un c_1 por aplicación de \mathcal{P}_2^{-1} .

Repetiendo el proceso con los rayos d y e la tercera proyectividad \mathcal{P}_3 está definida. Los rayos dobles de esta proyectividad van a ser los que proyectan los dos puntos adicionales de corte entre las dos cónicas dadas.

Si se conocen tres puntos de corte de las cónicas, pasa a ser conocido uno de los rayos dobles de \mathcal{P}_3 con lo que desembocamos en un sencillo problema de perspectiva ya conocido de la Geometría elemental resoluble solamente con la regla [20].

Observemos que estas operaciones, realizadas manualmente pueden resultar tediosas y con una cierta carga de inexactitud, pero con los actuales sistemas de diseño asistido pueden resultar sumamente sencillo de realizar o de programar. Precisamente algoritmos de este tipo son los que están necesitando los programadores de estos sistemas. De ahí, el resurgimiento de la Geometría Proyectiva y de la Geometría Algebraica.

5.5.2. Cónica capaz

El término de cónica capaz de una razón doble no es muy conocido. Sin lugar a dudas, es un término acuñado por los geómetras franceses, posiblemente por Chasles, en la primera mitad del siglo XIX. Jonquieres ya lo cita en sus *Melanges* [12].

Viene a ser, conceptualmente, muy parecido al arco capaz del que es una generalización, como ya veremos.

Se define de la siguiente forma: Dados cuatro puntos del plano A, B, C, D y una constante r , el lugar geométrico de los puntos tales, que al proyectar desde ellos los anteriores, nos dan una cuaterna de rayos cuya razón doble es la constante r es una cónica del plano que recibe el nombre de *cónica capaz de la razón r* respecto a los cuatro puntos dados.

La justificación de que este lugar geométrico es una cónica es inherente a la propia definición de cónica al definirla como intersección de rayos homólogos de haces proyectivos.

Vamos a ver que, si de los cuatro puntos dados, dos de ellos son los cíclicos, la cónica es circunferencia y la conservación de la razón doble redundante, precisamente, en la conservación del ángulo desde el que se ven los dos puntos reales de la cuaterna.

Supongamos que nos dan los puntos A y B reales y que los C y D son los cíclicos. Se trata de calcular la razón doble

$$(\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, i, -1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - i}{\operatorname{tg} \alpha + i} : \frac{\operatorname{tg} \beta - i}{\operatorname{tg} \beta + i} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1 + (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)i}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)i}$$

Vemos que la razón doble es un número complejo que es el cocientes de dos complejos conjugados. El módulo del cociente es la unidad y su argumento θ es tal que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

Si exigimos que este argumento se mantenga constante estamos obligando a que sea constante el ángulo θ desde el que se ven los puntos A y B . Estamos cayendo en el concepto clásico de arco capaz.

Una forma de construir la cónica capaz puede ser la siguiente: Imaginemos la cónica trazada. Los puntos dados han de pertenecer a ella. Vayamos a uno de tales puntos, el A por ejemplo. Proyectemos desde él los otros tres puntos y tracemos la tangente en él a la cónica. La razón doble de la cuaterna de rayos así obtenida ha de ser la que se mantiene constante a lo largo de la cónica.

De aquí podemos deducir la construcción siguiente: Trazamos una recta cualquiera r y cortamos con ella las tres rectas AB , AC y AD . Buscamos sobre r el punto M que junto con los tres obtenidos tiene como razón doble el valor dado. La recta AM es la tangente a la cónica busca en el punto A . Tal cónica está perfectamente definida al conocerse cuatro puntos de ella y la tangente en uno de los mismos.

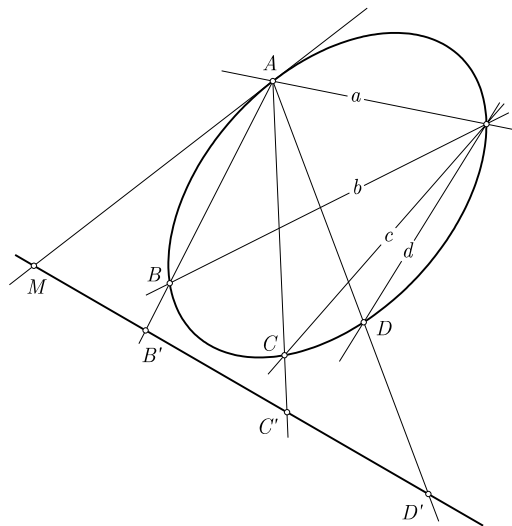


Fig. 5.58.-Si $(MB'C'D') = r$, para cualquier punto de la cónica se verifica $(abcd) = r$.

Una vez resueltas estas cuestiones previas, estamos en situación de construir el punto corresidual.

Consideremos la cúbica dada por los puntos $A, B, C, D, E, F, G, H, I$. Supongamos que elegimos los puntos A, B, C, D , como fundamentales del haz de cónicas y buscamos el punto V vértice del haz de rectas que complementa al haz de cónicas en la generación.

Consideremos las cuatro cónicas del haz que pasan respectivamente por E, F, G y H . Estas cuatro cónicas del haz tienen una razón doble, fácilmente localizable mediante cualquiera de los métodos de apeo a un espacio más elemental. Sea r esta razón doble. La cuaterna de rayos que define el punto V con los E, F, G y H también ha de tener la misma razón doble r , luego V ha de estar en la cónica capaz de la razón r respecto a los cuatro puntos E, F, G y H .

Repitiendo el proceso con los puntos E, F, G, I , vemos que V ha de estar en otra cónica capaz de otra razón r' respecto a E, F, G, I . Estas cónicas tienen tres puntos comunes, luego determinar el punto corresidual V , pasa a ser un problema resoluble mediante el uso de la regla solamente.

Para afianzar lo que acabamos de exponer, lo mejor es resolver un ejemplo que considere el problema bajo sus aspectos gráfico y analítico. Veremos que todo lo expuesto es resoluble con regla y compás y tiene las operaciones justas para un problema que no resulta inmediato.

Ejercicio 5.-IV

Vamos a considerar la misma cúbica del ejercicio 5.-I y la supondremos dada por los puntos $A(a, a), B(a, -a), C(-a, -a), D(-a, a), E(1, -1, 0)$ y las asíntotas $x - 2a = 0$ e $y = 0$. Ambas asíntotas definen un haz de hipérbolas equiláteras y queremos buscar el punto corresidual emparejado con este haz.

El método tiene respecto a lo expuesto una ligera variante y es que allí considerábamos un haz básico definido por cuatro puntos y aquí lo estamos considerando definido por dos tangentes y sus puntos de contacto.

Como hemos expuesto antes, existirán cuatro hipérbolas de este haz que pasen respectivamente por A, B, C y D . Hemos de obtener la razón doble de estas cuatro hipérbolas y trazar la cónica que pasa por A, B, C, D y es capaz de esta razón doble.

Para hallar la razón doble de las cuatro hipérbolas vamos cortarlas con la recta $x = a$ que pasa por uno de los puntos fundamentales del haz. Las que pasan por A y por B cortan a esta recta de apeo en los mismos puntos $A_1 \equiv A$ y $B_1 \equiv B$. La que pasa por D corta a la recta de apeo en $D_1(a, 3a)$ y la que pasa por C la corta en $C_1(a, -3a)$.

La razón doble de estas cuatro hipérbolas resulta ser

$$(C_1B_1A_1D_1) = 4/3$$

La pendiente m de la tangente en D a la cónica capaz buscada, ha de ser tal que

$$(\infty, -1, 0, m) = 4/3 \quad \implies \quad m = 1/3$$

Si estas operaciones queremos efectuarlas de modo gráfico, proyectemos desde D los puntos A, B y C y cortemos con cualquier recta, la $x = 2a$, por ejemplo. Obtenemos así los puntos $A_2(2a, a), B_2(2a, -2a)$ y $C_{2\infty}$. Si queremos buscar sobre esta recta el punto D_2 tal que

$$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_{2\infty}D_2)$$

es tanto como hallar el homólogo de D_1 en la homografía definida por las ternas (A_1, B_1, C_1) y $(A_2, B_2, C_{2\infty})$.

Realizadas las operaciones gráficas indicadas obtenemos la tangente DD_2 a la primera cónica capaz buscada. Recordemos que pasa por A, B, C y D y tiene tangente DD_2 en D con lo que está plenamente definida.

Pasemos a la determinación de la segunda cónica capaz. Abandonamos el punto D y, de forma análoga busquemos las cuatro hipérbolas del haz que pasan por A, B, C y E . Cortemos las hipérbolas con la misma recta de apeo para buscar su razón doble.

Para los puntos A, B y C tenemos los mismos puntos A_1, B_1, C_1 ya obtenidos. Para el punto E , al estar en el infinito, la cónica del haz de hipérbolas básicas que pasa por él degenera en la recta impropia, luego el punto E_1 también es impropio.

Igual que en el caso anterior, proyectemos desde E y cortemos con $x = 2a$. Obtenemos así los puntos $A_3, B_3, C_3, E_{3\infty}$. La tangente en E a la segunda cónica capaz que buscamos es $E_{\infty}E_{3\infty}$, es decir, la recta impropia.

La segunda cónica capaz va a ser una parábola que pasa por A, B, C y cuyo eje tiene la dirección de E_{∞} .

Con las definiciones que ya tenemos, las ecuaciones de las cónicas capaces encontradas son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{4a^2} + \frac{3y^2}{4a^2} &= 1 \\ (x + y)^2 + 2ax - 2ay - 4a^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Las raíces de este sistema podemos comprobar que son $x = \pm a$ dobles, lo que indica que ambas cónicas son tangentes en el punto $C(-a, -a)$ y que éste va a ser el punto corresidual buscado.

Si queremos hallar gráficamente la intersección de ambas cónicas, podemos hacerlo. Solamente hay involucradas operaciones de regla. Supongamos que ambas cónicas se generan mediante haces proyectivos de vértices A y B .

Para la elipse tenemos las ternas $a \equiv AD, b \equiv AC, c \equiv AB$ y $a' \equiv BD, b' \equiv BC, c' \equiv y + a = (x - a)/3$.

Para la parábola tenemos las ternas $a_1 \equiv AE_\infty$, $b_1 \equiv AB$, $c_1 \equiv AC$ y $a'_1 \equiv BD$, $b'_1 \equiv y + a = x - a$, $c'_1 \equiv BC$.

Una sencilla construcción gráfica dice que el rayo AC es doble en la composición de proyectividades y que el punto corresidual buscado es el C .

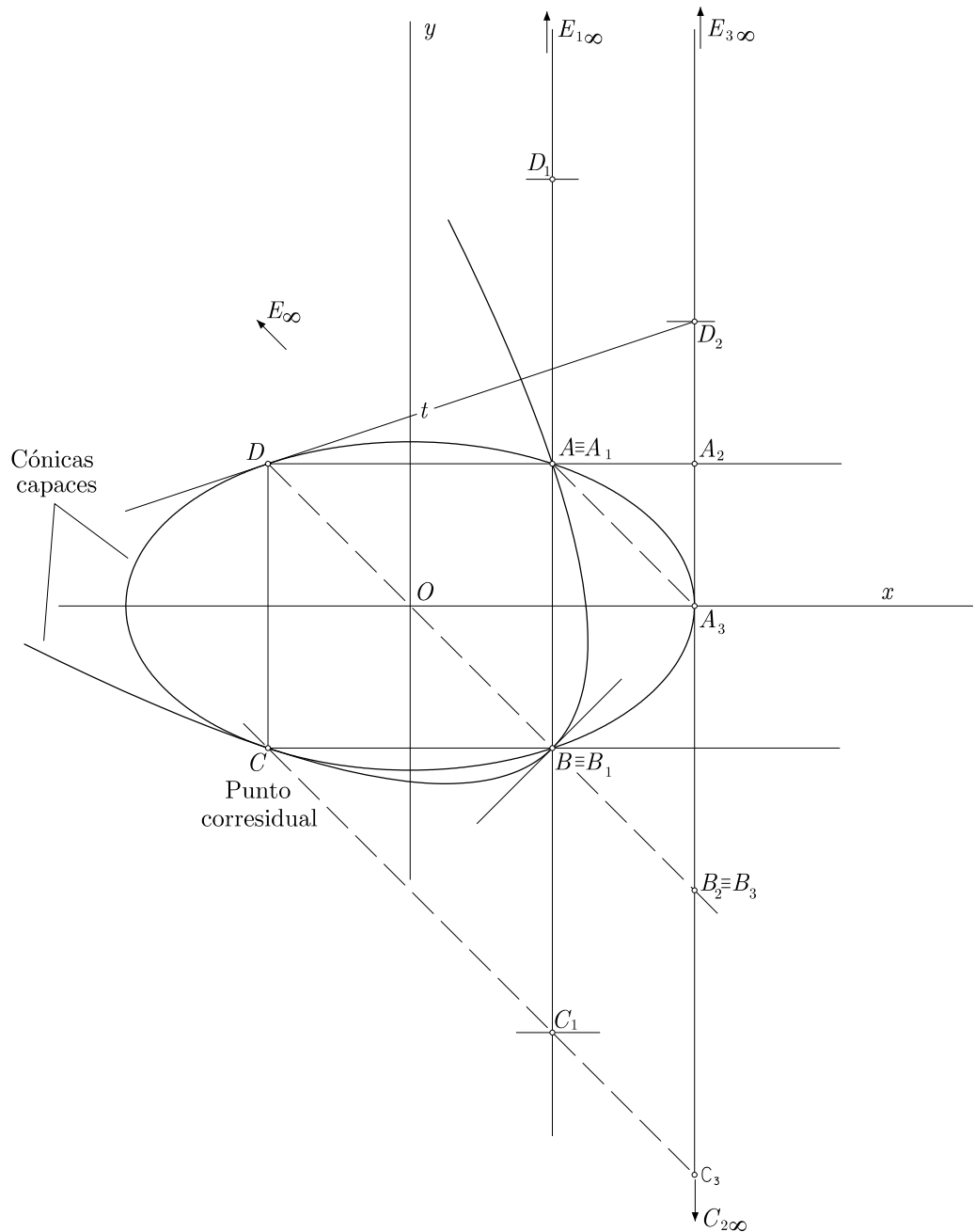


Fig. 5.59.-Búsqueda del punto corresidual

Para cuadrar totalmente el resultado, hace falta ver que la proyectividad definida entre el

haz de hipérbolas equiláteras y el haz de rectas de vértice C , genera efectivamente la cúbica definida.

Las ecuaciones de estos haces son respectivamente

$$(x - 2a)y - \lambda = 0 \quad y + a = \mu(x + a)$$

Entre ambos parámetros ha de existir una relación proyectiva del tipo

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0$$

Los coeficientes hemos de determinarlos obligando a que se engendren tres puntos de la cúbica que pueden ser, por ejemplo los A , B y D . Tenemos así las parejas de valores $\lambda = -a^2, \mu = 1$; $\lambda = a^2, \mu = 0$; $\lambda = -3a^2, \mu = \infty$ lo que nos conduce a la ecuación de la proyectividad

$$\lambda\mu + \lambda + 3a^2\mu - a^2 = 0$$

Capítulo 6

ESTROFOIDE

6.1. GENERACIÓN MÉTRICA

PUEDE que la estrofoide sea, de las cúbicas unicursales, la más conocida y de la que se conocen mayor número de propiedades y aplicaciones.

Procedemos a dar su definición más clásica como curva cisoidal dentro del campo métrico y posteriormente presentaremos varias generaciones proyectivas.

Sea O un punto de una circunferencia de radio a y KL un diámetro de la misma. Tracemos por O una recta variable que corta en N al diámetro y en M a la circunferencia. Tomemos sobre esta recta un punto P tal que $\overline{OP} = \overline{OM} - \overline{ON}$. La estrofoide es la curva descrita por P cuando la recta r pivota alrededor de O .

La generación mostrada revela que la estrofoide es una curva cisoidal engendrada por el diámetro KL y la circunferencia.

Atendiendo a su definición métrica, si es α el ángulo que forma el radio OC con KL , la ecuación polar de la estrofoide va a ser

$$r = 2a \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\cos \theta}$$

y al pasar a cartesianas obtenemos fácilmente

$$x(x^2 + y^2) = a[(x^2 - y^2) \operatorname{sen} \alpha + 2xy \operatorname{cos} \alpha] \quad (6.1)$$

que pone en evidencia que se trata de una cúbica unicursal, ya que presenta un punto doble en O .

Vemos que cuando la recta ON tiende a ponerse paralela a KL , la distancia \overline{OP} se hace negativa y cuando \overline{OM} tiende a cero, P pasará a ocupar la posición simétrica del punto N respecto a O , lo que muestra que la curva tendrá como asíntota la recta simétrica de KL

cortando con el haz de rectas $y = tx$. Así obtenemos fácilmente

$$\begin{aligned} x &= a \frac{(1-t^2) \operatorname{sen} \alpha + 2t \cos \alpha}{1+t^2} \\ y &= at \frac{(1-t^2) \operatorname{sen} \alpha + 2t \cos \alpha}{1+t^2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.3. CONDICIÓN DE PUNTOS ALINEADOS: INVOLUCIONES

LA condición que deben cumplir los valores $\{t_i | i = 1, 3\}$ para que tengamos tres puntos alineados va a constituir una herramienta fundamental de trabajo para muchas aplicaciones.

Si cortamos la estrofoide con una recta arbitraria

$$ux + vy + w = 0$$

obtenemos la ecuación cúbica

$$-av \operatorname{sen} \alpha t^3 + (w + 2av \cos \alpha - au \operatorname{sen} \alpha)t^2 + (2au \cos \alpha + av \operatorname{sen} \alpha)t + w + au \operatorname{sen} \alpha = 0$$

Si llamamos

$$\begin{aligned} S_1 &= t_1 + t_2 + t_3 \\ S_2 &= t_1 t_1 + t_1 t_3 + t_2 t_3 \\ S_4 &= t_1 t_2 t_3 \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{w + 2av \cos \alpha - au \operatorname{sen} \alpha}{-av \operatorname{sen} \alpha} \\ S_2 &= \frac{2au \cos \alpha + av \operatorname{sen} \alpha}{-av \operatorname{sen} \alpha} \\ S_3 &= -\frac{w + au \operatorname{sen} \alpha}{-av \operatorname{sen} \alpha} \end{aligned}$$

o bien, matricialmente

$$\begin{bmatrix} a \operatorname{sen} \alpha & aS_1 \operatorname{sen} \alpha - 2a \cos \alpha & -1 \\ 2a \cos \alpha & a \operatorname{sen} \alpha (1 + S_2) & 0 \\ -a \operatorname{sen} \alpha & a \operatorname{sen} \alpha S_3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.3)$$

Si restamos la tercera ecuación a la primera lo tenemos más fácil

$$\begin{bmatrix} 2a \operatorname{sen} \alpha & a(S_1 - S_3) \operatorname{sen} \alpha - 2a \cos \alpha & 0 \\ 2a \cos \alpha & a \operatorname{sen} \alpha(1 + S_2) & 0 \\ -a \operatorname{sen} \alpha & a \operatorname{sen} \alpha S_3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.4)$$

La eliminación de (u, v, w) entre estas ecuaciones nos conduce a la relación

$$\begin{vmatrix} 2a \operatorname{sen} \alpha & a(S_1 - S_3) \operatorname{sen} \alpha - 2a \cos \alpha & 0 \\ 2a \cos \alpha & a \operatorname{sen} \alpha(1 + S_2) & 0 \\ -a \operatorname{sen} \alpha & a \operatorname{sen} \alpha S_3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha(1 + S_2) + (S_3 - S_1) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 0$$

o bien

$$\operatorname{tg}^2 \alpha(1 + t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3) + (t_1 t_2 t_3 - t_1 - t_2 - t_3) \operatorname{tg} \alpha + 2 = 0 \quad (6.5)$$

que nos muestra algo que ya esperábamos, que entre las ternas de puntos alineados se establece una involución ternaria.

Si fijamos el valor de uno de los tres parámetros, el t_3 por ejemplo, la relación anterior nos muestra que entre los otros dos puntos de corte se establece una involución como ya se predecía en el teorema general 4.5. La ecuación de la involución obtenida al fijar t_3 sería

$$(t_3 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha)t_1 t_2 + (t_3 \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha)(t_1 + t_2) + \operatorname{tg}^2 \alpha - t_3 \operatorname{tg} \alpha + 2 = 0$$

Siguiendo la idea introducida en las cónicas al punto t_3 donde concurren todas las rectas que unen parejas de homólogos le llamaremos *centro de la involución*.

Esto nos lleva a una pregunta interesante: las rectas que unen pares de puntos en involución sobre una estrofoide ¿concurren en un punto de la curva? En otras palabras ¿existe siempre un centro sobre la curva?

Supongamos que nos dan la involución

$$At_1 t_2 + B(t_1 + t_2) + C = 0$$

¿existe un valor de t_3 tal que

$$\frac{t_3 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{A} = \frac{t_3 \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{B} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - t_3 \operatorname{tg} \alpha + 2}{C}?$$

Hemos desembocado en dos ecuaciones para determinar t_3 que, en general, no serán compatibles, lo que nos hace concluir que, si bien las rectas que pasan por un punto de la curva determinan parejas de puntos en involución, no todas las rectas que unen parejas de puntos en involución concurren en un punto de la curva.

Esto nos lleva a definir dos clases de involuciones que podemos llamar de *primera* o de *segunda especie*. Cualquiera de ellas es convertible en una involución de rayos al proyectar

desde el punto doble, puesto que la relación entre los parámetros de los puntos repercute directamente en las pendientes de los rayos que se obtienen al proyectar.

Existe, además, una mera razón gráfica para la coexistencia de estos dos tipos de involuciones. Es evidente que si definimos una involución de rayos en el punto doble va a repercutir en una involución de puntos sobre la estrofoide. Ahora bien, para definir tal involución somos totalmente libres para fijar las dos primera parejas de homólogos. Supongamos que la primera pareja vuelve a cortar a la estrofoide en los puntos A y B . La recta AB vuelve a cortar a la estrofoide en V . Al elegir la segunda pareja, que cortará en C y D , la libertad de elección que tenemos nos permite que la recta CD no pase por V , con lo que estaríamos definiendo una involución de segunda especie.

Más aún. En realidad, desde un punto de vista algebraico, en el punto doble hay dos puntos distintos confundidos, según que se considere como perteneciente a una u otra de las dos ramas que pasan por él. Esta pareja de puntos constituyen una pareja de homólogos en todas las involuciones de primera especie. Consecuencia de ello es que para definir una de estas involuciones nos baste con una pareja de homólogos solamente. La segunda pareja ya lo es la constituida por el propio punto doble.

Desde un punto de vista gráfico se corrobora este hecho pues una pareja de puntos nos definiría una recta que volvería a cortar a la estrofoide en el centro de la involución de primera especie definida.

Esta dicotomía de las involuciones de puntos sobre la estrofoide no se presenta solamente en esta curva, sino que también la tendremos en todas las cúbicas unicursales. Volveremos a tratar el tema al presentar las curvas de Bezier donde veremos que en las involuciones de segunda especie las rectas que unen parejas de homólogos tienen como envolvente una cónica.

La relación 6.5 es sumamente útil para resolver problemas que de otra forma serían complicadísimos. Veamos alguna de las aplicaciones.

6.3.1. Recta que pasa por dos puntos

Resolvamos el siguiente problema de utilidad general: Dados dos puntos de la estrofoide, t_1 y t_2 hallar la ecuación de la recta que pasa por ellos.

Si hacemos $t_1 + t_2 = s$ y $t_1 t_2 = p$ y llamamos t_3 al valor del parámetro en el tercer punto de corte con la recta $t_1 t_2$ de 6.5 obtenemos

$$t_3 = \frac{-2 - \operatorname{tg}^2 \alpha (p + 1) + s \operatorname{tg} \alpha}{s \operatorname{tg}^2 \alpha + (p - 1) \operatorname{tg} \alpha} \quad (6.6)$$

con lo que tenemos para los tres puntos de corte con la recta

$$S_1 = S + t_3, \quad S_2 = p + s t_3, \quad S_3 = p t_3$$

La recta que pasa por estos tres puntos es la dada por

$$ux + vy + w = 0$$

donde (u, v, w) han de verificar dos de las ecuaciones 6.4. Tenemos entonces como ecuación de la recta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2a \operatorname{sen} \alpha & a(S_1 - S_3) \operatorname{sen} \alpha - 2a \cos \alpha & 0 \\ 2a \cos \alpha & a \operatorname{sen} \alpha(1 + S_2) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.7)$$

Ejercicio 6.-V

Por aplicación de la ecuación 6.5 hallar los valores del parámetro t correspondientes al punto doble.

Observemos que si nos dan dos puntos correspondientes a los valores t_1 y t_2 , el tercer punto de corte con la cúbica de la recta que definen viene dado por 6.6, pero si los valores que nos dan son los del punto doble, el tercer punto de corte queda indeterminado ya que los puntos dados no definen una recta.

Para buscar los valores correspondientes al punto doble solamente hemos de obligar a que t_3 quede indeterminado en 6.6.

Las condiciones de indeterminación de t_3 nos conducen al sistema

$$\begin{aligned} s \operatorname{tg} \alpha + p &= 1 \\ s \operatorname{tg} \alpha - p \operatorname{tg}^2 \alpha &= 2 + \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

Con lo que nos queda que los valores de t correspondientes al punto doble son las raíces de la ecuación

$$t^2 - \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} t - 1 = 0$$

que coinciden con las pendientes en el origen de la curva expresada en implícitas.

Ejercicio 6.-VI

Demostrar que los puntos de contacto P y Q de la estrofoide con las tangentes paralelas a la asíntota se ven desde el punto doble bajo un ángulo recto cuyos lados son bisectrices de las tangentes en el punto doble y de cualquier pareja de rectas que proyecte desde dicho punto los puntos de corte de la estrofoide con una paralela a la asíntota.

En el punto del infinito de la curva el valor de t se hace infinito. Supongamos que es el valor de t_3 . Si dividimos en la ecuación 6.5 por t_3 y hacemos $t_3 \rightarrow \infty$ nos queda la siguiente

relación que liga los valores de t_A y t_B correspondientes a los puntos de corte de la curva con una paralela a la asíntota.

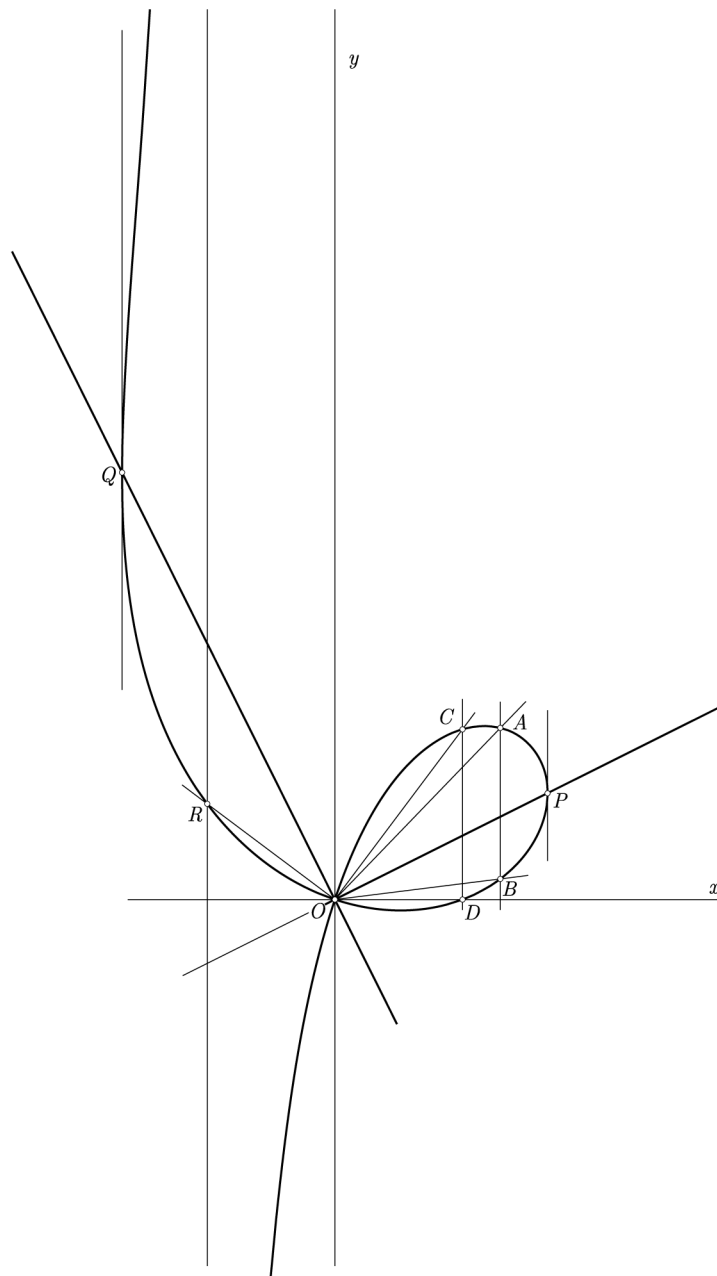


Fig. 6.61.-

$$t_A t_B + (t_A + t_B) \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0 \tag{6.8}$$

Como los valores de t coinciden con la pendiente de la recta que proyecta el punto desde el origen, la ecuación anterior muestra la existencia de una involución entre las parejas de

rectas (OA, OB) . Las rectas dobles de esta involución van a ser OP y OQ correspondientes a los puntos de tangente paralela a la asíntota. Sus pendientes verifican

$$t^2 + 2t \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0$$

Vemos que el producto de sus pendientes vales -1 , lo que indica que OP y OQ son ortogonales. Si las rectas dobles son ortogonales, la involución se convierte en simetría, luego cualquier pareja de homólogas (OA, OB) son simétricas respecto a OP u OQ . Las tangentes en el punto doble, que es una pareja más de homólogas también serán simétricas respecto a estas rectas. Como a su vez estas tangentes son ortogonales formarán un ángulo de $\pi/4$ con OP y OQ .

Si queremos el valor de t_R correspondiente al corte con la asíntota basta con que hagamos $t_A \rightarrow \infty$ en 6.8 con lo que obtenemos $t_R = -\operatorname{tg} \alpha$, valor que ya conocíamos deducido de la generación métrica.

El razonamiento anterior, si bien tiene la concisión propia de la Geometría algebraica, podría ser mucho más conciso con metodología puramente proyectiva.

En efecto, según la consecuencia 4.-V, página 81, del teorema general 4.5, página 77, las rectas paralelas a la asíntota de la estrofoide la cortan en puntos en involución que se rescata proyectando desde el punto doble.

Entre las rectas que pasan por el punto impropio real de la estrofoide se encuentra la recta impropia que corta a la curva en los puntos cíclicos, puesto que se trata de una cúbica circular.

La proyección de estos puntos desde el punto doble nos va a dar como homólogas en la involución rescatada el par de rectas isotropas que pasan por este punto.

Si en una involución de rectas tenemos como homólogas las isotropas, las dobles van a ser ortogonales al obligar a que formen cuaterna armónica con las anteriores.

Si las rectas dobles son ortogonales, estamos ante una simetría.

6.4. CLASE DE LA ESTROFOIDE: FOCOS

LA estrofoide es una curva de grado tres con un punto doble. Para calcular su clase recordemos las fórmulas de Plücker, hoy casi desconocidas

$$\left. \begin{aligned} k &= n(n-1) - 2d - 3r \\ n &= k(k-1) - 2t - 3i \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

donde

- n = grado de la curva.

- $d =$ número de puntos dobles.
- $r =$ número de puntos de retroceso.
- $k =$ clase de la curva.
- $t =$ número de tangentes dobles.
- $i =$ número de puntos de inflexión.

Según esto, la clase de la estrofoide es $k = 3 \times 2 - 2 = 4$. Quiere ello decir que desde un punto no perteneciente a la curva se podrán trazar cuatro tangentes a la misma, reales o imaginarias, distintas o confundidas.

Desde un punto de la curva se podrán trazar solamente dos tangentes, puesto que la tangente en el propio punto ya consume deos de las cuatro posibles.

En la teoría de curvas algebraicas se definen como *focos* de la curva los puntos del plano desde los cuales, dos de las tangentes que se pueden trazar a la curva son la pareja de de rectas isótropas correspondientes al citado punto.

Según esto, si la clase de una curva es k tendrá k^2 focos puesto que desde cada punto cíclico se podrán trazar k tangentes isótropas y las intersecciones de las k isótropas que proceden de uno con las k isótropas que proceden del otro nos dan k^2 puntos de intersección, que serían puntos del plano desde los que se pueden trazar tangentes isótropas a la curva.

De los k^2 focos existentes, solamente k son puntos reales. De hecho, las cónicas también poseen cuatro focos, pero dos de ellos son imaginarios. En la parábola, además, uno de los reales es impropio.

Planteémonos el problema siguiente: ¿existen sobre la estrofoide algún punto que sea foco de la misma?

Sea T_F el valor del parámetro t en ese posible foco real F que estamos buscando. Si trazamos desde F una tangente a la curva, sea t el valor del parámetro en el punto de contacto. La terna formada por t_F y t contado dos veces ha de verificar la relación 6.5, luego tendremos

$$\operatorname{sen}^2 \alpha (1 + 2tt_F + t^2) + (t_F t^2 - t_F - 2t) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 0$$

O bien, ordenando en t

$$(\operatorname{sen}^2 \alpha + t_F \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) t^2 + (2t_F \operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) t + 1 + \cos^2 \alpha - t_F \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0$$

Si F es u foco, la ecuación anterior ha de reducirse a $t^2 + 1 = 0$, puesto que queremos que las tangentes sean la isótropas. Esto lo conseguimos si hacemos $t_F = \cot \alpha$. El punto correspondiente a este valor de t va ser el foco buscado.

Vemos que dicho punto es precisamente el centro C de la circunferencia que ha intervenido en la generación cisoidal. Sus coordenadas son $F(a \operatorname{sen} \alpha, a \cos \alpha)$.

6.5. PUNTO TANGENCIAL: PUNTOS ASOCIADOS

LOS clásicos que estudiaron las cúbicas, como Salmon [27] definieron como *punto tangencial* o simplemente *tangencial* de un punto P de la cúbica el punto de la misma por donde pasa la tangente en P .

Si la cúbica no es unicursal su clase es seis, lo que hace que desde un punto de la misma se puedan trazar cuatro tangentes a ella. Esto hace que el tangencial de un punto lo sea a su vez de otros tres puntos más de la cúbica.

Sin embargo, cuando la cúbica es unicursal, como es el caso de la estrofoide, la clase es cuatro y desde un punto de la curva solamente se pueden trazar dos tangentes a la misma. Esto hace que cada punto de la curva sea el tangencial de otros dos puntos de ella. A estas parejas de puntos que comparten el mismo tangencial les llamó Lemoire [13] *puntos asociados*.

Pues bien, desde este aspecto proyectivo desde el que estamos estudiando la estrofoide, como la relación que liga a los dos puntos asociados es simétrica y algebraica, forzosa-mente han de estar en involución a la que vamos a llamar *involución asociada* siguiendo la denominación de Lemoire.

Esta conclusión, a la que accedemos por pura lógica vamos a verla reforzada con su correspondiente demostración algebraica, pues no es la primera vez que una deducción rápida conduce a un error.

En primer lugar, vamos a obtener el asociado de un punto P dado por el parámetro t . Sea t_T el valor del parámetro en el punto tangencial. Como vamos a tener una tangencia en T y un corte simple en t_T , la ecuación 6.5 ha de verificarse para la terna (t, t, t_T) , es decir

$$\operatorname{tg}^2 \alpha (1 + t^2 + 2tt_T) + (t^2 t_T - 2t - t_T) \operatorname{tg} \alpha + 2 = 0$$

lo que nos permite obtener el tangencial de t

$$t_T = \frac{2t \operatorname{tg} \alpha - (1 + t^2) \operatorname{tg}^2 \alpha - 2}{2t \operatorname{tg}^2 \alpha + t^2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$$

Sean t_1 y t_2 dos puntos asociados. Como han de tener el mismo tangencial se debe verificar

$$\frac{2t_1 \operatorname{tg} \alpha - (1 + t_1^2) \operatorname{tg}^2 \alpha - 2}{2t_1 \operatorname{tg}^2 \alpha + t_1^2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2t_2 \operatorname{tg} \alpha - (1 + t_2^2) \operatorname{tg}^2 \alpha - 2}{2t_2 \operatorname{tg}^2 \alpha + t_2^2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$$

relación que, debidamente simplificada nos da

$$\operatorname{tg} \alpha t_1 t_2 - (t_1 + t_2) - \operatorname{tg} \alpha = 0$$

que, efectivamente, pone de manifiesto la existencia de una involución entre puntos asociados.

Si quisiésemos los puntos dobles de esta involución haríamos $t_1 = t_2 = t$ con lo que obtendríamos la ecuación

$$\operatorname{tg} \alpha t^2 - 2t - \operatorname{tg} \alpha = 0$$

que son los valores correspondientes al punto doble de la curva. El tangencial del punto considerado como perteneciente a una rama es el mismo considerado como perteneciente a la otra. Todo encaja.

6.6. GENERACIÓN COMO ENVOLVENTE DE CÍRCULOS

BAJO un punto de vista estrictamente analítico los clásicos como Papelier [2] y Gomes Teixeira [11] ya estudiaron que las cuárticas bicirculares podían engendrarse como envolventes de circunferencias cuyos centros describen una cónica dada (cónica deferente) y que son ortogonales a una circunferencia también dada.

Sondesa [31] hizo un análisis proyectivo del problema acertando ostensiblemente la metodología deductiva. Pero Sondesa no estudió el caso de cúbicas circulares, engendradas cuando la cónica deferente es una parábola.

Aprovechamos que la estrofoide pertenece a este tipo de cúbicas, para mostrar su generación como envolvente de la variedad unicursal constituida por las circunferencias ortogonales a una circunferencia dada y cuyo centro describe una parábola. Ajustaremos gran parte del lenguaje propio del tema al ya utilizado por Sondesa.

Por comodidad de notación nos ceñiremos exclusivamente al caso $\alpha = \pi/4$. El caso general seguiría la misma metodología.

Sea, pues, la estrofoide

$$\sqrt{2}x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2 + 2xy) = 0$$

Se trata de hallar el haz de cuádricas definido por el paraboloides discriminante y otra cuádrica, de modo que la proyección de la intersección de ambas sobre Oxy sea la estrofoide dada.

El haz buscado puede ser

$$\sqrt{2}xz - a(x^2 - y^2 + 2xy) + \lambda(x^2 + y^2 - z) = 0$$

Las cuádricas degeneradas del haz vienen dadas por

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -a & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -a & \lambda + a & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & -\lambda/2 \\ 0 & 0 & -\lambda/2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

cuyas raíces son $\lambda = 0$ (doble) y $\lambda = \pm\sqrt{2}a$.

Para $\lambda = 0$ obtenemos el cono subsidiario

$$\sqrt{2}xz - a(x^2 - y^2 + 2xy) = 0$$

cuyo vértice $V_1(0, 0, 0)$ es el propio origen de coordenadas.

Para $\lambda = \sqrt{2}a$ obtenemos el cono

$$-a(x^2 + 2xy - y^2) + \sqrt{2}xz + \sqrt{2}a(x^2 + y^2 - z) = 0$$

cuyo vértice es $V_2(a, (\sqrt{2} - 1)a, 0)$.

Para $\lambda = -\sqrt{2}a$ obtenemos el cono

$$-a(x^2 + 2xy - y^2) + \sqrt{2}xz - \sqrt{2}a(x^2 + y^2 - z) = 0$$

cuyo vértice es $V_3(a, (\sqrt{2} + 1)a, 0)$.

Para calcular las parábolas deferentes hemos de obtener la proyección sobre Oxy de las polares recíprocas de cada cono subsidiario respecto al paraboloides discriminante.

Siguiendo a Sondesa [31] trabajaremos en coordenadas tangenciales, de modo que el plano polar de un punto $P(x_1, y_1, z_1, t_1)$ respecto al paraboloides discriminante $x^2 + y^2 - zt = 0$ viene dado por

$$x_1(2x) + y_1(2y) + z_1(-t) + t_1(-z) = 0$$

Las coordenadas tangenciales del plano polar son

$$u = 2x_1, \quad v = 2y_1, \quad w = -t_1, \quad r = -z_1$$

Las correspondientes ecuaciones de la polaridad recíproca son

$$x = u/2, \quad y = v/2, \quad z = -r, \quad t = -w$$

La serie de cuádricas polar recíproca del haz anterior será

$$-\sqrt{2}\frac{ur}{2} - a \left[\frac{u^2 - v^2}{4} + \frac{uv}{2} \right] + \lambda \left[\frac{u^2 + v^2}{4} - wr \right] = 0$$

En realidad, no nos interesa la serie de cuádricas polares recíprocas, sino la proyección sobre Oxy de las cónicas en que degeneran las polares recíprocas de los conos subsidiarios.

Esto lo conseguimos haciendo $w = 0$ y sustituyendo λ por los valores hallados anteriormente. Es decir, las cónicas deferentes pertenecen a la serie

$$-\sqrt{2}\frac{ur}{2} - a \left[\frac{u^2 - v^2}{4} + \frac{uv}{2} \right] + \lambda \frac{u^2 + v^2}{4} = 0 \quad (6.10)$$

Aquí vemos que las parábolas deferentes van a ser homofocales. Lo pone de manifiesto el hecho de que una de las cónicas básicas de la serie sea la $u^2 + v^2 = 0$ que representa la pareja de puntos cíclicos. Entre las cónicas degeneradas de la serie tiene que haber una formada por dos puntos reales que van a ser los focos de las cónicas deferentes. El hecho de que sepamos que estas cónicas van a ser parábolas nos adelanta que uno de dicho focos ha de estar en el infinito. Son los pequeños controles que hemos de ir respetando para estar alerta sobre los posibles errores de cálculo.

Las cónicas degeneradas de la serie anterior vienen dadas por los valores de λ que anulan el discriminante

$$\begin{vmatrix} \lambda/4 - a/4 & -a/4 & -\sqrt{2}/4 \\ -a/4 & \lambda/4 + a/4 & 0 \\ -\sqrt{2}/4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

El único valor finito que tenemos como raíz es $\lambda = -a$ que nos conduce a la cónica tangencial degenerada en dos puntos

$$au^2 + auv + \sqrt{2}ur = 0, \quad \Rightarrow \quad [a(u + v) + 2\sqrt{2}r]u = 0$$

Dichos puntos son el $F(a\sqrt{2}/2, a\sqrt{2}/2)$ a distancia finita y el impropio $F'(1, 0, 0)$. La deferente va a ser, por tanto, una parábola cuyo foco coincide con el foco que habíamos encontrado para la estrofoide.

Vamos a pasar a calcular las parábolas deferentes y las circunferencias directrices para los distintos valores de λ .

Cuando $\lambda = 0$ el plano polar de V_1 respecto al paraboloides discriminante es el propio plano $z = 0$ con lo que su intersección con dicho paraboloides será el propio origen, que hará las veces de circunferencia directriz.

La parábola deferente la tenemos haciendo $\lambda = 0$ en 6.10 con lo que tenemos

$$-\sqrt{2}\frac{ur}{2} - a \left[\frac{u^2 - v^2}{4} - \frac{uv}{2} \right] = 0$$

Su paso a coordenadas puntuales nos da

$$\begin{vmatrix} -a/4 & -a/4 & -1/2\sqrt{2} & x \\ -a/4 & a/4 & y & \\ -1/2\sqrt{2} & 0 & 0 & t \\ x & y & t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

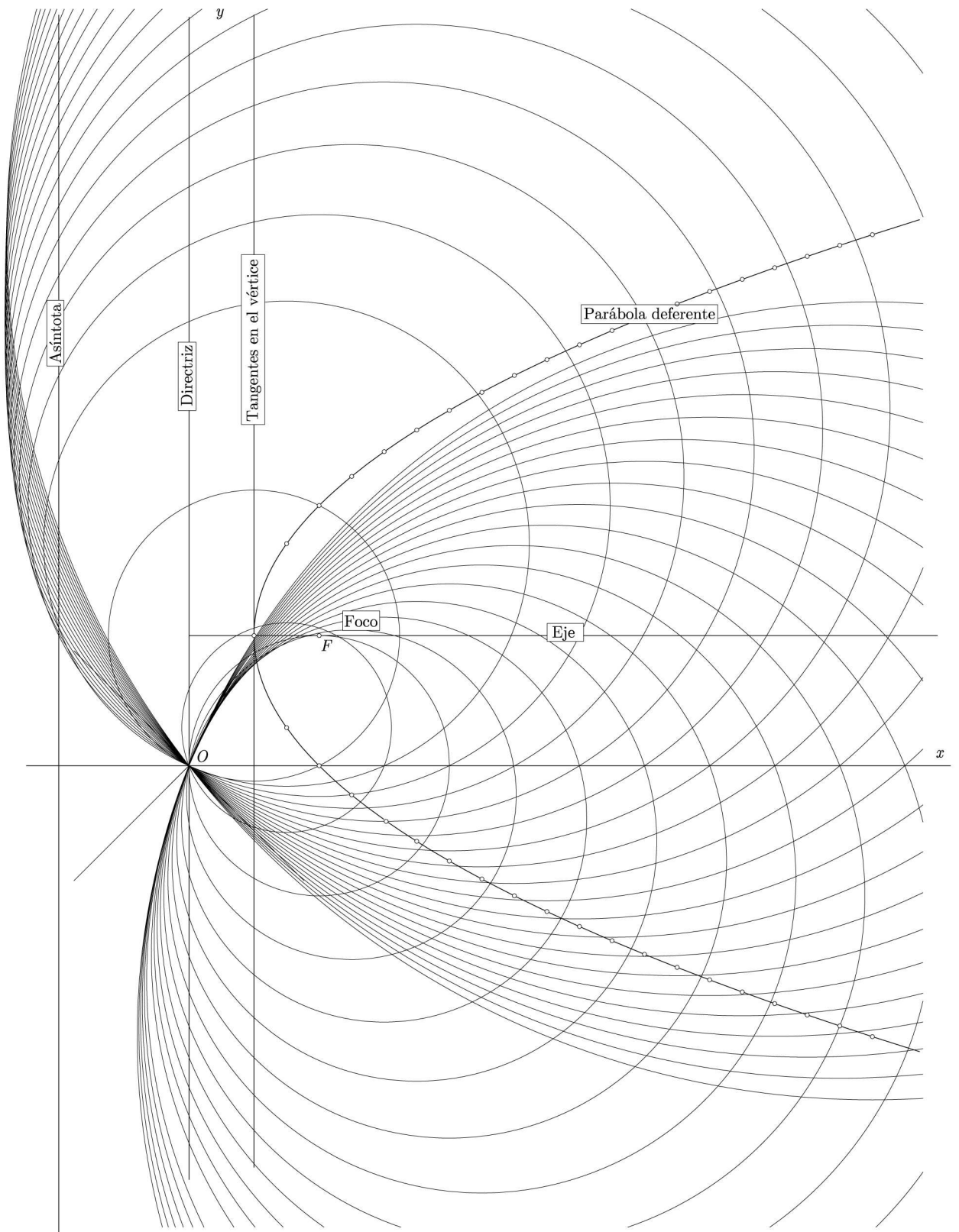


Fig. 6.62.-Generación de la estrofoide como envolvente de círculos para $\lambda = 0$.

que operando nos da

$$y^2 - \sqrt{2}ay - \sqrt{2}axt + a^2t^2 = 0 \Rightarrow \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \sqrt{2}a \left(x - \frac{\sqrt{2}a}{4}t\right)$$

Efectivamente, es una parábola de foco $F(\sqrt{2}a/2, \sqrt{2}a/2)$ y directriz Oy .

Para $\lambda = \sqrt{2}a$ el plano polar de V_2 respecto al paraboloides discriminante es es

$$2ax + 2(\sqrt{2} - 1)ay - z = 0$$

Su intersección con el paraboloides discriminante se proyecta en la circunferencia directriz

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2(\sqrt{2} - 1)ay = 0$$

En cuanto a la parábola deferente, si entramos con $\lambda = \sqrt{2}a$ en 6.10 tenemos

$$-\sqrt{2}\frac{ur}{2} - a \left[\frac{u^2 - v^2}{4} + \frac{uv}{2} \right] + \sqrt{2}a \frac{u^2 + v^2}{4} = 0$$

que pasada a puntuales nos da

$$\begin{vmatrix} (\sqrt{2} - 1)a/4 & -a/4 & -1/2\sqrt{2} & x \\ -a/4 & (\sqrt{2} + 1)a/4 & 0 & y \\ -1/2\sqrt{2} & 0 & 0 & t \\ x & y & t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

y operando

$$y^2 - at\sqrt{2}y - \sqrt{2}atx - 2atx = 0 \Rightarrow \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = a(2 + \sqrt{2}) \left[x + \frac{a(2 - \sqrt{2})}{4}\right]$$

Finalmente, para el caso $\lambda = -\sqrt{2}a$, el plano polar de V_3 respecto al paraboloides discriminante es

$$-a(2x) + (\sqrt{2} + 1)a(2y) - z = 0$$

La proyección sobre Oxy de su intersección con el paraboloides discriminante es la nueva circunferencia directriz

$$x^2 + y^2 + 2ax - 2(\sqrt{2} + 1)ay = 0$$

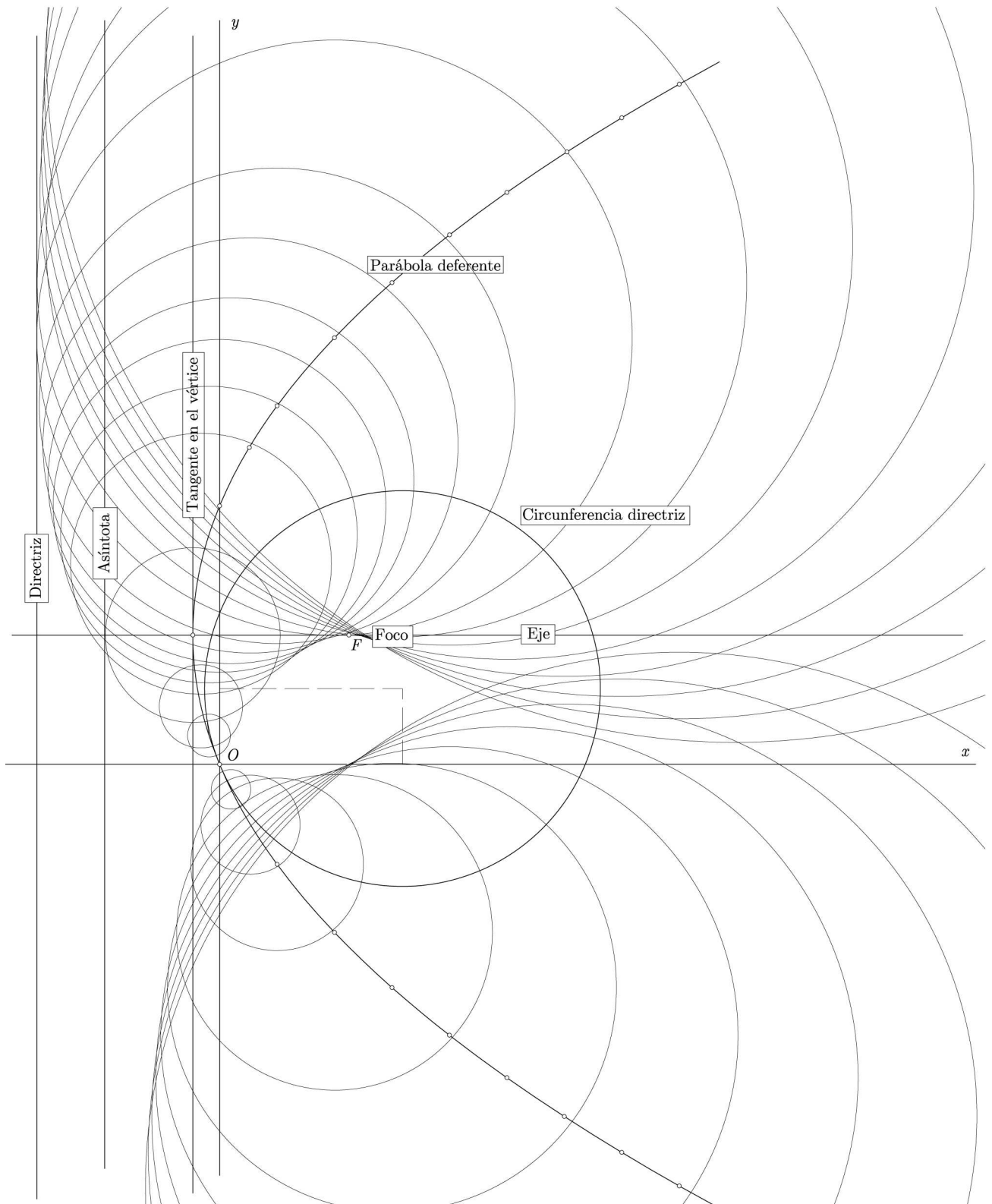


Fig. 6.63.-Generación de la estrofoide como envolvente de círculos para $\lambda = -\sqrt{2}a$.

Capítulo 7

DELTOIDE

7.1. DEFINICIONES

L A *hipocicloide de tres retrocesos o deltoide* es una curva bastante empleada en la Ingeniería Mecánica a la que hemos buscado importantes propiedades proyectivas como vamos a exponer.

Tradicionalmente, en su forma más elemental, se ha definido como la trayectoria descrita por un punto de una circunferencia que rueda por el interior de otra de radio triple.

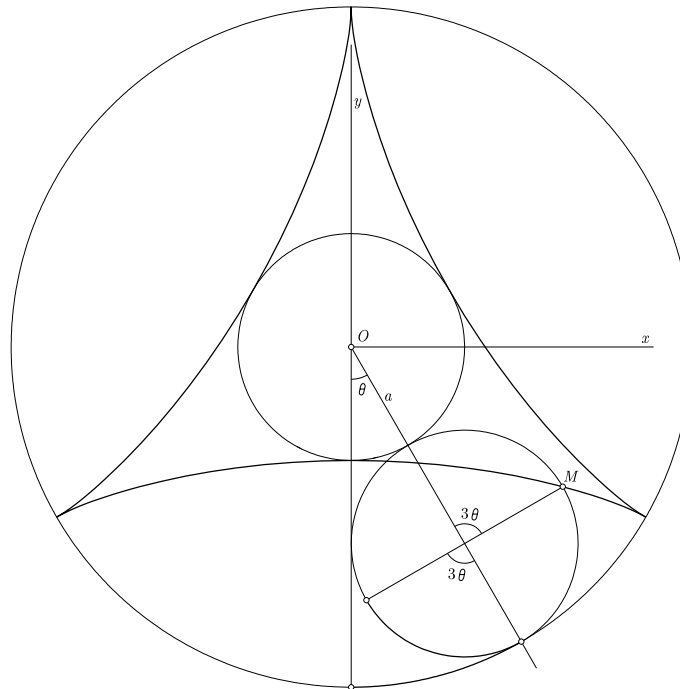


Fig. 7.1.-Forma clásica de generación de la hipocicloide de tres retrocesos.

Si es a el radio de la circunferencia que rueda sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{aligned} x &= 2a \operatorname{sen} \theta + a \operatorname{sen} 2\theta \\ y &= -2a \operatorname{cos} \theta + a \operatorname{cos} 2\theta \end{aligned} \tag{7.1}$$

Si hacemos el cambio de variables $\operatorname{tg} \theta/2 = t$ sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{aligned} x &= \frac{8at}{(1+t^2)^2} \\ y &= a \frac{3t^4 - 6t^2 - 1}{(1+t^2)^2} \end{aligned} \tag{7.2}$$

que nos ponen de manifiesto que estamos ante una curva unicursal de cuarto grado. La existencia de sus tres puntos de retroceso frente al grado nos lo confirman.

Si llamamos X, Y, T a las coordenadas homogéneas podemos expresar

$$X = 8at, \quad Y = a(3t^4 - 6t^2 - 1), \quad T = (1 + t^2)^2 \tag{7.3}$$

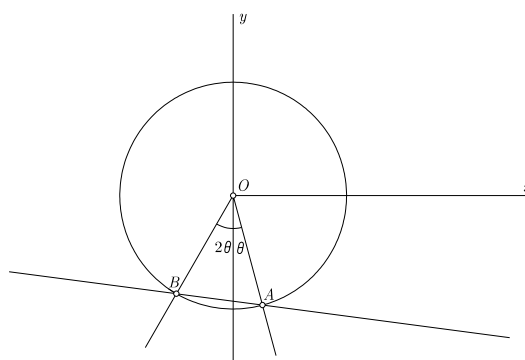


Fig. 7.2.-Forma alternativa de definir la deltoide según Lemaire

Lemaire [13] hace una nueva definición para esta curva que puede sernos de utilidad para considerarla como variedad unicursal en coordenadas plückerianas.

7.1.1. Interpretación de Cremona-Lemaire

Lemaire, posiblemente siguiendo a Cremona, la considera como envolvente de una recta AB definida por dos puntos A y B que se mueven sobre una circunferencia de radio a de la siguiente forma: Partiendo de un mismo punto de la circunferencia, ambos se mueven en sentidos contrarios llevando uno de ellos doble velocidad que el otro. A la circunferencia le llama *circunferencia directriz* y a los puntos A y B puntos *primario* y *secundario* respectivamente.

En la generación de la curva el punto A habrá de dar una vuelta completa y el punto B dará dos vueltas. En esta generación cada punto de la circunferencia directriz juega una vez el papel de punto primario y dos veces el de secundario.

Los puntos primario y secundario coinciden cuando θ toma los valores los valores de 0 , $2\pi/3$ y $4\pi/3$ correspondientes a los puntos de la curva que denominaremos *vértices* y que estarán sobre la circunferencia directriz.

Los puntos primario y secundario serán diametralmente opuestos cuando θ toma los valores $\pi/3$, π y $5\pi/3$ en los que se generan los puntos de retroceso de la curva.

Comprobemos que esta definición de Lemaire nos proporciona la misma curva.

Elijamos un sistema de referencia ortonormal cuyo cuyo origen sea el centro de la circunferencia que recorren los puntos y sea $(0, -a)$ el punto común de partida.

Las coordenadas de los puntos en un instante genérico son

$$A(a \operatorname{sen} \theta, -a \operatorname{cos} \theta), \quad B(-a \operatorname{sen} 2\theta, -a \operatorname{cos} 2\theta)$$

La recta AB tendrá por ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a \operatorname{sen} \theta & -a \operatorname{cos} \theta & 1 \\ -a \operatorname{sen} 2\theta & -a \operatorname{cos} \theta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\operatorname{cos} 2\theta - \operatorname{cos} \theta)x - (\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} \theta)y - a \operatorname{sen} 3\theta = 0$$

O bien

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}x + \operatorname{cos} \frac{\theta}{2}y = -a \operatorname{cos} \frac{3\theta}{2} \tag{7.4}$$

Para hallar su envolvente formamos sistema con su derivada respecto a θ

$$\operatorname{cos} \frac{\theta}{2}x - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}y = 3a \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}$$

que nos conduce a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \theta/2 & \operatorname{cos} \theta/2 \\ \operatorname{cos} \theta/2 & -\operatorname{sen} \theta/2 \end{vmatrix} = -1$$

$$x/a = \frac{\begin{vmatrix} -\operatorname{cos} 3\theta/2 & \operatorname{cos} \theta/2 \\ 3 \operatorname{sen} 3\theta/2 & -\operatorname{sen} \theta/2 \end{vmatrix}}{\Delta} = 3 \operatorname{cos} \theta/2 \operatorname{sen} 3\theta/2 - \operatorname{sen} \theta/2 \operatorname{cos} 3\theta/2$$

$$y/a = \frac{\begin{vmatrix} -\operatorname{sen} \theta/2 & -\operatorname{cos} 3\theta/2 \\ \operatorname{cos} \theta/2 & 3 \operatorname{sen} 3\theta/2 \end{vmatrix}}{\Delta} = -3 \operatorname{sen} \theta/2 \operatorname{sen} 3\theta/2 - \operatorname{cos} \theta/2 \operatorname{cos} 3\theta/2$$

expresiones que, debidamente tratadas se nos convierten en 7.1.

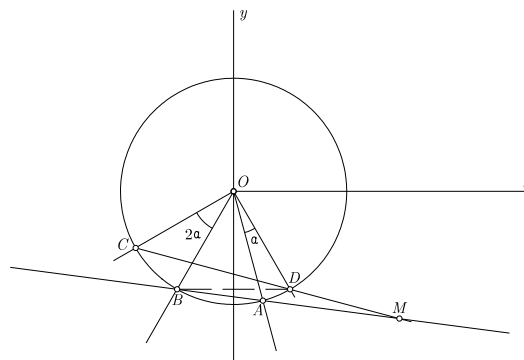


Fig. 7.3.-El punto característico es el simétrico del punto secundario respecto al primario.

El punto característico de una cualquiera de las involutas podemos obtenerlo razonando gráficamente. En efecto, sea AB una posición cualquiera de la involuta y D y C las respectivas posiciones próximas de los puntos A y B . Sea M el punto de corte de dos involutas próximas.

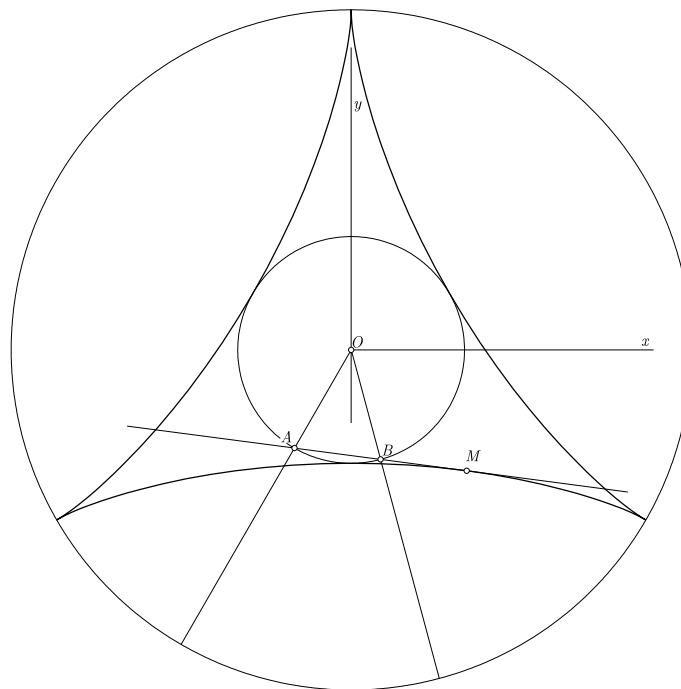


Fig. 7.4.-Una tangente a la deltoide corta a la circunferencia directriz en dos puntos, que, junto con el de contacto forman una terna en la que uno es el punto medio entre los otros dos.

El triángulo BDM es isósceles, pues el ángulo \widehat{DMB} vale $\alpha/2$ por ser ángulo exterior

y el \widehat{DBA} también vale $\alpha/2$ por ser ángulo inscrito. Cuando $\alpha \rightarrow 0$ el punto D tiende al A y el M tenderá a ser el simétrico de B respecto al A .

Concluimos así una propiedad interesante que analíticamente nos ha pasado desapercibida: *Una tangente cualquiera a la deltoide corta a la circunferencia directriz en dos puntos A (primario) y B (secundario) y el punto de contacto es siempre el simétrico del secundario respecto al primario.* Esta circunstancia tendremos ocasión de observarla en todas las figuras que siguen.

Las ecuaciones paramétricas 7.1 podemos también obtenerlas proyectando sobre los ejes la poligonal OAM donde $|OA| = a$ y el ángulo que forma OA con el eje Oy es 2θ . Análogamente, $|AM| = 4a \text{ sen } 3\theta/2$ y el ángulo de AM con Oy es $\pi/2 - \theta/2$. Tendríamos entonces

$$x_M = -a \text{ sen } 2\theta + 4a \text{ sen } \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -a \text{ sen } 2\theta + 2a(\text{sen } 2\theta + \text{sen } \theta)$$

$$y_M = -a \cos 2\theta - 4a \text{ sen } \frac{3\theta}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = -a \cos 2\theta - 2a(\cos 2\theta - \cos \theta)$$

De la ecuación 7.4 deducimos las paramétricas plückerianas

$$u = \frac{\text{sen } \theta/2}{a \cos 3\theta/2}, \quad v = \frac{\cos \theta/2}{a \cos 3\theta/2} \tag{7.5}$$

La eliminación de θ nos conduce a la ecuación plückeriana

$$av(v^2 - 3u^2) - (u^2 + v^2) = 0 \tag{7.6}$$

O bien, homogeneizando

$$av(v^2 - 3u^2) - (u^2 + v^2)w = 0 \tag{7.7}$$

Si en 7.6 hacemos $v = tu$ obtenemos las paramétricas plückerianas

$$u = \frac{1 + t^2}{at(t^2 - 3)}, \quad v = \frac{1 + t^2}{a(t^2 - 3)}$$

O bien, en homogéneas

$$U = (1 + t^2), \quad V = t(1 + t^2), \quad W = at(t^2 - 3) \tag{7.8}$$

7.1.2. Interpretación cinemática

Desde el punto de vista de la Ingeniería Mecánica hemos encontrado una interpretación cinemática a la expuesta por Lemaire.

Consideremos materializado el radio OA por una varilla que gira alrededor de O con una velocidad $\omega = \dot{\theta}$. Asimismo, materialicemos la recta AB como una varilla AC articulada a la anterior y que gira respecto a ella con una velocidad $\omega_1 = \dot{\phi}$.

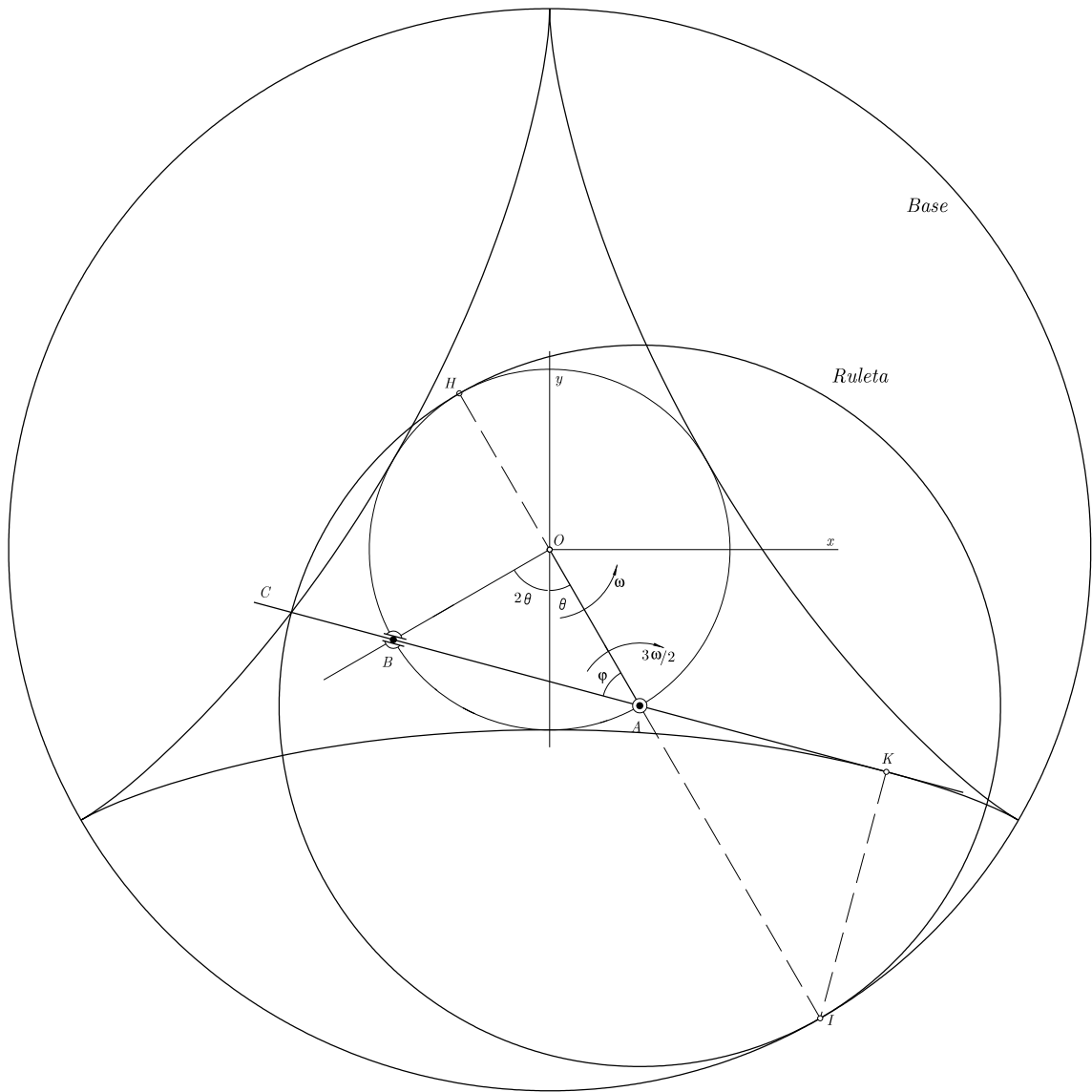


Fig. 7.5.-Interpretación cinemática.

Como

$$\varphi = \frac{\pi - 3\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = -3\dot{\theta}/2$$

lo que indica que ω y ω_1 llevan sentidos contrarios siendo $|\omega_1| = 3|\omega|/2$.

La varilla AC se va a mover sometida a la composición de estas dos rotaciones aplicadas respectivamente en O y A . Su resultante la vamos a tener en el centro instantáneo I de la varilla.

Un cálculo simple nos hace ver que $\overline{OI} = 2a$ con lo que volvemos a obtener de nuevo

que el punto de contacto K con la deltoide es el simétrico de B respecto a A .

Al ser $\overline{OI} = 3a$, la base de este movimiento plano va a ser la circunferencia de centro O y radio $3a$ y al ser también constante la distancia $\overline{AI} = 2a$, la ruleta va a ser una circunferencia de centro A y radio $2a$.

Este resultado nos muestra una faceta nueva de la deltoide como *curva envolvente del diámetro de una circunferencia que rueda por el interior de otra cuyo radio es vez y media el suyo*.

Esta interpretación cinemática nos hace obtener fácilmente la evoluta de la deltoide por aplicación de la construcción de Savary, cuyo esquema pasamos a recordar.

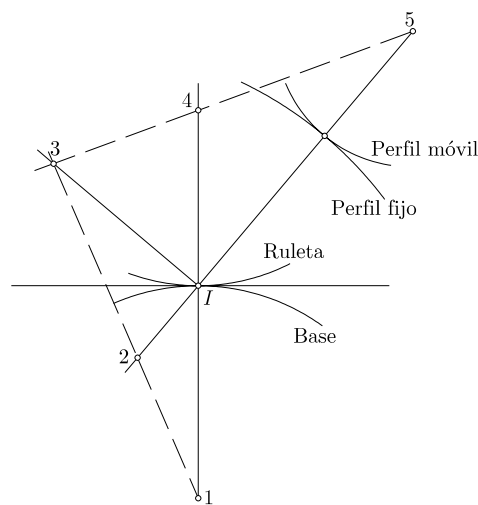


Fig. 7.6.-Construcción de Savary.

En nuestro caso, el perfil móvil va a ser la recta que genera la deltoide como envolvente. Su centro de curvatura, punto 5, va a estar en la dirección ortogonal a la recta.

El punto 1, centro de curvatura de la base va a ser el punto O , centro de la circunferencia directriz.

El punto 4, será el centro de la circunferencia ruleta.

Trazamos la perpendicular por I a la recta $5 - I$ y cortando con la $4 - 5$ obtenemos el punto auxiliar 3, que unido con 1 nos da el centro de curvatura con la deltoide, 2, al cortar con $5 - I$.

La evoluta de la deltoide va a ser el lugar geométrico del punto 2, envolvente a su vez de la normal a la deltoide $2 - I - K$.

Pero esta recta es homotética de de la $3 - 4$ con centro de homotecia O y razón 3. En efecto, ambas rectas son paralelas y se cumple que $\overline{O - 4} = \overline{OI}/3$.

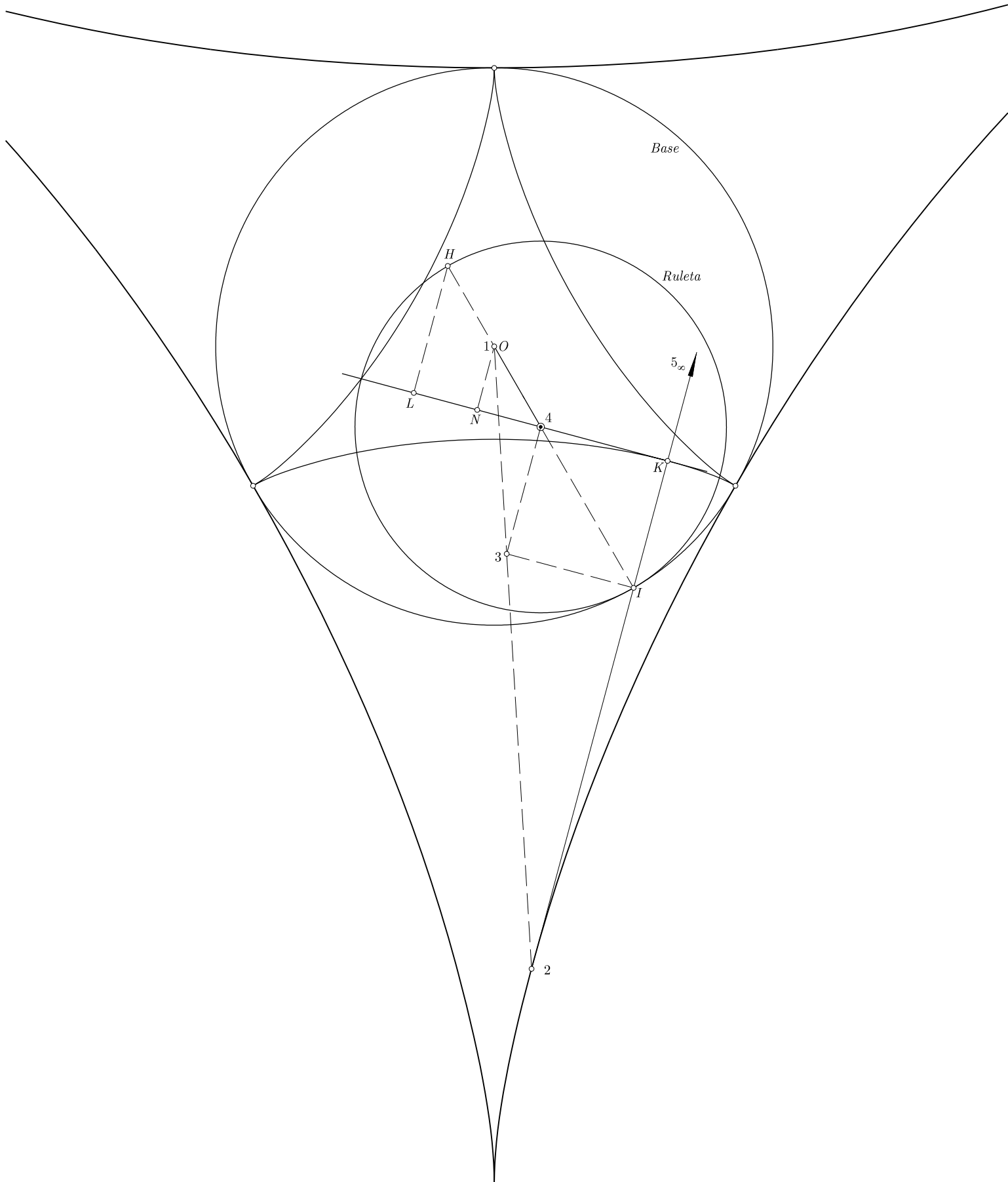


Fig. 7.7.-Evoluta de la deltoide mediante la construcción de Savary.

Pero 3 – 4 envuelve una deltoide igual que la original y girada $\pi/3$ ya que es el diámetro fijo de la ruleta ortogonal al diámetro generador.

La evoluta buscada será, como consecuencia, la homotética de la deltoide de partida con centro O , de razón 3 y girada $\pi/3$. Sus vértices vendrán a coincidir con los puntos de retroceso de la deltoide original.

7.2. PRIMERAS PROPIEDADES

HACIENDO $t = \pm i$ deducimos de 7.3

$$X = \pm 8ai, \quad Y = 8a, \quad T = 0$$

lo que indica que *la deltoide pasa por los puntos cíclicos, luego la curva es una cuártica circular.*

Análogamente, si hacemos $t = \pm i$ en 7.8 tenemos

$$U = V = 0, \quad W = \mp 4ai$$

lo que indica que *la deltoide admite como tangente doble a la recta impropia, siendo los puntos cíclicos los puntos de tangencia.*

Estas propiedades serán corroboradas de forma sintética al aplicar su generación proyectiva.

7.2.1. Propiedades de las tangentes

El hecho de que la deltoide sea variedad unicursal de rectas de grado tres le presta una situación privilegiada para que la mayoría de sus propiedades tengan su origen en el campo tangencial. Algunas de ellas podrán tener una demostración en el campo métrico, pero las más sofisticadas tendrán una procedencia proyectiva.

Como núcleo principal y punto de partida vamos a presentar una serie de propiedades relativas a un grupo muy especial de cuatro tangentes altamente relacionadas que forman un eslabón típico del encadenamiento de las tangentes. Para ello vamos a utilizar la interpretación de Lemaire haciendo dar al punto primario una vuelta completa sobre la circunferencia directriz.

Supongamos que el punto primario ha recorrido un ángulo θ y ha ido a ocupar la posición P_1 y que el secundario ha recorrido un ángulo 2θ y ha pasado a la posición S_1 . Obtenemos así una primera posición de la tangente P_1S_1 cuyo punto de tangencia T_1 es el simétrico de S_1 respecto a P_1 .

Supongamos ahora que el punto primario avanza hasta una posición P_2 definida por el ángulo $(\pi - \theta)/2$. El secundario avanzará hasta la posición S_2 correspondiente a su

Consecuencia de lo anterior es que el triángulo formado por las dos tangentes y el diámetro P_1S_2 es isósceles, y como habíamos visto que el ángulo $\widehat{P_1P_2S_2}$ es recto, el punto P_2 viene a ser el punto medio de la base del citado triángulo, con lo cual, al hallar el punto de contacto T_2 de la segunda tangente (simétrico de S_2 respecto a P_2) vemos que dicho punto viene a ser el punto de corte con la primera tangente.

Supongamos que el punto primario sigue su avance hasta la posición P_3 determinada por el ángulo $\pi + \theta$ y que le hace coincidir con S_2 . El ángulo que fija el secundario correspondiente S_3 viene a ser $2\pi + 2\theta$ con lo que S_3 viene a coincidir con S_1 . La nueva tangente P_3S_3 nos queda ortogonal a la primera puesto que el ángulo inscrito $\widehat{P_3S_3P_1}$ abarca un diámetro en la circunferencia directriz. El punto de contacto T_3 de esta nueva tangente, como siempre, es el simétrico de S_3 respecto a P_3 . No lo analizamos porque cae fuera del eslabón que estamos considerando.

Finalmente, llevemos el punto primario a la posición P_4 correspondiente a su ángulo $(3\pi - \theta)/4$. El punto P_4 ocupa la posición diametralmente opuesta a la P_2 y el secundario S_4 viene a coincidir con S_2 y P_3 . Esta cuarta tangente queda ortogonal a la segunda, puesto que P_2 y P_4 son diametralmente opuestos.

El punto de contacto T_4 de esta cuarta tangente viene a coincidir con el punto de intersección con la primera. La justificación es análoga a la que hicimos con T_2 . El triángulo $P_1T_4S_4$ es isósceles y P_4 es el punto medio de su base.

Hemos cerrado el ciclo del eslabón de cuatro tangentes encadenadas. A su vez, cada una de estas tangentes puede servir de punto de partida para otros eslabones y así sucesivamente.

Consecuencia 7.-I

Una tangente cualquiera a la deltoide la vuelve a cortar en dos puntos cuyas tangentes se cortan en ángulo recto sobre la circunferencia directriz.

Consecuencia 7.-II

Las tangentes en los extremos de la tangente en un vértice forman un ángulo de $\pi/4$ con ella.

Consecuencia 7.-III

La longitud interceptada por la deltoide sobre cualquiera de sus tangentes es constante e igual al doble del diámetro de la circunferencia directriz.

En efecto, P_2P_4 es paralela a T_2T_4 , pues los ángulos $\widehat{OP_1S_1}$ y $\widehat{P_2OP_1}$ son iguales. Ambos miden $(\pi - 3\theta)/2$.

Como O es el punto medio de P_1P_3 , la paralela anterior es paralela media del triángulo $S_2T_2T_4$, cuya base será entonces el doble del diámetro de la circunferencia directriz.

Consecuencia 7.-IV

El punto primario de una tangente es el punto medio del segmento de la misma interceptado por la deltoide.

Efectivamente, $P_1P_2P_4T_4$ es un paralelogramo pues $\widehat{OP_2P_1} = \widehat{P_4T_4S_1}$ pues al considerar el triángulo isósceles OP_2P_1 tenemos

$$\widehat{OP_2P_1} = \frac{1}{2} \left[\pi - \frac{\pi - 3\theta}{2} \right] = \frac{\pi + 3\theta}{4}$$

Por otro lado el ángulo $P_4T_4S_1$ considerado como exterior a la circunferencia directriz vale

$$\widehat{P_4T_4S_1} = \frac{1}{2} \left[\pi - \left(\pi - \frac{\pi - \theta}{2} - 2\theta \right) \right] = \frac{\pi + 3\theta}{4}$$

Si $P_1P_2P_4T_4$ es un paralelogramo, $\overline{T_4P_1} = \overline{P_4P_2}$ = diámetro de la circunferencia directriz.

El punto P_1 es, entonces, el punto medio de T_2T_4 .

Ejercicio 7.-I

Hemos visto que desde los puntos de la circunferencia directriz se pueden trazar dos tangentes ortogonales a la deltoide cuando el punto ejerce su papel de secundario, pero la forma de verlo ha sido un tanto informal cuando hemos hecho dar una vuelta completa al punto primario. Ante esta falta de rigor cabe preguntarnos: ¿son éstos los únicos puntos del plano desde los que existen dos tangentes ortogonales?

Sea

$$UX + VY + WT = 0$$

la ecuación plückeriana y homogénea del punto cuyas coordenadas cartesianas homogéneas son (X, Y, T) .

Si utilizamos las ecuaciones 7.8 plückerianas y paramétricas homogéneas de la deltoide, el valor del parámetro t para las tangentes desde el punto considerado han de verificar la ecuación

$$X(1 + t^2) + Yt(1 + t^2) + Tat(t^2 - 3) = 0$$

o bien, ordenando

$$(Y + aT)t^3 + Xt^2 + (Y - 3aT)t + X = 0 \tag{7.9}$$

Ahora bien, la pendiente m de la tangente correspondiente a t vale

$$m = -\frac{u}{v} = -\frac{1 + t^2}{t(1 + t^2)} = -\frac{1}{t}$$

Para que dos tangentes correspondientes a los valores t_1 y t_2 del parámetro sean ortogonales es que

$$m_1 m_2 = \left(-\frac{1}{t_1}\right) \left(-\frac{1}{t_2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad t_1 t_2 = -1$$

Hemos de obligar a que la ecuación 7.9 tenga dos raíces cuyo producto sea -1 . Para ello ha de existir un valor de λ tal que el primer miembro de 7.9 sea divisible por $t^2 + \lambda t - 1$.

Efectuada la división, el resto de la misma resulta ser

$$R(t) \equiv [\lambda^2(Y + aT) - \lambda X + 2(Y - aT)]t + 2X - \lambda(Y + aT)$$

La anulación idéntica de este resto exige que

$$\lambda^2(Y + aT) - \lambda X + 2(Y - aT) = 0$$

$$2X - \lambda(Y + aT) = 0$$

La eliminación de λ entre estas ecuaciones nos conduce a

$$X^2 + Y^2 - a^2 T^2 = 0$$

que es, precisamente, la ecuación de la circunferencia directriz.

Vemos, por tanto, que el fenómeno de tangentes ortogonales solamente se presenta en puntos de esta circunferencia.

7.3. GENERACIÓN PROYECTIVA

PROYECTIVAMENTE, podemos generar la deltoide de varias formas, según que la consideremos como cúbica tangencial o como cuártica puntual.

7.3.1. Generación como cúbica tangencial

Tal vez la tangencia sea la forma más operativa, pero menos intuitiva.

Si nos referimos a la forma correlativa del teorema general sobre involuciones 4.5 en su consecuencia 4.-V de la página 81 podemos decir: *Los pares de tangentes trazadas a la deltoide desde los puntos \underline{P} de una de sus tangentes están en involución. Si estas parejas las cortamos con la recta del infinito, que es la tangente doble, tendremos parejas de puntos en una involución ordinaria situada sobre dicha recta.*

Existe una proyectividad entre los puntos \underline{P} y los bipuntos que constituyen las parejas de homólogos de la involución anterior sobre la recta impropia.

Ordenemos nuestra forma de razonar enumerando muy detalladamente los distintos espacios proyectivos que vamos a manejar para no perdernos entre ellos.

- Partimos del espacio proyectivo $\{E_1\}$ constituido por los puntos de una recta tangente t a la deltoide.
- Desde cada uno de los puntos de $\{E_1\}$ trazamos las dos tangentes posibles a la deltoide distintas de la propia t que le sirve de soporte. Este par de tangentes las cortamos con la recta impropia y obtenemos pares de puntos en involución. Llamemos $\{E_2\}$ a este espacio de bipuntos.

La tangente t cortará a la deltoide en dos puntos M y N . Pues bien, las tangentes en estos puntos darán origen en $\{E_2\}$ a bipuntos dobles a los que llamaremos M_∞ y N_∞ .

Asimismo, la pareja de puntos cíclicos es otro elemento perteneciente a $\{E_2\}$, puesto que la deltoide es bitangente a la recta impropia en estos puntos.

- Como los elementos de $\{E_2\}$ no son operables procedamos a proyectarlos desde un punto propio H con lo que obtenemos un espacio de birrayos que constituyen una involución ordinaria de vértice H .

Sean m y n los rayos dobles de esta involución que procederán de proyectar M_∞ y N_∞ respectivamente.

Como los cíclicos también constituían un bipunto de $\{E_2\}$, la pareja de isótopas que pasan por H también constituyen uno de los birrayos de $\{E_3\}$.

Como la cuaterna formada por m , n y las isótopas es armónica esto exige que m y n sean ortogonales, luego la involución que tenemos en H es una simetría.

- Como los elementos de $\{E_3\}$ no son operables con los espacios convencionales, apliquemos el teorema III de 3.3 (pág. 43) cortándolos con una cónica c que pase por H y obtenemos así un nuevo haz $\{E_4\}$ cuyo vértice V es el centro de la involución que $\{E_3\}$ define sobre c .

Antes de seguir adelante no queremos dejar de resaltar una consecuencia del tercero de los items anteriores que ya conocíamos parcialmente por la generación de Lemaire: *Las tangentes t_M y t_N a la deltoide en los puntos de corte con una tangente t son ortogonales y las bisectrices de los pares de tangentes trazadas desde los puntos de t son paralelas a t_M y t_N .*

Esta elegante deducción es típica de la metodología proyectiva que defendemos en esta tesis.

Sigamos con nuestra forma de generación. Es evidente que va a existir proyectividad entre todos los espacios $\{E_i\}$, pero así como la existente entre $\{E_1\}$, y $\{E_2\}$ es ajena a nosotros, las dos restantes van a depender de dónde situemos el punto H y cuál sea la cónica c que utilizamos para cortar.

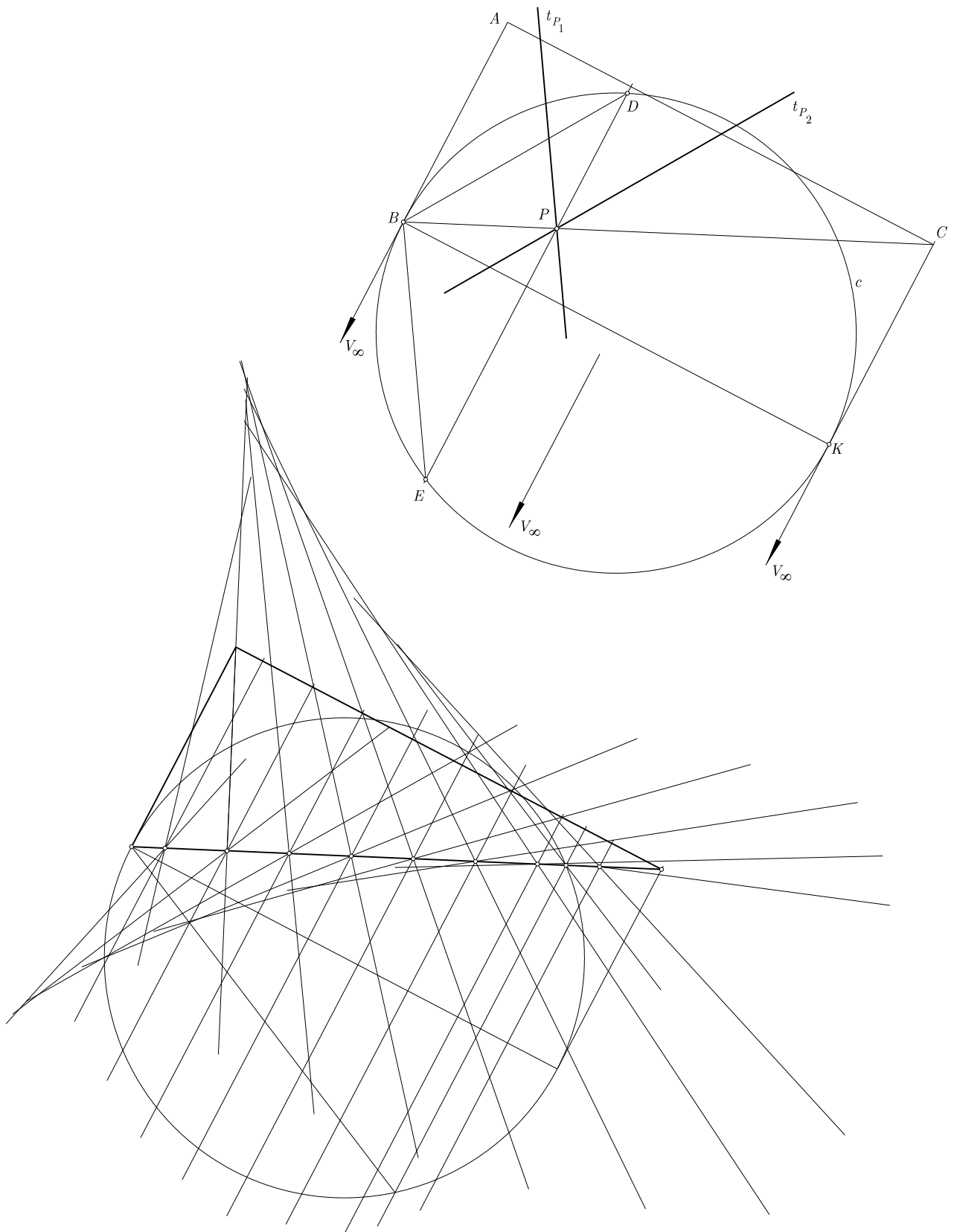


Fig. 7.9.-Generación proyectiva tangencial de la deltoide.

Tras analizar detenidamente el problema nos ha parecido encontrar una elección sencilla e incluso realizable fácilmente con regla y compás.

Supongamos que nos dan como punto de partida un triángulo rectángulo ABC que forma parte de un eslabón de cuatro tangentes encadenadas, es decir se trata de construir la deltoide tangente a BC , que pasa B y C y tiene por respectivas tangentes en estos puntos BA y CA . Estos datos definen plenamente a la deltoide como vamos a ver.

Elijamos como punto H del razonamiento anterior el propio punto B . Tracemos por B una paralela a AC y por C una paralela a AB . Ambas paralelas se encuentran en K . Tomemos como cónica c la circunferencia de diámetro BK .

Por las propiedades conocidas de los puntos en involución sobre una cónica, como los puntos B y C van a ser dobles, el centro V de la misma va a estar en el punto de intersección de las tangentes en B y C . Dicho centro nos va a quedar en el punto impropio de AB .

La proyectividad entre $\{E_1\}$ y $\{E_4\}$ se nos ha convertido en una simple perspectividad. De aquí que apliquemos el siguiente método para obtener tangentes a la deltoide:

- Elegimos un punto cualquiera P sobre la tangente BC .
- Trazamos por P una paralela a AB .
- Cortamos esta paralela con la circunferencia c y obtenemos los puntos D y E .
- Las tangentes t_{P_1} y t_{P_2} desde P a la deltoide son las paralelas por P a BD y BE .

En la figura anterior hemos representado la marcha general para obtener dos tangentes a la deltoide y hemos repetido el proceso para varios puntos y ver a simple vista como se genera la curva.

Ejercicio 7.-II

Dado el triángulo rectángulo de partida ABC que define una deltoide se pide:

1. Hallar el punto de contacto del lado BC .
2. Dibujar la circunferencia directriz.
3. Se define como *tangente adjunta* de una dada la que pasa por el punto de contacto de la primera. Hallar la tangente adjunta de BC .

Repetimos la misma figura básica que nos ha servido como punto de partida.

El lado BC del triángulo será tangente cuando su dirección sea la misma que una de las cuerdas que parten de B . Para ello el punto P que recorre la tangente ha de situarse en la intersección del lado BC con la circunferencia c .

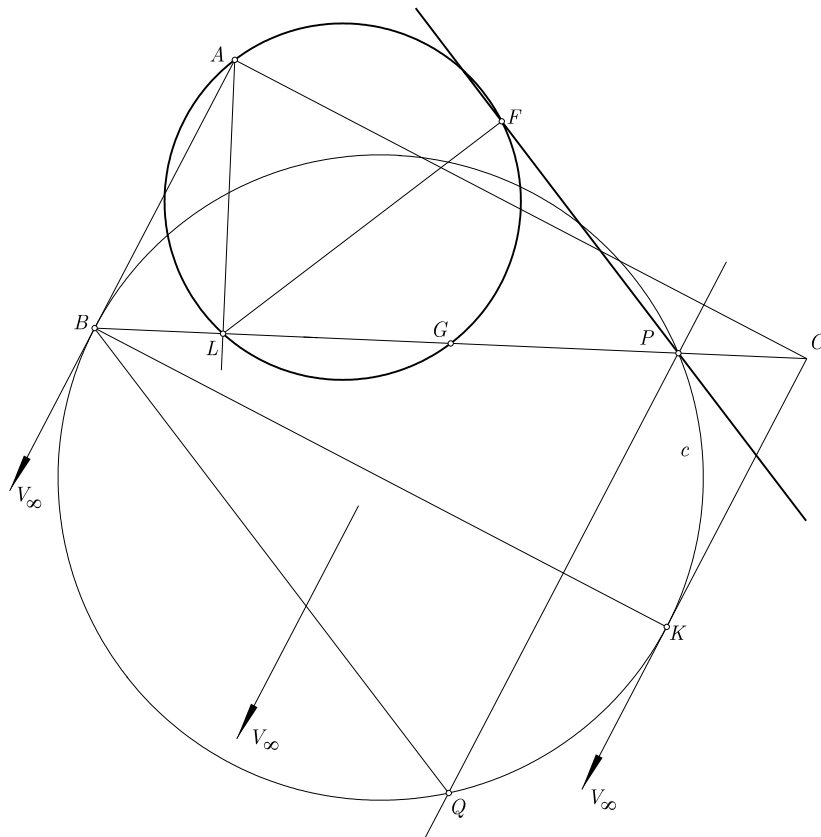


Fig. 7.10.-

Si por este punto trazamos la paralela a V_∞ determinamos sobre c el punto Q que nos va a dar la segunda tangente desde P .

Las tangentes desde este punto son entonces el propio lado BC y la paralela PF a la cuerda BQ .

La circunferencia directriz ha de pasar por el pie L de la perpendicular por A al lado BC , que estará jugando su papel de secundario, puesto que las tangentes AL y LP son ortogonales.

El punto primario para esta situación ha de ser el punto medio G de LP . La circunferencia directriz será la definida por los puntos A , L y G .

La tangente adjunta a la BC ya la hemos hallado. Es la recta PF . Observemos que la tangente adjunta juega el mismo papel que la tangente de partida BC . Por ello, la circunferencia directriz ha de pasar también por el pie F de la perpendicular por L a ella.

Exponemos unos detalles más de la figura dignos de ser mencionados.

La cuerda PQ , paralela a AB es bisectriz del ángulo \widehat{FPC} .

El diámetro de la circunferencia directriz lo hemos conocido desde un principio puesto

que ha de ser igual a la mitad de BC .

El punto medio G de LP también es punto medio de BC .

7.3.2. Generación como cuártica puntual

La generación como cuártica puntual resulta más intuitiva y de mayores aplicaciones prácticas, si bien su dificultad de manejo es mayor debido a que estamos contando con un grado más en la variedad.

Al tratarse de una cuártica con tres puntos de retroceso, que la convierte en unicursal, su parametrización y su generación hay que efectuarla con haces de cónicas que tengan como puntos fundamentales los tres puntos de retroceso más otro adicional también elegido sobre la curva.

De esta forma, de los ocho puntos de intersección tendremos como conocidos $3 \times 2 + 1 = 7$, con lo que nos queda uno libre para la parametrización o la generación.

La condición del cuarto punto la podemos sustituir por una tangencia en uno de los tres puntos de retroceso, con lo que tenemos haces generadores de segunda especie.

Esta última opción es la que vamos a elegir, adoptando los siguientes haces que guardan una simetría:

- Haz de cónicas \mathcal{H}_1 de puntos fundamentales los puntos de retroceso A , B y C y tangente en A la tangente de retroceso.
- Haz de cónicas \mathcal{H}_2 de puntos fundamentales los puntos de retroceso A , B y C y tangente en B la tangente de retroceso.

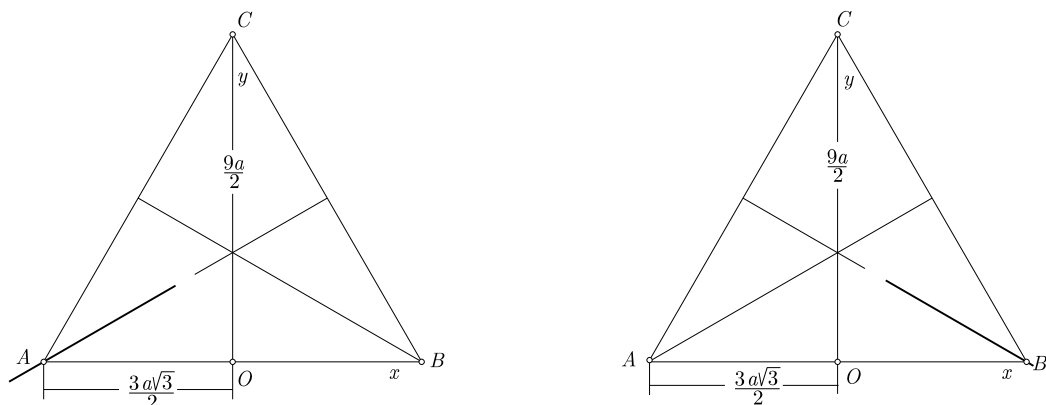


Fig. 7.11.-Elementos fundamentales de los haces generadores.

Para que la generación pueda llevarse a efecto hemos de establecer la relación proyectiva con los siguientes pasos:

- Establecer un elemento geométrico dentro de los espacios convencionales que represente a cada cónica. Elegiremos para ello las tangentes a las cónicas a su paso por el punto fundamental C .

Nos vamos a encontrar así con dos haces convencionales de rectas superpuestos en C . Uno será el formado por las tangentes t_1 a cada una de las cónicas de \mathcal{H}_1 y el otro será el de las tangentes t_2 a cada una de las cónicas de \mathcal{H}_2 .

- Tenemos que establecer la correspondencia proyectiva \mathcal{P} que liga las tangentes t_1 y t_2 . Dicha correspondencia se establecerá con tres casos particulares de cónicas de \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 que compartan tres puntos conocidos de la deltoide. Elegiremos como tales puntos los vértices de la curva.

Una vez establecido el mecanismo anterior, para llevar a efecto la generación hemos de seguir también los siguientes nuevos pasos:

- Elegimos como t_1 una recta cualquiera que pase por C . Esto nos determinará completamente una cónica del haz \mathcal{H}_1 .
- Hallamos mediante \mathcal{P} la tangente homóloga t_2 , que nos determinará completamente una cónica c_2 del haz \mathcal{H}_2 .
- Hallamos la intersección de c_1 con c_2 y tendremos un punto P de la deltoide. Para ello utilizaremos una ligera variante de lo expuesto en 5.5.1 (pág. 149).

Teorema 7.-I

Si son \underline{m} y \underline{m}' las pendientes de t_1 y t_2 la proyectividad \mathcal{P} es parabólica y tiene por ecuación

$$m - m' = \sqrt{3}$$

Si elegimos los ejes indicados en la figura, el haz \mathcal{H}_1 tiene por ecuación

$$f(x, y) = \left[y - \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x + \frac{3a\sqrt{3}}{2} \right) \right] \left[\frac{2x}{3a\sqrt{2}} + \frac{2y}{9a} - 1 \right] + \lambda y \left[-\frac{2x}{3a\sqrt{3}} + \frac{2y}{9a} - 1 \right] = 0$$

Obligando a que una cónica del haz pase por el vértice $D(0, a/2)$ obtenemos el valor $\lambda = 2$. La pendiente de t_1 para esta cónica es

$$m_D = - \left[\frac{f'_x}{f'_y} \right]_{x=0, y=a/2, \lambda=2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dada la simetría de condiciones, la pendiente t_2 para la cónica de c_2 que pasa por este punto va a ser $m'_D = -\sqrt{3}/2$.

Análogamente, si obligamos a que una cónica de \mathcal{H}_1 pase por el vértice $E(-a\sqrt{3}/2, 2a)$ vamos a tener $\lambda = -2$ y la correspondiente pendiente de t_1 va a ser

$$m_E = - \left[\frac{f'_x}{f'_y} \right]_{x=a\sqrt{3}/2, y=2a, \lambda=-2} = 2\sqrt{3}$$

La cónica de \mathcal{H}_2 que pasa por este vértice es la que degenera en la pareja de rectas (BE, AC) , luego el valor de la pendiente de t_2 va a ser la de la recta AC , es decir $m'_E = \sqrt{3}$.

Finalmente, cuando las cónicas pasan por el vértice F se intercambian los papeles anteriores y vamos a tener las pendientes respectivas $m_F = -\sqrt{3}$ y $m'_F = -2\sqrt{3}$.

Con estos tres pares de datos ya podemos formar la ecuación de la proyectividad correspondiente que será

$$\begin{vmatrix} mm' & m & m' & 1 \\ -3/4 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \\ 6 & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \\ 6 & -\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que desarrollado convenientemente nos da

$$m - m' = \sqrt{3}$$

y que, efectivamente va a ser una proyectividad parabólica cuyo único rayo doble va a ser el eje Oy .

Ejercicio 7.-III

Hallar la razón doble de la cuaterna de puntos de la deltoide formada por un punto de retroceso, el vértice opuesto y los dos vértices restantes.

Podemos obtener esta razón doble por muchos sitios, pero tal vez el que ahora mismo nos resulta más cómodo puede ser a través de las pendientes t_1 o t_2 . Si lo hacemos con t_1 tenemos

$$(CDEF) = (\infty, \sqrt{3}/2, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}/2 - 2\sqrt{3}} = -1$$

Forman cuaterna armónica.

Para comprobar que este valor de la cuaterna está presente en todos los espacios proyectivos que estamos manejando, vamos a comprobar su valor utilizando los valores del parámetro λ del haz \mathcal{H}_1 .

Hemos de empezar calculando el valor de λ en el punto de retroceso C . Para ello obligamos a que t_1 coincida con el eje Oy .

Debemos tener

$$[f'_y]_{x=0, y=9a/2} = 0, \Rightarrow \left[-\frac{4}{3} + \frac{4x}{9\sqrt{3}a} + \frac{4y}{9a} - \lambda - \frac{2\lambda x}{3\sqrt{3}a} + \frac{4\lambda y}{9a} \right]_{x=0, y=9a/2} = 0$$

que nos da el valor $\lambda = -2/3$.

Con el nuevo cálculo volvemos a tener

$$(CDEF) = (-2/3, 2, -2, 0) = \frac{-2/3 + 2}{-2/3} : \frac{4}{2} = \frac{4/3}{-2/3} : 2 = -1$$

7.4. DELTOIDE Y CARDIOIDE

A pesar de su apariencia geométrica tan distinta, la deltoide y la cardioide son, en el fondo y desde un punto de vista algebraico, la misma curva, pudiendo pasarse de una a otra a través de una transformación proyectiva en el plano complejo.

Ambas son unicursales cuárticas en el plano puntual y unicursales cúbicas en el campo tangencial. Ambas poseen tres puntos de retroceso, la deltoide en tres puntos propios y la cardioide en un punto propio y en los dos puntos cíclicos.

Comprobemos que estos valores cuadran con lo que nos dicen las fórmulas de Plücker 6.9. Si su grado es cuatro y tienen tres puntos de retroceso, su clase es

$$k = 4 \times 3 - 3 \times 3 = 3$$

Al contrario, si su clase es tres y ambas tienen una tangente doble su grado es

$$n = 3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$$

En estas circunstancias, es posible pasar de una a otra mediante una transformación proyectiva en el campo complejo, que no está definida de forma única.

Hemos hecho un pequeño intento de cálculo para conseguir alguna de estas transformaciones. Para ello hemos impuesto las siguientes limitaciones:

- Que los puntos de retroceso A y B se transformen en los puntos cíclicos.
- Que el punto C sea doble.
- Que el vértice de la deltoide contenido en Oy se transformen en el vértice de la cardioide también contenido en Oy .

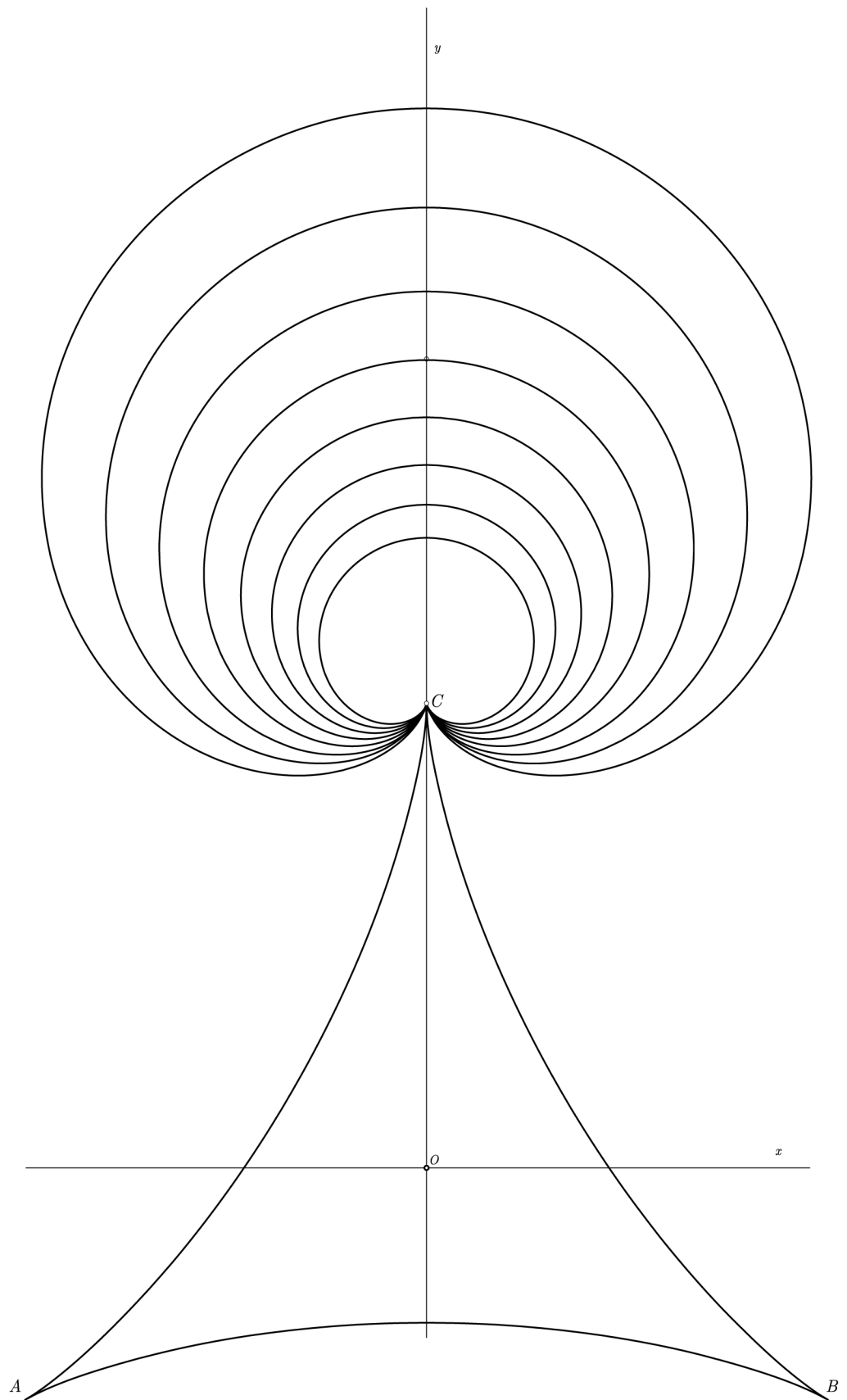


Fig. 7.12.-Deltoides y cardioides son la misma curva desde un punto de vista algebraico.

Con estas limitaciones de contorno, hemos entrado en la ecuación general de una proyectividad en el plano

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ t \end{Bmatrix}$$

e imponiendo las condiciones una a una hemos obtenido la siguiente ecuación de transformación dependiendo todavía de dos parámetros homogéneos α y β , que, precisamente por su naturaleza homogénea, se comportan como si fuesen uno solo.

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{3}a(\alpha + 2\beta)i & 0 & 0 \\ 0 & 9\alpha a & 27a^2\beta \\ 0 & 2(\alpha + \beta) & 3a(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ t \end{Bmatrix}$$

En la figura anterior hemos mantenido fija la deltoide y hemos representado la cardioide transformada para diversos valores de la relación α/β .

Es curioso el resultado obtenido. Ambas curvas tienen ramas en el plano real y en el plano complejo, pero con la transformación propuesta se intercambian los papeles, de modo que la rama real de una se transforma en la compleja de la otra y viceversa. Solamente mantienen un contacto real en dos puntos del eje Oy , el punto doble C y los vértices correspondientes.

7.5. DELTOIDE Y RECTA DE SIMSON

LA deltoide resulta estar altamente relacionada con la conocida recta de Simson. El primer conocedor de esta relación fue Steiner que nos legó unas elegantes conclusiones que pasamos a recordar antes de exponer las implicaciones proyectivas que puede tener el espacio constituido por tales rectas y que se ponen de manifiesto en esta extensión que estamos haciendo a espacios no convencionales.

Para dar un cierto autocontenido a esta exposición hemos recopilado de una información muy dispersa solamente las propiedades poco conocidas de la recta de Simson. La definición y la demostración de existencia de la citada recta puede verse en cualquier texto de Geometría elemental.

Teorema 7.-II

La recta de Simson de un punto P es paralela a la recta que une cada vértice del triángulo con el punto de intersección de la circunferencia circunscrita con la perpendicular al lado opuesto del triángulo trazada desde el punto P .

En efecto, razonemos con el vértice A . Sea D el segundo punto de corte de la circunferencia circunscrita con la recta PM . En el cuadrilátero inscriptible $ADCP$ tenemos

$$\delta = \alpha \pmod{\pi}$$

Como ya teníamos $\beta = \alpha \pmod{\pi}$, deducimos que

$$\delta = \beta \pmod{\pi}$$

lo que exige el paralelismo entre las rectas r y r_A . De forma análoga se demostrarían los paralelismos entre las rectas r , r_B y r_C .

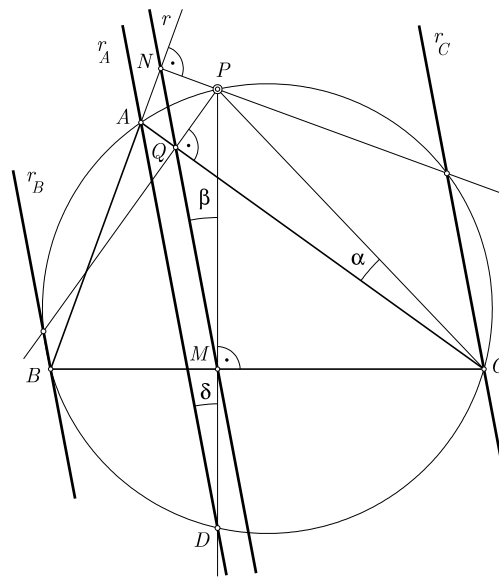


Fig. 7.13.-Paralelismo entre r y r_A .

7.6. RECTA DE STEINER

Teorema 7.-III

La recta de Simson asociada al punto P equidista de este punto y del ortocentro H del triángulo ABC .

Sabemos que el simétrico E del ortocentro respecto al lado BC pertenece a la circunferencia circunscrita. El trapecio $APDE$ es isósceles, luego se verifica la igualdad de diagonales

$$\overline{EP} = \overline{AD}$$

Construyamos el simétrico F del punto P respecto a la recta BC . El trapecio $HEFP$

también es isósceles, de eje de simetría BC , luego también tenemos la igualdad de diagonales

$$\overline{EP} = \overline{HF}$$

De las relaciones anteriores deducimos que $\overline{HF} = \overline{AD}$, lo que exige que $AHFD$ sea un paralelogramo y que HF sea paralela a la recta AD y, por ende, a la recta de Simson.

La recta HF paralela por H a la recta de Simson se denomina *recta de Steiner* y es una recta que contiene a los simétricos F, K y L del punto P respecto a cada uno de los lados del triángulo ABC .

Consideremos ahora el triángulo HPF . Al ser M el punto medio del segmento PF , la recta de Simson MQN es una paralela media de dicho triángulo, luego equidista de los puntos P y H .

Veamos alguna propiedad adicional de la recta de Steiner. En primer lugar, observemos que existe un trazado rápido de la misma que permite obtenerla sin dibujar previamente la recta de Simson. En efecto, las diagonales HP y EP del trapecio isósceles $HPFE$ se cortan en un punto S de su eje de simetría BC .

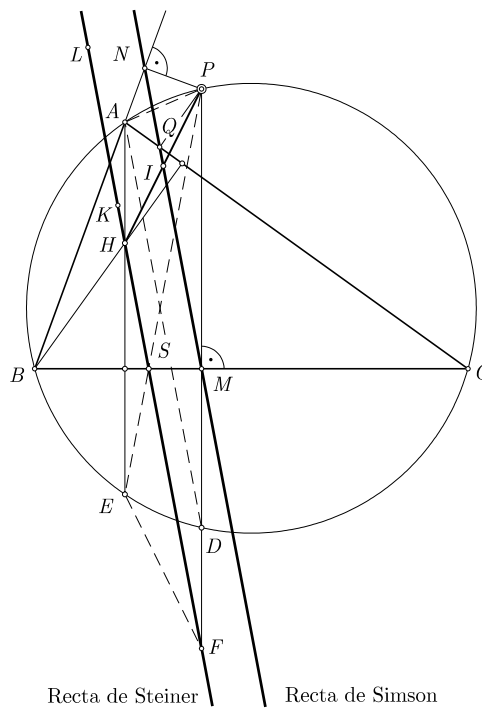


Fig. 7.14.-La recta de Steiner es la paralela a la de Simson trazada por el ortocentro.

De aquí deducimos que para obtener la recta de Steiner del punto P basta con obtener el punto S de intersección del lado BC con la recta definida por los puntos P y E , simétrico del ortocentro H respecto al mismo lado BC . La recta HS es la recta de Steiner asociada

a P . La misma operación nos produce la misma recta para cualquier lado que se elija del triángulo ABC .

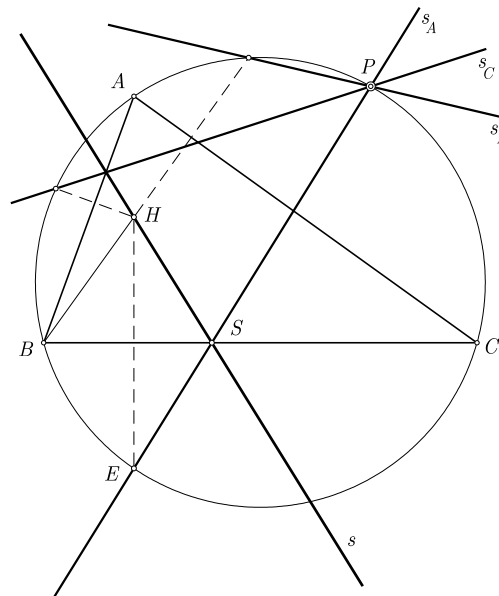


Fig. 7.15.-Trazado directo de la recta de Steiner.

Lo que acabamos de exponer nos da pie para establecer la siguiente consecuencia:

Consecuencia 7.-V

Las rectas simétricas respecto a los lados del triángulo de una recta s que pasa por el ortocentro concurren en un punto P de la circunferencia circunscrita y la recta s es la recta de Steiner asociada al punto P .

En efecto, la recta s_A , simétrica de s respecto al lado BC , corta a la circunferencia circunscrita en el punto E , simétrico del ortocentro H respecto a BC y en otro punto P de la misma.

Dicha recta s_A concurre con s en un punto S del lado BC .

Intentemos ahora construir la recta de Steiner del punto P . Según lo expuesto, uniríamos P con E para obtener S y la recta de Steiner sería $s \equiv SH$.

La unicidad de s , según el lado del triángulo elegido para la construcción, va a exigir que las otras simétricas s_B y s_C de s respecto a los lados AC y AB también pasen por P .

Recíprocamente, si las rectas simétricas de una recta s respecto a los lados de un triángulo concurren en un punto P , la recta s pasa por el ortocentro y el punto P pertenece a la circunferencia circunscrita.

En efecto, los simétricos de P respecto a los lados del triángulo van a pertenecer a la recta s y las proyecciones de P sobre dichos lados van a estar en la recta homotética de s

respecto a P y razón $k = 1/2$. Esta recta homotética va a ser la recta de Simson del punto P , que habrá de pertenecer, por tanto, a la circunferencia circunscrita. La recta s será la recta de Steiner y tendrá que pasar por el ortocentro.

Todo lo expuesto está invitando a la siguiente aplicación: Sabemos que la simétrica de la directriz de una parábola respecto a una tangente pasa por el foco. Si tomamos tres tangentes, formarán un triángulo ABC y la aplicación de la teoría expuesta nos hace concluir de nuevo que la circunferencia circunscrita pasa por el foco (Teorema de Lambert) y que la directriz pasa por el ortocentro de ABC . La recta de Simson del foco es la tangente en el vértice.

Proyectivamente, esta propiedad se demuestra de forma elegante como consecuencia de los teoremas correlativos de Staudt y Desargues, [21] de los cuales se deduce que el ortocentro de un triángulo circunscrito a una parábola pertenece a su directriz.

Teorema 7.-IV

La recta de Simson asociada al punto P corta a la circunferencia de Feuerbach en el punto medio de la recta HP , siendo H el ortocentro del triángulo ABC .

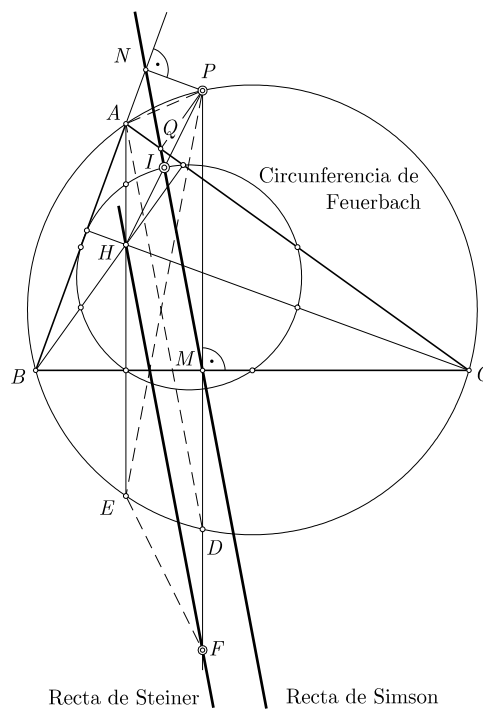


Fig. 7.16.-Recta de Simson y circunferencia de Feuerbach.

Es una consecuencia de la propiedad anterior. La recta de Simson, paralela media del triángulo HPF corta al lado HP en el punto medio I de dicho lado. Sabemos, además,

que entre la circunferencia de los nueve puntos y la circunferencia circunscrita existe una homotecia directa de centro H y razón $k = 2$. Esto hace que el centro I de HP esté precisamente en la citada circunferencia.

Teorema 7.-V

Las rectas de Simson asociadas a dos puntos P y R diametralmente opuestos de la circunferencia circunscrita son ortogonales y se cortan en un punto G de la circunferencia de Feuerbach.

Sea NQM la recta de Simson asociada al punto P y KLF la recta asociada al punto R . Por la consecuencia III, ambas rectas han de cortar a la circunferencia de los nueve puntos en dos puntos I, J , que constituyen un diámetro de la misma, homotético del diámetro PR , con centro H y razón $k = 1/2$.

En virtud de la consecuencia I, la recta de Simson asociada al punto R ha de llevar la dirección de la recta AE . Como la recta asociada al punto P lleva la dirección de la recta AD , debemos evaluar el ángulo \widehat{EAD} para conocer el ángulo que forman ambas rectas de Simson.

Pero ED es un diámetro de la circunferencia circunscrita. En efecto, puesto que el trapecio $EPDR$ es isósceles, sus diagonales deben tener la misma longitud y, por otro lado, sabemos que la diagonal PR es un diámetro de la circunferencia.

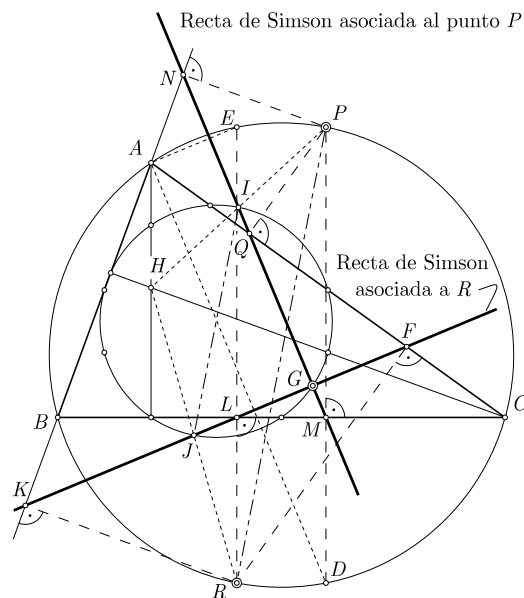


Fig. 7.17.-Ortogonalidad de rectas de Simson.

Concluimos entonces que las direcciones AE y AD son ortogonales.

Finalmente, como la recta IJ es un diámetro de la circunferencia de los nueve puntos, las rectas de Simson ortogonales que pasan por ellos han de cortarse en un punto G de la citada circunferencia.

La ortogonalidad entre las rectas de Simson asociadas a dos puntos diametralmente opuestos podía preverse e, incluso, generalizarse. En efecto, la dirección de la recta de Simson sabemos que viene definida por la dirección de AD . Si el punto P avanza por la circunferencia circunscrita un ángulo φ , el punto D se desplaza el mismo ángulo en sentido contrario y la recta AD gira alrededor de A un ángulo $\varphi/2$, también en sentido contrario. Podemos entonces concluir que las rectas de Simson asociadas a dos puntos P y Q , separados por un ángulo φ contado en un sentido determinado, forman un ángulo $\varphi/2$, medido ahora en sentido opuesto.

Teorema 7.-VI

Por el punto de intersección G de las rectas de Simson asociadas a dos puntos P y R diametralmente opuestos de la circunferencia circunscrita, pasa también la recta de Simson de un tercer punto S de dicha circunferencia, siendo esta nueva recta ortogonal al propio diámetro PR .

La primera parte es evidente. Por el punto G ha de pasar la recta de Simson del punto S , homotético del punto G respecto al ortocentro H y con razón $k = 2$.

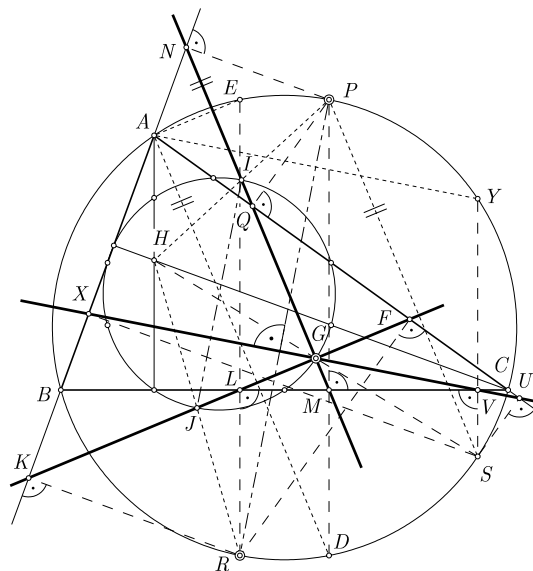


Fig. 7.18.-Por cada punto de la circunferencia de Feuerbach pasan tres rectas de Simson.

La perpendicular SV al lado BC vuelve a cortar a la circunferencia circunscrita en el punto

Y. La recta de Simson asociada a S llevará la dirección de AY .

Queremos demostrar que la recta AY es ortogonal a la recta PR , lo cual equivale a comprobar que el triángulo APY es isósceles. El trapecio $PYSD$ es isósceles, luego los arcos \widehat{PY} y \widehat{SD} son iguales. Pero las rectas PS e IG son paralelas por ser ambas homotéticas de centro H . Como, a su vez, IG es paralela a AD , deducimos que las rectas PS y AD son paralelas, luego los arcos \widehat{AP} y \widehat{SD} son iguales.

Se tiene, finalmente

$$\widehat{PY} = \widehat{SD} = \widehat{AP}$$

con lo que queda demostrado que el triángulo APY es isósceles y se garantiza, por tanto, la ortogonalidad de la recta de Simson asociada al punto S con el diámetro PR .

7.6.1. Envoltentes de las rectas de Simson

Sea ABC un triángulo fijo y P un punto que recorre su circunferencia circunscrita. Al describir P dicha circunferencia, las rectas de Simson asociadas envuelven una hipocicloide de tres retrocesos denominada *hipocicloide de Steiner*.

Hemos visto que cuando el punto recorre un ángulo φ sobre la circunferencia circunscrita, la recta de Simson asociada r gira un ángulo $\varphi/2$ en sentido contrario.

El análisis minucioso de la construcción efectuada para el trazado de la recta r nos permitirá desembocar en la definición dada por Lemaire para obtener las hipocicloides como envoltentes.

- Adoptemos, como dirección de partida para contar ángulos, la dirección HA definida por el ortocentro y el vértice A . En este punto, la recta de Simson es la propia altura HA .
- Para definir el punto P , giremos sobre la circunferencia circunscrita un ángulo $\widehat{AOP} = \varphi$.
- Tracemos la circunferencia de Feuerbach de centro el punto Ω . La recta HP cortará a dicha circunferencia en un punto I , homólogo de P en la homotecia de centro H y razón $k = 1/2$. El ángulo $\widehat{K\Omega I}$ sigue valiendo φ .
- La recta de Simson asociada a P es la que pasa por el punto I y forma un ángulo de valor $-\varphi/2$ con la paralela IL a la recta HA .

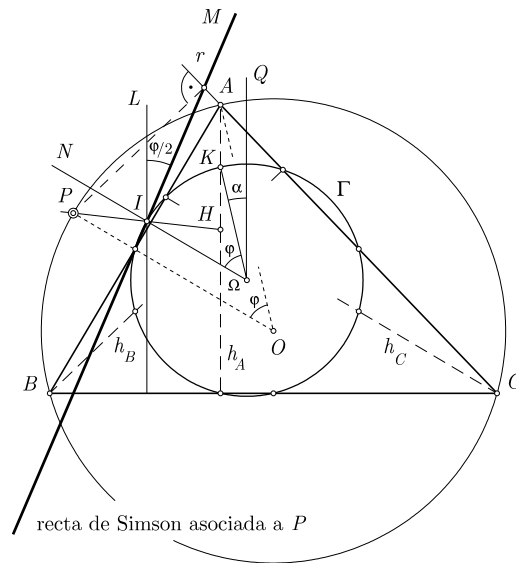


Fig. 7.19.-Magnitudes angulares que intervienen en el estudio de la envolvente de la recta de Simson.

Bajo estas condiciones, cuando el punto I recorre la circunferencia de Feuerbach Γ , la recta r envuelve una deltoide. Estamos recreando las condiciones expuestas en la generación de Lemaire.

Vamos a calcular los valores del ángulo φ para las posiciones en las que la recta de Simson r sea tangente a Γ . Estas posiciones nos fijarán los vértices de la hipocicloide. Los puntos de retroceso van a corresponder a las bisectrices de estas direcciones.

Para que la recta r sea tangente a Γ hace falta que el ángulo que forma r con el radio vector ΩI de Γ valga $k\pi/2$, donde el coeficiente k puede tomar los valores 1, 3 y 5. Tendremos entonces

$$\begin{aligned} \widehat{MIN} = \frac{k\pi}{2} &\Rightarrow \frac{\varphi}{2} + \widehat{LIN} = \frac{k\pi}{2} \\ \frac{\varphi}{2} + \widehat{Q\Omega I} = \frac{k\pi}{2} &\Rightarrow \frac{\varphi}{2} + \widehat{K\Omega I} + \alpha = \frac{k\pi}{2} \\ \frac{\varphi}{2} + \varphi + \alpha = \frac{k\pi}{2} &\Rightarrow \varphi = \frac{k\pi - 2\alpha}{3} \end{aligned}$$

donde α es un ángulo conocido para el triángulo de partida ABC y k toma los valores ya mencionados 1, 3, 5.

Obtenemos de esta forma los valores de φ correspondientes a los vértices de la hipocicloide. En la figura siguiente hemos representado la evolución de las rectas de Simson al desplazarse el punto P sobre la circunferencia circunscrita y puede observarse la existencia de la mencionada hipocicloide de Steiner. Sus puntos de retroceso pertenecen a una circunferencia concéntrica con la circunferencia de Feuerbach y de radio tres veces el radio

de ésta.

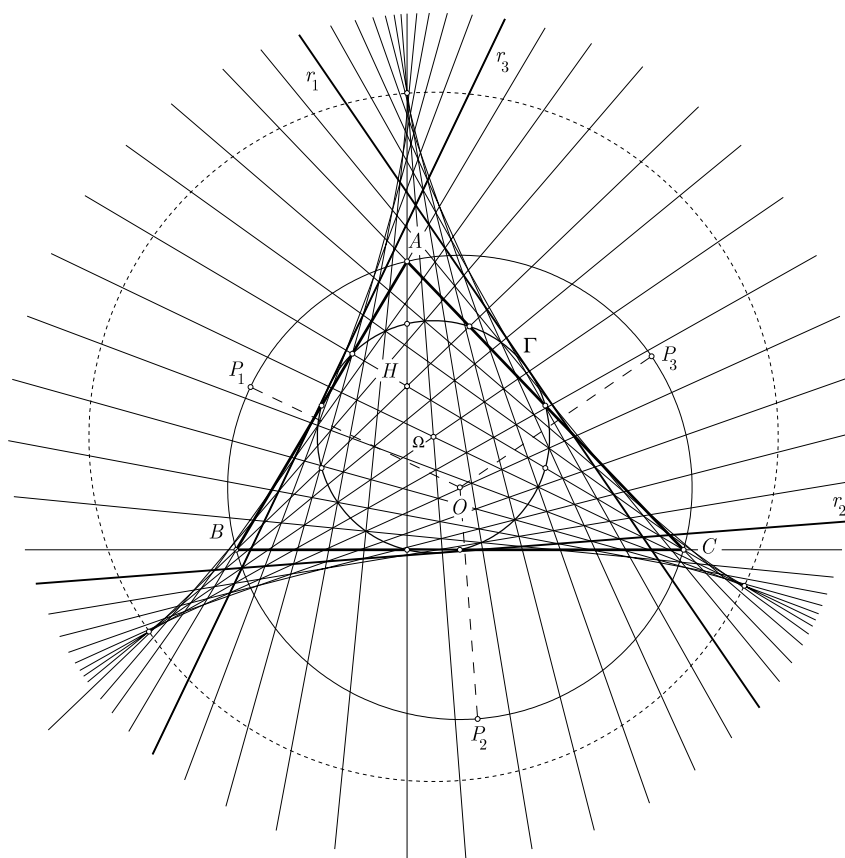


Fig. 7.20.-La envolvente de las rectas de Simson es una hipocicloide de tres retrocesos denominada *hipocicloide de Steiner*. Los puntos P_i de la circunferencia circunscrita son los que generan las tangentes r_i en los vértices de la cicloide.

7.6.2. Rectas de Simson como asíntotas de hperbolas equiláteras

Por un lado, hemos visto que en un punto G de la circunferencia de Feuerbach concurren tres rectas de Simson: dos de ellas ortogonales entre sí y correspondientes a un par de puntos M y N diametralmente opuestos en la circunferencia circunscrita y una tercera ortogonal a MN y asociada al punto S , homotético de G en la homotecia de centro el ortocentro H y razón $k = 2$.

Por otro lado, también conocemos [20] que el haz de cónicas cuyos puntos fundamentales forman una configuración ortocéntrica, está constituido exclusivamente por hipérbolas equiláteras y el lugar geométrico de sus centros es la circunferencia de Feuerbach correspondiente a la citada distribución de puntos.

Pues bien, la pareja de rectas de Simson que son ortogonales y concurrentes en G son precisamente las asíntotas de la hipérbola equilátera del haz cuyo centro es el punto G .

En efecto, proyectemos los puntos M y N sobre el lado BC . Sean M' y N' dichas proyecciones. Asimismo, sean I y J los puntos de intersección de las rectas HM y HN con la circunferencia de Feuerbach. Las rectas de Simson asociadas a los puntos M y N son, respectivamente, $M'I$ y $N'J$.

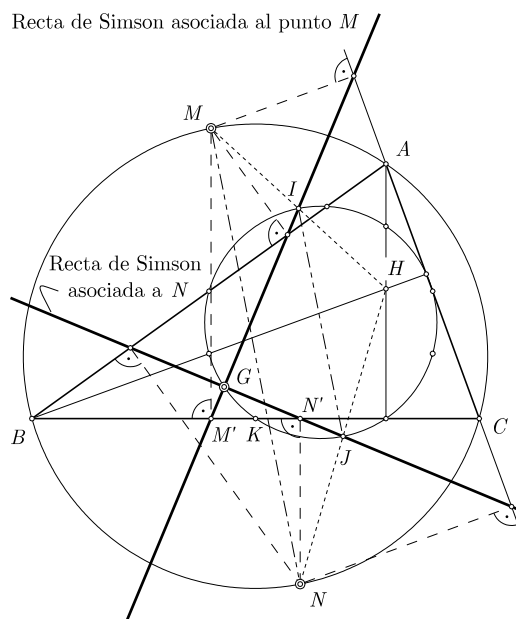


Fig. 7.21.- Rectas de Simson asociadas a los puntos M y N .

Vamos a demostrar que la hipérbola equilátera de asíntotas GI y GJ que pasa por el punto B también pasa por los puntos A y C . La obligatoriedad que tienen estas hipérbolas de pasar por el ortocentro H [20] hace que la hipérbola así definida sea una de las pertenecientes al haz, con lo cual tendremos probada la propiedad.

Las asíntotas GI , GJ cortan al lado BC en los puntos M' y N' , que son simétricos respecto al punto medio K de dicho lado por ser proyecciones de los extremos del diámetro MN . Por otro lado, sabemos que si una recta corta a una hipérbola en dos puntos, el punto medio del segmento definido por dichos puntos de corte coincide con el punto medio del segmento determinado por los puntos de corte de la recta con las asíntotas. Aplicando esta propiedad sobre el lado BC , garantizamos que la hipérbola debe pasar por el punto C dado que, por definición, dicha cónica pasa por el punto B .

De la misma forma justificaríamos que la hipérbola pasa por el punto A y, por tanto, aseguramos que la hipérbola considerada pertenece al haz.

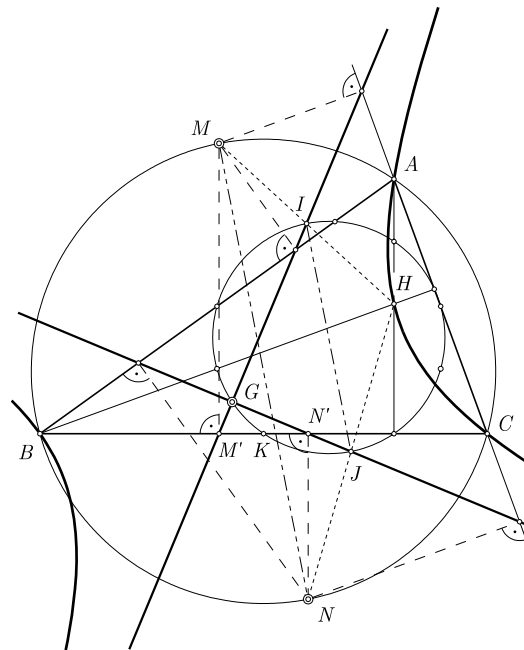


Fig. 7.22.-Las rectas de Simson asociadas a los puntos M y N que se cortan en G son asíntotas de la hipérbola equilátera que pasa por los puntos A , B , C y H y tiene su centro en el punto G .

Capítulo 8

LAS CÓNICAS COMO VARIEDADES UNICURSALES

8.1. GENERALIDADES

COMO ya tuvimos ocasión de exponer en 4.2, las cónicas constituyen una de las variedades unicursales más elementales.

Consideradas bajo este aspecto, son muchas las propiedades de cierta complejidad que pueden ponerse de manifiesto con esta metodología de trabajo y cuya deducción por otros caminos sería francamente laboriosa.

Ya Michel en [16] Papelier en [2] tuvieron ocasión de esbozar brillantemente esta metodología. Los fuertes avatares a los que se vio sometida la Geometría en la segunda mitad del siglo XX hicieron caer en el olvido sus inicios prometedores. Vamos a exponer algunos aspectos que no hemos encontrado desarrollados en las bibliografías especializadas.

8.2. PUNTOS CONCÍCLICOS

EL comportamiento de las cuaternas de puntos concíclicos sobre una cónica ha sido estudiada por los tratadistas clásicos bajo aspectos analíticos y proyectivos.

Vamos a intentar un nuevo aporte al considerar los puntos como pertenecientes a una variedad unicursal.

Teorema 8.-I

Las cuaternas de puntos concíclicos sobre una cónica definen una involución cuaternaria sobre la misma.

El modo de demostrarlo y los resultados son casi idénticos para la elipse y la hipérbola

y muy distintos para el caso de parábola. Veámoslo.

Sea la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que pasada a paramétricas es

$$x = a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1 + t^2}$$

Vamos a cortarla con la circunferencia genérica

$$x^2 + y^2 + ux + vy + w = 0$$

Obtenemos así, la cuártica

$$(a^2 - au + w)t^4 + 2vbt^3 + (4b^2 - 2a^2 + 2w)t^2 + 2vbt + a^2 + au + w = 0$$

Aplicando las relaciones de Cardano a esta ecuación llegamos a

$$\begin{aligned} 2vb + S_1(a^2 - au + w) &= 0 \\ 4b^2 - 2a^2 + 2w - S_2(a^2 - au + w) &= 0 \\ 2vb + S_3(a^2 - au + w) &= 0 \\ a^2 + au + w - S_4(a^2 - au + w) &= 0 \end{aligned}$$

Evidentemente, la condición que han de cumplir cuatro t_i para que definan puntos concíclicos es que

$$\boxed{S_1 - S_3 = 0} \quad (8.1)$$

En el caso de hipérbola tenemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que pasada a paramétricas es

$$x = a \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1 - t^2}$$

que cortada con la circunferencia

$$x^2 + y^2 + ux + vy + w = 0$$

nos conduce a la cuártica

$$(a^2 - au + w)t^4 - 2vbt^3 + (4b^2 + 2a^2 - 2w)t^2 + 2vbt + a^2 + au + w = 0$$

y aplicando nuevamente las relaciones de Cardano llegamos a

$$\begin{aligned} -2vb + S_1(a^2 - au + w) &= 0 \\ 4b^2 - 2a^2 - 2w - S_2(a^2 - au + w) &= 0 \\ 2vb + S_3(a^2 - au + w) &= 0 \\ a^2 + au + w - S_4(a^2 - au + w) &= 0 \end{aligned}$$

La nueva condición que han de cumplir cuatro t_i para que definan puntos concíclicos es que

$$\boxed{S_1 + S_3 = 0} \tag{8.2}$$

Finalmente, para la parábola $y^2 - 2px = 0$, tenemos

$$x = 2pt^2, \quad y = 2pt$$

La cuártica resolvente es

$$4p^2t^4 + (4p^2 + 2pu)t^2 + 2pvt + w = 0$$

Al carecer de término en t^3 la condición de concíclicos se reduce a

$$\boxed{S_1 = 0} \tag{8.3}$$

Es evidente que para cualquiera de las cónicas la relación de concíclicos define una involución cuaternaria, pero ¿por qué esa diferencia de comportamiento tan enorme entre la parábola y las otras dos cónicas? Al estudiar las parejas y ternas singulares tendremos la respuesta.

8.2.1. Ternas singulares

Vamos a preguntarnos algo que parece imposible. ¿Existen ternas de puntos sobre la cónica que definan una circunferencia tal que el cuarto punto de intersección con la cónica quede indeterminado?

Aparentemente es imposible, porque intuimos que tres puntos siempre van a definir una circunferencia y que el cuarto punto de corte con la cónica va a quedar determinado. No obstante vamos a confirmar una vez más la certeza del viejo dicho de que *el ojo del análisis es más agudo que el ojo humano*.

Comencemos con la elipse. Si en 8.1 despejamos t_4 obtenemos

$$t_4 = -\frac{t_1 + t_2 + t_3 - t_1t_2t_3}{1 - t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3}$$

Para que t_4 quede indeterminado si nos dan t_1, t_2 y t_3 hace falta que

$$\left. \begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 - t_1t_2t_3 &= 0 \\ 1 - t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dicho de otra manera, las ternas t_1, t_2, t_3 van a ser raíces de la ecuación

$$t^3 - \lambda t^2 + t - \lambda = 0 \quad (8.4)$$

donde hemos hecho $\lambda = t_1 + t_2 + t_3 = t_1 t_2 t_3$.

Pero las raíces de esta ecuación podemos comprobar que son

$$t_1 = i, \quad t_2 = -i, \quad t_3 = \lambda$$

Si entramos con $t = \pm i$ en las ecuaciones de la elipse obtenemos los puntos de coordenadas homogéneas $(a, \pm bi, 0)$ que son los puntos del infinito de la elipse, imaginarios por supuesto. El tercer punto, $t_3 = \lambda$, viene a ser un punto arbitrario P de la elipse.

Hemos llegado al siguiente resultado aparentemente absurdo: Los dos puntos imaginarios e impropios de la elipse, junto con un punto arbitrario P de la misma, definen una circunferencia indeterminada, cuyo cuarto punto de corte con la elipse queda también indeterminado.

Para encontrar la explicación lógica a todo ello hemos de remontarnos al concepto generalizado de circunferencia expuesto por Sondesa en [31]. Allí encontramos que la recta del infinito, junto a cualquier recta real del plano (propia o impropia) definen una circunferencia degenerada. En nuestro caso, la susodicha circunferencia degenerada va a estar formada por cualquier recta que pase por P junto a la recta del infinito. De esta forma, el cuarto punto de corte con la elipse queda indeterminado.

En el caso de hipérbola la ecuación 8.4 se ve sustituida por

$$t^3 - \lambda t^2 - t + \lambda = 0 \quad (8.5)$$

cuyas raíces son $t = \pm 1$ y $t = \lambda$. Las dos primeras nos conducen a los puntos impropios de la hipérbola $(a, \pm b, 0)$ y la tercera nos da un punto arbitrario de la curva.

La interpretación es más fácil que en la elipse, puesto que ahora tratamos con puntos impropios reales.

Teorema 8.-II

Por un punto P de una cónica con centro propio pasan tres circunferencias osculadoras a la cónica. Los tres puntos de osculación y el punto P son concíclicos.

La primera parte resulta evidente en los casos de elipse e hipérbola. Si llamamos t_1 al valor del parámetro en el punto P la condición de osculación la obtenemos haciendo $t_2 = t_3 = t_4 = t$ en 8.1 o 8.6 y resolviendo la ecuación en t resultante. Como esta ecuación resulta ser cúbica, habrá tres circunferencias osculadoras que pasan por P .

Otra forma de verlo es considerar la existencia de la involución cuaternaria entre los cuatro puntos concíclicos. En esta involución, al fijar un punto t_1 , se subordina una involución

ternaria entre los otros tres puntos t_2, t_3, t_4 que le acompañan. En esta involución ternaria van a existir tres puntos triples, que van a venir dados por la ecuación cúbica que se obtiene al hacer $t_2 = t_3 = t_4 = t$, luego al punto P corresponden tres puntos de osculación.

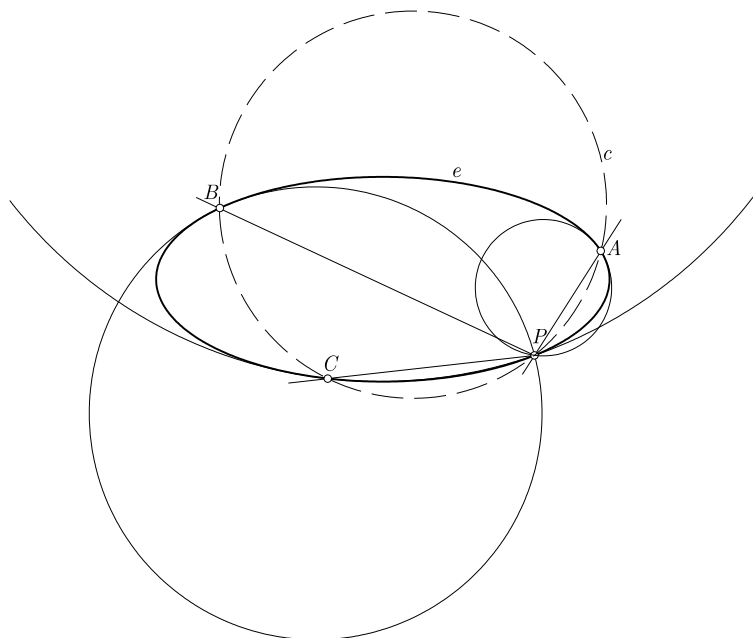


Fig. 8.23.-Por un punto P de la elipse pasan cuatro círculos osculadores.

En cuanto a la parábola, solamente una circunferencia osculadora que vendrá dada por 8.3 las otras dos degeneran en la pareja de rectas formadas por la paralela al eje y la recta impropia que tiene una raíz triple impropia con la parábola, pues hay una raíz doble por la tangencia con la recta impropia y una simple por el corte con la paralela al eje.

Para hacer una demostración formal y responder a la segunda parte, que no resulta tan evidente, vamos a considerar el caso de la elipse. Los resultados para la hipérbola pueden obtenerse fácilmente *mutatis mutandis*.

Supongamos dado t_1 y tratemos de hallar el t que considerado tres veces cumple la condición de concíclico. Llegamos a la ecuación

$$t^3 + 3t_1t - 3t - t_1 = 0 \tag{8.6}$$

que nos confirma lo que ya se había conjeturado, que hay tres círculos osculadores que pasan por t_1 .

Veamos ahora que los puntos dados por las tres raíces de (8.6) y el punto de partida t_1 cumplen la condición de concíclicos. Es la parte que no se veía evidente.

Las sumas simples de las raíces de (8.6) son

$$\sigma_1 = -3t_1, \quad \sigma_2 = -3t, \quad \sigma_3 = t_1$$

Si a las tres raíces de (8.6) agregamos la t_1 del punto de partida, tenemos las siguientes sumas simples relativas a los cuatro puntos

$$S_1 = \sigma_1 + t_1 = -3t_1 + t_1 = -2t_1$$

$$S_3 = \sigma_3 + t_1\sigma_2 = -t_1 + t_1(-3) = -2t_1$$

que, efectivamente, cumplen la condición (8.1), luego los cuatro puntos son concíclicos.

Observación 8.-I

Siguiendo a Sondesa, al referir los puntos de la cónica al parabolio discriminante, vamos a obtener en éste una cuártica bicuadrática que, en general, será alabeada. a los cuatro puntos concíclicos de la cónica van a corresponder cuatro puntos coplanrios de la bicuadrática. Condición de concíclicos en la cónica y de coplanarios en la bicuadrática van a ser la misma cosa.

Observación 8.-II

El conjunto de los círculos osculadores a la cónica forma una variedad unicursal de dimensión uno dentro del plano cíclico. Dicha variedad es y biunívoca con los puntos de la cónica. La réplica de estos círculos en E_3 a través de la proyectividad canónica va a ser una curva alabeada. Podría resultar interesante el análisis de la proyectividad existente entre los puntos de esta curva y los de la cónica. Es una línea que dejamos abierta.

8.3. PUNTOS DE NORMALES CONCURRENTES

ES conocido que por cualquier punto $P(\alpha, \beta)$ del plano de una elipse o una hipérbola pasan cuatro normales a la cónica cuyos pies son los puntos de intersección de la misma con la hipérbola de Apolonio relativa al punto P .

Este hecho geométrico hace que sobre la cónica se definan determinadas cuaternas de puntos cuyas normales son concurrentes. Enunciado así, surge la pregunta: las cuaternas de puntos de una elipse o hipérbola cuyas normales son concurrentes ¿definen una involución cuaternaria?

En el caso de parábola, por un punto de su plano se pueden trazar solamente tres normales, puesto que la paralela al eje por el punto ya se cuenta algebraicamente como una

normal. Las ternas de puntos sobre la parábola cuyas normales son concurrentes ¿definen una involución ternaria?

Analicemos estas cuestiones.

Siguiendo la misma notación que [20], en la elipse, la hipérbola de Apolonio relativa al punto $P(\alpha, \beta)$ tiene por ecuación

$$(a^2 - b^2)xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0$$

Si entramos con las paramétricas de la elipse, la ecuación que nos da los puntos de intersección es

$$2ab(a^2 - b^2)t(1 - t^2) + ab^2\beta(1 - t^4) - 2a^2b\alpha t(1 + t^2) = 0$$

$$-ab^2\beta t^4 - 2[ab(a^2 - b^2) + a^2b\alpha]t^3 + 2ab(a^2 - b^2 - a\alpha)t + ab^2\beta = 0$$

Vemos que las condiciones independientes de (α, β) que impones esta ecuación son

$$\boxed{S_2 = 0, \quad S_4 = -1} \quad (8.7)$$

A la vista de este resultado vemos que los puntos cuyas normales son concurrentes una involución cuaternaria cuaternaria de rango dos, siendo las cuaternas comunes a dos involuciones cuaternarias definidas por las dos relaciones 8.7.

El resultado es totalmente lógico, pues dados dos puntos de la cónica, sus normales concurren en un punto P del plano. Si desde este punto trazamos las dos normales restantes a la cónica, ya tenemos definida una cuaterna de normales concurrentes, pero hemos tenido que dar solamente dos puntos arbitrarios para definir la cuaterna. Punto no la define y tres puede que tampoco si no son de normales concurrentes.

Capítulo 9

LEMNISCATA DE BERNOULLI

9.1. PARAMETRIZACIÓN

CONSIDEREMOS la lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2xy = 0$$

que está referida a unos ejes que coinciden con las tangentes en su punto doble.

La lemniscata es una cuártica bicircular, pues admite a los puntos cíclicos como puntos dobles. Como el origen también lo es, estamos ante una cuártica con tres puntos dobles, luego será unicursal.

Debemos tomar para la parametrización una curva auxiliar de grado $4 - 2 = 2$ que pase por los cíclicos y por el origen, luego debe ser una circunferencia. Como hay que obligarla a que pase por otro punto más de la lemniscata, sustituimos esta condición por la de ser tangente a una de las ramas que pasan por el origen. Podemos tomar entonces una circunferencia que pasa por O y es tangente a Oy . Como queda todavía otro dato para determinar la circunferencia, nos quedará en función de un parámetro, con lo que tenemos el haz

$$x^2 + y^2 - atx = 0$$

Al resolver esta ecuación con la de la lemniscata, tenemos las paramétricas de ésta

$$x = \frac{at}{t^4 + 1}, \quad y = \frac{at^3}{t^4 + 1} \quad (9.1)$$

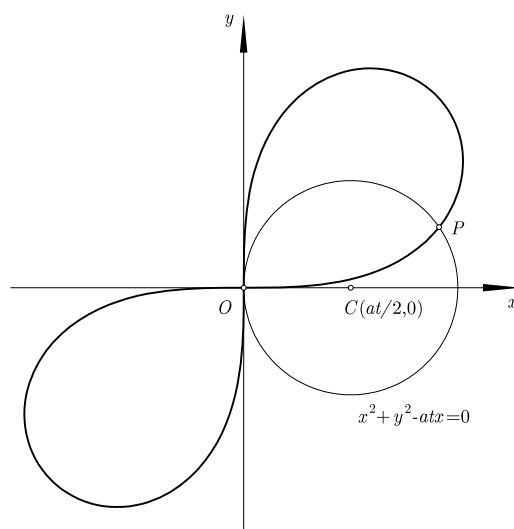


Fig. 9.25.- Los puntos de la lemniscata pueden expresarse en función racional de un parámetro.

9.1.1. Puntos alineados

Sean t_1, t_2, t_3, t_4 los parámetros de cuatro puntos de la lemniscata. ¿Qué relaciones han de existir entre ellos para que correspondan a puntos alineados?

Sea $ux + vy + w = 0$ una recta cualquiera. Su corte con la lemniscata nos da la ecuación en t

$$wt^4 + vat^3 + uat + w = 0$$

Al aplicar las relaciones de Cardano, vemos que entre las raíces de esta ecuación existen las relaciones evidentes

$$S_2 = t_1t_2 + t_3t_4 + (t_1 + t_2)(t_3 + t_4) = 0 \tag{9.2}$$

$$S_4 = t_1t_2t_3t_4 = 1 \tag{9.3}$$

relaciones que nos muestran que entre los puntos alineados existe una involución cuaternaria de rango dos.

Inversamente, si nos dan cuatro valores de t que verifican las relaciones anteriores podemos obtener la recta que determinan, pues podríamos obtener S_1 y S_3 y tendríamos

$$S_1 = -\frac{va}{w} \qquad S_3 = -\frac{ua}{w}$$

con lo que la recta que determinan es

$$-\frac{w}{a}S_3x - \frac{w}{a}S_1y + w = 0$$

$$S_3x + S_1y - a = 0$$

9.1.2. Puntos concíclicos

Según el teorema de Bezout, una circunferencia debe cortar a la lemniscata en ocho puntos. Ahora bien, cuatro de ellos se consumen en los puntos cíclicos que, al ser dobles en la lemniscata y pertenecer también a la circunferencia, contarán como cuatro.

Las restantes intersecciones han de venir dadas por cuatro valores del parámetro t , que, a su vez pueden ser reales o imaginarios, distintos o confundidos. Esto hace que nos planteemos la siguiente pregunta: ¿qué relación ha de existir entre los cuatro valores del parámetro t_i para que los puntos correspondientes sean concíclicos?

Cortemos ahora con una circunferencia cualquiera

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$$

$$a^2(t^4 + 1)t^2 + apt(t^4 + 1) + aqt^3(t^4 + 1) + r(t^4 + 1)^2 = 0$$

Dividiendo por $t^4 + 1$, que es quitar los cíclicos, nos queda la ecuación que nos da el resto de los cortes:

$$rt^4 + aqt^3 + a^2t^2 + apt + r = 0$$

Al aplicar las relaciones de Cardano, vemos que los cuatro valores de t de los puntos concíclicos verifican

$$t_1t_2t_3t_4 = 1 \quad (9.4)$$

relación que nos muestra que los puntos concíclicos definen una involución cuaternaria.

Inversamente, si nos dieran cuatro puntos que cumpliesen la relación anterior, podríamos formar la ecuación de la circunferencia que definen, pues podemos calcular S_1 , S_2 y S_3 y tendríamos

$$S_1 = -\frac{aq}{r}, \quad S_2 = \frac{a^2}{r}, \quad S_3 = -\frac{ap}{r} \quad (9.5)$$

con lo que podemos obtener p , q y r y tendríamos la circunferencia.

Ejercicio 9.-I

Hallar la ecuación de la circunferencia osculadora a la lemniscata en el vértice $(a/2, a/2)$.

Aplicaremos las relaciones 9.5 al caso en que $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 1$ con lo que tendremos $S_1 = 4$, $S_2 = 6$, $S_3 = 4$. Obtenemos

$$p = q = -2a/3, \quad r = a^2/6$$

con lo que la circunferencia osculadora es

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{18} = 0$$

El centro de curvatura resulta estar en $(a/3, a/3)$ y el radio de curvatura es $\sqrt{2}a/6$.

9.1.3. Consecuencias

Como aplicación de la exposición anterior, proponemos las siguientes consecuencias, que pueden utilizarse para otras aplicaciones prácticas.

Consecuencia 9.-I

Sean A, B, C, D los puntos de corte de la lemniscata con una circunferencia. La recta AB corta a la lemniscata en otros dos puntos A', B' , y la CD en otros dos C', D' . Los puntos A', B', C' y D' son concíclicos.

En efecto, sean (t_1, t_2) los puntos (A, B) y (t_3, t_4) los puntos (C, D) ; sean (t'_1, t'_2) los puntos (A', B') y (t'_3, t'_4) los puntos (C', D') .

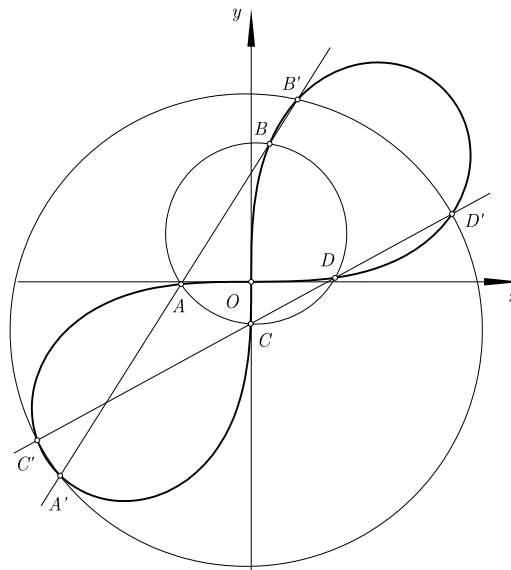


Fig. 9.26.- Los nuevos puntos de corte de las rectas AB y CD con la lemniscata son concíclicos.

Por la alineación de (A, B) y (A', B') así como (C, D) y (C', D') , tenemos

$$t_1 t_2 t'_1 t'_2 = 1$$

$$t_3 t_4 t'_3 t'_4 = 1$$

Multiplicando y teniendo en cuenta 9.4, tenemos

$$t_1 t_2 t_3 t_4 t'_1 t'_2 t'_3 t'_4 = 1 \implies t'_1 t'_2 t'_3 t'_4 = 1$$

luego A', B', C', D' son concíclicos.

Consecuencia 9.-II

Tracemos una circunferencia bitangente a la lemniscata. ¿Qué relación liga los parámetros t_i de los puntos de contacto?

Estamos ante un caso particular de puntos concíclicos en el que dos valores de t coinciden y los otros dos también. Teniendo en cuenta 9.4, entre los puntos t_1, t_2 de contacto M y N de una circunferencia bitangente se ha de verificar

$$t_i^2 t_j^2 = 1$$

Consecuencia 9.-III

La cuerda que une los puntos de tangencia de una circunferencia bitangente, vuelve a cortar a la lemniscata en otros dos puntos por los que se puede hacer pasar otra circunferencia bitangente.

Sean t'_i, t'_j los nuevos puntos de corte (M', N') de MN con la lemniscata. Por la alineación de $MNM'N'$ tenemos

$$t_i t_j t'_i t'_j = 1$$

$$t_i^2 t_j^2 t_i'^2 t_j'^2 = 1 \implies t_i'^2 t_j'^2 = 1$$

lo que demuestra que M' y N' también son los extremos de una cuerda de circunferencia bitangente.

Consecuencia 9.-IV

La circunferencia osculadora a la lemniscata en un punto t_1 la vuelve a cortar en otro punto t'_1 . ¿Qué relación liga t_1 y t'_1 ?

Nuevamente estamos ante un caso particular de puntos concíclicos en el que coinciden tres valores de t correspondientes al punto de osculación.

La circunferencia osculadora en t_1 vuelve a cortar a la lemniscata en otro punto t'_1 que, según 9.4, verifica

$$t_1^3 t'_1 = 1$$

Consecuencia 9.-V

Las circunferencias osculadoras en cuatro puntos concíclicos vuelven a cortar a la lemniscata en cuatro puntos concíclicos.

Si las circunferencias osculadoras en los puntos concíclicos t_1, t_2, t_3, t_4 vuelven a cortar en t'_1, t'_2, t'_3, t'_4 se verifica

$$\begin{aligned} t_1^3 t'_1 &= 1 & t_2^3 t'_2 &= 1 \\ t_3^3 t'_3 &= 1 & t_4^3 t'_4 &= 1 \end{aligned}$$

Multiplicando y teniendo en cuenta que $t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$ nos queda

$$t'_1 t'_2 t'_3 t'_4 = 1$$

lo que demuestra que los otros puntos de corte también son concíclicos.

9.2. GENERACIONES PROYECTIVAS

9.2.1. Generación por puntos

La parametrización 9.1 fue obtenida cortando la lemniscata con un haz parabólico de circunferencias cuyo eje radical es Oy .

De forma análoga, podemos hallar otra parametrización cortando con el haz

$$x^2 + y^2 - auy = 0$$

cuyo eje radical es Ox

La nueva parametrización sería

$$x = \frac{au^3}{u^4 + 1}, \quad y = \frac{au}{u^4 + 1} \tag{9.6}$$

Como era de esperar, entre los parámetros t y u existe la relación

$$ut = 1 \tag{9.7}$$

que establece la también esperada proyectividad entre las circunferencias de los dos haces parametrizadores.

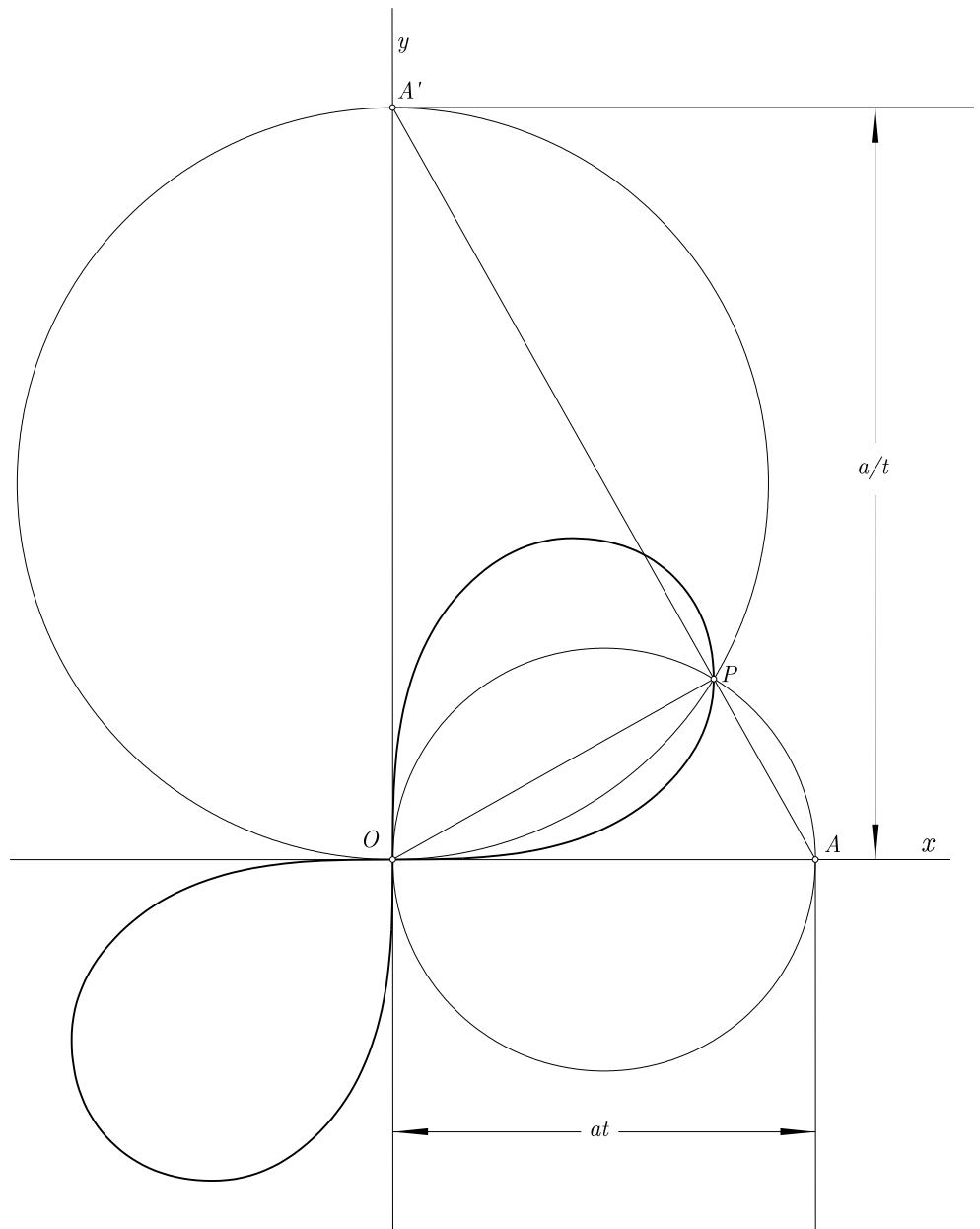


Fig. 9.27.-Forma de generar un punto P de la lemniscata

La intersección en el punto P de la lemniscata de las dos circunferencias anteriores nos lleva a considerar el siguiente método para obtener puntos de la curva: demos al parámetro t cualquier valor definamos sobre los ejes los puntos A y A' tales que $\overline{OA} = at$ y $\overline{OA'} = a/t$. Construyamos las circunferencias de diámetros OA y OA' . Su intersección distinta de O

nos da un punto P de la lemniscata.

A esta construcción, que no es excesivamente complicada, podemos aportar muchas simplificaciones.

Observemos, en primer lugar que los ángulos \widehat{OPA} y \widehat{OPA}' son rectos, lo que trae consigo la alineación de los puntos A , P y A' . Podemos entonces, construir los puntos A y A' y proyectar O sobre AA' para obtener P .

El triángulo OAA' va a jugar un papel importante en todas las relaciones métricas ligadas a la lemniscata.

Podemos, por ejemplo, obtener de forma directa su ecuación polar. En efecto, si llamamos θ al ángulo \widehat{POA} y aplicamos el teorema de la altura tenemos

$$\rho^2 = \overline{OP}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PA'} = at \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{a}{t} \cos \theta = a^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

Los puntos A y A' definen sobre los ejes series proyectivas que tienen a O como punto límite, luego el eje proyectivo va a ser la recta impropia.

Como consecuencia, la recta AA' va a tener como envolvente una hipérbola equilátera, lo que nos lleva a la conclusión de que *la podaria de la hipérbola equilátera respecto a su centro es una lemniscata de Bernoulli*.

Por otro lado, podemos desarrollar dos mecanismos sencillos para obtener las parejas de puntos homólogos A y A' .

El primero de ellos puede ser el de aprovecharse de la proyectividad que los liga. Podemos basarnos en una pareja conocida que es la $H(a, 0)$ y $H'(0, a)$. Tomamos un punto cualquiera, A , sobre Ox y lo unimos con H' . Como el eje proyectivo es la recta impropia, la paralela por H a AH' nos proporciona A' al cortarla con Oy .

El segundo está basado en la inversión. Tracemos la circunferencia de diámetro OH y su tangente de H . Una recta cualquiera que pase por O las corta en los puntos respectivos M y N que verifican $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = a^2$ ya que circunferencia y recta son inversas respecto a O con potencia de inversión a^2 .

Las distancias \overline{OM} y \overline{ON} pueden proporcionarnos dos parejas de puntos homólogos (A, A') y (B, B') si las llevamos a los ejes coordenados. Obtendríamos fácilmente dos puntos de la lemniscata.

Observemos que, en realidad, el fundamento de la generación anterior está basado en la existencias de dos parametrizaciones de la lemniscata con dos haces parabólicos de circunferencias.

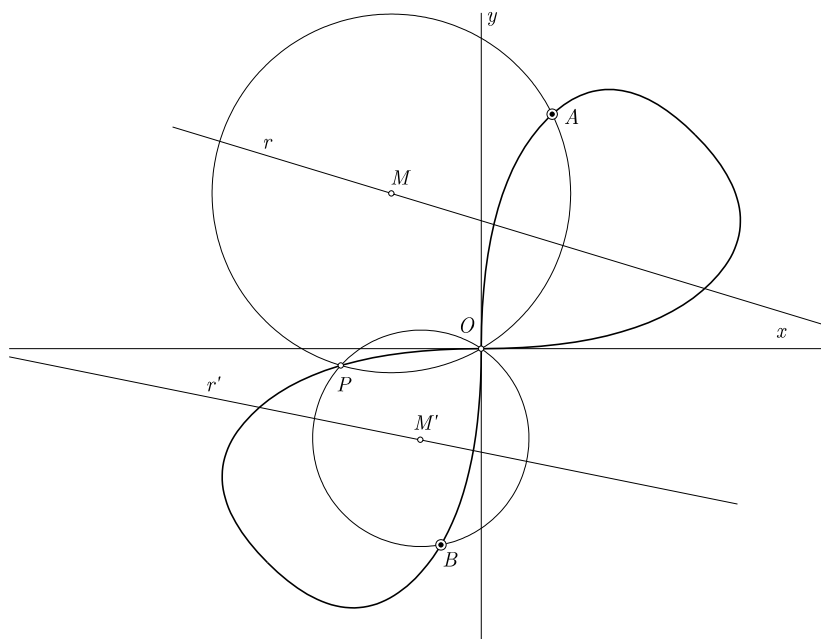


Fig. 9.28.-

El método puede generalizarse utilizando otras parametrizaciones con haces elípticos. Consideremos por ejemplo el haz cuyos puntos fundamentales son el punto doble O y un punto cualquiera A de la lemniscata.

Una circunferencia del haz ya corta a la lemniscata en seis puntos, los dos cíclicos y el punto doble. Si agregamos un séptimo punto fijo, el A , solamente nos queda el octavo punto P cuyas coordenadas se expresarán en función racional del parámetro λ presente en el haz de circunferencias.

De forma análoga, si consideramos otro haz cuyos puntos fundamentales son el punto doble O y otro punto cualquiera B de la lemniscata, La circunferencia de este haz que pase por P asigna a este punto el parámetro μ presente en el nuevo haz.

Establecemos así una correspondencia biunívoca entre ambas circunferencias, lo que va a repercutir en una relación bilineal entre los parámetros λ y μ .

Los centros de estas circunferencias M y M' van a formar dos series proyectivas sobre las bases r y r' . La correspondencia entre estos centros establece la correspondencia entre las circunferencias y de su intersección obtenemos el punto P .

La proyectividad puede definirse empleando tres puntos conocidos de la lemniscata, como pueden ser sus vértices o la condición de tangencia a cualquiera de las dos ramas que pasan por el puntos doble.

9.2.2. Generación con bipuntos

Antes de exponer la generación con bipuntos establezcamos algunas propiedades.

Propiedad I

Las circunferencias que pasan por dos puntos fijos A y B de la lemniscata vuelven a cortarla en parejas de puntos que están en involución.

En efecto, sean t_A y t_B el valor del parámetro en los puntos A y B . Sean X, Y los otros dos puntos de corte de la lemniscata con una circunferencia que pase por los dos primeros. La relación 9.4 (pág. 217) exige que

$$t_A t_B t_X t_Y = 1 \quad \Rightarrow \quad t_X t_Y = \frac{1}{t_A t_B}$$

lo que demuestra la existencia de una involución entre las parejas de puntos (X, Y) . A esta involución podíamos llamarle *involución cíclicamente asociada* a la pareja de puntos (A, B) .

Propiedad II

Dada una pareja de puntos (A, B) sobre la lemniscata existen sobre ella una infinidad de parejas (P, Q) en involución que comparten con la pareja dada la misma involución cíclicamente asociada.

En efecto se ha de verificar simultáneamente para toda pareja (X, Y) que

$$t_A t_B t_X t_Y = 1, \quad t_P t_Q t_X t_Y = 1 \quad \Rightarrow \quad t_P t_Q = t_A t_B$$

lo que demuestra que entre las parejas (P, Q) existe una nueva involución asociada a la pareja (A, B) .

Obsérvese la relación de simetría existente con la involución anterior. A esta nueva involución podemos llamarla *involución concíclicamente asociada* a la pareja (A, B) .

A las parejas tales como la (A, B) y (P, Q) que comparten la misma involución cíclicamente asociada de parejas (X, Y) les llamaremos *parejas concíclicamente asociadas*.

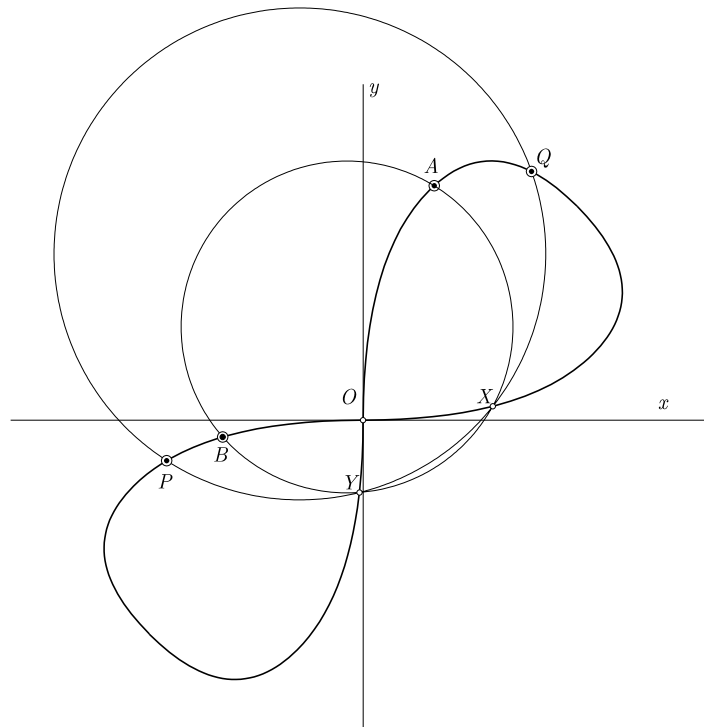


Fig. 9.29.-

Propiedad III

Sobre la lemniscata existe una involución de puntos en cuyas parejas de homólogos coinciden las involuciones cíclicamente asociadas y concíclicamente asociadas.

Efectivamente, considerando las relaciones anteriores podemos ver que tal involución va a estar formada por las parejas en las que

$$t_A t_B = 1$$

A esta nueva involución podemos llamarle *involución autocíclica*. Sus puntos dobles van a ser los vértices (a, a) y $(-a, -a)$ de la lemniscata.

Una vez conocidas las propiedades anteriores estamos en situación de engendrar la lemniscata con bipuntos.

Efectivamente, consideremos dos parejas (A, B) y (P, Q) concíclicamente asociadas. Los haces de circunferencias cuyos puntos fundamentales son cada una de estas parejas van cortando a la lemniscata en bipuntos coincidentes. Basta con establecer una relación proyectiva con tres parejas de estas circunferencias que pasen por bipuntos conocidos para generar la lemniscata por intersección de circunferencias homólogas. La forma mejor de

comprobarlo podemos tenerla con un ejemplo.

Ejercicio 9.-II

Sean $A(a/2, a/2)$ y $A'(-a/2, -a/2)$ los vértices de la lemniscata. Las parejas (A, A) y (A', A') formadas por puntos dobles son concíclicamente asociadas.

- Aprovechando las relaciones 9.5 hallar la ecuación del haz parabólico de circunferencias cuyo eje radical es la tangente en el vértice A de la lemniscata y cuyo centro es el propio punto A .
- Aprovechando las relaciones 9.5 hallar la ecuación del haz parabólico de circunferencias cuyo eje radical es la tangente en el vértice A' de la lemniscata y cuyo centro es el propio punto A' .
- Comprobar que entre ambos haces existe una relación proyectiva que es la que engendra la lemniscata por intersección de homólogos.

Sean t_3 y t_4 el valor del parámetro en cada uno de los puntos de corte con la lemniscata de una circunferencia del haz. Tenemos así los cuatro puntos concíclicos $(1, 1, t_3, t_4)$. Por la condición de concíclicos hemos de tener $t_3 t_4 = 1$. Llamemos $s = t_3 + t_4$. Entrando en las relaciones 9.5 tenemos

$$S_1 = s + 2 = -\frac{aq}{r}, \quad S_2 = 1 + 2s + t_3 t_4 = 2s + 2 = \frac{a^2}{r}, \quad S_3 = s + 2t_3 t_4 = s + 2 = -\frac{ap}{r}$$

de donde obtenemos

$$\frac{r}{a} = \frac{a}{2s + 2}, \quad p = -\frac{r}{a}(s + 2) = a\frac{s + 2}{2s + 2}, \quad q = -\frac{r}{a}(s + 2) = -a\frac{s + 2}{2s + 2}$$

La ecuación de la circunferencia va a ser

$$x^2 + y^2 - a\frac{s + 2}{2s + 2}x - a\frac{s + 2}{2s + 2}y + \frac{a^2}{2s + 2} = 0$$

o bien

$$x^2 + y^2 - \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{s + 1}\right)x - \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{s + 1}\right)y + \frac{a^2}{2}\frac{1}{s + 1} = 0$$

y si hacemos

$$\frac{1}{2(s + 1)} = \lambda \tag{9.8}$$

obtenemos el haz

$$x^2 + y^2 - \frac{a}{2}(x + y) - \lambda a(x + y - a) = 0$$

que coincide plenamente con lo que obtendríamos de la Geometría elemental.

Como las parejas (A, A) y (A', A') son concíclicamente asociadas existirá otra circunferencia que pase por los puntos $(-1, -1, t_3, t_4)$. Para ellos tenemos

$$S_1 = s - 2 = -\frac{aq}{r}, \quad S_2 = 1 - 2s + t_3 t_4 = 2(1 - s) = \frac{a^2}{r}, \quad S_3 = s - 2t_3 t_4 = s - 2 = -\frac{ap}{r}$$

La ecuación de la circunferencia va a ser

$$x^2 + y^2 + a \frac{s-2}{2s-2} x + a \frac{s-2}{2s-2} y - \frac{a^2}{2s-2} = 0$$

o bien

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{s-1}\right) x + \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{s-1}\right) y - \frac{a^2}{2} \frac{1}{s-1} = 0$$

y si hacemos

$$\frac{1}{2(s-1)} = \mu \quad (9.9)$$

obtenemos el haz

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{2}(x+y) - \mu a(x+y+a) = 0$$

que coincide nuevamente con lo que obtendríamos de la Geometría elemental.

La relación proyectiva que liga ambos haces la obtenemos eliminando s entre 9.8 y 9.9 con lo que obtenemos

$$\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\mu} = 2, \quad \Rightarrow \quad 4\lambda\mu + \lambda - \mu = 0 \quad (9.10)$$

Como prueba, si eliminásemos λ y μ entre 9.8, 9.9 y 9.10 tendríamos que obtener la ecuación de la lemniscata.

Efectivamente, tendríamos

$$\frac{a(x+y-a)}{x^2 + y^2 - \frac{a}{2}(x+y)} - \frac{a(x+y+a)}{x^2 + y^2 + \frac{a}{2}(x+y)} = 4$$

que debidamente operada nos conduce a

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 xy.$$

Capítulo 10

¿QUÉ HAY DETRÁS DE LAS CÚBICAS DE BEZIER?

10.1. INTRODUCCIÓN

Como es sabido, las curvas de Bezier fueron consideradas como secreto industrial durante un cierto número de años. A partir del momento en que se liberalizó su uso, las tenemos presentes en todos los sistemas de diseño asistido y pueden contarse por miles los que, a diario, hacen uso de las mismas. Ahora bien, ¿qué hay detrás de ellas? ¿qué estructura geométrica, o algebraica en el fondo, le da sustento matemático? ¿qué hay detrás de ese arco tan simple que nos muestra la pantalla del ordenador? ¿estamos en manos del ordenador o podemos dominar la situación aparte de cambiar los puntos de control?

La presente nota pretende ahondar en la estructura que sustenta el fenómeno y contactar estas curvas con los conocimientos que tenemos de Geometría Proyectiva.

Nos limitaremos de momento al caso de cúbicas dadas con cuatro puntos de control. La generalización a órdenes superiores no es difícil si bien puede requerir una cierta complejidad algebraica.

10.2. TEOREMAS FUNDAMENTALES

10.2.1. Teorema I

Las cúbicas de Bezier presentan un punto de inflexión en el infinito.

En efecto, sabemos que la expresión general de estas cúbicas es

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (1-u)^{3-i} u^i \mathbf{r}_i$$

Si cambiamos el parámetro u por u/w , podemos tener las siguientes ecuaciones paramétricas homogéneas para la citada curva

$$\begin{aligned}x(u) &= (w - u)^3 x_0 + 3u(w - u)^2 x_1 + 3u^2(w - u)x_2 + u^3 x_3 \\y(u) &= (w - u)^3 y_0 + 3u(w - u)^2 y_1 + 3u^2(w - u)y_2 + u^3 y_3 \\t(u) &= w^3\end{aligned}$$

La intersección con la recta impropia dada por $t = 0$ nos conduce a la ecuación $w^3 = 0$, que nos indica que los tres puntos de corte de dicha recta con la curva se confunden en uno solo, lo que indica la existencia de inflexión.

10.2.2. Teorema II

Las cúbicas de Bezier siempre presentan un punto doble que puede ser crunodal, aislado o cuspidal.

Es una consecuencia inmediata por la condición de ser cúbica unicursal.

El punto doble se podrá determinar de la forma clásica seguida para dichas curvas resolviendo el sistema $x(u_1) = x(u_2)$, $y(u_1) = y(u_2)$.

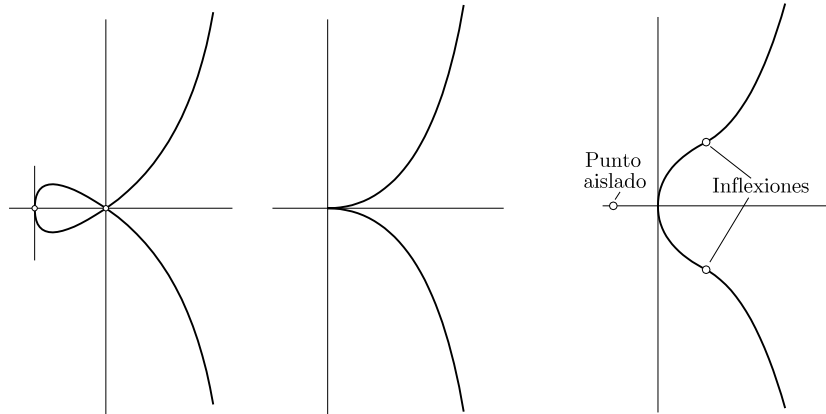
El punto doble puede pertenecer a la parte útil de la curva mostrada en el ordenador o puede pertenecer a la parte no visible, según los casos, como tendremos ocasión de ver.

Puede darse la circunstancia de que el punto doble pertenezca a la parte útil de la curva, pero puede que no se manifieste como tal porque el valor del parámetro correspondiente a una de sus ramas caiga fuera del intervalo $[0, 1]$, que es el aprovechable en el diseño.

Si los datos que damos son tales que el punto doble sea aislado, siempre lo vamos a tener fuera del intervalo $[0, 1]$ puesto que va a corresponder a valores complejos de u que proporcionan valores reales para (x, y) . Presentaremos algún ejemplo de este caso.

Como hemos dicho, también pudiese ocurrir que, en determinadas configuraciones de los puntos de control, el punto doble se convierta en un punto de retroceso.

Estas dos propiedades presentadas por estas curvas hacen que se manifiesten como una de transformada afín de las siguientes formas canónicas



La justificación correspondiente puede verse en la referencia [23].

10.3. PUNTOS ALINEADOS

Aplicando a las curvas de Bezier las propiedades de las curvas unicursales, vamos a resolver el siguiente problema básico, del que se pueden derivar numerosas aplicaciones.

Dados tres valores $\{u_i | i = 1, 3\}$ del parámetro u , ¿qué relación deben verificar para que los puntos correspondientes a ellos estén alineados?

Consideremos una recta genérica $Ax + By + C = 0$ y veamos qué relación verifican las intersecciones con la curva independientemente de los coeficientes A, B, C .

Si llamamos $\{x_i, y_i | i = 0, 3\}$ las coordenadas de los vértices del polígono de control, las intersecciones con la curva vienen dadas por la ecuación cúbica

$$(X_0A + Y_0B)u^3 + (X_1A + Y_1B)u^2 + (X_2A + Y_2B)u + (Ax_0 + By_0 + C) = 0$$

donde

$$X_0 = -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$Y_0 = -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3$$

$$X_1 = 3x_0 - 6x_1 + 3x_2$$

$$Y_1 = 3y_0 - 6y_1 + 3y_2$$

$$X_2 = -3x_0 + 3x_1$$

$$Y_2 = -3y_0 + 3y_1$$

Si llamamos s_1 a la suma de las raíces de la cúbica anterior, s_2 a la suma de sus productos binarios y s_3 al producto de las mismas, por las relaciones de Cardano tenemos

$$s_1 = -\frac{X_1A + Y_1B}{X_0A + Y_0B}, \quad s_2 = \frac{X_2A + Y_2B}{X_0A + Y_0B}, \quad s_3 = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{X_0A + Y_0B}$$

o bien

$$\begin{aligned}(X_1 + s_1 X_0)A + (Y_1 + s_1 Y_0)B &= 0 \\ (X_2 - s_2 X_0)A + (Y_2 - s_2 Y_0)B &= 0 \\ (x_0 + s_3 X_0)A + (y_0 + s_3 Y_0)B + C &= 0\end{aligned}$$

La relación buscada la tendremos eliminando A, B, C , con lo que tenemos

$$\begin{vmatrix} X_1 + s_1 X_0 & Y_1 + s_1 Y_0 & 0 \\ X_2 - s_2 X_0 & Y_2 - s_2 Y_0 & 0 \\ x_0 + s_3 X_0 & y_0 + s_3 Y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (10.1)$$

Si introducimos la notación $\Delta_{ij} = X_i Y_j - X_j Y_i$, la relación buscada adopta la forma

$$\Delta_{12} - \Delta_{10} s_2 - \Delta_{20} s_1 = 0$$

o bien, si desarrollamos las s_i llegamos a

$$\Delta_{12} - \Delta_{10}(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) - \Delta_{20}(u_1 + u_2 + u_3) = 0 \quad (10.2)$$

ecuación que responde a la pregunta formulada y que tiene una gran cantidad de aplicaciones como tendremos ocasión de ver.

10.3.1. Punto corresidual

Dados dos puntos P y Q de la cúbica por sus parámetros u_1 y u_2 , la relación anterior nos permite determinar el tercer punto de intersección de la recta PQ con la cúbica. Es lo que llama Sylvester el *punto corresidual*.

En efecto, si ordenamos 10.2 en la forma

$$\Delta_{12} - \Delta_{10} u_1 u_2 - \Delta_{20}(u_1 + u_2) - u_3[\Delta_{20} + \Delta_{10}(u_1 + u_2)] = 0$$

y llamamos $s = u_1 + u_2$ y $p = u_1 u_2$ llegamos a

$$u_3 = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{10} p - \Delta_{20} s}{\Delta_{10} s + \Delta_{20}} \quad (10.3)$$

10.3.2. Punto nodal

La relación 10.3 nos puede servir para la determinación del punto nodal. Basta con queelijamos P y Q de forma que el punto residual quede indeterminado, lo que indicaría que P y Q sean coincidentes.

Se necesitaría para ello que fuese

$$\Delta_{12} - \Delta_{10} p - \Delta_{20} s = 0, \quad \Delta_{10} s + \Delta_{20} = 0$$

o bien

$$s = -\frac{\Delta_{20}}{\Delta_{10}}, \quad p = \frac{\Delta_{20}^2 + \Delta_{12}\Delta_{10}}{\Delta_{10}^2}$$

Con estos valores podemos obtener la ecuación que nos da los valores de u correspondientes al punto nodal

$$\Delta_{10}u^2 + \Delta_{20}u + \frac{\Delta_{20}^2}{\Delta_{10}} + \Delta_{12} = 0$$

El signo del discriminante de esta ecuación

$$\Delta = -3\Delta_{20}^2 - 4\Delta_{12}\Delta_{10} \quad (10.4)$$

es el que nos va a determinar la naturaleza del punto nodal. Si es positivo tendremos valores reales de u lo que nos conducirá a un punto doble. Si es nulo tendremos una raíz doble en u lo que nos conducirá a un punto de retroceso. Finalmente, si es negativo tendremos valores imaginarios de u , que nos llevará a un punto aislado, que irá, a su vez, acompañado de dos puntos de inflexión propios y reales, como ya veremos.

10.3.3. Puntos de inflexión

El valor de u en los puntos de inflexión ha de ser tal que 10.2 se verifique para $u_1 = u_2 = u_3 = u$, lo que nos conduce a la ecuación

$$3\Delta_{10}u^2 + 3\Delta_{20}u - \Delta_{12} = 0$$

Observemos que su discriminante

$$\Delta' = 3(3\Delta_{20}^2 + 4\Delta_{12}\Delta_{10})$$

tiene signo opuesto al de 10.4, lo que nos indica que el punto aislado va acompañado de dos inflexiones reales y propias, como corresponde a la forma canónica de las cúbicas nodales que ya tuvimos ocasión de exponer.

10.3.4. Cónica de retrocesos

De los tres tipos de curvas que pueden presentarse al utilizar en el diseño las cúbicas de Bezier, la cuspidal es la que marca la frontera entre el caso de punto doble y el aislado con la presencia de inflexiones. Es por ello por lo que interesa al diseñador controlar la aparición de este tipo de curvas.

Prever su aparición haciendo variar todos los vértices del polígono de control puede hacerse, pero puede resultar muy complicado hacerlo sobre la marcha debido al número de variables que se presentan.

No obstante, resulta fácil si solamente hacemos variar uno de los vértices del citado polígono, caso que, a su vez, no resulta raro en la práctica, pues hay numerosas ocasiones en las que tenemos fijados todos los vértices a excepción de uno.

Observemos que las variables auxiliares X_i, Y_i dependen linealmente de las coordenadas de los vértices mientras que las Δ_{ij} tienen dependencia cuadrática, si bien aparecen en ella solamente términos rectangulares y siempre con intervención de vértices distintos, pues los términos rectangulares relativos a un mismo vértice desaparecen, ya que los coeficientes que aparecen en el producto $X_i Y_j$ son los mismos que los que aparecen en el $X_j Y_i$, provocando así su desaparición al formar Δ_{ij} .

Esta circunstancia hace que, si fijamos todos los vértices del polígono de control a excepción de uno, las variables Δ_{ij} dependan linealmente de las coordenadas del vértice libre. Consecuencia de ello es que el discriminante 10.4 dependa cuadráticamente de las mismas coordenadas, trayendo a su vez como nueva consecuencia que el lugar geométrico de dicho vértice cuando aparece la situación frontera, sea una cónica a la que hemos llamado *cónica de retrocesos*.

A partir de una configuración del polígono, cada uno de los vértices tendrá asociada una cónica distinta. Dicha cónica va a dividir al plano del diseño en dos regiones. Si fijamos el vértice en una de ellas, la cúbica que obtengamos va a tener punto doble propiamente dicho y si lo fijamos en la zona contraria vamos a tener un punto aislado con presencia de inflexiones, que, a su vez, podrán caer fuera o dentro del intervalo útil de la curva. Evidentemente, si el vértice lo fijamos sobre su cónica de retrocesos, la curva obtenida presentará uno de estos puntos, que, igualmente, podrá caer también fuera o dentro del intervalo de utilidad.

En el ejemplo que mostramos tendremos ocasión de observar este mecanismo.

10.4. PROYECTIVIDAD (m, u)

Por la propiedad esencial de una variedad unicursal, sabemos que si hay dos parametrizaciones distintas de la misma, ha de existir una relación bilineal entre ambos parámetros, lo que va a traducirse en una relación de proyectividad gráfica si sabemos buscar una interpretación geométrica a los referidos parámetros.

Sabemos que una forma típica de parametrizar una cúbica unicursal consiste en hacer pasar un haz de rectas por su punto doble, sea cual sea la modalidad de éste.

Si trasladamos el origen de coordenadas al punto doble, las nuevas paramétricas obtenidas para la curva de Bezier, $[x_1(u), y_1(u)]$ han de anularse simultáneamente para los valores u_1 y u_2 del parámetro a su paso por este punto. Si es $\varphi(u)$ un polinomio cuyas raíces son

u_1 y u_2 , las susodichas paramétricas han de adoptar forzosamente la forma

$$x_1(u) = \varphi(u)(au + b)$$

$$y_1(u) = \varphi(u)(cu + d)$$

La división de la segunda de estas ecuaciones entre la primera nos conduce a

$$m = \frac{y_1}{x_1} = \frac{au + b}{cu + d}$$

que expresa una relación bilineal entre la variables (m, u) .

Busquemos una interpretación gráfica a estos parámetros. El primero, m , viene a ser la pendiente de la recta que une el punto doble a un punto genérico de la curva de Bezier.

El segundo, u , es el que fija el punto correspondiente sobre el lado del polígono de control, cuando aplicamos el algoritmo de Casteljaou.

El resultado obtenido viene a establecer que existen homografías entre el haz de rectas de vértice en el punto doble y los puntos que van recorriendo los lados del polígono de control al generar la curva con el algoritmo de Casteljaou.

10.5. INVOLUCIONES

Cualquier relación simétrica y lineal entre la suma y el producto de los parámetros u_1 y u_2 correspondiente a dos puntos define una involución entre ellos.

La relación simétrica mencionada será del tipo

$$Mu_1u_2 + N(u_1 + u_2) + P = 0 \quad (10.5)$$

Evidentemente, la involución entre puntos de la cúbica puede convertirse en una involución de rectas proyectando desde el punto nodal aplicando la proyectividad (m, u) .

El análisis de la relación 10.2 correspondiente a puntos alineados, nos hace ver que si fijamos u_3 obtenemos una relación simétrica del tipo 10.5, lo cual viene a decirnos que *el haz de rectas que tiene su vértice en un punto de la cúbica la corta en parejas de puntos variables que están en involución*. Al vértice del haz le podríamos llamar *centro* de la involución por analogía a lo que ocurre con las cónicas.

Cada punto de la cúbica subordinará una involución distinta sobre la cúbica que estará definida dando el citado punto o dando un par de puntos homólogos que, por intersección con la cúbica de la recta que definen, ya nos determinaría el centro.

Ahora bien, nos surge la pregunta inmediata: ¿todas las involuciones que podemos definir sobre la cúbica son de este tipo? o ¿podemos definir relaciones del tipo 10.5 tales que las rectas que definen las parejas de puntos no cortan a la cúbica en un punto fijo? ¿qué envolvente tienen tales rectas?

Vamos a ver que es posible definir este tipo de involuciones y que la envolvente de las rectas que unen puntos homólogos es una cónica a la que podemos llamar *cónica central* de la involución por analogía con el concepto de centro.

Para distinguir ambos tipos de involuciones llamaremos de *primera especie* a las que tienen un centro sobre la cúbica y de *segunda especie* a las que poseen una cónica central, si bien es cierto que aquéllas son un caso particular de éstas cuando la cónica degenera en un punto.

Comencemos resolviendo un problema general: plantear la ecuación de la recta que pasa por dos puntos de la cúbica definidos por sus parámetros u_1 y u_2 .

Como ya hicimos, si llamamos $s = u_1 + u_2$ y $p = u_1u_2$, con la relación 10.3 podemos obtener u_3 con lo que tendríamos para los tres puntos de intersección

$$s_1 = s + u_3, \quad s_2 = p + su_3, \quad s_3 = pu_3$$

Con estos valores de los s_i iríamos a la relación

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ X_1 + s_1X_0 & Y_1 + s_1Y_0 & 0 \\ x_0 + s_3X_0 & y_0 + s_3Y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (10.6)$$

derivada de la 10.1, y ya tendríamos la recta que pasa por dos puntos.

Efectuando las sustituciones y operaciones pertinentes, tenemos la siguiente ecuación para la recta que pasa por dos puntos

$$\begin{aligned} & \left[Y_1 + Y_0 \left[s + \frac{\Delta_{12} - \Delta_{10}p - \Delta_{20}s}{\Delta_{10}s + \Delta_{20}} \right] \right] x - \\ & \left[X_1 + X_0 \left[s + \frac{\Delta_{12} - \Delta_{10}p - \Delta_{20}s}{\Delta_{10}s + \Delta_{20}} \right] \right] y + \\ & + X_1y_0 - x_0Y_1 + \Delta_{10}p \frac{\Delta_{12} - \Delta_{10}p - \Delta_{20}s}{\Delta_{10}s + \Delta_{20}} + \\ & + (X_0y_0 - x_0Y_0) \frac{\Delta_{10}s^2 + \Delta_{12} - \Delta_{10}p}{\Delta_{10}s + \Delta_{20}} = 0 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} & [(\Delta_{10}s + \Delta_{20})Y_1 + (\Delta_{10}s^2 - \Delta_{10}p + \Delta_{12})Y_0]x - \\ & - [(\Delta_{10}s + \Delta_{20})X_1 + (\Delta_{10}s^2 - \Delta_{10}p + \Delta_{12})X_0]y + \\ & + (X_1y_0 - x_0Y_1)(\Delta_{10}s + \Delta_{20}) + \Delta_{10}p(\Delta_{12} - \Delta_{10}p - \Delta_{20}s) + \\ & + (X_0y_0 - x_0Y_0)(\Delta_{10}s^2 - \Delta_{10}p + \Delta_{12}) = 0 \end{aligned} \quad (10.7)$$

Obligüemos ahora a que las parejas de puntos definidas por s y p estén en involución. Siguiendo a Winger [2], sea

$$au^2 + 2bu + c = 0 \quad (10.8)$$

la ecuación que nos proporciona los valores de u correspondientes a los puntos dobles de la involución. Digamos que la terna homogénea de datos (a, b, c) es la que nos define la susodicha involución.

Cualquier otra pareja de puntos homólogos ha de definir dos valores de u que formen cuaterna armónica con los definidos por 10.8. Sea

$$\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0 \quad (10.9)$$

la ecuación que nos da una pareja de homólogos.

La condición de cuaterna armónica ([3], pág. 65) nos obliga a que

$$a\gamma - b\beta + c\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{a\gamma + c\alpha}{b}$$

con lo que los valores de s y p correspondientes a la involución definida por la terna homogénea (a, b, c) vienen dados por

$$s = -\frac{a\gamma + c\alpha}{b\alpha}, \quad p = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (10.10)$$

Si hacemos $\gamma/\alpha = \lambda$ y entramos con los valores de s y p en 10.7 tenemos

$$\begin{aligned} & [(-\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b) + \Delta_{20})Y_1 + (\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b)^2 - \Delta_{10}\lambda + \Delta_{12})Y_0]x - \\ & - [(-\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b) + \Delta_{20})X_1 + (\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b)^2 - \Delta_{10}\lambda + \Delta_{12})X_0]y + \\ & (X_1y_0 - x_0Y_1)(-\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b) + \Delta_{20}) + \\ & \Delta_{10}\lambda(\Delta_{12} - \Delta_{10}\lambda + \Delta_{20}(a\lambda/b + c/b)) + \\ & (X_0y_0 - x_0Y_0)(\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b)^2 - \Delta_{10}\lambda + \Delta_{12}) = 0 \end{aligned} \quad (10.11)$$

La ecuación anterior, aunque aparentemente compleja, tiene una estructura muy simple, pues

- Las variables $\Delta_{ij}, X_i, Y_i, x_0, y_0$ son constantes propias de la cúbica definida.
- La terna homogénea (a, b, c) es la que define la involución sobre la cúbica.
- Finalmente, λ define una pareja arbitraria de puntos homólogos en la citada involución.

Observemos entonces que, para una cúbica dada y una involución dada sobre ella, la susodicha ecuación corresponde a una familia de rectas en el plano que depende de λ de forma cuadrática, lo que hace que por cada punto del plano pasen dos rectas de la familia y, por tanto, su envolvente va a ser una cónica Γ .

La ecuación de esta cónica podría encontrarse anulando el discriminante en λ de la ecuación anterior. La operación resultaría sumamente sencilla de implementar en un sistema informático, sea de cálculo numérico o de cálculo simbólico.

La pregunta inmediata que nos surge es acerca de la estructura que poseen las cónicas Γ para una cúbica dada cuando van cambiando las involuciones que se definen sobre ella. Las ecuaciones paramétricas pluckerianas de Γ las podemos obtener directamente de 10.11, pues si son (U, V, W) las coordenadas de una recta tangente tenemos

$$\begin{aligned} U &= (-\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b) + \Delta_{20})Y_1 + (\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b)^2 - \Delta_{10}\lambda + \Delta_{12})Y_0 \\ V &= (\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b) - \Delta_{20})X_1 - (\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b)^2 - \Delta_{10}\lambda + \Delta_{12})X_0 \\ W &= (X_1y_0 - x_0Y_1)(-\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b) + \Delta_{20}) + \Delta_{10}\lambda(\Delta_{12} - \Delta_{10}\lambda + \\ &+ \Delta_{20}(a\lambda/b + c/b)) + (X_0y_0 - x_0Y_0)(\Delta_{10}(a\lambda/b + c/b)^2 - \Delta_{10}\lambda + \Delta_{12}) \end{aligned}$$

Como a cada terna homogénea (a, b, c) corresponde una cónica Γ distinta, concluimos que las susodichas cónicas van a tener estructura de espacio proyectivo de dimensión dos. Las propiedades gráficas que puede tener este espacio es una línea de investigación que dejamos abierta de momento. Como propiedad fundamental y evidente del mismo, ya resaltamos que los puntos de la cúbica de Bezier han de formar parte del mismo como cónicas degeneradas.

Hay otra propiedad de estas cónicas fácilmente deducible y es que *todas las cónicas del espacio han de ser tritangentes a la cúbica de Bezier*.

En efecto, una involución de segunda especie sobre la cúbica, bajo otro punto de vista, está definiendo una transformación algebraica (2,1) sobre los puntos de la misma, pues según 10.2 y 10.3 la pareja (u_1, u_2) define un punto u_3 sobre la cúbica y viceversa, pues dado u_3 con 10.2 y la ecuación de la involución podríamos obtener la pareja (u_1, u_2) .

Este tipo de correspondencias tiene tres situaciones críticas [29] en las que u_3 va a coincidir con uno de los valores de la pareja (u_1, u_2) .

Enfoquemos el problema de la siguiente forma: Sea $M(x_M, y_M)$ el punto u_3 de la correspondencia y supongamos que vamos recorriendo la cúbica con él. A cada punto M va a corresponder una pareja de homólogos de la involución y una recta r que contiene a los tres, cuya ecuación va a ser de la forma

$$y - y_M(u_3) = m(u_3)[x - x_M(u_3)] \tag{10.12}$$

donde u_3 figura como parámetro.

Al calcular la envolvente de r , el punto característico de la misma debe verificar

$$-\frac{dy_M}{du_3} = \frac{dm}{du_3}[x - x_M(u_3)] - m(u_3)\frac{dx_M}{du_3} \tag{10.13}$$

En los puntos críticos antes mencionados el punto característico va a ser el propio punto M , pues sus coordenadas verifican 10.12 y 10.13, puesto que al presentarse u_3 como raíz

doble, la recta 10.12 va a quedar tangente a la cúbica en M , luego en este punto se ha de verificar que

$$m(u_3) = \frac{dy_M/du_3}{dx_M/du_3}$$

lo que hace que M verifique 10.13.

Como la envolvente ha de ser tangente a r en su punto característico, deducimos que Γ es tangente a la cúbica en dicho punto.

Como en la correspondencia $(2, 1)$ existen tres situaciones críticas de este tipo, Γ ha de ser tritangente a la cúbica.

Para redondear esta exposición hace falta ver que podemos elegir los coeficientes de la ecuación 10.8 de forma que obtengamos una involución de primera especie. Para ello hace falta que el valor de u_3 dado por 10.3 tome un valor constante k .

De 10.10 deducimos fácilmente que

$$p = -\left(\frac{b}{a}s + \frac{c}{a}\right)$$

Si entramos con este valor en 10.3 tenemos

$$u_3 = \frac{\Delta_{12} + \Delta_{10}\left(\frac{b}{a}s + \frac{c}{a}\right) - \Delta_{20}s}{\Delta_{10}s + \Delta_{20}}$$

Si elegimos los coeficientes de 10.8 tales que

$$\frac{b}{a} = -\frac{\Delta_{20} + k\Delta_{10}}{\Delta_{10}}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\Delta_{12} - k\Delta_{20}}{\Delta_{10}}$$

al entrar en la ecuación anterior obtenemos $u_3 = k$, lo que nos dice que las rectas que unen parejas de puntos en involución cortan a la cúbica en un punto fijo y estaremos en una involución de primera especie.

En este caso las ecuaciones paramétricas pluckerinas de las rectas involutas adoptan la forma

$$U = Y_1 + Y_0(s + k)$$

$$V = -X_1 - X_0(s + k)$$

$$W = X_1y_0 - x_0Y_1 + k(\Delta_{20} + k\Delta_{10} + k\Delta_{20} - \Delta_{12}) + (X_0y_0 - x_0Y_0)(s + k)$$

donde nos ha quedado s como parámetro. La dependencia lineal del mismo nos indica que las involutas van a pasar por un punto fijo.

Ejemplo I

Para apoyarnos en nuestra exposición vamos a mostrar un ejemplo sencillo. Se trata de estudiar la cúbica de Bezier definida por los puntos de control $P_0(0, 0)$, $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$ y $P_3(1, 0)$.

Se trata de hallar:

- Ecuaciones de la curva.
- Obtención del punto doble.
- Proyectividad (m, u) .
- Cónica central correspondiente a la involución de segunda especie dada por

$$2u_1u_2 - (u_1 + u_2) = 0$$

- Comprobar que esta cónica es tritangente a la cúbica definida.
- Hallar la cónica de los retrocesos asociada al vértice P_2 .

La correspondiente curva de Bezier viene dada por

$$\begin{aligned}x &= 3u^2 - 2u^3 \\y &= 3u(1 - u)\end{aligned}$$

de la que sólo es aprovechable el intervalo $0 \leq u \leq 1$

Si buscamos el punto doble por el método clásico, vendrá dado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}3u_1^2 - 2u_1^3 &= 3u_2^2 - 2u_2^3 \\3u_1(1 - u_1) &= 3u_2(1 - u_2)\end{aligned}$$

Como siempre, tras dividir por la solución trivial $u_1 - u_2 = 0$, nos queda

$$\begin{aligned}3(u_1 + u_2) - 2(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2) &= 0 \\1 - (u_1 + u_2) &= 0\end{aligned}$$

que expresado en las variables $s = u_1 + u_2$ $p = u_1 u_2$ nos conduce a

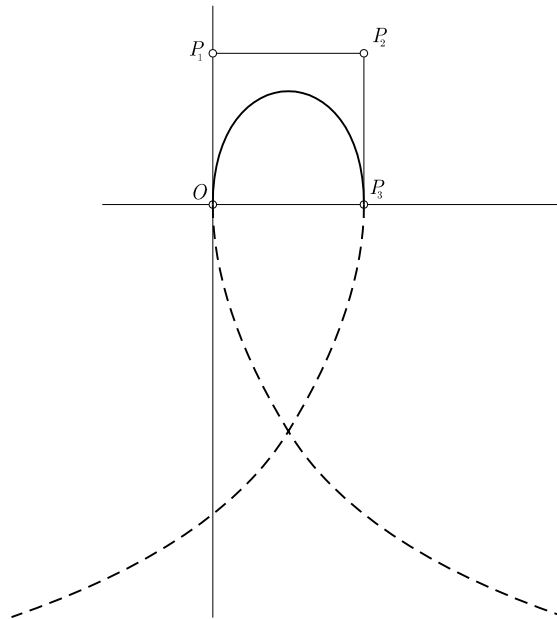
$$s = 1, \quad 3s - 2(s^2 - p) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -1/2$$

La ecuación que nos da los valores de u correspondientes al punto doble es

$$\varphi(u) = u^2 - u - 1/2 = 0$$

$$u_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad u_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

valores que sustituidos en las ecuaciones de la curva nos dan el punto doble $P(1/2, -3/2)$.



Si buscamos el punto doble por el método expuesto en 10.3.2 tenemos en este caso

$$X_0 = -2, \quad Y_0 = 0, \quad X_1 = 3, \quad Y_1 = -3, \quad X_2 = 0, \quad Y_2 = 3$$

$$\Delta_{12} = 9, \quad \Delta_{10} = -6, \quad \Delta_{20} = 6$$

con lo que la ecuación 10.4 se nos convierte en

$$-6u^2 + 6u + 3 = 0, \quad \Rightarrow \quad u^2 - u - 1/2 = 0$$

que, evidentemente, nos da los mismos valores que los obtenidos de la forma clásica.

La pendiente en un punto de la curva viene dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/du}{dx/du} = \frac{1 - 2u}{2u(1 - u)}$$

Sustituyendo los valores del parámetro en el punto doble tenemos las pendientes en este punto que son $\pm\sqrt{3}/2$.

Si nos llevamos el origen al punto doble obtenido, las nuevas ecuaciones de la cúbica son

$$\begin{aligned}x_1 &= -2u^3 + 3u^2 - 1/2 = \varphi(u)(-2u + 1) \\y_1 &= -3u^2 + 3u + 3/2 = -3\varphi(u)\end{aligned}$$

Si dividimos la segunda entre la primera y hacemos $m = y_1/x_1$ obtenemos la ecuación de la proyectividad (m, u) .

$$m = \frac{-3}{-2u + 1}$$

Los puntos dobles de la involución del enunciado están dados por la ecuación

$$u^2 - u = 0$$

de modo que con las notaciones que hemos empleado tenemos $a = 1, b = -1/2, c = 0$.

Entrando con estos valores y con los X_i, Y_i, Δ_{ij} en 10.11 tenemos que las rectas que unen dos puntos homólogos obedecen a la ecuación

$$3(2 - 4\lambda)x + 16\lambda(1 - \lambda)y + 6\lambda(3 - 2\lambda) = 0$$

que ordenada en λ es

$$(16y - 12)\lambda^2 + (-12x - 16y + 18)\lambda + 6x = 0$$

La anulación del discriminante nos conduce directamente a la cónica central, que será

$$(6x + 8y - 9)^2 - 6x(16y - 12) = 0$$

que podemos poner en la forma

$$\frac{(y - 9/8)^2}{(3/8)^2} + \frac{(x - 1/2)^2}{(1/2)^2} = 1$$

ecuación que nos pone de manifiesto que es una elipse de centro $(1/2, 9/8)$ y de semiejes $1/2$ y $3/8$.

Es evidente que el punto $(1/2, 3/4)$ ya es un punto de tangencia entre la elipse y la cúbica. Los otros dos van a resultar imaginarios y para calcularlos podemos hallar las intersecciones de ambas curvas entrando con las paramétricas de la cúbica en la elipse. Tenemos así la ecuación de sexto grado

$$[24u(1 - u) + 18u^2 - 12u^3 - 9]^2 - 6(3u^2 - 2u^3)[48u(1 - u) - 12] = 0$$

$$(-4u^3 - 2u^2 + 8u - 3)^2 - 8(3u^2 - 2u^3)(2u - 1)^2 = 0$$

Si dividimos por $(2u - 1)^2$, que es separar la raíz doble $u = 1/2$ ya conocida, obtenemos la ecuación

$$(2u^2 - 2u + 3)^2 = 0$$

que nos da las dos raíces dobles complejas $u = (1 \pm \sqrt{5}i)/4$. La naturaleza doble de estas raíces indica tangencia en estos puntos imaginarios.

Vamos a estudiar la cónica de retrocesos asociada al vértice P_2 . Si llamamos $P_2(x, y)$ a las coordenadas variables de este vértice tenemos

$$X_0 = 1 - 3x, \quad Y_0 = 3 - 3y, \quad X_1 = 3x, \quad Y_1 = -6 + 3y, \quad X_2 = 0, \quad Y_2 = 3$$

$$\Delta_{12} = 9x, \quad \Delta_{10} = 6 - 3y - 9x, \quad \Delta_{20} = -3 + 9x$$

Al entrar con estos valores en 10.4 nos queda como cónica de retrocesos

$$3x^2 + 4xy - 2x - 1 = 0$$

Si la expresamos en la forma

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}$$

vemos que se trata de una hipérbola de asíntotas $x = 0$, $y = -3x/4 + 1/2$

Para comprobar el cometido de esta cónica, tomemos, por ejemplo, el punto $P_2(1/2, 5/8)$ y veamos que la cúbica correspondiente presenta un retroceso. La curva que se obtiene es

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2}u^2(1-u) + u^3 = -\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u^2 \\ y &= 3u(1-u)^2 + \frac{15}{8}u^2(1-u) = \frac{9}{8}u^3 - \frac{33}{8}u^2 + 3u \end{aligned}$$

Para hallar el punto nodal entremos en 10.4 con

$$\Delta_{10} = -3/8, \quad \Delta_{20} = 3/2, \quad \Delta_{12} = 9/2$$

con lo que llegamos a la ecuación

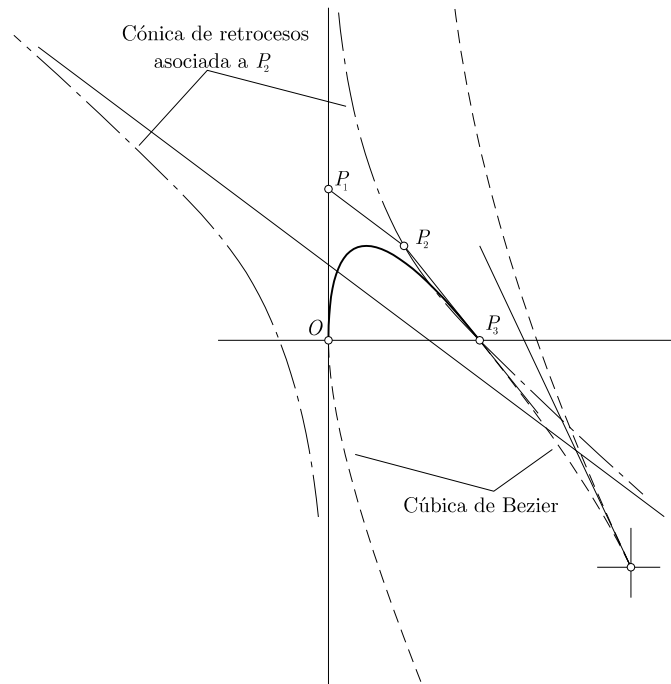
$$u^2 - 4u + 4 = 0$$

que nos da el valor $u = 2$ doble, como era de esperar.

El punto de retroceso resulta ser $P(2, -1/2)$. La pendiente en el mismo es

$$m = \frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = -\frac{7}{4}$$

Si a estos detalles, más los requeridos por los del polígono de control, agregamos que la pendiente de las ramas parabólicas es de $-9/4$, podemos tener un esquema rápido de la curva en cuestión.



Bibliografía

- [1] NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES. París. 1923.
- [2] AUBERT, P., PAPELIER, G.: *Exercices de Géométrie Analytique*. Vuibert, París. 1955
- [3] BIX, R.: *Conics and Cubics*. Springer, Berlín 1998.
- [4] BROCARD, H., LEMOYNE, T.: *Courbes Géométriques Remarquables*. Vuibert, París 1919.
- [5] CAMACHO, HUMILDAD: *Transformaciones proyectivas en el plano cíclico*. Tesis doctoral. Universidad de Córdoba, 2001
- [6] CÁMARA, SIXTO: *Elementos de Geometría Analítica*. Autor, Madrid. 1945.
- [7] CANO DE LA TORRE, I.; GÓMEZ DE LOS REYES, R.: *Curso de Geometría Analítica*. Academia Luz, Madrid, 1955.
- [8] CANO DE LA TORRE, I.; GÓMEZ DE LOS REYES, R.: *Curso de Geometría Proyectiva*. Academia Luz, Madrid, 1955.
- [9] DUPORQ, E.: *Premiers Principes de Géométrie Moderne*. Gauthiers-Villars, París, 1938.
- [10] FARIN, G.: *NURBS from Projective Geometry to Practical Use*. A. K. Peters, Londres, 1999.
- [11] GÓMES TEIXEIRA: *Tratado de curvas especiales notables*. Academia de Ciencias, Madrid, 1905.
- [12] JONQUIERES, E. DE: *Mélanges de Géométrie Pure*. Mallet-Bachelier, París. 1856
- [13] LEMAIRE, J.: *Hypocycloides et Epicycloides*. Albert Blanchard, París. 1967
- [14] LEMAIRE, .: *Étude Élémentaire de l'Hyperbole Équilatère et de quelques courbes dérivées* Vuibert, París 1927.

- [15] LEMOYNE, T. *Les lieux Geometriques en Mathematiques speciales* Sphinx-Cepide, Nancy 1923.
- [16] MICHEL, CHARLES: *Compléments de Géométrie moderne*. Vuibert, París. 1949.
- [17] PAPELIER, G.: *Précis de Géométrie Analytique*. Vuibert, París, 1955.
- [18] PASCUAL, ESTHER: *Desarrollo de una metodología gráfica para la representación estereográfica de las intersecciones de una cuádrica con un plano o con otra cuádrica*. Tesis doctoral, Universidad de Córdoba, 2005.
- [19] PIEGL, P.; TILLER, R.: *The NURBS book*. Springer, Berlín, 1997.
- [20] PRIETO, MANUEL: *Geometría aplicada al diseño*. ADI, Madrid. 2010.
- [21] PRIETO, MANUEL; SONDESA, M.DOLORES: *Algunas consecuencias del correlativos del teorema de Staudt*. Nota interna de investigación, UPM, Madrid 2005.
- [22] PRIETO, MANUEL; SONDESA, M.DOLORES: *Transformaciones cuadráticas*. Nota interna de investigación, UPM, Madrid 2010.
- [23] PRIETO MANUEL; SONDESA, M.DOLORES: *Clasificación de cúbicas*. Nota interna de investigación, UPM, Madrid 2006.
- [24] PRIETO, MANUEL: *Carta abierta a Nicolás Bourbaki*. Revista de Ingeniería Aeronáutica y Astronáutica, Madrid 2005.
- [25] REY PASTOR, JULO: *Teoría geométrica de la polaridad*. Talleres Voluntad, Madrid, 1929.
- [26] ROGERS, D. F.: *An Introduction to NURBS with historical perspectives*. Morgan Kaufmann, Londres, 2001.
- [27] SALMON: *Cúbicas*
- [28] SEMPLE, J.G.; KNEEBONE, G.T.: *Algebraic Projective Geometry*. Clarendon Press, Oxford, 1963.
- [29] SINGIER, G.: *Les correspondences Algébriques*. Vuibert, París. 1938.
- [30] SNYDER, VIRGIL ET AL.: *Selected Topics in Algebraic Geometry*. Chelsea, New York 1970.
- [31] SONDESA, MARÍA DOLORES: *Metodología proyectiva en espacios no convencionales. Aplicación al plano cíclico*. Tesis doctoral UPM, Madrid. 1996.

-
- [32] TODD, J.A.: *Projective and Analytical Geometry* Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd. Londres 1960.
- [33] TORROJA, E.: *Tratado de Geometría de la Posición*. Autor, Madrid, 1899.
- [34] VEGAS, MIGUEL: *Tratado de Geometría Analítica* Autor, Madrid. 1907.
- [35] WALKER, R. M.A.: *Cartesian and Projective Geometry* Edward Arnold, Londres, 1953.
- [36] WINGER, R. M.: *An introduction to Projective Geometry* Dover Nueva York 1962.

Índice temático

A	
algoritmo	
de Casteljaú	235
APOLONIO	95, 212
arco capaz	151
arista de retroceso	22
B	
BERNARD DE CHARTRES	20
BERNOULLI	215
BEZIER	21, 161, 229
BEZOUT	55, 77, 128
bilinealidad	60
bipuntos	28, 186
birrayos	28, 186
biunicidad	60
C	
CAMACHO	19
CARDANO	77, 208, 231
cardioide	22
CASTELJAU	235
centro	
de una involución	160
centro de una involución	78
Chasles	
principio de correspondencia	137
CHASLES	136, 137, 150
circunferencia	
directriz	174
de Feuerbach	18, 199
de Joachimstal	23, 214
de Monge	92, 95, 98
circunferencias	
directrices	169
colinealidad	26
complejo de cónicas	31
congreso	
de Gijón	18
de Melum	18
de Royaumont	18
cónica	
capaz	150
deferente	22, 167
de retrocesos	233
cónicas	
del plano	31
cónicas	
homofocales	21
intersección	149
conjunto cociente	26
cono subsidiario	168
coordenadas	
homogéneas	19, 27, 36
tangenciales	168
CREMONA	128
cuádrice de Klein	26
cuártica piriforme	101
cuártica bicuadrática	212
cúbica	
unicursal	81
CÚBICAS	
BÚSQUEDA DEL MECANISMO DE GENERACIÓN	
148	
MODOS DE GENERACIÓN	136
PROPIEDADES	134
cúbicas	
de Bezier	229
circulares	167
generación	22
unicursales	58
haces auxiliares de generación	59
curva	
algebraica	
máximo de puntos dobles	54
CURVA	
UNICURSAL	53
ASPECTOS PROYECTIVOS	60
curvas	

de Bezier	229		
cónica central	236, 242		
cónica de retrocesos	233, 243		
cónicas tritangentes	238		
involución de primera especie	235		
involución de segunda especie	236		
involuciones	235		
proyectividad (m, u)	234		
punto corresidual	232		
punto nodal	232		
puntos alineados	231		
puntos de inflexión	233		
teorema fundamental	229		
de Bezier	161		
		D	
deltoide	22		
base y ruleta	179		
circunferencia directriz	174, 179, 181		
ecuación plückeriana	177		
ecuaciones paramétricas	174		
ecuaciones paramétricas homogéneas	174		
ecuaciones paramétricas plückerianas	177		
ecuaciones paramétricas plückerianas homogéneas	177		
evoluta	181		
generación métrica	173		
generación como cuártica puntual	190		
generación como cúbica tangencial	185		
interpretación cinematográfica	177		
interpretación de Cremona-Lemaire	174		
interpretación de Lemaire	181		
propiedades de las tangentes	181		
punto primario	174, 181		
punto secundario	174		
puntos cíclicos	181		
de Steiner	202		
tangente adjunta	188		
tangente doble	181		
tangentes ortogonales	184		
vértices	175		
DELTOIDE			
Y CARDIOIDE	193		
DEFINICIONES	173		
GENERACIÓN PROYECTIVA	185		
Y RECTA DE SIMSON	195		
DESARGUES	22, 78		
		E	
		ecuación	
		generatriz	36
		interpretación gráfica	37
		eliminante de Sylvester	69, 72
		espacio	
		de bipuntos	186
		de birrayos	186
		de planos	26
		de rectas	26
		dual	19
		ESPACIO PROYECTIVO	
		DEFINICIÓN	25
		espacios	
		convencionales	25
		ESPACIOS	
		NO CONVENCIONALES	28
		estrofoide	22
		ecuación cartesiana	157
		ecuación polar	157
		ESTROFOIDE	
		CLASE	164
		FOCOS	164
		GENERACIÓN MÉTRICA	157
		GENERACIÓN COMO ENVOLVENTE DE CÍRCULOS	167
		PARAMETRIZACIÓN RACIONAL	158
		PUNTOS ALINEADOS	159
		evoluta	
		de la deltoide	181
		F	
		FEUERBACH	18, 199
		fórmulas	
		de Plücker	81, 164, 193
		FREGIER	78
		G	
		género de una curva	54
		Geometría	
		tangencial	19
		GOMES TEIXEIRA	167
		H	
		haces	
		de cónicas	32, 64, 131
		de curvas	131
		de rectas	131

HACES	
DE CÓNICAS	61, 63
DE CURVAS	
PROPIEDAD FUNDAMENTAL	131
haz	
de planos	25
de rectas	25
haz auxiliar	58
hipérbola de Apolonio	95, 212
hipercomplejo de cónicas	31
hipocicloide de Steiner	202
hipocicloide de tres retrocesos	173
HIRST	128
I	
intersección de cónicas	149
involución	
asociada	166
autocíclica	225
cíclicamente asociada	224
concíclicamente asociada	224
cuaternaria	207
de primera especie	160
de segunda especie	160
INVOLUCIÓN	
NUEVOS ASPECTOS	35
RANGO	50
involuciones	
ternarias	48
involución asociada	48
involución límite	49
parejas singulares	49
puntos singulares	48
puntos triples	49
INVOLUCIONES	
GENERALIZADAS	48
TEOREMA GENERAL	77
J	
JOACHIMSTAL	23, 50, 214
JONQUIERES	150
K	
KLEIN	20
L	
LAMBERT	199
LEMAIRE	174, 181, 203
LEMNISCATA DE BERNOULLI	
GENERACIONES PROYECTIVAS	220
PARAMETRIZACIÓN	215
lemniscata de Bernoulli	
circunferencia bitangente	219
generación con bipuntos	224
generación por puntos	220
puntos alineados	216
puntos concíclicos	217
M	
métodos de rescate	60
MONGE	95, 98
O	
ortocentro	196, 199
P	
PAPELIER	167
parábolas	
deferentes	169
paraboloide discriminante	168, 169, 171, 212
PASCUAL	19
plano	
complejo	193
PLÜCKER	19, 81, 134, 164, 193
polares recíprocas	168
principio de correspondencia	137
proyectividad	
canónica	30
parabólica	191
PTOLOMEO	18
punto	
aislado	230
corresidual	136, 149
búsqueda	149
crunodal	230
cuspidal	230
opuesto	136
primario	174
secundario	174
PUNTO	
TANGENCIAL	166
punto de	
Fregier	78
puntos	
adicionales	134
cíclicos ... 78, 101, 164, 165, 169, 181, 186, 193	
concíclicos	50, 207

en elipse 208
 en hipérbola 209
 en parábola 209
 concíclicos 217, 219
 de un plano 25
 de una cónica 25
 de una recta 25
 fundamentales 134

PUNTOS
 ASOCIADOS 166

R

radiación
 de planos 25
 de rectas 25
 rango de una involución 50
 rayos dobles
 de una involución 81
 razón doble
 de cuatro bipuntos 43
 de cuatro birrayos 44
 de cuatro cónicas 61
 método de la intersección con una recta 63
 método de las pendientes de las tangentes en un
 punto fudamental 64
 método de las polares de un punto 64
 método de los polos de un lado del cuadrilátero
 fundamental 64

recta
 de Simson 22, 195

RECTA
 DE STEINER 196

rectas
 de un plano 25
 del espacio de bipuntos 41
 isótropas 83, 164, 165, 186
 redes de cónicas 32
 representante homogéneo 27
 RUFFINI 55, 57, 77, 81, 129

S

SAVARY 179
 series
 perspectivas 79
 proyectivas 79
 SIMSON 22, 195
 SONDESA 19, 167, 212
 STEINER 109, 136, 196, 202

superficies polares 22
 SYLVESTER 69, 72, 136, 232

T

tangencial 166
 tangente adjunta 188
 tangentes
 a una cónica 25
 teorema
 de Bezout 54, 55, 128
 de Desargues 20, 22, 78
 de Lambert 199
 de Ptolomeo 18
 ternas singulares 209
 TETRAPUNTOS 32
 tranformación de Hirst 128
 transformaciones de Cremona 128
 TRIPUNTOS 32
 trirrayos 32

V

variedad
 homaloídica 51
 unicursal 51
 VIVIANI 51