CURSO COMPLETO

DE

TOPOGRAFÍA Y GEODESIA

1824-07. — Paris. Imprenta de la V^da de C. BOURET. — P1-08.

CURSO COMPLETO

DE

TOPOGRAFÍA, GEODESIA

Y PRINCIPIOS ASTRONOMICOS

APLICADOS

A LA GEODESIA

POR

R. V. LIMELETTE

ANTIGUO COMANDANTE DE LA PLANA MAYOR DE INGENIEROS,
Y PROFESOR EN LA ESCUELA NACIONAL DE DICHA ARMA

Con 131 grabados intercalados en el texto

LIBRERÍA DE LA V^DA DE C. BOURET

PARÍS
23, RUE VISCONTI, 23

MÉXICO
14, CINCO DE MAYO, 14

1908

PRÓLOGO.

Al dar á luz este Tratado de Topografía y Geodesia, no tengo la pretensión de haber producido una obra nueva, pues las demostraciones y teoremas que en él se hallan son conocidos desde hace mucho tiempo, y han sido expuestos por esclarecidos autores de todas las naciones, á los que he consultado. El objeto que me he propuesto conseguir, ha sido únicamente facilitar con un nuevo método el estudio, tan árido, á veces, de las materias que expongo. Los señores profesores y los alumnos á quienes me dirijo, juzgarán si he logrado mi propósito.

R. V. LIMELETTE.

CURSO DE TOPOGRAFÍA.

NOCIONES GENERALES.

La *Topografía* es la descripción de una porción de la superficie de la tierra, y se compone de problemas gráficos, de los cuales la Geometría descriptiva da en general la solución por medio de dos proyecciones.

Pero como se exige que los planos presenten claramente á la vista el conjunto del terreno que se debe representar y todas sus formas, las dos proyecciones en este caso no convienen, y por este motivo se suprime la proyección vertical y se reemplaza por un sistema de líneas, cuyas inflexiones, proyectadas horizontalmente, indican las del terreno.

El problema, pues, de la topografía, se compone de dos partes distintas: 1°. la proyección de todos los puntos de la superficie constituye lo que se llama el *levantamiento del plano;* 2°. El conocimiento de las ordenadas de todos estos puntos es lo que se llama *figuración del terreno.*

El plano al cual se tienen que referir las diferentes operaciones de la topografía se llama *plan de referencia;* y se debe entender por la expresión *superficie de la tierra*, la superficie de las aguas del mar tomada entre su mayor y su menor elevación.

Por otro lado, la superficie de la esfera no pudiendo ser desarrollada, no podrá ser jamás representada sobre un plano de manera exacta cuando se tiene que desenvolver una extensión grande; por eso en topografía se han fijado en veinte leguas marinas la parte que puede ser representada con exactitud sobre un plano. En una palabra, el límite que acabamos de fijar de veinte leguas es aquel en que el plano tangente, en un punto del globo, puede sin error sensible ser considerado como confundiéndose con la superficie.

Desde el límite fijado de veinte leguas en adelante tenemos que tomar en cuenta la curvatura de la tierra, y entramos en los límites de la Geodesia, objeto de otro curso.

La topografía se sirve de dos datos en sus operaciones: *distancias* y *ángulos*. Para conseguir dichos datos, hay que emplear instrumentos especiales que describiremos luego. Tan pronto como éstos nos sean conocidos, pasaremos á diferentes levantamientos de planos. Hecho esto, será necesario calcular las áreas del terreno, su avalúo, tal vez su división. En fin, en seguida habrá que tratar las cuestiones de nivelación que deben entrar en consideración en la topografía.

Por lo expuesto anteriormente, dividiremos el presente curso en las partes siguientes:

1ª. Instrumentos, su uso elemental, su corrección.

2ª. Métodos de levantamiento de planos por medio de los instrumentos descritos.

3ª. Cuadratura y trazo del plano sobre el papel.

4ª. Cálculos para efectuar, y divisiones si hay necesidad.

Estas cuatro partes comprenden especialmente la parte de topografía que se llama *la planimetría*, bien que en ella se describan instrumentos necesarios para la nivelación (capítulo V del curso).

Para concluir, hablaremos del método especial y rápido de los reconocimientos.

PLANIMETRÍA.

1°. DESCRIPCIÓN DE LOS INSTRUMENTOS.

Las escalas. — Se entiende por escala en un plano, la relación que existe entre las medidas de las líneas verdaderas del terreno y las que son sus proyecciones, las cuales se encuentran dibujadas en el plano.

Las escalas decimales son las únicas empleadas hoy. En cuanto sea posible nos serviremos de las escalas siguientes: $\frac{1}{2.000}$ ó $\frac{1}{2.500}$ para levantamiento de planos de ciudades, caminos, canales; en general, en fin, para todos los planos especiales. $\frac{1}{5.000}$ para la reducción ó la reunión de los datos enunciados anteriormente y levantados según la escala anterior. $\frac{1}{10.000}$ para los planos de la topografía completa de un país de pequeña extensión, y para servir de base al estudio de un terreno.

Las fórmulas generales de las escalas son:

$$\text{Primera:} \qquad L = lm.$$

$$\text{Segunda:} \qquad l = \frac{L}{m}$$

Las dos fórmulas se aplican según la necesidad del caso;

y más adelante explicaremos muy sucintamente, y con la mayor brevedad, la construcción de las escalas, así como su modo de aplicación, usando de las dos fórmulas enunciadas; en fin, para los planos de muy grandes dimensiones, se emplean las dos escalas de $\frac{1}{20.000}$ ó de $\frac{1}{40.000}$.

En planimetría hay dos clases de instrumentos, los que se llaman diastímetros y los que son los goniómetros.

Los primeros sirven para medir la reducción al horizonte de la distancia que separa dos puntos, ó esta distancia misma.

Los segundos dan la reducción al horizonte del ángulo de dos direcciones ó el mismo ángulo.

Los instrumentos diastimetros son :

La *Cadena*, la *Cinta* y la *Regla dividida*.

La *Cadena* es de hierro ó de bronce, los eslabones son de uno ó dos decímetros de largo; los metros están marcados con anillos de otro metal; la cadena no tiene más que diez metros de largo. Al usar la cadena, se la verifica antes con un metro ordinario, y al emplear este instrumento se tiene cuidado de que no se formen nudos; las fracciones de metro se miden con un metro ordinario, el mismo que sirvió para verificar la cadena. La cadena es el instrumento que permite la mayor tensión; con ella se deben emplear fichas de hierro que sirven para marcar y contar.

La *Cinta*, formada de tejido fuerte, está reforzada con varios hilos de alambre; está cubierta de barniz, y se encuentra dividida, de costumbre, en metro, decímetro, centímetro y aun milímetro; su tamaño de longitud es generalmente de 25 metros. La cinta se hace también toda de acero. Como para la cadena, antes de emplear la cinta, hay que verificarla, y se hará esta operación con un metro ordinario de madera, cuidando de que las divisiones del metro caigan exactamente con las divisiones de la cinta sin dar á ésta demasiada tensión. Si las divisiones no correspondiesen exactamente, se desechará la cinta.

La *Regla métrica* es una regla de cuatro metros de largo, teniendo en sus extremidades pequeños huecos de hierro destinados á recibir el hilo á plomo.

Para servirse de la regla métrica se tiene que verificarla con un metro, reconocido bueno y aprobado, obrando como con la cinta y la cadena.

Los tres instrumentos que acabamos de nombrar deben tener como auxiliar otro, que se llama jalón, y que es un palo perfectamente recto, de 2 metros de altura, teniendo por base un pico de hierro.

Para servirse, pues, de los tres instrumentos nombrados arriba, sean la cadena, la cinta ó la regla métrica, hay que jalonear la línea del terreno que se quiere medir, y eso se hace por medio de los jalones, que se emplean en mayor ó menor cantidad, según la distancia.

Para bien jalonear una línea, se principia por poner un jalón bien perpendicular al suelo, por medio del hilo á plomo en el punto de partida; después, de 100 en 100 metros en lo máximum, se colocarán otros jalones bien perpendiculares, de manera que, pasando una visual tangente al primer jalón, éste cubra perfectamente á los otros. En algunos casos hay dificultad para jalonear, cuando subsisten obstáculos:

En primer lugar, cuando desde el punto inicial A (fig. 1) es imposible distinguir el punto B, en razón de un obstáculo material. Otro caso: cuando hay un obstáculo material en terreno accidentado. Para resolver estas dificultades, basta servirse de líneas jaloneadas suplementarias, como lo indican los dibujos.

En la práctica, y á medida de las necesidades, haremos conocer otros varios casos especiales, sea de alineamien-

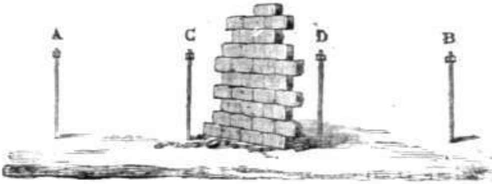

Fig. 1.

tos, sea de medición, cuando se encuentran obstáculos diferentes.

Muy sucintamente hablaremos ahora del método para construir una escala, lo que nos permite reproducir sobre

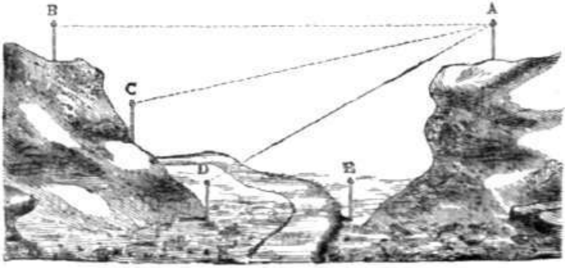

Fig. 2.

el papel las proyecciones de los planos que se deben levantar; después examinaremos de qué manera se pueden reducir los planos ó aumentarlos por medio de escala diferente.

Para construir una escala gráfica simple, se traza una ínea de tamaño regular para el papel que se emplea; este tamaño representará la mayor longitud que se quiere representar en el mapa, plano ó dibujo.

Supongamos que la línea trazada represente 1.000 metros, y que dicha línea sea igual á 0^m, 1. En el punto de origen pondremos el número 0, y en el punto final 1.000^m. Dividiremos la totalidad de la línea en 10 partes iguales, es decir, en 10 centímetros, representando cada uno 100 metros, y en los diferentes puntos de división inscribiremos los números 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900. Comùnmente se da á las escalas una longitud de 2 á 3 decímetros. Ahora podríamos dividir cada una de estas partes en otras 10 partes iguales; pero eso sería demasiado largo é inútil. Lo único que se puede hacer para tener divisiones de 10 metros, es construir á la izquierda de la línea, que indica la escala total, otra pequeña línea igual á una división, y es la que se dividirá en cuantas partes se necesitare, y por el método indicado.

Para servirse de la mencionada escala, se toma sobre el mapa de $\frac{1}{10.000}$ por medio de un compás, una distancia gráfica, después se coloca una de las puntas sobre una de las divisiones, por ejemplo, en 800, de manera que la otra punta caiga, sea exactamente en el punto de origen, sea entre éste y la parte suplementaria agregada á la escala en donde están construídas las divisiones pequeñas. Si la segunda punta del compas cae en el punto de origen, es claro que la distancia buscada es de 800 metros. Si al contrario, éste cae más adelante, por ejemplo en el punto 70, la distancia buscada será $800 + 70 = 870^m$.

Por ahora bastan estas explicaciones para comprender la construcción y el empleo de la escala. Pero varias veces se tiene necesidad de reducir un plano á una escala más pequeña, ó por el contrario, aumentar un plano, dándole una escala mayor.

Hé aquí el método más simple para proceder en el primer caso: se empieza por trazar sobre el dibujo ó plano que se quiere reducir, un sistema de líneas rectas, formando cuadrados iguales; después, sobre la hoja de papel destinada para recibir la copia reducida, se hace un trazado semejante, de manera tal, que los lados de los nuevos cuadrados y los de los primeros, estén entre sí en la misma relación que guardan las escalas. Cuando la longitud de los lados ha sido bien fijada, es fácil dibujar después, en cada uno de los cuadrados en blanco, figuras semejantes á las que se encuentran comprendidas en los cuadrados homólogos del plano original. Hay simplemente que tener cuidado de suprimir en la reducción los detalles que no podrían figurar sin confusión. Se obra de la misma manera, pero en sentido inverso, en el segundo caso.

Proseguiremos ahora con la descripción de los diversos instrumentos, y cómo se deben emplear para levantar los planos. Al mismo tiempo examinaremos las diferentes operaciones que se necesitan practicar en los levantamientos de planos.

Canevás poligonal. — Para proceder al levantamiento del plano de un terreno, que supondremos de pequeña extensión, es necesario ante todo escoger un cierto número de puntos bastante separados, formando uno ó varios polígonos adyacentes, que se referirán sobre el plano, después de haberlos levantado con el mayor cuidado. Los vértices de los polígonos deben estar distribuídos de tal manera, que sea fácil añadir á las rectas que los unen, de dos en dos, todos los detalles que se quieran representar en el plano.

El conjunto de todos estos polígonos es lo que se llama el canevás poligonal. Las operaciones, pues, de la planimetría se encuentran divididas en dos partes : el levantamiento del canevás y el de los detalles.

Levantamiento del canevás. Método de la descomposición de los polígonos en triángulos. — Sea A B C D E F un polígono cuyos vértices han sido escogidos y marcados sobre el terreno. Se quiere levantar el plano con la cadena ó las reglas (se llama hacer un levantamiento al metro). El polígono está dividido en los triángulos B C D, A B D, etc., por diagonales, y se pueden mendir horizontalmente los lados de cada triángulo. Es pues fácil de construir, con escala determinada, triángulos semejantes á los primeros, y por consiguiente, semejanza habrá entre los dos polígonos.

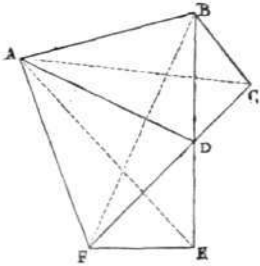

Fig. 3.

Método de las intersecciones. — Consideremos el triángulo A B D formado por los tres vértices del polígono, y supongamos que se puede medir simplemente la distancia A B, pero que el punto D sea visible de los otros dos. Después de haber reducido la distancia A B á la escala del plano, y después de haberla llevado sobre el papel en *a b*, si se determinan los ángulos B A D y A B D, y que se construya sobre la línea *a b* el ángulo *a b x* = B A D, y el ángulo *a b y* = A B D, el punto de intersección *d* de las dos rectas *a x* y *b y* será el tercer vértice de un triángulo *a b d*, semejante á A B D. Se podría construir de la misma manera los triángulos *a b c*, *a b e*, *a b f*, semejantes á los triángulos ABC, ABE, ABF, con tal que los puntos CEF estén visibles de las dos estaciones A y B, y llevando las líneas *c d*, *d e*, *e f*, se tendría el polígono $a\,b\,c\,d\,e\,f$ semejante á ABCDEF.

Este método, llamado por intersección, supone simplemente que cada uno de los puntos que se quiere determinar sea visible de otros dos, ya referidos en el plano. Este método es de aplicación ventajosa en los terrenos descubiertos, en donde, desde un mismo punto, se pueden distinguir otros muchos; en fin, permite determinar puntos inaccesibles, ó á lo menos separados de las estaciones por obstáculos á través de los cuales no se podría pasar con una cadena, como un foso profundo, un río, etc.

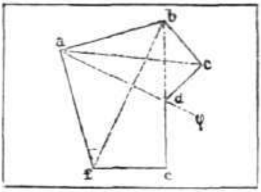

Fig. 4.

Método por caminata. — Admitiremos ahora que se pueda recorrer los lados sucesivos del polígono ABCDEF, y medir todos sus ángulos. Partiendo del punto a sobre el plano, tomamos $a\,b = \mathrm{A\,B}$, medida sobre el terreno, y reducida á la escala adoptada. Después sobre $a\,b$, y en el punto b, haremos un ángulo $a\,b\,x = \mathrm{A\,B\,C}$; y, en fin, sobre la dirección $b\,x$ tomaremos $b\,c$, igual á la longitud reducida del lado B C; el tercer punto c, así determinado, pertenecerá, lo mismo que a y b, al plano del polígono ABCDEF. Los vértices $d\,e\,f$ se determinarán de manera análoga, midiendo las longitudes de los otros lados del polígono ABCDEF, y los ángulos de este polígono, refiriendo estas medidas sobre el plano. Este método, para trabajar, está designado bajo el nombre de *Método por caminata*. Para aplicarlo, se ve que basta adelantar sucesivamente de un vértice del polígono al vértice siguiente, no haciendo más á cada estación, que la medida de un ángulo y una medida de distancia. Pues bien, siguiendo los caminos, las sendas, los límites de los campos arados, los cursos de los riachuelos, estas medidas son generalmente fáciles, y de esta manera se llega á extender el canevás sobre la superficie del terreno entero. El método, pues, de caminata, es muy general, y debemos añadir que es el único que se puede emplear para levantar el plano de las localidades, en donde el punto de vista se encuentra limitado, así como los terrenos de planicie, pero cubiertos de vegetación; los terrenos cortados en paredes, etc., etc.

Los métodos de caminata y de intersección se emplean simultáneamente, y se prestan su concurso, sean cuales fueren los instrumentos de que se pueda disponer. Sin embargo, se notará en lo siguiente que el método de las intersecciones trae en general resultados más exactos con la plancheta que con la brújula, mientras que este último instrumento, por el contrario, es preferible cuando se quiere trabajar por el método de caminata.

Verificación del canevás. — La exactitud de un plano depende esencialmente de la exactitud del canevás. Es necesario, pues, verificar éste antes que se empiece á levantar los detalles. Por consiguiente, verifiquemos el levantamiento por la descomposición en triángulos: Este consiste en medir las diagonales como A C, B F, A E; es decir, otras que las que forman los lados de los triángulos (fig. 3), y se tiene que ver si sus longitudes, reducidas á la escala, son iguales á las líneas homólogas *a c*, *b f*, *a e* del plano.

La verificación del método de intersecciones, se practica del modo siguiente: Para verificar un punto determinado, se le mirará desde una tercera estación, y la línea que represente la nueva dirección debe concurrir en el mismo punto sobre el plano; así, el punto *m*, (fig. 6) que está situado en el encuentro de las tres líneas *ax*, *by*, *cm*, puede ser considerado como representando exactamente el punto M del terreno sobre el cual se ha tomado de las tres estaciones A, B, C las direcciones AM, BM, CM. Sucede lo mismo con los puntos n y p, determinados por otros tres.

Cuando las tres líneas que representan sobre el plano las tres direcciones llevadas sobre un mismo punto del terreno, no concurren exactamente en un mismo punto del plano, es necesario volver á empezar la operación, á menos que el triángulo formado por las tres rectas no sea bastante pequeño para que se pueda tomar sin error apreciable por proyección del punto del terreno el centro del círculo ins-

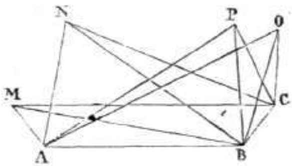

Fig. 5.

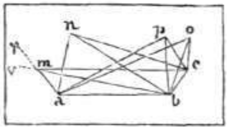

Fig. 6.

crito en el triángulo, como en este caso se hizo para el punto o (fig. 17).

Como nota, diremos, que en cuanto sea posible, hay necesidad de no formar triángulos en los cuales las dos rectas se corten bajo un ángulo muy agudo.

Para la verificación del método por caminata, diremos que este método se verifica por sí mismo; pues habiendo uno ó varios polígonos, sucede, que si la primera operación está bien hecha, todos los polígonos se deben cerrar, y se pueden considerar todos sus vértices como exactamente determinados.

Sin embargo, cuando un polígono no se cierra, en general es fácil reconocer el error; si éste es pequeño, se reparte sobre cada vértice del polígono ó de los polígonos; si es grande, se tiene que volver á empezar el trabajo. Si los errores ó el error ha sido cometido en el levantamiento de los detalles, se trabaja sobre estos últimos, subdividiéndolos por medio del método de caminata, trazando en él ó en los polígonos líneas intermediarias, que se llaman transversales, las cuales facilitan una nueva rectificación de vértices en él ó en los polígonos.

Los métodos que acabamos de indicar para levantamientos de planos, se llaman, en general, levantamiento al metro, y se emplean cuando el terreno se encuentra muy descubierto.

Estas maneras de levantamientos son muy exactas, pero muy poco expeditivas. Si por casualidad no se tuvieren otros instrumentos, de los cuales se tienen que hacer uso en topografía, sería necesario recurrir á la medida indirecta de los ángulos para poder emplear con arreglo al caso, uno de los métodos, sea de intersecciones, sea por caminata.

Para medir indirectamente los ángulos, sea que se quiera

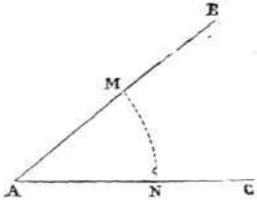

Fig. 7.

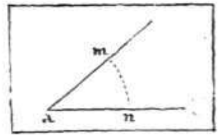

Fig. 8.

medir el ángulo B A C, y que para esta operación no se pueda disponer más que de la cadena ó de un quíntuplo metro, se llevarán sucesivamente dos longitudes iguales, la una sobre la dirección A B, desde A á M, y la otra sobre la dirección A C de A hasta N. Después se medirá el tercer lado M N del triángulo A M N, lo que acabará por determinar este triángulo, y por consiguiente el ángulo B A C, que se llevará adonde se quiera, sobre el papel, construyendo con una escala arbitraria el triángulo *a m n*, semejante al triángulo auxiliar A M N.

Cuando el ángulo que se trata de determinar es muy obtuso, y que se quiere prolongar uno de sus lados, está hecho más pronto y más exacto determinando su suplemento. En fin, cuando el interior del ángulo está lleno, como sería el ángulo de los dos lados de una pared de revestimiento, se prolonga uno de los dos lados del ángulo, y se trabaja con su suplemento. Este método sería muy poco exacto si el ángulo fuese muy agudo ó muy obtuso, ó si los lados del triángulo auxiliar se hubiesen tomado muy pequeños.

Los levantamientos de detalles pueden ligarse á los vértices y á los lados del canevás por métodos análogos á los que se emplean para levantar el canevás mismo.

Levantamiento por irradiación. Método de las

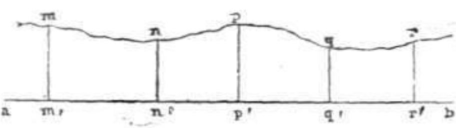

Fig. 9.

coordenadas. — Cuando de un solo punto se determinan otros varios, se dice que se trabaja por irradiación. El ejemplo anterior resume los dos casos de los puntos accesibles y de los inaccesibles, á los cuales se pueden aplicar los métodos generales. Para determinar los puntos accesibles, se podría igualmente formar triángulos, en los cuales se medirían los tres lados; pero el método más sencillo es el que se ha designado bajo el nombre de *Método de las coordenadas*. Consiste en referir cada punto por su distancia á uno de los lados del canevás, y por la distancia del pie de la perpendicular, bajada de este punto sobre el lado del canevás á una de las extremidades de este lado; así, el lado m está determinado por las distancias $m\,m'$ y $a\,m'$, que se llaman las coordenadas de este punto: $m\,m'$ es la ordenada; $a\,m'$ la abscisa, y la línea $a\,b$ es la línea de las abscisas; los puntos n, p, q, etc., se determinan de la misma manera por sus coordenadas $n'\,p'\,q'$, etc.

Para levantar ó bajar perpendiculares sobre una dirección dada en el terreno, se emplea la *Escuadra de agrimensor*.

Descripción de la escuadra de agrimensor. — Este instrumento se compone de un prisma de ocho lados ó de un cilindro hueco de cobre, A, de cinco ó seis centímetros de diámetro, y de siete ú ocho de altura, montado sobre un mango hueco ó cabo, B, que se fija en el vértice del polo C, el cual tiene en su otra punta un regatón de hierro para que se le plante en tierra; cuatro hendeduras de 1 milímetro de largo, practicadas según generatrices, ó más bien cuatro aberturas, en medio de las cuales están tendidos hilos de seda

Fig. 10.

que permiten ver á través del prisma ó cilindro, y de mirar á los objetos situados á cierta distancia. Los hilos opuestos, considerados de dos en dos, determinan dos planos rectangulares de demarcación.

Para verificar el instrumento que acabamos de describir, bastará, después de haberle plantado en tierra, colocar jalones á 50 ó 60 metros, mirando por cada una de las cuatro hendeduras; después, sin cambiar el pie de la escuadra, y simplemente haciendo girar ésta $^1/_4$ de revolución, se volverá á mirar, y se debe encontrar los otros dos jalones en la segunda demarcación. En caso que así no fuere, se moverian ligeramente los hilos.

Uso de la escuadra. — Para levantar por medio de la escuadra una perpendicular sobre una dirección AB, trazada sobre el terreno por un punto *m*, dado sobre esta dirección misma, basta colocar la escuadra en este punto y hacerla girar, hasta que, chando una visual por las dos hendeduras opuestas, se perciba sobre el alineamiento de los dos hilos de un lado el punto A, y del otro el punto B. Colocando entonces un jalón en C, sobre el alineamiento de los otros dos hilos, este jalón y el punto *m* determinarán la perpendicular en AB.

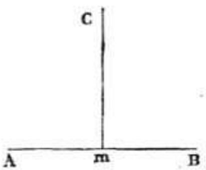

Fig. 11.

Pero cuando se trata de bajar una perpendicular de un punto *m* situado fuera de la dirección AB, el problema ya no puede resolverse más que por el tanteo. Hé aquí cómo se debe obrar:

El operador, habiéndose colocado sobre la prolongación de la línea AB, hará colocar en este alineamiento un tercer jalón C, entre A y B, después de lo cual vendrá á colocarse lo más cerca posible en la dirección de la perpendicular bajada del punto *m* sobre AB, quedando siempre sobre esta última línea, lo que le será fácil, visto que siempre tendrá para alinearse el jalón C y uno de los jalones A ó B. Suponemos que la escuadra haya sido puesta así en E′, levantan-

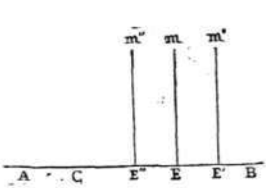

Fig. 12.

do desde este punto la perpendicular E′ *m′* sobre A B; se verá, por ejemplo, que su dirección pasa á la derecha del punto dado *m*; por consiguiente, deberá llevarse hacia la izquierda en una cantidad que se evaluará más ó menos. Pero puede suceder que se pase en el sentido opuesto el punto E, en donde vendría á caer el pie de la perpendicular, bajada del punto *m*, y que se llegase hasta E″. Se reconocerá de la misma manera, por medio del instrumento, que la perpendicular levantada en E″ pasa á la izquierda del punto *m*, y se volverá sobre la derecha, acortando más y más el intervalo en el cual se hace el movimiento, hasta que se halla encontrado el punto E ó la perpendicular levantada sobre A B, que irá á pasar por el punto *m*.

El jalón intermediario C no es indispensable. Puede uno colocarse entre los dos puntos A y B, y sobre su alineamiento por medio de la escuadra misma, y trabajando con un tanteo igual a que acabamos de describir. Pues bien, una vez colocado en un alineamiento, es fácil quedarse en él, y se acaba la operación como ya se ha indicado.

Levantamiento del plano con la escuadra y la cadena. — Los dos alineamientos dados por la escuadra en un punto cualquiera del terreno, estando representado sobre el papel por dos rectas *o x* y *o y*, (fig. 13) perpendiculares entre sí, y prolongadas indefinidamente se puede determinar inmediatamente las posiciones relativas de otros tantos puntos que se quiera por sus distancias á estas dos rectas. Si se conoce, por ejemplo, las distancias de un punto A á los dos alineamientos, se llevará sobre *o x* y sobre *o y* á la escala del plano que se quiere construir las longitudes *o m*, y *o n* representando las dos distancias, y por los puntos *m* y *n* se levantarán perpendiculares cuya intersección *a* será la proyección del punto A. Operando de la misma manera, se determinarán las proyecciones *b*, *c*, *d*, etc., por sus distancias á las dos líneas $o\,x$ y $o\,y$, que se llaman ejes de coordenadas.

Según lo dicho, se ve que por medio de la escuadra y de la cadena se conseguirá levantar un polígono cualquiera, A B C D E F, sin que sea necesario levantar los ángulos de este polígono, sea directa ó indirectamente, pero con la única condición que se pueda determinar las distancias de los diferentes vértices sobre los dos alineamientos.

Aun admitiendo que no se pudiera recorrer el interior del polígono A B C D E F, habría todavía modo de levantar su plano. Bastaría, en efecto, trazar un rectángulo que envolviese el polígono, y referir los diferentes vértices de éste, sea A, B, C, D, E, F, á los dos lados del rectángulo, que se tomarían sucesivamente como ejes de las coordenadas.

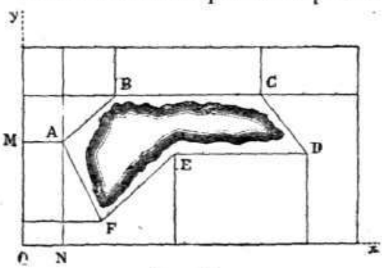

Fig. 13.

Las dimensiones que se toman sobre direcciones rectangulares para ejecutar el levantamiento del polígono ó de sus detalles, pueden todavía servir á la valuación del terreno, ó más bien á las proyecciones horizontales de estas superficies.

Croquis acotado. — La cadena y la escuadra bastan para ejecutar lo que hemos llamado el levantamiento al metro; pero las medidas que se toman por medio de estos instrumentos, aun para ejecutar un levantamiento de plano de pequeña extensión, tienen necesidad de ser anotados con el mayor cuidado.

Para evitar la confusión que resultaría de indicaciones más ó menos ciertas, se acostumbra dibujar á pulso y sin escala determinada, un croquis de las diferentes partes del plano, é inscribir en él todas las medidas junto á las líneas á las cuales se refieren. Estas medidas, inscritas sobre los dibujos, se llaman *cotas*, y los croquis toman ellos mismos el nombre de croquis ó borradores acotados.

Levantamiento à la plancheta y alidada. — Pasamos por consiguiente á los instrumentos que en el principio de este curso hemos llamado goniómetros. Pero de éstos, llamaremos á los unos goniógrafos, que son los que servirán para expresar gráficamente los ángulos; los otros, es decir, los goniómetros, propiamente dicho, indicarán tan sólo su medida, y necesitarán además otro instrumento auxiliar para referirlos sobre el papel, después de conocer su valor.

La plancheta y alidada tienen por objeto construir gráficamente los ángulos sobre la hoja del dibujo sin que sea preciso obtener su medida. Estos dos instrumentos reunidos forman un goniógrafo, y nos proporciona el trazar sobre el papel las proyecciones que corresponden á las líneas del terreno.

La plancheta se compone de un tablero de madera seca y perfectamente plana, formando un rectángulo ó cuadrado de 0,40 á 0,60 centímetros de lado, sobre el cual se pega la hoja de papel que ha de contener el dibujo. Se une el tablero á un pie que le proporciona la altura conveniente para operar con comodidad en todas las observaciones, y la unión se verifica por un aparato que permite colocar el tablero horizontalmente, hacerle girar dentro de su plano, y fijarle en la posición que se desee.

Los aparatos que ligan los instrumentos con sus pies reciben el nombre de rodillas, cuando están provistos de algún juego ó articulación, por cuyo auxilio se puedan situar los instrumentos en una posición determinada. La más sencilla y la que se adapta con facilidad á la plancheta es la rodilla de nuez, constituída en su parte superior por dos piezas en forma de conchas que atraviesan un tornillo. Estas dos conchas abrazan á una esfera unida al disco ó platillo del instrumento. Termina el aparato de unión por un cono truncado, en cuyo hueco interior penetra la espiga de un pie. Con el fin de que puedan formar un solo cuerpo el instrumento y su soporte, lleva el mango un tornillo de presión que oprime la espiga contra la pared opuesta del tronco del cono, y para evitar que el tornillo rehunda la madera, obrando siempre sobre ella, ejerce directamente su acción en una pieza metálica elástica sujeta á la parte interna del mango por una de sus extremidades.

Mientras no se aprieta el tornillo, la esfera puede moverse con libertad en el interior de las conchas, pero apretándolo, sujeta las conchas á la esfera.

Para colocar la plancheta horizontalmente, se la asegurará esta posición por un nivel ó con auxilio de una bola ó lápiz de forma cilíndrica, que deben permanecer invariables, cualquiera que sea la posición que se les asigne sobre la plancheta.

Hecho esto, aun será posible hacer girar al tablero dentro de su mismo plano, pues según la disposición que se indica, en el centro de su base inferior se eleva perpendicularmente un cilindro hueco, de metal, cuyo eje es el de rotación del instrumento, y en este cilindro se introduce otro que acompaña al platillo al cual va á fijarse la esfera de un modo invariable. Para detener el movimiento de rotación, actúa el tornillo sobre una mordaza compuesta de dos piezas que comprenden el espesor del platillo, y que se halla unido á la columna superior por semejante mecanismo. Al apretar el tornillo, sujeta la mordaza al disco, y queda unido á éste el tablero de la plancheta.

El pie que sostiene el instrumento es un trípode que consta de un prisma triangular terminado por una espiga que penetra en el interior del mango hueco. De cada cara del prisma, y en dirección perpendicular sale un perno con rosca que atraviesa por un taladro la parte superior de uno de los pies, el cual se adapta á la cara referida por medio de una tuerca movible. Para colocar el trípode se hacen girar los pies alrededor de los pernos con objeto de darles la abertura conveniente, y cuando se ha conseguido que el trípode presente bastante solidez, y que la espiga sea próximamente vertical, se aprietan las tuercas con el fin de que no haya movimiento alguno.

Existen varias planchetas que llevan denominaciones, sea de su autor, sea otra particular. La experiencia las hará conocer, pero todas llevan los principios generales indicados.

Operando, pues, en la forma enunciada, se acabará de colocar la plancheta con mucha exactitud en una posición determinada, en la que se fijará por completo, apretando los tornillos.

Alidada. — El complemento de la plancheta es la alidada, que sirve para determinar las direcciones que siguen los lados de los ángulos que se desean obtener. Las alidadas que se usan son : la de *pínulas*, la *prismática de madera* ó *metal*, y la de *anteojo*.

La alidada de pínulas está formada por una regla, en cuyos extremos se elevan perpendicularmente á su plano dos placas P (fig. 14), que reciben el nombre de pínulas, y que en algunas alidadas pueden girar alrededor de charnelas con objeto de abatirse sobre la regla. Ambas pínulas tienen

Fig. 14.

una hendedura longitudinal muy estrecha que hace las veces de ocular, sirviendo de objetivo unas aberturas rectangulares provistas en su medio de cerdas que se hallan en la prolongación de las hendeduras. Las visuales se dirigen por el taladro longitudinal de una de las pínulas y la cerda de la otra, tomando siempre como ocular la hendedura situada hacia el observador. La regla lleva un rebajo que determina en su borde una línea, comprendida en el plano que contiene las hendeduras y las cerdas de las pínulas, y este plano, llamado de *colimación*, debe ser, además, perpendicular al de la regla. La recta *c d*, que limita otro borde, se designa con el nombre de *línea de fe* ó de *colimación*, y representa las proyecciones de las diferentes visuales cuando se coloca horizontal el plano de la regla. Aun cuando suele darse á las pínulas bastante longitud, no podemos utilizar la alidada que acabamos de describir, si hay que dirigir visuales á puntos muy altos ó muy bajos con

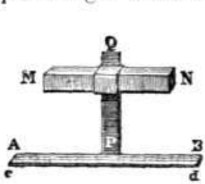

Fig. 15.

respecto al horizonte. En tal caso, es ventajosa la alidada prismática, que consiste en un tubo en forma de paralelipípedo rectangular M N, el cual gira alrededor de un eje perpendicular á la dirección de la regla A B, á la que se une por medio del montante PQ. Con objeto de que sea posible dirigir visuales, las bases menores del paralelipípedo tienen una abertura rectangular atravesada en el medio por una cerda que hace las funciones del objetivo, y en cuya prolongación existe un taladro cónico que sirve de ocular.

Esta segunda alidada presenta muchos inconvenientes como la primera, de manera que se prefiere usar la alidada de anteojo. Esta última difiere en que el tubo destinado á dirigir visuales se halla sustituído por un anteojo astronómico. En las dos últimas alidadas, la línea de mira, al girar alrededor del eje, describe un plano de colimación, que contiene la línea de fe $c\,d$, ó es paralela á ella.

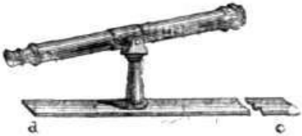

Fig. 16.

Uso de la plancheta y alidada. — Supongamos ahora que se trata de hallar la proyección de un ángulo

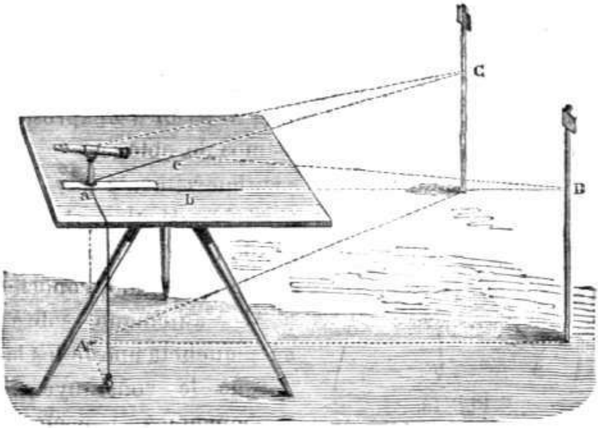

Fig. 17.

B A C del terreno. Colocaremos la plancheta horizontalmente encima del vértice A, y en seguida determinaremos sobre el tablero el punto *a*, que corresponde á la vertical. Se emplea para este fin una plomada.

Para juzgar si los dos puntos se corresponden, se aplica esta plomada contra la superficie inferior de la plancheta, debajo del punto que se encuentra marcado en ella (lo que se juzga fácilmente), y se deja resbalar la plomada hasta el piquete que indica la posición del punto del terreno. Determinado el punto en la plancheta, procederemos por analogía variando la posición de la alidada, hasta que la imagen de B, que debe servir de base para la operación en dirección á la línea del terreno, es decir, hacia el primer punto que uno quiere observar, venga á formarse en el cruce de los hilos de la retícula; se corre el lápiz á lo largo de la línea de fe, y tendremos así la proyección *a b* de A B del terreno.

Apoyando siempre la regla de la alidada en el mismo punto *a*, se le imprime nuevo movimiento hasta que la visual vaya dirigida al punto C; el borde de la regla marcará la proyección *a c*, que con la anterior *a b* expresa gráficamente el ángulo que tratábamos de obtener.

Plancheta declinada. — Ordinariamente hay que resolver el mismo problema de la construcción gráfica de un ángulo, conociendo de antemano sobre la plancheta uno de los lados que le constituyen. Supongamos, por ejemplo,

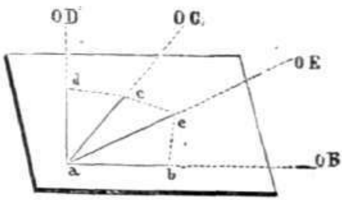

Fig. 18.

que se trata de encontrar la proyección A C, estando asignado sobre el tablero en *a b* la de la línea A B del terreno: Se empieza por colocar el instrumento en estación, de modo que *a* corresponda á la vertical de A; pero según la hipótesis hecha, es necesario completar esta operación, situando la recta *a b* dentro del plano vertical de A B, ó en dirección paralela al mismo; se apoya con tal objeto la línea de fe de la alidada en *a b*, y se mueve después la plancheta hasta que el plano de mira pase por el punto B. Deteniendo el tablero en esta posición, se dice que la plancheta está declinada ú orientada. Si hacemos girar la línea de fe alrededor del punto *a* hasta dirigir la visual en C, y se traza la dirección *a c*, el ángulo *b a c* representará evidentemente la proyección de B A C.

Por lo dicho vemos que, haciendo estancia en A, la plancheta se halla declinada respecto de un punto B cuando la línea *a b* se coloca en dirección del plano vertical de A B. Claro está, que si en la plancheta se encuentran determinadas las proyecciones *d*, *e*,... las líneas D *e*, *c e*, *e b* serán entonces paralelas respectivamente á sus homólogas del terreno.

Verificación de la alidada. — Se comprenderá que la verificación se practicará únicamente sobre la alidada del anteojo. Este punto admitido, es necesario asegurarse que la regla está colocada bien firme sobre la plancheta, y que el plano de la línea de mira, ó mejor dicho, que el plano descrito por la visual es vertical; para eso se suspende á alguna distancia de la alidada y en su frente, la plomada, y sobre ésta se dirige la visual; después, manteniendo la regla de la alidada en la misma posición, se hace girar el tubo del anteojo, y se ve si la visual continúa siguiendo la plomada en este movimiento. Si así no sucediese, es que el anteojo está defectuoso, y se tendrá que arreglar los hilos de la retícula. El borde de la regla debe igualmente encontrarse comprendido en el plano vertical descrito por la visual. Se reconoce que así sucede teniendo el instrumento con la mano izquierda, la regla volteada hacia un lado bien claro del espacio, y haciendo girar el anteojo con la mano derecha, de manera que se vea el borde de la regla; la visual debe entonces seguir el borde de un extremo á otro.

Precauciones que hay que tomar trabajando con la plancheta. — Hay algunas precauciones que tomar para trabajar con la plancheta. Primera: mientras se dirige la visual por el anteojo, para que la regla (ó línea de fe) siga pasando por el punto que represente la estación, es bueno el tenerla apoyada contra una aguja picada en aquel primer punto. Segunda: al trazar la línea sobre el borde de la regla, para mejor apreciar si pasa por el punto, se prolonga más allá de la aguja, en el sentido opuesto á el de la dirección por donde se ha dirigido la visual. Tercera: para pasar de una dirección á otra con la alidada, en lugar de hacerla girar alrededor de un punto, se la quita y se la vuelve á colocar sobre la plancheta, llevándola insensiblemente hacia la nueva dirección que hay que observar. En fin, cuarta: antes de dejar una estación, siempre debe uno volver á colocar la alidada sobre la línea que ha servido para la orientación de la plancheta, y verificar si la visual pasa todavía exactamente por el punto correspondiente del terreno.

La plancheta se emplea especialmente para levantar planos por el método de las intersecciones. De este método nos vamos á ocupar.

Intersecciones. —Para levantar el polígono ABCDEF, por el método de las intersecciones, como se dijo anteriormente, después de medida la longitud AB, y referida en *a b*, se pone en estación en el punto A, y se dirige la alidada sucesivamente hacia los vértices C, E, D, F, etc., supuestos visibles y señalados por jalones; trazando en cada observación la línea del borde de la regla, se tiene sobre el papel *ac*, *ae*, *ad* y *af*. Se pone luego en estación en el punto B, de donde se dirige la visual hacia los vértices del polígono con la alidada, y las intersecciones de las nuevas direcciones *bc*, *bd*, *be* y *bf*, con las que han sido trazadas, determinan la posición de cada uno de los vértices sobre el plano. Para distinguir unas direcciones de otras en las diferentes estaciones, y para volver á encontrar los puntos

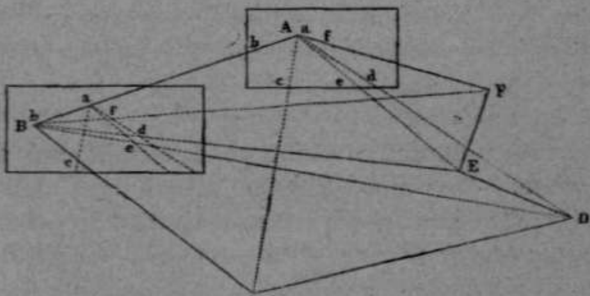

Fig. 19.

de intersecciones, se inscribe en la extremidad de cada una de ellas la letra ó cifra adoptada para designar el punto correspondiente del terreno. Además, se toma en estas circunstancias las otras precauciones indicadas en el levantamiento por caminata; y para verificar la exactitud de los resultados, se pone en estación uno cualquiera de los puntos determinados, por donde se ve si las direcciones de los demás vértices pasan los puntos homólogos del plano.

Ventajas y especialidades de este método. — El método de las intersecciones, practicado por medio de la plancheta, permite levantar con rapidez, de tres ó cuatro estaciones, un gran número de puntos que pueden encontrarse bastante lejanos de dichas estaciones. Estos puntos, encontrándose obtenidos aisladamente, los errores no pueden acumularse como por el método de las caminatas. En fin : la visual, determinada por dos puntos cuya separación es igual á la longitud del tubo de la alidada, es generalmente de una exactitud suficiente ; y como las líneas trazadas sobre toda la longitud de la regla de esta alidada representan siempre distancias bastante grandes sobre el terreno, las operaciones hechas cuidadosamente con la plancheta y por el método de las intersecciones, pueden ser consideradas como teniendo toda la precisión que necesitan construcciones gráficas.

Levantamiento del plano de un terreno bastante extenso. — Las propiedades del método de las intersecciones son de grande recurso cuando se tiene que levantar un plano bastante extenso. En este caso, es importante poder determinar con exactitud un número más ó menos extenso de puntos repartidos en todas las direcciones del terreno, y destinados á desempeñar el mismo papel en el canevás poligonal que los vértices de este mismo canevás en el levantamiento de los detalles. Por este motivo, se toman como punto de partida dos estaciones situadas en las extremidades de una línea de bastante extensión que debe haber sido mensurada con particular cuidado y que se llama base; después en la superficie de un polígono más ó menos grande se determina inmediatamente la extensión entera del terreno, que cubre una red de triángulos cuyos vértices son los puntos que se han debido escoger y señalar, y por lado común la base.

La planimetría se encuentra así subdividida en cuatro operaciones distintas: primera, medición de la base; segunda, triangulación; tercera, levantamiento del canevás poligonal; cuarta, en fin, levantamiento de detalles.

En los terrenos descubiertos, el empleo de la plancheta es cómodo y rápido. Entonces el canevás del detall se deduce simplemente del canevás general por una triangulación secundaria cuyos lados van disminuyendo sucesivamente de longitud.

Sin embargo, cuando en el levantamiento hay casas, bosques, ó que el terreno se encuentra cortado por caminos hondos, etc., etc., el método del levantamiento por caminata, y con la *brújula* para otro levantamiento de detalles, llega á ser el más preferible. En una de las próximas lecciones trataremos de este instrumento.

Orientación del plano. — Cuando el plano se encuentra terminado y puesto en limpio, es necesario siempre indicar la dirección de la línea *Norte-Sur*, que se llama la meridiana; y aun cuando se quiera levantar el plano de una extensión bastante grande de terreno, se debe llevar esta dirección del terreno sobre el plano, de manera que el Norte se quede arriba, en el cuadro del dibujo.

Trazado de la meridiana por el método de las sombras iguales. — Existen varios medios para trazar una meridiana. El más simple consiste en ponerse en estación con la plancheta, cubierta con una hoja de papel blanco, en un lugar descubierto. Después de haber tendido la plancha en posición horizontal, y haberla orientado aproximativamente sobre los puntos cardinales, se fija en medio de sus lados (el que se encuentre volteado hacia el sur) un alambre *a b* de 20 ó 25 centímetros de altura (fig. 29), 30
llevando en su parte superior un disco de cartón, horizontal, con un agujero en el centro C, de 3 ó 4 milímetros. Después de haber proyectado este agujero sobre la plancheta por

medio de la plomada en p, se describe desde este último punto, como centro, una serie de cinco ó seis arcos de círculos bastante cercanos unos á otros en el radio de la plancheta, y por donde se pueda sospechar que el disco deba llevar su sombra algunas horas antes y después de las doce del día. Esto hecho, hacia las nueve de la mañana se pone uno en observación teniendo el lápiz en la mano, y cada vez que el rayo luminoso que pasa por el agujero del disco corte uno de los arcos de círculo, se marca el punto de intersección d, e, f con el lápiz. Acabadas estas observaciones, de una hora poco más ó menos, se espera la tarde, entre dos y tres, y se reconoce que el centro alumbrado por la sombra del disco, viene á encontrarse segunda vez en los arcos de círculo, sobre los cuales se marcan los nuevos puntos de paso. En fin: se toman los puntos intermedios m, m', m''.... de todas las partes interceptadas de los arcos de círculo, y si se ha trabajado bien, se verá que se encuentran en línea recta con la proyección p del agujero del disco sobre la plancheta. Se trazará entonces esta línea, la cual no es otra que la meridiana buscada. Para referirla sobre el terreno, se llevará la regla de la alidada en contacto con ella, y se colocan dos jalones en la dirección de la línea visual ó de mira, el uno al Norte y el otro al Sur, á 50 ó 60 metros de la plancheta.

Cuando se construye el plano, se toma esta dirección, y se trata de hacer que dos de los lados del cuadro del dibujo le sean exactamente paralelos. En este caso, basta escribir la palabra *Norte* en el de los dos costados que indican su dirección. En el caso contrario, en el cual los lados del cuadro no fuesen orientados, se representa la dirección de la meridiana por una flecha de grande dimensión, cuya punta indica el Norte.

Si no se pudiesen hacer semejantes observaciones, las cuales son largas, se puede trazar la meridiana y orientar el plano por medio de la brújula, cuyo empleo, como hemos dicho, haremos conocer en una próxima lección.

Pero antes de hablar de los goniómetros, entre los cuales se encuentra la brújula, creemos necesario recordar las teorías del *Nonius* ó *Vernier*:

Sea AB (fig. 21) un arco de círculo graduado correspondiente á un limbo, y supongamos que comprende $m-1$ divisiones; otro arco ab concéntrico con el primero, del mismo radio y amplitud, y que se halla dividido en m partes iguales, se adapta al extremo de la regla K de la alidada que gira alrededor del centro

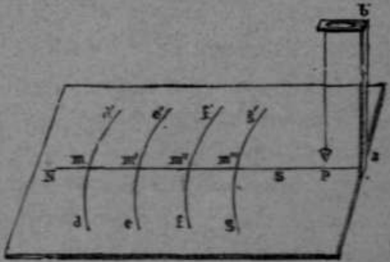

Fig. 20.

del limbo; este arco móvil ab recibe el nombre de *Nonius* ó *Vernier*. Representando por L la longitud de una de las divisiones del limbo, y por l la de una del nonius, tendremos la igualdad

$$ml = (m-1)\,L;$$

de la cual se deduce:

$$L - l = \frac{L}{m} \qquad l = L - \frac{L}{m}.$$

Dicho esto, imaginemos que el nonius se halle graduado desde cero á m en el mismo sentido que el limbo, y que después de una observación determinada, se encuentre el cero de aquél en x, entre dos divisiones consecutivas del limbo. La magnitud angular que sobre éste señala la graduación cero del nonius se hallará expresada por $11\,\mathrm{L} + cx$. Para determinar cx, examinaremos cuál es la división del

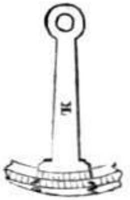

Fig. 21.

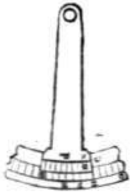

Fig. 22.

nonius que coincide con una del limbo, y suponiendo que sea la d, tendremos :

$$cd = \mathrm{L} \times d,\; xd = l \times d = \left(\mathrm{L} - \frac{\mathrm{L}}{m}\right) d = \mathrm{L}d - \frac{\mathrm{L}}{m}\, d\,;$$

y restando miembro á miembro .

$$cd - xd = cx = \frac{\mathrm{L}}{m}\, d.$$

El valor del ángulo que se busca será por lo tanto

$$11\,\mathrm{L} + \frac{\mathrm{L}}{m}\, d,$$

en donde son conocidas todas las cantidades que entran. Así, por ejemplo, si suponemos que el limbo esté dividido en grados, y que 30 divisiones del nonius correspondan á 29 del limbo, será :

$$\mathrm{L} = 60' \quad m = 30,$$

y por consiguiente

$$\frac{\mathrm{L}}{m} = 2'.$$

De modo, que en el supuesto de que la 14.ª división del nonius sea la que coincida con una del limbo, el arco pedido tendrá por expresión : $11° + 2' \times 14 = 11°, 28'$. La fracción angular más pequeña que se puede estimar con auxilio del nonius es igual á $\frac{L}{m}$, ó sea la diferencia que existe entre una división del limbo y otra del nonius. *Dividiendo por lo tanto el valor de una división del primero por el número de divisiones del segundo, encontraremos la apreciación del instrumento.*

Si ahora establecemos la hipótesis de que las divisiones del nonius, en vez de aumentar en el sentido del limbo se dirigen en sentido contrario, procederemos en la forma que sigue : Supongamos que el cero del nonius viene á situarse en x, entre dos divisiones del limbo ; será entonces preciso hallar el valor del arco suplementario $c\,x$ para agregarle después á la graduación del cero del limbo que precede al cero del nonius, y obtener así el valor del ángulo que tratamos de medir. Para esto observaremos que si d es la división del nonius que coincide con una división del limbo, según lo que hemos demostrado en el primer caso, será :

$$ex = \frac{L}{m}\,d.$$

de donde se deduce

$$cx = L - \frac{L}{m}\,d;$$

expresión que por otra parte podíamos también obtener con facilidad por medio de razonamientos análogos á los anteriores.

Vemos pues, en resumen, que cuando las divisiones del nonius crecen en idéntico sentido que las del limbo, el valor del arco suplementario se determina por la igualdad $cx = \frac{L}{m} d$; y si el nonius se dirige en sentido opuesto al limbo, el arco en cuestión estará dado por la fórmula $cx = L - \frac{L}{m} d$; es decir, que después de examinar cuál es la división del nonius que coincide con otra del limbo, multiplicando este número por la apreciación del nonius en el primer caso, y estando en el segundo este producto del valor de una división del limbo, tendremos el arco suplementario que se pide.

En virtud de lo expuesto, si como sucede en muchas ocasiones, especialmente en los eclímetros, el limbo lleva á partir de cero graduaciones en ambos sentidos, el nonius puede ir también provisto de una doble graduación, y entonces se hará uso de la fórmula $cx = \frac{L}{m} d$, empleando siempre aquella graduación que aumenta en el mismo sentido que la del limbo, sobre la que se hace la lectura. Es sin embargo posible reducir á la mitad las divisiones del nonius, toda vez que una sola graduación nos basta para todos los casos, con sólo hacer uso, según convenga, de las fórmulas dadas. Haremos notar asimismo, que aun reducida á su mitad la amplitud del nonius, se pueden facilitar las operaciones, evitando el empleo de la fórmula $ex = L - \frac{L}{m} d$. Por este motivo, si hay en el nonius divisiones inversas, es decir, cuyas divisiones *cero* y m coinciden respectivamente con las m y *cero* de la exterior, sucede que se hallará siempre el arco suplementario multiplicando por la apreciación del instrumento el número que expresa la división del nonius que coincida con una del limbo, sólo con que tengamos cuidado de emplear la graduación exterior cuando se haga la lectura sobre la del limbo, que aumentó de *cero* á L, y de la interior en caso contrario.

Cuanto acabamos de exponer respecto del nonius circular se aplica de igual manera al que se destine á apreciar fracciones de las divisiones menores que contenga una regla. Entonces el nonius consiste en una placa rectilínea que puede resbalar á lo largo del instrumento empleado para la medición de longitudes. En resumen : D graduaciones del limbo, y d del vernier, y graduaciones del último por n. Es cierto que tendremos

$$n\,d = (n-1)\ D;$$

de donde

$$d = \frac{n-1}{n}\ D = D - \frac{D}{n},$$

y

$$D - d = \frac{D}{n}.$$

(Última fórmula que siempre se debe aplicar para conocer las divisiones del nonius con respecto al limbo.)

Grafómetro. — Se llama así (fig. 23), un goniómetro de un semicírculo, graduado ordinariamente en grados y medios grados, desde 0° hasta 180°. En las extremidades del diámetro se hallan dos pínulas, que con una regla forman una alidada fija, la cual determina un plano perpendicular a del limbo, y que pasa por otro diámetro. Otra segunda regla móvil, que gira alrededor del centro, lleva otras dos pínulas, constituyendo así una alidada que puede recorrer todas las graduaciones del limbo. El plano de mira de esta alidada tiene su traza sobre la regla móvil C D, en un diá metro que determinan los ceros de dos nonius N N' colocados en las extremidades de aquélla. El grafómetro se apoya sobre un trípode, al cual se fija generalmente por medio de una rodilla de nuez. Para medir un ángulo con este instrumento, se le sitúa en estación, de manera que el centro del limbo se halle sobre la vertical del vértice.

El grafómetro dará con bastante precisión los ángulos medidos en los planos de los objetos, puesto que el limbo se podrá colocar próximamente en posición paralela al plano de las visuales. Sin embargo, como la planimetría necesita los ángulos reducidos al horizonte, siempre que los objetos á que se mira no se encuentren muy altos ó muy bajos, se colocará horizontalmente el plano del grafómetro. Mas si los puntos que se miran se hallan muy separados del plano horizontal del limbo, no alcanzarán á distinguirlos las visuales que se dirigen con auxilio de las pínulas. Para hacerle aplicable á estos casos, se ha modificado el grafómetro, reemplazando las alidadas ya descritas, por anteojos que tienen movimiento en sentido perpendicular al plano del limbo; uno de los anteojos hace veces de alidada móvil (el anteojo es superior al plano del limbo), y gira alrededor de un eje, fijo á un soporte perpendicular en su centro al limbo del grafómetro; el anteojo inferior sustituye á la alidada fija, y tiene también movimiento de rotación alrededor de un eje situado en otro soporte que está unido al limbo y á la parte superior de la rodilla.

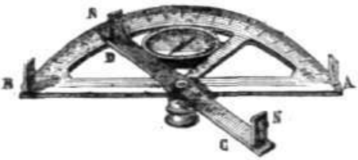

Fig. 23.

En la verificación del grafómetro hay que tener en cuenta, en la medida de los ángulos, el error de colimación. Se llama así el error que se hace cuando los diámetros que pasan por los ceros del limbo y del nonius forman un pequeño ángulo, que está señalado por el cero del nonius. Como su valor es constante, basta añadir ó restar este error de colimación al encontrar el valor del ángulo.

En los grafómetros provistos de anteojos, puede prescindirse de este error empleando sólo la alidada móvil para la medición de los ángulos. Es decir, la que tiene el anteojo. La experiencia hará conocer el límite de longitud de los lados que se puede tomar con el grafómetro, tomando de nuevo en cuenta para eso las divisiones del nonius y del limbo.

Pantometro. — Este instrumento tiene la ventaja de medir toda clase de ángulos. Además, los ángulos están reducidos al horizonte. Teniendo este instrumento mucha analogía con la escuadra de agrimensor que ya hemos mencionado, nos parece inútil describirlo, tanto más cuanto que se empleará en la práctica. Là luneta que tiene arriba de la brújula sirve para medir los ángulos, los cuales, como hemos dicho en el grafómetro, se encuentran muy separados del plano horizontal del limbo.

Brújula. — La brújula es un goniómetro, fundado en la propiedad que tiene la aguja magnética de tomar una dirección determinada en cada lugar del globo.

Se llaman imanes las substancias que tienen la propiedad de atraer el hierro y otros metales.

La aguja imantada es una lámina de acero templado en forma de rombo. Suspendida la aguja de un hilo, ó colocada sobre un eje, alrededor del cual pueda girar fácilmente, se observa que en lugar de detenerse en una posición cualquiera, termina siempre por fijarse en una dirección aproximada á la Norte-Sur. Por consiguiente, la acción que obra sobre los imanes es solamente directriz.

Se llama meridiano magnético de un lugar, el plano vertical que pasa por la línea de los polos de la aguja imantatada; y la traza de ese plano con el horizonte recibe el nombre de meridiano magnético.

La meridiana magnética forma con la astronómica un cierto ángulo que se llama declinación de la aguja imantada. La declinación es oriental ú occidental, según que la punta Norte ó polo austral de la aguja, se encuentre al Este ó al Oeste de la meridiana astronómica.

Se llama inclinación de la aguja, el ángulo que ésta forma con el horizonte cuando se mueve en el plano vertical del meridiano magnético. La inclinación varía con la latitud del lugar: hacia el polo boreal del globo es próximamente de 90°; desde allí decrece con la latitud hasta el ecuador, donde es casi igual á cero. Cosa análoga se verifica en el otro hemisferio, el nuestro, por ejemplo, con la diferencia de que el extremo Sur de la aguja se halla por debajo de la horizontal.

Descripción de la brújula. — La brújula (fig. 24), se compone de una caja cuadrada A B de 20 á 30 centímetros de lado, y de 3 á 4 centímetros de espesor, en la cual existe una cavidad cilíndrica cuyo eje corresponde al centro de la caja, y que va provisto de un limbo graduado de 0 á 360°. En el centro de éste se eleva un estilete de acero *e*, sobre el que se halla suspendida una aguja imantada, de modo que se tome la posición horizontal; y con el fin de que exista poco rozamiento, y de que no se desgasten la aguja y el estilete, se establece la suspensión por medio de la armadura C, formada por una chapa de piedra muy dura, ordinariamente de ágata, que presenta en su interior un cono hueco, cuyo vértice se apoya sobre la punta del estilete. La corona del limbo está un poco elevada respecto del fondo de la caja, á fin de que se coloque á la altura de la aguja para facilitar la lectura de las divisiones. La longitud de aquélla debe graduarse de manera que resulte un vacío de medio milímetro entre sus extremos y la circunferencia interior del limbo.

Sobre uno de los lados del instrumento se adapta el anteojo O V, que puede moverse alrededor de un eje perpendicular de otro lado, describiendo un plano que es también perpendicular al limbo Muchas veces sustituye al

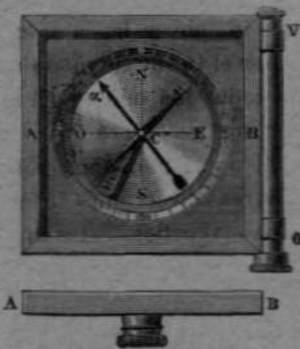

Fig. 24.

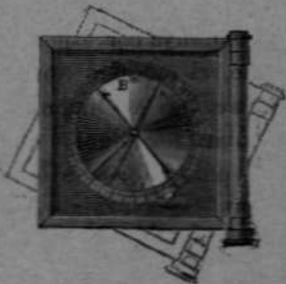

Fig. 25.

anteojo una alidada prismática de madera. La brújula se apoya sobre un trípode por medio de una rodilla de nuez, mecanismo conocido por lo dicho en la plancheta. Expuesto esto, suponiendo que el diámetro (0—180°) se halle colocado perfectamente paralelo á la dirección O V, si hacemos que la extremidad norte de la aguja, ó sea la punta azul, marque la cifra 0°, la visual tomará la dirección de la meridiana magnética. Si á partir de esta posición se hace girar el instrumento de derecha á izquierda, y se le detiene en un instante cualquiera para dirigir la línea de mira á un punto del terreno, el diámetro ($0 - 180°$) se habrá apartado al Oeste de su posición anterior, que era la de la aguja imantada, una magnitud angular que expresará el ángulo formado por la nueva dirección de la visual con la dirección anterior, ó sea con la meridiana magnética. Este ángulo, en consecuencia, tendrá por medida el arco $\alpha = bn$ indicado por la graduación que corresponde á la punta azul de la aguja, suponiendo, como ordinariamente sucede, que las graduaciones del limbo aumentan de 0° á 360° pasando por el Este.

De aquí deducimos, que haciendo mover la caja de la brújula de Norte á Sur, pasando por el Oeste, de modo que la visual vaya correspondiendo á todos los puntos del horizonte, el extremo Norte de la aguja recorrerá todas las graduaciones del limbo de 0° á 360°, pasando por el Este, y señalará los ángulos que las diversas direcciones forman con la punta Norte de la meridiana magnética. Estos ángulos que da la brújula reciben el nombre de azimutes ó rumbos.

Es de advertir, que leyendo los ángulos marcados por la punta azul de la aguja, si por descuido empleáramos alguna vez el extremo Sur, resultaría un rumbo que diferiría 180° del que debiéramos obtener. Además, según lo que dejamos dicho, el radio que va al punto cero de las graduaciones deberá hallarse hacia la parte que mira al objeto: el anteojo, en tal supuesto, se encuentra á la derecha del observador, y si por inadvertencia le colocáramos á la izquierda, en alguna observación, resultaría un error de 180° en el valor del ángulo, á menos que hiciéramos uso de la punta blanca de la aguja.

Medición de los ángulos con la brújula. — Se hace uso de este instrumento para determinar los azimutes de las líneas del terreno. Suponiendo que se trata de hallar el rumbo que corresponde á una dirección cualquiera, se estaciona la brújula en uno de sus extremos, de modo que el centro del limbo quede situado sobre la vertical del punto; esta operación se hace casi siempre á ojo, porque el error así cometido, no influirá á penas en la precisión de los resultados; si se deseara mayor exactitud, nos serviríamos de una plomada. En seguida es necesario colocar horizontal el plano del limbo. Con este objeto observaremos que, debiendo serlo la aguja cuando se encuentra en equilibrio, bastará mover con lentitud la caja y asegurarnos de que aquélla enrasa perfectamente con el limbo en todas las posiciones del instrumento; si esto no se verifica, se corrige el defecto de horizontalidad por medio de la rodilla.

Terminadas estas operaciones, se hace girar la brújula alrededor de su eje (que será entonces vertical, puesto que por construcción es perpendicular al plano del limbo), hasta que la visual se halle dirigida al otro extremo de la línea; la punta azul de la aguja señalará entonces el azimut que buscamos.

Con la brújula podemos obtener directamente el ángulo que forman dos visuales cualesquiera. Haciendo estación en A, se mira entonces sucesivamente al punto de la izquierda I y al de la derecha D; la diferiencia $\alpha - \beta$ de los azimutes nos dará el valor del ángulo I A D (fig. 26). Si los puntos mirados se encuentran en la disposición que indica la figura 27, en la cual la diferencia de los rumbos de ambas visuales es mayor que 180°, la expresión $\beta + (360° - \alpha)$ será la medida del ángulo que se pide.

Es sin embargo más ventajoso trazar desde luego sobre el papel los dos lados del ángulo por el conocimiento de sus azimutes; de esta manera el ángulo I A D se hallará determinado en la hoja del dibujo sin necesidad de calcular su valor.

Para referir al papel los azimutes obtenidos con la brújula, recordaremos que este instrumento expresa los ángulos formados por las visuales con una dirección constante, que según las hipótesis hechas, es la de la meridiana magnética, y que estos ángulos se cuentan desde la punta Norte hacia el Oeste, de 0° á 360°. Por lo tanto, suponiendo que no exista en el dibujo trabajo alguno á que nos sea preciso relacionar los resultados de la brújula, bastará trazar paralelas á una dirección cualquiera que represente la

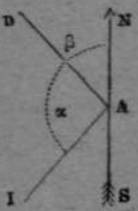

Fig. 26.

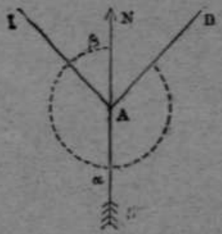

Fig. 27.

Fig. 28.

meridiana magnética, y formar con ellas ángulos iguales á los que señala la punta azul de la aguja. Así, representando por N S (fig. 28) una de estas directrices, para trazar por *a* la proyección de una línea AB del terreno cuyo azimut es α, formaremos con el extremo Norte y con dirección al Oeste, un ángulo igual á dicho azimut.

Arreglo ú orientación de la brújula. — Si con anterioridad se ha construído un canevás en el papel del dibujo, es necesario que las líneas que se trasladan á él no se refieran á directrices cualesquiera, puesto que deben relacionarse con las determinadas anteriormente. Para este fin, habrá que colocar las directrices en la forma que convenga sobre el papel, ó si estas directrices nos son dadas, modificar las lecturas obtenidas de la brújula de tal manera, que al mirar en dirección de las líneas del canevás se obtengan los mismos ángulos que los formados por sus proyecciones con las directrices del papel.

Suponiendo que estas directrices representan la dirección de la meridiana magnética, el limbo de la brújula, conforme dejamos dicho, deberá estar dispuesto de modo que la cifra cero se halle situada sobre el diámetro paralelo á la visual. Pero sucede muchas veces que el canevás se encuentra orientado con relación á la meridiana verdadera, que representa las directrices del papel. En este supuesto, claro está, que conociendo el valor de la declinación, podríamos trazar la meridiana magnética, y referirnos en consecuencia al caso anterior. Mas á fin de evitar el volver á trazar líneas nuevas sobre el papel, observaremos que si se trae la cifra de la declinación al diámetro paralelo al eje óptico del anteojo, el cero del limbo se hallará apartado al Oeste de la posición, que hasta ahora le habíamos asignado un ángulo igual al de declinación, y en su virtud, los rumbos que precedentemente hubiéramos leído, aparecerán ahora aumentados en el referido valor, y representarán por lo tanto los ángulos que forman las visuales con una dirección inclinada al Este de la meridiana magnética, una amplitud igual á la declinación de la aguja imantada. La brújula nos dará entonces los azimutes referidos á la meridiana astronómica, y el instrumento quedará arreglado ú orientado sobre esta dirección.

Sin embargo, este método de orientación no es siempre posible, por lo que es preferible el siguiente : Trazadas sobre el papel las proyecciones de los lados del canevás y las directrices paralelas á la meridiana, ó á otra dirección cualquiera, se mide en la hoja del levantamiento el azimut α de un lado *ab* (figura anterior), y colocándonos en estación en el punto A del terreno, que corresponde á *a* del dibujo, se mira á B; si el rumbo que obtenemos no es igual á α, se hace girar el limbo hasta que esta graduación se encuentre debajo de la punta a ul de la aguja, y cuando tal circunstancia tenga efecto, quedará la brújula declinada.

Vemos, pues, que para arreglar ó declinar el instrumento, es necesario hacer móvil el limbo, de manera que pueda girar en su plano alrededor del centro. Con este objeto, la caja lleva algunas veces un piñón, que se puede mover con una llave ó por medio de la cabeza del tornillo de que forma parte; este piñón engrana con una rueda dentada situada por debajo del limbo, y concéntrica con él.

Podría también declinarse la brújula, observando que como lo que se quiere es establecer identidad perfecta entre el azimut de un lado del canevás sobre el papel, y el rumbo de esta misma dirección que indica el instrumento, en vez de variar el segundo ángulo, se le puede dejar constante y modificar el primero cambiando las directrices del dibujo. Este procedimiento se emplea en muy raras ocasiones, porque las directrices de la hoja representan generalmente la meridiana astronómica ó magnética, y no es posible alterar su dirección.

Variaciones de la declinación magnética. — La dirección magnética no es constante; varía cada día según la hora. Estas variaciones son muy pequeñas, y cuando varían mucho de 15′, se llaman variaciones diurnas, y marchan poco más ó menos con el sol. La variación existe también según las estaciones del año, y se llaman variaciones anuales; su máximum es de 20′. En fin, hay la variación secular que puede alcanzar á 45°, cambiando la declinación de positiva en negativa, entre 22° 30′ Este, y 22° 30′ Oeste. Se necesitan poco más ó menos 300 años para una oscilación, la cual es periódica como las otras dos. Después hay la variación geográfica. De estas dos últimas variaciones hablaremos en Geodesia, en donde tendremos los elementos necesarios para hablar de ellas.

Regla para tomar el azimut de una línea. — Para tomar este azimut con la brújula, con tal que tenga un anteojo excéntrico, se observa con el anteojo á la derecha y á la izquierda, y se toma la semi-suma de las lecturas después de disminuir de la suma 180°.

Sin embargo, debemos notar que la segunda lectura (prescindiendo del error) es 180° mayor que la primera; puede suceder que pase por 360°, y aparezca esta lectura en el instrumento menor. Conviene entonces tener en cuenta la regla anterior, y contar el cero ú origen de la graduación, como 360°, el 10° como 370, y así sucesivamente.

Por ejemplo:

Primera lectura derecha...	55° 30′.	
» izquierda.	233° 30′.	
Suma..	289° »	
Menos.	180	
	109	mitad 54° 30

lectura verdadera.

Segundo ejemplo:

Derecha....	210° 15′.	
Izquierda...	28° »	habiendo pasado por

cero es 388°.

	210° 15.
	388° »
Suma.....	598 15
Menos....	180
	418 15
Mitad.....	209 7 1/2′

Las verificaciones de la brújula son en número de tres. Primera: la aguja con que va provista la brújula debe ser muy sensible. Segunda: siendo horizontal el plano del limbo, el que describa el eje óptico del anteojo alrededor de su eje de giro deberá ser vertical. Tercera: el centro del limbo debe ser la proyección octagonal del punto de sespensión de la aguja.

De estas tres variaciones, la última únicamente merece una explicación algo detenida:

Sea en efecto C el centro del limbo (fig. 29), y ω la proyección del punto de suspensión; la aguja en vez de estar situada en $C\alpha$, señalando la lectura verdadera α, ocupará la posición $\omega\beta$, marcando otra lectura β; existirá pues un error $\beta\alpha = \alpha - \beta$, que será cero cuando ω se halle en ω'' ó en ω''' sobre la línea $C\alpha$, y que tiene por límite superior el arco cuyo seno es gual á $C\omega$ en el círculo del radio idéntico al del limbo. Es preciso, por lo tanto, asegurarse de que C y ω coinciden.

Si hemos podido cercionarnos de que los dos extremos de la aguja y su punto de suspensión se encuentran en línea recta, haremos las lecturas que señalen las dos extremidades de aquélla. Cuando el eje siga la dirección $C\alpha$, la diferencia entre ambas lecturas será de 180°, cualquiera que sea la posición que ocupe la caja de la brújula, y esta circunstancia no tendrá lugar, siempre que la expresada diferencia no sea exactamente igual á dos rectos. En esta segunda hipótesis serán por lo tanto erróneos los azimutes que dé el instrumento; pero aun será posible combinar las lecturas de modo que se obtenga el verdadero valor del rumbo que buscamos.

Designemos por β y β'' las lecturas correspondientes á los extremos Norte y Sur de la aguja, por ε el error, y por α la lectura exacta, se tendrá evidentemente :

$$\beta = \alpha - \varepsilon \,;\; \beta' = 180^\circ + \alpha + \varepsilon \,,$$

y sumando miembro á miembro :

$$\beta + \beta' = 180^\circ + 2\,\alpha \,;$$

de donde

$$\alpha = \frac{\beta + \beta'}{2} - 90^\circ. \qquad (1)$$

es decir, que si el azimut α es menor que 180°, hallaremos su valor restando 90° de la semi-suma de ambas lecturas.

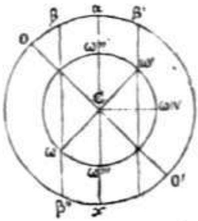

Fig. 29.

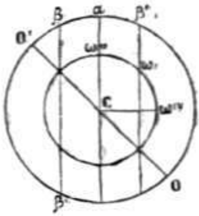

Fig. 30.

Cuando el azimut observado es mayor que dos rectos, haciendo consideraciones análogas á las que acabamos de exponer, tendriamos :

$$\beta = \alpha - \varepsilon \,;\; \beta' = \alpha - 180^\circ + \varepsilon.$$

de donde

$$\alpha = \frac{\beta + \beta'}{2} + 90^\circ, \qquad (2)$$

lo cual significa que deberá aumentarse 90° á la semi-suma de las dos lecturas.

Procediendo en esta forma, hemos supuesto que se ha podido antes comprobar si se hallan en línea recta los extremos de la aguja y su punto de suspensión. Es sin embargo posible prescindir de esta circunstancia, pero nos parece inútil poner en duda la condición enunciada arriba.

Limite de la longitud de los lados. — Regla : El lado sobre el cual se opera, reducido á la escala, no puede ser mayor que la semi-longitud de la aguja imantada, porque de lo contrario resultaría, en la posición del punto que se quiere determinar, un error que no sería lícito despreciar. Por otra parte, para prescindir del error de excentricidad de la visual, no se debe mirar á puntos que disten menos de 25 metros del centro de estación. Para los que se hallen más próximos, como sucede con frecuencia en el levantamiento del detalle, en vez de mirar al objeto puede dirigirse la visual hacia la derecha, á una distancia igual á la excentricidad, empleando para este fin un jalón al que se fija una regla igual á dicha magnitud.

Observaciones — Por el solo empleo de la brújula podemos obtener los elementos necesarios para la resolución de los problemas que se resuelven con el auxilio de la plancheta y alidada. Por ejemplo : conociendo sobre la hoja del dibujo las proyecciones de dos puntos del terreno, y que se desea encontrar la proyección de un tercer punto en los diferentes

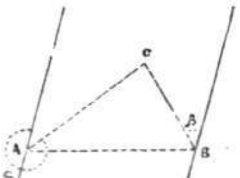

Fig. 31.

casos que pueden presentarse. Siendo accesibles los puntos A y B, cuyas proyecciones se nos da, haremos estación en cada uno de ellos con la brújula, y mediremos sucesivamente los azimutes α y β de los lados A*c* y B*c* (fig. 31), en el supuesto de que se halle trazada sobre el papel la meridiana magnética, ó mejor dicho, la directriz de la brújula (fig. 32). Si por los puntos *a* y *b* tiramos dos rectas que forman con esta dirección los ángulos medidos α y β, se determinará por intersección el punto c, proyección de C. — Si los puntos A y B son inaccesibles, y C accesible, haremos estación en este último punto, y midiendo los azimutes CA y CB, tendremos inmediatamente los de Ac y Bc, que diferirán 180° de los anteriores, y que se construirán sobre el papel, como en el caso precedente. Cuando el punto C sea inaccesible, al mismo tiempo que A y B (fig. 33), escogeremos sobre el terreno otros dos puntos,

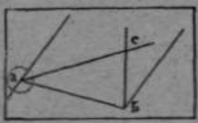

Fig. 32.

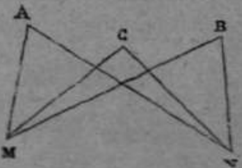

Fig. 33.

M y N, desde los cuales se descubren simultáneamente los puntos A, B y C. Se determinan por el procedimiento que acabamos de explicar las proyecciones de dichos dos puntos con relación á A y B, y tomando los horizontes de Mc y Nc, tendremos la proyección c deducida de las de M y N.

De las brújulas en las minas y en las selvas. — Los mineros y los guardabosques hacen uso casi exclusivo de la brújula, por razón á la comodidad que se les proporciona para determinar las direcciones de las galerías en una mina, ó los caminos en una selva.

Suponiendo que se trata de levantar el plano de una galería de mina, se fija por medio de jalones el eje ABCDEF (fig. 34) de la galería, y estableciendo sucesivamente la brújula en los vértices A,B,C,D,E,F de este eje, se determina los ángulos pAB, pBC, pCD, etc., etc. Un punto A del eje de la galería, habiendo sido referido á la superficie del suelo por medio del pozo de mina, si el tal punto no se encuentra él mismo á la vista, en el suelo, á la entrada de la galería, se traza AB sobre la superficie del terreno, haciendo uso de la brújula. La medida AB de la galería permite determinar el punto B de la superficie del suelo. La brújula, establecida en este punto B, permite trazar B C; después se determina el punto C, y así sucesivamente. El eje, estando trazado en la superficie del suelo, se puede trazar las paredes de la galería, de la cual se ha medido las distancias á derecha é izquierda del eje subterráneo á los puntos diferentes de este eje. Pero

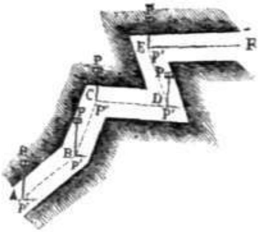

Fig. 34.

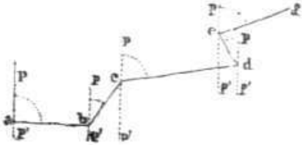

Fig. 35.

bien entendido que a mina no sea de un metal que pueda hacer desviar la aguja imantada.

Para trasladar el plano de la galería al papel, se hace el ángulo pab igual al ángulo pAB, y se toma la longitud ab, que representa AB reducida á la escala adoptada. Después se hace $p\,b\,c = p\,\mathrm{B}\,c$, y se toma $b\,c = \mathrm{B}c$ reducida á la misma escala. Continuando así sucesivamente, se traslada todo el eje de la galeria; después se trasladan las paredes, midiendo sus distancias al eje, y eso, á cada punto en donde el dicho eje cambia de dirección.

Los diversos métodos que hemos indicado para levantar un plano con la plancheta, pueden usarse empleando la brújula, teniendo cuidado de usar este instrumento según las reglas indicadas, y con las correcciones que hemos hecho conocer. Sin embargo, nos parece útil dar á conocer un método de levantamiento, especialmente adecuado á la brújula, y es el método por estaciones sucesivas.

Estaciones sucesivas. — 1, 2, 3, 4, 5, 6. Sean estos números los vértices de un polígono que tratamos de levantar. Supongamos que nuestra brújula esté graduada de manera que, cuando la alidada gira á la derecha, la

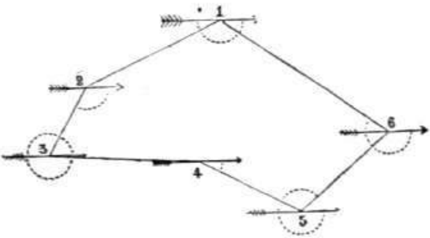

Fig. 36.

lectura crece. Los ángulos observados serán los que en la figura están marcados por arcos de puntos. Estacionaremos en el 1, dirigiendo la alidada al 2, y la lectura nos dará el ángulo (2 1 n); pero como la alidada de nuestra brújula es excéntrica, tendremos que tomar doble lectura, observando primero con el anteojo á la derecha, y después con el anteojo á la izquierda cada lado (1 2), entretanto los auxiliares miden el lado. Lo mismo se repite en el vértice 2, observando el ángulo (n 2 3), mientras los auxiliares miden 2 y 3. Lo esencial es llevar un registro ordenado de los datos que se tomen. He aquí la forma más conveniente del registro :

Registro de campo.

LADOS OBSERVADOS.	LARGO EN METROS.	RUMBO.		OBSERVACIONES. (*Declinación magnética: 14° 38'.*)
		DERECHA.	IZQUIERDA.	
1 — 2.	150. 60.	120°. 30'.	300°. 15'.	Costado de los pocitos (1).
2 — 3.	108. 17.	95. »	374. »	Deslinde con H. C. (3) arboleda.
3 — 4.	98. 25.	351. 15.	171. »	Costado de la ciénaga.
4 — 5.	100. 80.	45. 45.	225. 30.	Deslinde P. H. (4) puente de madera.
5 — 6.	101. 93.	301. »	130. 15.	Curso del rio.
6 — 1.	183. 28.	240. 22.	320. »	Huerta de C. K.

Construcción del plano. — En los métodos que hasta ahora hemos expuesto, no nos hemos ocupado de la construcción del plano, pues era demasiado sencillo. Pero tratándose de los datos tomados con la brújula, puede tropezarse con algunas dificultades, fuera de que se necesita emplear un nuevo instrumento llamado *transportador*, y cuyo uso no se ha explicado aún. Por este motivo vamos pues á proceder para hacer un plano, sirviéndonos del transportador y del registro anterior. Deduciremos del registro del campo el registro de gabinete, para lo cual basta deducir, mediante las dos lecturas de cada rumbo, la verdadera lectura; la doble columna queda reducida á una en el nuevo registro.

Registro de dibujo.

LADOS.	METROS.	RUMBOS.	OBSERVACIONES.
1. 2.	150.60.	120°. 2:'. 30".	
2. 3.	108.17.	94. 45.	
3. 4.	98.25.	351. 07,30.	
4. 5.	100.80.	45. 37,30.	
Así sucesivamente.			

Ya sabemos cómo se deduce de la doble lectura el rumbo verdadero. Hay también que tener cuidado de corregir la segunda lectura cada vez que pasa por 360°, agregando 360° á la lectura directa, según lo que hemos demostrado anteriormente.

Hay que observar también que se debe dirigir la visual siempre adelante, cuando se emplea el presente método de estaciones sucesivas. Para referir sobre el papel los azimutes ó ángulos de la brújula, hemos dicho que debíamos usar el transportador. Constituye éste regularmente un semicírculo graduado de metal, ó talco bastante grueso, para que no alabee por la acción del calor, sin dejar por eso de ser transparente y de tener la flexibilidad necesaria para adaptarse bien al papel. En los transportadores metálicos sólo existe la corona que lleva el limbo, apareciendo vacía la parte central; tienen la desventaja, respecto de los de talco, de ensuciar el papel y de no ser flexibles.

El limbo del transportador difiere de los que hemos visto

Fig. 37.

en los goniómetros, en que las divisiones más pequeñas son las más alejadas del centro (fig. 37). Ete limbo debe apreciar los mismos valores angulares que el instrumento que nos ha servido para determinar los ángulos en el terreno; de modo que si su objeto es, como sucede ordinariamente, transportar los azimutes obtenidos con la brújula, está dividido en grados y medios grados.

Al diámetro (0—180°) del semicírculo se une un rectángulo cuyo lado AB, paralelo á este diámetro, recibe el nombre de línea de fe, y se emplea para trazar las direcciones sobre el papel.

El limbo del transportador lleva dos graduaciones, una de 0 á 180°, de izquierda á derecha, y otra en el mismo sentido, de 180° á 360°.

Usos del transportador. — Si suponemos que se quiere trasladar al papel una dirección que pasa por C, y cuyo azimut obtenido con la brújula es de 35° respecto de la meridiana magnética, trazaremos la directriz CN, y colocaremos sobre ella el centro del limbo, hallándose hacia su extremo Norte la graduación 35° del azimut; se hará después resbalar el transportador en esta disposición, paralelamente á sí mismo, hasta que la línea de fe pase por el

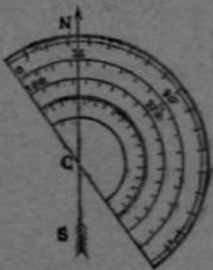

Fig. 38.

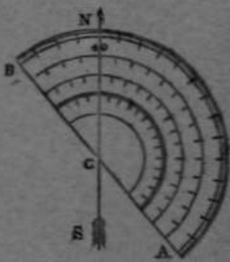

Fig. 39.

punto C; corriendo entonces el lápiz á lo largo de esta recta, tendremos la dirección que se buscaba.

Siendo muy numerosos los puntos del detalle, á partir de los cuales habría que transportar direcciones observadas con la brújula, sería preciso trazar por cada uno de ellos la directriz correspondiente, operación que resultaría en extremo pesada y molesta. Se evita este inconveniente determinando con anterioridad sobre el papel un número bastante considerable de rectas paralelas y equidistantes, que sigan la dirección de la meridiana magnética. Supongamos, por ejemplo, que en tal supuesto se quiere trazar por el punto A una recta cuyo azimut es conocido; si este es de

40°, se coloca el centro C del transportador sobre la directriz NS (fig. 40), que se halla más próxima á A, y se trae la graduación 40 hacia el extremo Norte, haciendo resbalar el transportador paralelamente á sí mismo, hasta que la línea de fe pase por el punto A, trazaremos la recta AB, que es la línea pedida.

La segunda posición del transportador nos da la dirección AB, cuyo azimut es de 120°. Para el caso en que este azimut fuera superior á dos rectos, se hará uso de la otra graduación para los azimutes de 245° y 310°.

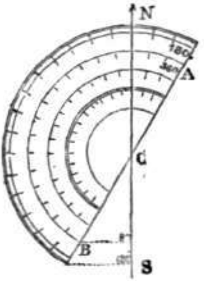

Fig. 40.

Si, por el contrario, se desea encontrar el azimut de una recta AB del dibujo, se colocará la línea de fe sobre esta dirección, y se le hará resbalar á lo largo de AB, hasta que el centro C se halle en la directriz más próxima, y expresará el azimut buscado, que coincide con la meridiana magnética.

Concluiremos dando una construcción por medio del transportador fijo.

Este medio, muy económico de construir un plano levantado con la brújula, consiste en pegar con cola de boca ó goma, en el centro del papel, un transportador circular, pero hecho de papel, y transportar por medio de la regla ó escuadra todos los rumbos paralelos hasta el punto respectivo. Es necesario que el transportador no ofrezca tropiezo al movimiento de las escuadras.

En fin, hay levantamiento de plano con la brújula por estaciones intermedias; para esto emplearemos todas las reglas y métodos dados hasta ahora, y se hará de la misma manera que el levantamiento por estaciones sucesivas.

NIVELACIÓN.

Bien que los instrumentos de reflexión hacen esencialmente parte de la Geodesia, sin embargo, tenemos que describir algunos, pues tienen que emplearse por fuerza en la nivelación. Á estos agregaremos otro, que nos es de suma utilidad en el método rápido de levantar el plano pedido; y para mayor comodidad empezaremos con él.

El sextante. — Sin embargo, antes de dar la descripción de los instrumentos de reflexión, tenemos que asentar algunas bases, y antes que todo, la siguiente, que se encuentra fundada en una propiedad de la luz. Si un radio luminoso encuentra una superficie que refleje, el ángulo que forma con la normal á la superficie es igual al ángulo formado por su reflexión y esta misma normal. En una palabra: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

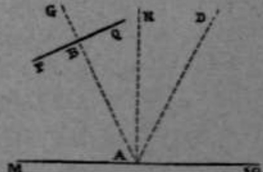

Fig. 41.

Hé aquí la aplicación de este teorema. Sea MM' un espejo que reciba en A un rayo luminoso, viniendo de un objeto D; este rayo se reflejará, y los ángulos DAN, BAN formados con la normal serán iguales. Si un segundo espejo PQ es perpendicular en AB, este devolverá el rayo luminoso, según la dirección que seguía antes de llegar hasta él; el ángulo BAD será, pues, lo que designaremos por $y=400-2(\alpha+\beta)$, siendo α el complemento de los ángulos de incidencia y de reflexión, y β los mismos ángulos con el segundo espejo. Prosigamos nuestra demostración fundamental, y el ángulo de los dos espejos será evidentemente la mitad, visto que es igual BAN, formado por las normales á sus superficies. Si ahora nos figuramos el ojo colocado hacia un segundo objeto A, G situado en la prolongación de A B, y el espejo P Q estañado solamente en su parte inferior, sucederá que el ojo recibirá simultáneamente dos impresiones; percibirá G directamente, y D por el efecto de la simple reflexión. Si, pues, se llega á valuar el ángulo de los dos espejos, el de los dos objetos será conocido.

Los instrumentos fundados bajo el principio enunciado, tienen la gran ventaja de no necesitar soportes.

Hablaremos ahora del sextante graduado, pues generalmente se tiene más necesidad de conocer la amplitud de los ángulos que se observan.

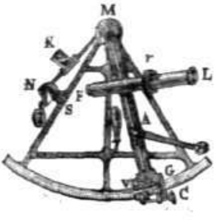

Fig. 42.

Este instrumento es un goniómetro, que se compone de un limbo de metal, compreniendo una amplitud de 60°, por cuya razón se le da el nombre de sextante graduado, con el que es conocido. Dos espejos, M y N, están dispuestos perpendicularmente á dicho plano; el primero, diáfano en su mitad superior, forma cuerpo con el limbo, y el segundo, M, azogado en todo su extensión, va fijo á una alidada A, móvil, alrededor del centro de aquél. Lleva esta regla en su extremidad un nonius V, que sirve para leer con suficiente aproximación el ángulo que gira la alidada, y por consiguiente, el espejo M sobre el plano del limbo, graduado de manera que su división cero coincide con la cero del nonius cuando los dos espejos son paralelos. Para lograr mayor precisión en los resultados, la alidada A es susceptible de movimiento rápido y lento por medio del sistema de los tornillos P y C de *presión* y *coincidencia;* con este fin se halla provista del apéndice G, en donde penetra, y está detenida por efecto de la esfera r, el tornillo C, que tiene muy pequeño paso; la mordaza E, compuesta de dos piezas que permiten oprimir contra el limbo el tornillo de presión P, tiene además una tuerca, en la que se introduce la rosa del de coincidencia C. De este modo, aflojando el primer tornillo, puede correr libremente la mordaza sobre el plano del limbo, arrastrando en su movimiento á la alidada A y al nonius V; mas si se aprieta el tornillo de presión, la alidada forma cuerpo con dicho plano, y sólo admitirá movimientos lentos, haciendo girar al de coincidencia, que avanzará al propio tiempo en sentido de su longitud, por hallarse fija la tuerca.

Para el caso en que los rayos luminosos tengan demasiada fuerza, como sucede, por ejemplo, en las observaciones solares, lleva el instrumento unas placas de cristal de colores obscuros, K, que siendo movibles alrededor de charnelas, pueden colocarse á voluntad, delante de los espejos M y N.

Un anteojo LF, que se fija al limbo, introduciéndole en el collar Q, sirve para dirigir rayos visuales sobre el espejo N, pudiéndose de esta manera mirar directamente ciertos objetos por la parte diáfana, y percibir á la vez otros, reflejados por ambos espejos. El eje óptico es paralelo al plano del limbo, y se coloca á la altura de la línea de separación de las partes diáfanas y azogadas del espejo N, con ayuda de un tornillo, que, situado en la parte inferior, imprime movimiento al collar que abraza al anteojo. Muchas veces la retícula está constituída por cuatro hilos paralelos, dos á dos, que se cortan en ángulo recto, y en este caso la coincidencia de las imágenes se verifica en el rectángulo central de la retícula. Por último, el instrumento se sostiene por un mango que se atornilla ó está fijo en su parte inferior.

Para medir con el sextante graduado un ángulo IOD, nos colocamos en estación en el vértice O, y disponiendo el limbo de modo que se halle en el plano de las visuales á los objetos, miramos directamente con el anteojo al punto de la izquierda I. Si suponemos que los espejos son paralelos, se verá al propio tiempo la segunda reflexión del mismo punto ; pero si hacemos girar la alidada A, de dederecha á izquierda, después de soltar el tornillo de presión, irán coincidiendo sucesivamente con la visual OI las segundas reflexiones de los objetos situados á su derecha en dicho plano; llegará, por lo tanto, una posición precisa de la alidada, que obtendremos valiéndonos del tornillo de coincidencia, para la cual aparecerá confundida con la magen directa del objeto I de la izquierda la segunda reflexión del de la derecha D. Entonces el cero del nonius marcará sobre el limbo una lectura, expresando el ángulo recorrido por la alidada, que será igual al que forman los dos espejos ; doblando esta lectura, tendremos, en consecuencia, el valor del ángulo que buscamos. Á fin de leer inmediatamente sobre el limbo el ángulo de las dos direcciones, suelen doblarse en su graduación los valores de los arcos.

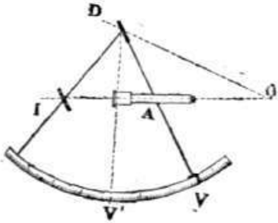

Fig. 43.

Habiendo supuesto que las graduaciones del limbo aumentan de derecha á izquierda, hemos dicho que se dirigía la visual directa al objeto de la izquierda. Mas si por estar poco iluminado el de la derecha, no se distinguiera bien su segunda reflexión, invertiríamos el instrumento, de forma que los espejos resultarían inferiores al plano del limbo, y empezaríamos por dirigir la visual directa al punto de la derecha, siguiendo después una marcha análoga á la que precedentemente hemos indicado. Deducimos, pues, que convendrá siempre mirar directamente al punto que aparezca menos iluminado.

Verificaciones. — 1ª. Los espejos M y N deben ser perpendiculares al plano del limbo.

Con echar visuales sobre dichos espejos, y al mismo tiempo sobre unos cubos, enfrente de estos, haciendo pasar las visuales por sus aristas, será fácil ver si la condición requerida subsiste. En una palabra, se puede observar también con un solo cubo, y ver si la cara superior aparece en el mismo plano que su imagen reflejada.

2.ª El cero del nonius debe coincidir con el cero de las graduaciones del limbo, cuando los espejos son paralelos.

Esta condición es necesaria por sí misma.

Observación. — Hemos dicho que al instrumento descrito se le daba el nombre de sextante á causa del limbo que era un arco de 60° ; claro es que así se podrán medir con él ángulos que no excedan de 120°. Algunas veces el limbo comprende una octava parte de la circunferencia, y el instrumento recibe el nombre de *octante;* llamándose *cuadrante* si dicho arco fuera de 90°.

Sextante de bolsillo. — Este instrumento de pequeñas dimensiones, va encerrado en una caja cilíndrica CT, la cual se compone de dos partes que se unen por medio de roscas ; una de estas partes T, hace las funciones de tapa cuando no se usa el instrumento, y en otro caso sirve para sostenerle y hacer más cómodo su manejo. Según indica la fig. 44, en la base superior del cilindro C aparece incrustado el limbo L, igual á la sexta parte de la circunferencia, y alrededor de su centro gira la alidada A, provista de un nonius, á la que imprime movimiento el tornillo T'. El instrumento contiene también dos espejos perpendiculares al plano del limbo, que no se ven en la figura por hallarse situados en el interior de la caja; análogamente á lo que sucedía en el sextante graduado, uno de estos espejos, fijo á la alidada, está azogado por completo, al paso que el otro, unido al limbo de manera invariable, es transparente en su mitad.

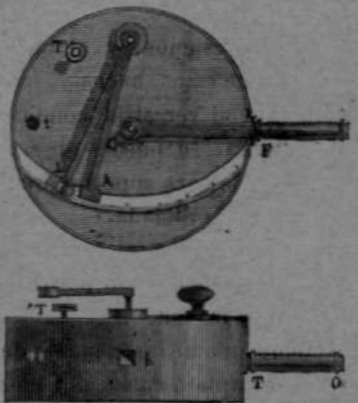

Fig. 44.

El anteojo O F, que va dentro de la caja cuando no se hace uso del instrumento, se coloca enfrente del segundo espejo para mirar directamente los objetos. Delante del primero pueden colocarse asimismo dos cristales de color obscuro, que se mueven con auxilio de palancas, cuyos extremos aparecen en K.

Recibe luz el anteojo por medio de un taladro situado posteriormente á la parte diáfana del segundo espejo, y existe además una abertura lateral por donde penetra la que ambos reciben.

El uso del instrumento es del todo idéntico al del sextante graduado. Las verificaciones son también las mismas, y en caso de existir errores, se corrigen por medio de los tornillos *t*, los cuales varían la inclinación de los espejos con respecto al plano del limbo. Otro tornillo análogo, *s*, sirve para alterar el ángulo que forman entre sí los dos espejos.

Teodolito, llamado vulgarmente topográfico. — Descripción : El teodolito es un instrumento destinado á medir los ángulos horizontales y verticales, y que se emplea igualmente en los trabajos de planimetría y de nivelación, destinándose principalmente para determinar los puntos que en los levantamientos regulares constituyen los vértices del canevás topográfico, y varias veces trigonométrico.

Hay varias especies de teodolitos ; nos concretaremos por ahora en la descripción que damos sobre los principios generales que sirven para construirlos y usar de ellos. El teodolito tiene dos limbos, que pueden ponerse uno horizontal y el otro vertical.

Cada limbo tiene su eje que le es perpendicular en el centro, y con el cual hace cuerpo. Pero el eje del limbo es generalmente hueco, y dentro hay otro eje concéntrico para el nüñez, que hace cuerpo con el anteojo.

Así que, el esqueleto de un teodolito nos ofrece dos líneas horizontales, que son los ejes, uno vertical y otro horizontal. Cada uno de ellos sirve de eje á cuatro movimientos de rotación :

1°. Movimiento del limbo por medio de la mano (movimiento libre).

2°. Movimiento del limbo por medio de un tornillo de tracción (movimiento de tangencia).

3°. Movimiento libre del nüñez.

4°. Movimiento de tangencia del nüñez.

Cuando el limbo se mueve, lleva consigo el nüñez, pero éste puede moverse solo.

El eje vertical, ó sea el eje del limbo horizontal, es el eje principal del instrumento. Cuando este eje se pone vertical, se dice que el instrumento se halla nivelado. Para el efecto, dicho eje tiene un disco circular que hace cuerpo con él y descansa sobre tres ó cuatro tornillos niveladores que nos permite poner el eje vertical. Todo este sistema descansa sobre un soporte de tres pies llamado trípode, y que presenta una pequeña mesa, en donde descansan los tornillos niveladores. El instrumento está unido al trípode por una rodilla.

El limbo tiene un tornillo de presión que lo une al trípode y le impide girar á mano; pero entre el punto fijo en la rodilla, y un punto fijo en el limbo, hay un tornillo que tiene su tuerca en una parte, mientras gira locamente en la otra; y acortando el espacio ó alargándolo entre dichos dos puntos, produce un movimiento muy lento, que se llama movimiento de tangencia.

El mismo sistema se emplea para impedir el movimiento libre del núñez, y producir un movimiento lento del núñez sobre el limbo. Lo mismo ocurre con el limbo vertical. El instrumento tiene uno ó más niveles que sirven para poner los ejes horizontales ó verticales, é igualmente para nivelar.

Uso del teodolito. — Cuando queremos medir un ángulo ACB formado por las líneas que parten de un punto C, á otros dos puntos, A y B, nos estacionaremos con el teodolito en el vértice C, para lo cual empleamos una plomada; en seguida ponemos verticalmente el eje CC′ del instrumento. Como el anteojo se mueve llevando consigo el núñez alrededor del eje vertical CC′, cada posición del anteojo determina con él un plano vertical; así que, pasando de la posición CA á la posición CB, tenemos dos planos verticales, C′CA′, C′CB′, que se cortan en CC′, formando un ángulo cuya medida es el ángulo A′CB′, que forman los trazos horizontales sobre el limbo.

El teodolito no sirve, pues, para medir el ángulo en el plano de los objetos, sino en su proyección horizontal. Hé aquí el mecanismo de la operación: Supongamos que el limbo está graduado hacia la derecha, de 0 á 360°. Después de nivelar, se pone el cero del núñez en coincidencia con el cero del limbo, y se fija el núñez al limbo; se da movimiento libre al limbo para llevar el cero al plano vertical AA′ de la izquierda, lo que se consigue poniendo el centro del retículo en coincidencia con la señal puesta en A, sujetando la coincidencia por el tornillo de tangencia del limbo. Se deja el cero del limbo fijo en A, y se suelta el núñez para llevarlo al plano vertical del punto B, lo que se obtiene mirando por el anteojo, que se mueve primero

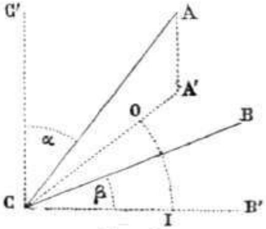

Fig. 45.

libremente en sentido horizontal y vertical, y se ajusta después por medio del movimiento de tangencia horizontal y vertical. El plano vertical del anteojo habrá descrito un ángulo A′CC′, que está medido por el camino recorrido por el núñez *o l*, que empieza en el cero de la graduación; el número que se leerá en *l* nos dará en grados, minutos y segundos el valor del ángulo. Cuando se quiera medir los ángulos de inclinación de las visuales, se practicará al mismo tiempo, pero teniendo cuidado de leer lo que marca el núñez vertical en su limbo cada vez que el eje óptico del anteojo se encuentre ajustado sobre el centro de la señal. Así, al mismo tiempo que se dirija la visual al punto A, se leerá la inclinación α; mirando á B, se leerá β.

Condiciones que requiere el teodolito. — Se dividen en dos clases: 1ª. Las que dependen únicamente del constructor. 2ª. Las que pueden realizarse por el observador mismo, mediante ciertos tornillos que permiten cambiar ligeramente las disposiciones de ciertas partes del instrumento. Vamos á considerar unos y otros:

1°. Al considerar los arcos del limbo como medida de los ángulos diedros, cuya arista es el eje vertical del instrumento, suponemos que el limbo representa un plano horizontal, ó sea una sección recta del ángulo diedro. Por consiguiente, el limbo debe ser perpendicular á su eje. Es condición del constructor.

2°. Dos planos visuales cualesquiera deben cortarse en el centro del limbo; de lo contrario, el ángulo no estaría medido por el arco del limbo. Esto supone que el eje de rotación del plano visual sea central. Lo mismo se exige en el limbo vertical. Esta condición es también de fábrica.

3°. Uniformidad de la graduación del limbo. Otra condición de fábrica. Se reconoce, leyendo un mismo ángulo en distintas partes del limbo. Se atenúa el error leyendo con varios núñez, repartidos en toda la circunferencia del limbo.

4°. Los tornillos, en general, deben funcionar según el empleo que tienen. Los ejes deben girar con rozamiento suave; los anteojos deben ser acromáticos. Todas estas condiciones son de fábrica.

5°. El nivel debe ser perpendicular al limbo. El nivel que sirve para poner vertical el eje principal del instrumento, está generalmente formando cuerpo con el sistema del núñez; se pone horizontal en dos posiciones, y si el eje le es perpendicular, estará por ese medio llevado á la posición vertical; pero no sucederá así si el nivel no es perpendicular al eje; por consiguiente es esencial antes de emplear el nivel para poner á plomo el eje del instrumento, averiguar si es perpendicular al eje. Para esto, se pone el nivel al frente de dos tornillos de la rodilla, y se nivela cuidando de leer la graduación marcada por el núñez; se gira 180°. Si la burbuja no se mueve, es prueba que la tangente se ha aplicado sobre sí misma por la inversión, y es prueba de perpendicularidad. Pero si ésta se mueve, es que la tangente ha descrito un cono, y que el desvío es doble del error. Se corrige llevando la burbuja á la línea de fe, mitad por el tornillo rectificador del nivel, mitad por los tornillos rectificadores de la rodilla.

6°. Es necesario, que en su movimiento de inclinación, el anteojo describa un plano vertical.

Esto exige que el eje óptico del anteojo sea perpendicular al eje sobre que gira, y que éste sea horizontal.

7°. Cuando el anteojo tiene un nivel, es necesario que sea paralelo al eje óptico del anteojo.

Como para la condición anterior, es condición de fábrica la mayor parte del tiempo. Sin embargo, por medio de una pequeña corrección al retículo, hay algunas veces modo de corregir el último error.

De la nivelación en general y de los niveles. — El conjunto de las operaciones que sirven para determinar las formas y el relieve del terreno, descansando en el conocimiento de las cotas de sus puntos, con respecto á una superficie general de comparación, es lo que constituye la nivelación.

Para evitar las cotas negativas, se adopta una superficie horizontal de comparación que se halle por debajo de todos los puntos del terreno; y para que sea posible comparar los resultados que se obtienen en distintos levantamientos, se toma como superficie general de comparación la del nivel medio de los mares, que es perpendicular á las verticales de los diversos puntos.

Siendo la tierra esférica, como podemos admitir sin error de identidad en los levantamientos topográficos, las superficies horizontales pertenecerán á esferas concéntricas, y los puntos de nivel equidistarán del centro de la tierra.

Si dos puntos no se hallan sobre la misma superficie horizontal, la sustracción de sus cotas expresará la diferencia de nivel que entre ellos existe.

Hablaremos muy rápidamente de los instrumentos que sirven para nivelar. Se dividen en dos clases: la primera, son los que, bajo el nombre de niveles, y por su auxilio, se determinan visuales horizontales en todas direcciones alrededor de un punto, formando por su unión un solo plano horizontal. Los segundos comprenden los clisímetros ó eclímetros, que sirven para medir los ángulos de pendiente de la línea que une dos puntos del terreno. Si al propio tiempo se conoce la longitud de esta recta, ó su reducción al horizonte, tendremos los elementos necesarios para deducir la diferencia de nivel que entre ellos existe. Esta división de instrumentos nos da lugar á dividir igualmente la nivelación en dos partes, que son: la nivelación por visuales horizontales, y la nivelación topográfica. La primera es muy exacta, pero larga; la segunda nos permitirá hacer el canevás topográfico: es menos rigorosa, pero muy expedita.

En la descripción de los instrumentos de la primera parte, es decir, para la nivelación por visuales horizontales, pasaremos muy ligeramente sobre los que se conocen por un uso frecuente y práctico, nombrándolos únicamente, y diciendo los principios sobre los cuales su construcción se funda.

La plomada. — Es un cordón suspendido por un extremo, y que sostiene en su otra extremidad un cuerpo pesado. Su principio de construcción es que la dirección del hilo es la de la fuerza de gravedad, y es constante en cada localidad.

Nivel de perpendículo. — Es un ángulo formado por dos reglas de madera, cerrado por un travesaño, y que lleva un plomo suspendido del vértice del ángulo. Se funda en el mismo principio que el anterior.

Nivel de agua.—Dos tubos de vidrio unidos por un tubo de cualquier metal, llenos uno y otro de un líquido; el nivel del líquido en uno de los tubos da el nivel pedido; como principió de física en los vasos comunicantes, el líquido se pone á la misma altura.

Nivel de burbuja de aire. — Principio : el equilibrio de los fluidos de distinta densidad contenidos en un mismo recipiente. Para nivelar, se necesita que la burbuja de aire esté en medio perfecto del tubo, el cual está graduado para este efecto.

Nivel de platillo ó nivel-círculo de Lenoir. — Este nivel, que es el que emplearemos especialmente, se compone de un platillo circular, A B (fig. 46), que se une invariablemente á una plataforma de tres tornillos nivelantes, por medio de la columna D, cuyo eje es, por construcción, perpendicular al platillo. Un anteojo L L′ con su retículo, formado por dos hilos en cruz, se halla fijo en dos collares prismáticos cuadrangulares, K y K′, perfectamente iguales entre sí, que descansan por una de sus caras con el platillo A B, sobre el cual pueden resbalar con libertad. Á fin de que el anteojo con los prismas gire sobre el platillo, sin moverse longitudinalmente, lleva aquél la espiga cilíndrica *e*, que se introduce en una cavidad dispuesta en el centro del platillo. Otra espiga análoga, y en posición simétrica á la anterior, penetra en un taladro cilíndrico practicado en medio de la regla P Q, donde está armado el nivel N con su tornillo particular de corrección; dicha regla se apoya además, por sus extremidades, en las caras superiores de ambos collares. El nivel N es por lo tanto movible juntamente con la regla P Q; puede invertirse su posición, extremo por extremo, y aun separarse por completo de la situación que ocupa encima de los prismas. Teniendo el instrumento por objeto la determinación de visuales horizontales, si el eje óptico del anteojo es paralelo al platillo, la única operación que deberá efectuarse cada vez que se estacione el nivel, es disponer horizontalmente dicho platillo. Para conseguirlo, se le establece á ojo en esta situación por medio de los pies del trípode; colocando después el nivel en dirección de la línea que une dos tornillos nivelantes, se mueven éstos simultáneamente haciéndoles girar en sentidos contrarios, hasta que la brújula quede en el centro del tubo; se dispone luego el nivel sobre un diámetro perpendicular al primero, y con ayuda del tercer tornillo se la cala de nuevo. Repitiendo la operación varias veces, se logrará que el platillo sea horizontal, porque lo serán á un mismo tiempo dos líneas situadas en su plano. Siendo horizontal el plano del platillo, lo será también la dirección del eje óptico, por consecuencia de las hipótesis hechas; y como seguirá ocurriendo lo mismo en el movimiento de rotación del anteojo, describirá aquella línea una superficie horizontal.

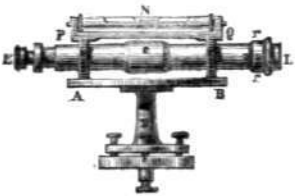

Fig. 46.

Verificaciones y correcciones. — 1°. La tangente en medio de la sección longitudinal del nivel, debe ser paralela al platillo.

Suponiendo igualdad perfecta en los collares, bastará que el plano de sus caras posteriores sea paralelo á la referida tangente. Para examinar si esto sucede, seguiremos el procedimiento conocido calando el nivel en una posición cualquiera, é invirtiéndole después extremo por extremo; si la burbuja no permanece central, se corrige el error que resulte en la inclinación del nivel por medio de su tornillo de corrección particular, combinados con los tornillos de la plataforma.

2°. Uno de los hilos de la retícula debe ser horizontal, á fin de que siéndolo igualmente todas las visuales que determinan las diferentes posiciones de este hilo, marque entonces sobre la mira una línea también horizontal.

Para ver si la condición se cumple, miraremos un punto bien señalado, que se perciba bajo el hilo, y examinaremos si la superposición tiene lugar del mismo modo cuando el anteojo gira lentamente sobre el platillo. De no ser así, se aflojan los tornillos *r*, que se prestan á un pequeño juego lateral; haciendo girar el tubo porta-retícula á la derecha ó á la izquierda, hasta que se corrija la desviación observada, se le vuelve á fijar de nuevo en la posición que convenga.

3°. El eje óptico del anteojo debe ser paralelo al platillo, ó lo que es lo mismo, debe coincidir con el eje de los collares.

Para asegurarnos de la existencia de esta condición, después de poner el platillo horizontal, se dirige la puntería á una mira colocada verticalmente á cierta distancia, y se anota la lectura correspondiente. En seguida se hace girar el anteojo 180° alrededor del eje de los collares; para este efecto se retira el nivel y se introduce la espiga superior del anteojo en el taladro del platillo, sobre el cual se apoyarán entonces las caras de los prismas en que antes descansaba la regla. Dirigiendo una nueva visual á la mira, deberá confundirse con la primera si el eje óptico es horizontal; en caso contrario, se corrige el defecto de centralización, moviendo los tornillos de la retícula hasta que el hilo horizontal señale el promedio entre las lecturas obtenidas para las dos observaciones. Hecho esto, se puede centralizar el hilo vertical, procediendo en idéntica forma.

4°. Por construcción deben ser iguales los dos prismas que sirven de collares; mas como las verificaciones anteriores se fundan en la hipótesis de igualdad, conviene que examinemos si tiene lugar esta circunstancia.

Se cala con tal objeto el nivel en una posición cualquiera del instrumento, y las caras superiores de los collares determinarán una dirección horizontal, siempre que se haya hecho la corrección primera. Si los soportes K y K′ son iguales, al imprimir un movimiento de 180° al anteojo con el nivel y los collares, de modo que éstos cambien respectivamente de lugar, continuará siendo horizontal la regla P Q, que se apoya sobre las caras superiores de los prismas, y por lo tanto el nivel seguirá calado. Pero si los soportes son desiguales, después de ejecutado el movimiento de rotación, resultará inclinada la regla P Q, y en su consecuencia aparecerá descentralizada la burbuja del nivel N. Dedúcese, pues, que si al efectuar el giro de 180°, el nivel no continúa calado, es prueba de que no existe la igualdad de los prismas que sostienen el anteojo.

Puede hacerse también esta verificación con suma sencillez, separando el nivel de su posición sobre los collares y colocándole sobre el platillo, que se dispone horizontal por su medio. Volviendo después á transportar el nivel encima de los prismas, permanecerá únicamente calado cuando los collares son iguales.

Si al ejecutar la verificación en una ú otra forma, nos cercioramos que los collares son desiguales, podemos hacer la corrección que corresponde desgastando el prisma que resulta mayor, para cuyo efecto se le frota con papel de esmeril.

De las miras. — Hay dos clases de miras: la de tablilla y la mira parlante.

La mira de tablillas está formada por dos reglas de madera A y B (fig. 47), de las cuales la primera puede resbalar á lo largo de una ranura practicada en la segunda, en disposión conveniente para impedir que se separen. Las dos perchas pueden fijarse una á otra, por medio de la abrazadera de hierro P, unida invariablemente á la regla A, y provista de un tornillo de presión T. La tablilla de la mira es un rectángulo, de plancha de hierro, de 0,24 de base por 0,20 de altura. La cara anterior está dividida generalmente en otros cuatro rectángulos pintados de blanco y rojo, correspondiendo á los que se hallan opuestos por el vértice. La linea *ab* (fig. 48) es la línea de fe; *m*, el punto de mira que marca la intersección de *ed*. Á la cara posterior de la tablilla va unida otra abrazadera que puede correr á lo largo del cuerpo que constituyen ambas perchas, y fijarse á la altura que convenga, por medio del tornillo T′. La cara posterior de la regla B está dividida en metros, decímetros, centímetros, y la abrazadera lleva un centímetro dividido en milímetros, de modo que la línea superior marcada con el cero se halle á la altura de la línea de fe de la tablilla. El uso de esta mira es muy fácil de comprender: la tablilla corre á lo largo de las dos reglas hasta alcanzar la altura de $2^m,1$. En el caso de que las alturas de mira sean superiores á $2^m,1$, se utiliza una graduación lateral situada en la regla B, que abarca desde $2^m,1$ hasta $4^m,1$, y se halla dividida en la misma forma que la existente en la cara posterior.

El inconveniente de esta mira es que la línea de fe no llega á colocarse á la altura de la visual que da el anteojo, sino después de algunos tanteos, conforme á las señales que haga el observador.

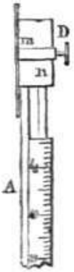
Fig. 47 A.

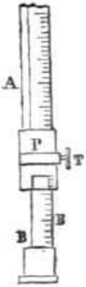
Fig. 47 B.

La mira parlante tiene la vent ja de que la lectura se hace directamente por el observador. Se compone, por regla general, de un listón de 4^m de longitud, y de 6 á 8 centímetros de anchura, formado de dos partes que pueden abatirse con facilidad una sobre otra con ayuda de charnelas, facilitando así el transporte. La regla está pintada de blanco y lleva divisiones iguales, cuyo origen se halla en la extremidad que se apoya sobre el suelo; las divisiones se señalan por fajas blancas y negras de 2 centímetros de grueso, y no por líneas, que sería difícil distinguir, aun con el anteojo. El observador, pues, leerá la graduación que se encuentra sobre el plano visual, y no tendrá indicación alguna que hacer al porta-mira.

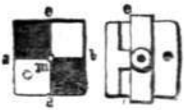
Fig. 48.

Comparando las dos miras descritas, se observa que debe preferirse la de tablilla cuando se emplea un nivel que debe dar alturas, á lo más á 60 metros. Con los niveles de anteojo se empleará con igual ventaja la misma mira, siempre que se observe á distancias considerables. En los demás casos es preferible el empleo de la parlante, por lo dicho anteriormente.

Práctica de la nivelación por medio del nivel. — Hay dos clases de nivelaciones : la simple y la compuesta.

Haremos conocer la simple valiéndonos de un ejemplo :

Supongamos que se trata de hallar la diferencia de nivel entre dos puntos, A y B. Colocando el nivel en B, y la mira en A, haremos la lectura A x, que expresa la distancia del terreno al plano horizontal de la visual. Esta operación

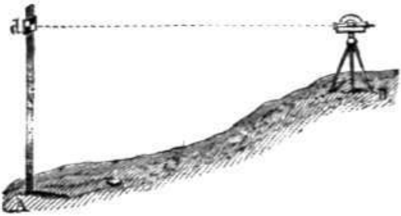

Fig. 49.

constituye lo que se llama golpe de nivel ó nivelada sobre A. La diferencia entre la altura de mira así obtenida, y la del eje óptico del anteojo, expresará evidentemente el desnivel que buscamos. Se puede evitar la medida de la altura del eje óptico sobre el punto de estación del instrumento, disponiendo el nivel en una posición intermedia A y B, sin que por otra parte sea preciso que se encuentre en la dirección de la línea que los une. Transportando sucesivamente á estos puntos, los dos golpes de nivel nos proporcionarán las lecturas α y β, y $\alpha - \beta$ será la diferencia de nivel que se pide.

La fórmula $\alpha - \beta$, que expresa la diferencia de nivel, alcanzará el valor máximo cuando la lectura α sea igual á la longitud total de la mira, que suponemos de 4 metros, siendo al propio tiempo cero el valor de β; en este caso límite, los dos puntos sometidos á la nivelación ocuparán las posiciones A y B, hallándose el primero 4 metros más abajo que el segundo. Si colocáramos el nivel en el punto

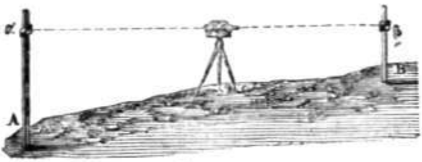

Fig. 50.

más elevado, el valor máximo que podríamos hallar para la diferencia de nivel sería $4^m - 1^m,20 = 2,80$; representando por 1,20 la altura del eje óptico sobre el punto de estación. Operando entonces con la misma pendiente que en el primer caso, la distancia entre los dos puntos podrá ex-

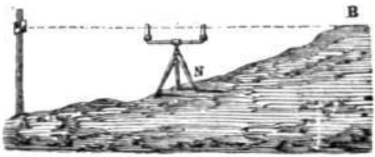

Fig. 51.

ceder á la longitud AN menor que AB. Disponiendo el nivel en el punto más bajo, la diferencia $\alpha - \beta$ tendría por límite $1^m,20 - 0^m = 1,20$, correspondiendo á dos puntos separados por una distancia igual á la NB. Deducimos, por consiguiente, que al hacer estación en un punto intermedio, será posible alejar más los puntos que se trata de nivelar.

Debemos decir que dando los niveles visuales, no tenemos las verdaderas diferencias de nivel, pues hay que considerar dos errores, que hacemos conocer en el acto, y que son: el nivel aparente (que es el que tomamos) y el nivel verdadero. ¿Cuál es éste? El que se halla corregido de los dos errores, los cuales proceden: el primero de la falta de horizontalidad en la dirección del eje óptico del anteojo que lleva el instrumento, y el segundo de la influencia de la refracción atmosférica.

Advertiremos, no obstante, que podrá evitarse toda clase de error estacionando el instrumento á igual distancia, poco más ó menos, de las posiciones de la mira.

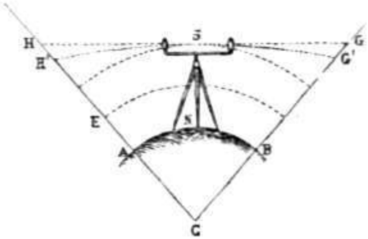

Fig. 52.

Sean, por ejemplo, A y B los dos puntos cuya diferencia de nivel verdadero está representada por A E, y sopongamos que se coloca el instrumento en N, á igual distancia de dichos puntos, bien sobre A B ó fuera de esta alineación. Mirando según la horizontal S H, á la mira situada en A, esta primera nivelación nos dará la altura A H′ por efecto de la refracción atmosférica que tiende á elevar los puntos. Con la segunda nivelación sobre la mira colocada en B, obtendremos la lectura B G′; y vamos á demostrar que la diferencia A H′ — B G′ será igual á A E, desnivel verdadero entre los dos puntos A y B. En efecto:

$$AH'-BG'=(AH-HH')-(BG-GG')=AH-BG-HH'+GG'.$$

Pero $HH'=GG'$; pues siendo iguales las distancias SH y SG, lo serán asimismo los errores de refracción que de ellas dependen. Por consiguiente, tendremos:

$$AH'-BG'=AH-BG=CH-CG+CB-CA.$$

Ahora bien: las distancias CH y CG son iguales, como oblicuas que equidistan del pie de la perpendicular CS, y por la tanto, la igualdad anterior queda reducida á

$$AH'-BG'=CB-CA=AE.$$

Deducimos, pues, que si hacemos estación con el instrumento á igual distancia de los puntos sometidos á la nivelación, la diferencia que se obtiene entre las dos lecturas de la mira, expresa exactamente la diferencia de nivel verdadero que buscamos.

En este mismo supuesto, hallaremos también resultados exactos, aun cuando el eje óptico no sea horizontal, siempre que se haya podido colocar en situación vertical el eje de giro del instrumento. En efecto: si bien las visuales SH y SG estarán entonces inclinadas, formarán ángulos iguales con la vertical SC, que es el eje de rotación del nivel, y en su consecuencia tendremos: $SH=SG$, y $CH=CG$. Resulta de aquí, que los puntos H y G serán á la vez de nivel aparente y verdadero, y de este modo desaparecerá toda causa de error, según dijimos precedentemente.

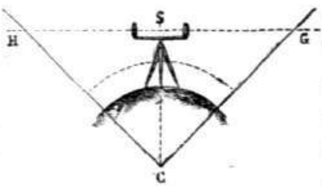

Fig. 53.

Observaremos, que como en la práctica sería muy molesto elegir precisamente para estación de nivel un punto que se hallara á igual distancia de las dos posiciones de la mira, bastará satisfacer esta condición á simple vista, pues los errores que se cometan serán tan insignificantes, que podremos prescindir de ellos en las operaciones de nivelación.

Cuando por cualquier circunstancia nos veamos obligados á situar el nivel en uno de los puntos A ó B, cuya diferencia de cotas se busca, tendremos, para la diferencia de nivel verdadero:

$$AE = (AH' - DH') - DE.$$

De suerte que, en este caso, se sustraerá á la altura de mira el término de corrección D H′, que es función de la distancia horizontal, y deberá tenerse en cuenta siempre que esta distancia sea considerable.

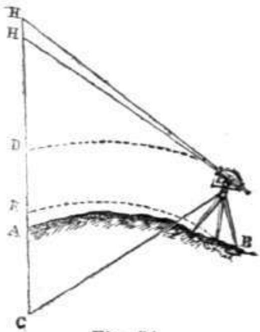

Fig. 54.

Nivelación recíproca. — Sin embargo, es posible evitar la corrección, empleando el siguiente método para operar, llamado de nivelación recíproca, el cual pondremos en práctica cuando un obstáculo cualquiera impida colocar el nivel en una estación intermedia entre los puntos A y B. Estacionando el instrumento en el punto A (fig. 55), y dirigiendo la visual á una mira situada en B, obtendremos por esta nivelación la lectura a'; siendo a la altura del eje óptico, la diferencia $a - a'$, prescindiendo de los errores, expresará el desnivel A y B.

Se transporta el nivel á B, y mirando á A, se observa del propio modo la altura b del instrumento y la de la mira b' por esta visual; haciendo abstracción de los errores, la diferencia de nivel buscada será $b' - b$.

Si ahora se toma el promedio entre las dos expresiones $a - a'$ y $b' - b$, se tendrá rigurosamente el desnivel entre los puntos A y B. En efecto : siendo una sola la distancia para

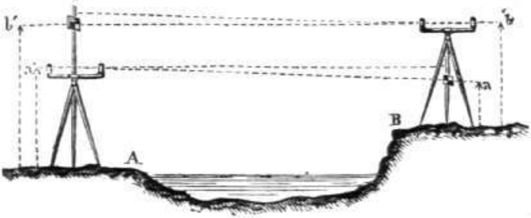

Fig. 55.

las dos visuales, la corrección que, según hemos dicho, debe hacerse para cada observación, podrá representarse para mayor sencillez por una cantidad c. De este modo, la visual dirigida del punto A nos dará para la diferencia de nivel rectificada :

$$a - (a' - c) = a - a' + c.$$

Con la visual que se dirige desde el punto B, obtendremos para la misma diferencia :

$$(b' - b) - b.$$

Como estas dos cantidades son iguales, su semi-suma

$$\frac{a - a' + c + b' - c - b}{2} = \frac{a - a' + b' - b}{2}$$

valdrá lo mismo que cualquiera de ellos y será, en su virtud, la diferencia de nivel verdadero entre los dos puntos A y B.

Los casos en que debiera operarse con frecuencia de este modo, no excede de 200 á 300 metros; distancia entre los dos puntos A y B.

Nivelación compuesta.—Casi siempre los dos puntos de los cuales se quiere tomar la diferencia de nivel, son bastante lejanos el uno del otro; es necesario, pues, hacer entonces entre ellos estaciones intermedias: es lo que se llama nivelación compuesta. Sean A y E los puntos extremos

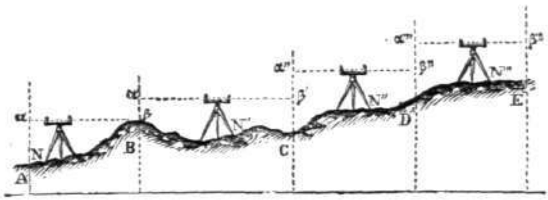

Fig. 56.

cuya diferencia de nivel se trata de determinar. Se coloca una mira en A, otra en B, á distancia conveniente de la primera, y el nivel en N, posición próximamente equidistante de A y B. La diferencia $\alpha - \beta$ de las lecturas que se hagan sobre las dos miras, expresará el desnivel que existe entre los puntos A y B. Trasladando el instrumento á N′, y tomando del propio modo las alturas de mira α' y β', que corresponden al punto B y á otro C elegido respecto á B, en iguales condiciones que éste lo fué con respecto á A, $\beta' - \alpha'$ indicará la diferencia de nivel entre B y C. Continuando así hasta llegar al punto E, encontraremos fácilmente la diferencia de nivel que se busca.

En efecto: llamando a, b, c, d, e las cotas respectivas de los diferentes puntos que se van sometiendo á la nivelación, tendremos:

$$b-a=\alpha-\beta;\quad b-c=\beta'-\alpha';\quad c-a=(\alpha+\alpha')-(\beta+\beta');$$
$$d-c=\alpha''-\beta'';\quad d-a=(\alpha+\alpha'+\alpha'')-(\beta+\beta'+\beta'');$$

y finalmente, siendo

$$e-d=\alpha'''-\beta''',$$

resultará:

$$e-a=(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha''')-(\beta+\beta'+\beta''+\beta''').$$

Las lecturas α, α', α'', etc., se llaman niveladas de atrás, y las de β, β', β'', etc., lecturas de adelante.

Deducimos, pues, que para hallar la diferencia de nivel pedida, deben sumarse las niveladas de atrás, y restar de esta suma las que producen las niveladas de adelante; siendo por lo tanto la cota de E igual á la del punto de partida A, aumentada con otra diferencia.

Si la cota de E fuera conocida, y se partiera de este punto para determinar A, serían β, β', β'', etc., las niveladas de atrás, y α, α', α'', etc., las de adelante; de suerte que la diferencia de nivel $e-a$ resultaría igual á la suma de las segundas disminuída en la de las primeras.

En lo que precede, hemos supuesto siempre que los puntos sometidos á la nivelación se hallaban por debajo del plano horizontal que determina el instrumento. Sin embargo, hay algunos casos, poco frecuentes, en que no sucede así. Supongamos, por ejemplo, que en la dirección seguida encontramos en C un muro, que corta el eje de la nivelación. En tal hipótesis, la diferencia de nivel entre A y B estará expresada por $b-a=\alpha-\beta$; mas para comparar las cotas de B y C, será preciso colocar en C la mira invertida, y observando entonces las lecturas α' y β', tendremos : $c-b=\alpha'+\beta'$. Por consiguiente, la diferencia de nivel que existe entre los dos puntos **A** y **C**, se hallará dada por la fórmula :

$$c-a=(\alpha-\beta)+(\alpha'+\beta')=(\alpha+\alpha')-(\beta-\beta'),$$

que sólo difiere de la que precedentemente habíamos obtenido en el signo de β'. De modo, que si convenimos en considerar como negativas las alturas de mira, siempre que ésta se presente invertida, seguirá siendo dicha fórmula aplicable al caso que examinamos. Si la distancia de **C** al

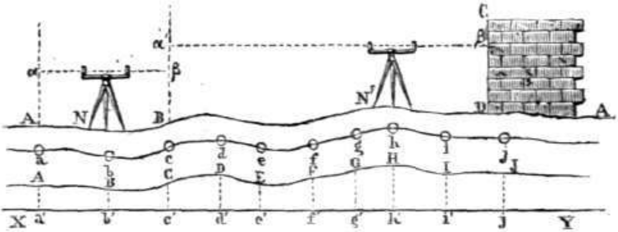

Fig. 57.

pie del muro fuera superior á la mitad de la altura que tiene la mira, se reemplazará ésta por una plomada, que deberá enrasar con la superficie horizontal que da el instrumento ; lo mismo practicamos si la altura de c, sobre el plano del nivel, superara á la longitud total de la mira.

Supongamos ahora que se trata de hallar el desnivel entre dos puntos, tales como **A** y **C**, encontrándose el intermedio **B** sobre la cresta de un muro. Será entonces preciso colocar en **B** la mira invertida, y medir además con una plomada la altura de **C**, sobre el plano que da el nivel ; así tendremos :

$$a-c=(\beta-\beta')-(\alpha-\alpha') : c=a+(\alpha-\alpha')-(\beta-\beta');$$

mas debiendo contarse como negativas las lecturas α' y β', puesto que las miras están invertidas. La regla enunciada precedentemente se puede considerar como general, y decir, en su virtud, que para encontrar la cota de un punto por medio de la nivelación compuesta, es necesario añadir á la cota de partida la suma algebraica de las niveladas de atrás, y restar la suma algebraica de las niveladas de adelante.

Perfiles. — En la mayor parte de los casos no nos limitamos á determinar la cota única del punto final, sino que

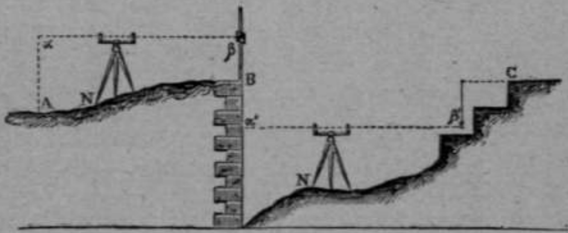

Fig. 58.

calculamos, además, las de un gran número de puntos intercalados entre los dos extremos, perteneciendo á una línea curva ó quebrada, cuya proyección sobre el papel se halla representada en la figura 57 en *a*, *b*, *c*, *d*, etc. Muchas veces, para formarnos idea más clara y exacta del terreno en la dirección del perfil, se construye gráficamente en una hoja la sección causada por el cilindro vertical, que tiene por base la línea *a*, *b*, *c*, *d*, etc. Con este fin, se toman las longitudes *ab*, *bc*, *cd*, etc., sobre la recta *x*, trazada en el dibujo, y elevando en cada punto una perpendicular igual á la cota correspondiente, reducida á escala, se obtendrá la curva pedida A B C D, etc. Como se opera en terreno muy ligeramente ondulado, en el que son casi iguales las cotas de los diversos puntos, se suele tomar para las ordenadas A*a*, B*b*, *c*C, etc., una escala doble, triple, y hasta décuple, de la adoptada para las distancias horizontales *ab*, *bc*, *cd*, etc. Procediendo así, debemos tener presente que en vez de tener la curva verdadera, se traza una figura más ó menos exagerada del terreno.

En el establecimiento de un perfil deben entrar principalmente los puntos cuyas cotas interesa conocer, como son los que marcan los cambios de pendiente, los más elevados y los más bajos. Si las proyecciones de estos puntos no están ya determinadas en la planimetría, deberemos tomar sobre el terreno los elementos necesarios para fijar su posición sobre el papel. Para obtener sus cotas operamos, según queda indicado en la nivelación compuesta, llevando los resultados de las operaciones en un registro, de la forma siguiente: suponiendo la cota del punto de partida A, conocida é igual á 100 metros:

PUNTOS NIVELADOS.	ALTURAS DE MIRA.	DIFERENCIAS DE NIVEL.		COTAS CALCULADAS.	COTAS CORREGIDAS.	DISTANCIAS.	OBSERVACIONES.
		EN MÁS.	EN MENOS.				
A. B.	2.345. 3.157.	»	0.812.	100.000. 99.188.	100.000. 99.183.	154m. 30.	Mojonera 12 del camino de San Juan á Jachal.
B. C.	3.734. 0.892.	2m.842.	»	99.188 102.030.	99.183. 102.024.	182. 73.	Estancia del corralón.
C. D.	0.321. 2.740.	»	2.419.	102.030. 99.611.	102.024. 99.607.	131. 46.	En el campo.
D. E.	3.565. 1.029.	2.536.	»	99.611. 102.147.	99.607. 102.143.	128. 61.	Idem.
E. F.	2.914. 0.528.	2.386.	»	102.147. 104.533.	102.143. 104.527.	164. 35.	Mojonera número 10 del camino de Jachal.

Si los puntos que se nivela son los vértices de un polígono, la última cota calculada deberá ser igual á la del punto de partida. Esta comprobación tendrá lugar si la suma de las niveladas de atrás es igual á la de las niveladas de adelante; ó bien, la suma de las diferencias de nivel positiva igual á la de las diferencias de nivel negativas. Si el perfil seguido se apoya en dos puntos cuyas cotas son conocidas por operaciones anteriores, estas sumas deben diferir en la misma cantidad que las cotas extremas. En ciertos casos, se extiende la nivelación sobre una sola línea, como sucede en los trazados de caminos, carreteras, ferrocarriles, etc. En tal supuesto, el perfil no cierra, y para verificar el trabajo, es necesario nivelar hacia atrás cuando se llegue al punto extremo, volviendo al de partida como si se tratase de un polígono.

Sin embargo, á pesar de todas las verificaciones que se pudieran hacer cuando el perfil es de mucha extensión, como en caminos, rutas, ó especialmente ferrocarriles, es necesario verificar por medio de travesaños las cotas de los puntos intermedios.

Nivelación por radiación (fig. 57). — En muchos casos, y particularmente cuando se trata de hallar las cotas de los puntos del detalle, en vez de seguir el método explicado, que consiste en operar por perfiles, es más ventajoso proceder por radiación; de esta manera, con una estación del nivel se pueden encontrar, dando la vuelta de horizonte, las cotas de una serie de puntos apoyándose en otra conocida.

Sea A el punto que sirve de referencia, y cuya cota suponemos ser, $27^{m},345$. B, C, D, E, F, los puntos del terreno próximo al A, que se trata de nivelar. Se coloca el instrumento en la estación central N, elegida con esmero para que el plano horizontal de las visuales deje por debajo á los puntos A, B, C, etc., sometidos á la nivelación. Se observa la mira situada en A, y se encontrará una altura que supondremos es $2^m,450$; el plano horizontal del instrumento tendrá por cota $29^m,795$. Transportando sucesivamente la mira á B, C, D, etc., y restando de $29^m,795$ las lecturas correspondientes, obtendremos las cotas de estos diversos puntos.

En el registro siguiente se pueden consignar las observaciones y cálculos hechos, para mayor claridad y facilidad.

ESTACIONES.	PUNTOS NIVELADOS	ALTURAS DE MIRAS.	COTAS DE LOS PLANOS HORIZONTALES DEL INSTRUMENTO.	COTAS CALCULADAS	OBSERVACIONES.
N	A	2. 450.		27. 345.	La cota conocida del punto A es 27. 345.
	B	1. 783.	27^m. 345.	28. 012.	
	C	3. 592.	+2. 450.	26. 203.	
	D	0. 869.	29. 795.	28. 920.	
	E	1. 215.		28. 580.	
N′	E	2. 467.		28. 580.	
	F	3. 582.	28. 580.	27. 465.	
	G	1. 726.	+2. 467.	29. 321.	
	H	3. 749.	31. 047.	27. 298.	

Al empezar la parte que trata de la nivelación, hemos dicho, entre otras cosas, que ésta trataba de medir las pendientes de las líneas que unen cada dos puntos, así como la distancia horizontal que los separa.

Pues bien: para tomar estas pendientes, ó mejor dicho, para medir los ángulos de pendiente de una línea que une dos puntos del terreno, se sirve uno de los clisímetros ó eclímetros, y por medio de estos instrumentos se practica la nivelación topográfica. Pero en estos instrumentos hay todavía que considerar dos clases, y son : los clisimetros ó niveles de pendiente, que dan desde luego las pendientes de las líneas, ó lo que es lo mismo, las tangentes de los ángulos que forman con el horizonte ; y los eclímetros, en general, que dan tan sólo los valores de dichos ángulos ó de sus complementos. Describiremos estas dos clases de instrumentos :

Clisimetro ó nivel de pendiente de Chesy.—Consta

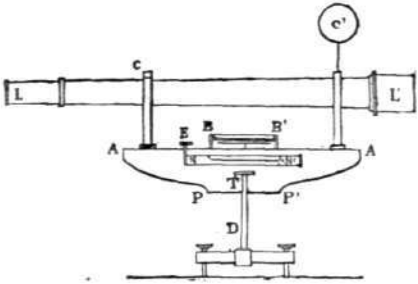

Fig. 59.

este instrumento de la columna D, terminada en su parte inferior por una plataforma de tres tornillos nivelantes, invariablemente á la columna y en dirección perpendicular á ella ; existe en su parte superior un platillo P P' ; estas piezas son la parte fija del instrumento. El resto puede girar alrededor del eje de la columna D, deteniéndose el movimiento por medio del tornillo de presión T. Componen la parte giratoria la regla AA', que en su medio lleva la brújula BB', y en sus extremos las pínulas AC, A'C', de desigual longitud, por las que pasa el anteojo astronómico LL′ y un nivel de burbuja de aire NN′ provisto de su tornillo de corrección E, que está colocado por debajo de la regla AA′. Para que pueda verse la burbuja del nivel, hay en la brújula dos aberturas rectangulares. La retícula del anteojo LL′ tiene dos hilos que se cortan en ángulo recto para precisar la dirección del eje óptico: uno es horizontal y el otro vertical.

Para determinar la diferencia de nivel entre dos puntos, se sitúa el clisímetro en estación en uno de ellos, de forma que sea vertical el eje de rotación de todo el sistema, para cuyo efecto se cala el nivel en dos posiciones perpendiculares; aflojando el tornillo T, se hace girar la parte superior del instrumento; el otro, como hemos dicho, es móvil por sí mismo. Se hace coincidir el cero del nonius con la graduación relativa á la pendiente indicada. Se busca luego por tanteos un punto tal, que colocando en él una mira cuya línea de fe exprese una altura idéntica á la del instrumento, quede el punto de mira sobre la dirección del eje óptico. Claro es que satisface entonces á que la recta que va del punto de estación va al pie de la recta. Podríamos también dirigir la visual al punto mismo del terreno, teniendo después en cuenta la altura del instrumento.

Verificaciones. — 1ª. La tangente en el punto medio de la sección longitudinal del nivel, debe ser perpendicular al eje general de giro del instrumento. 2ª. El eje óptico del anteojo debe coincidir con el eje de figura. Estas dos verificaciones son verdaderamente de construcción, y dependen de la vista del operador, que notará si el nivel es servible. 3ª. El eje óptico debe ser horizontal cuando, hallándose el instrumento en estación, coinciden el cero del nonius y el de la regla graduada. La misma nota que para las verificaciones anteriores.

Veamos ahora la descripción de los instrumentos de la segunda categoría; es decir, los eclímetros, que nos dan el valor de los ángulos de pendientes ó de sus complementos.

Del eclímetro en general. — Sabemos ya, que si se conoce el ángulo de pendiente de la línea que une dos puntos del terreno y la longitud de esta línea, se puede encontrar la diferencia de nivel que existe entre los dos puntos. Cuando la dirección referida se encuentra por encima de la horizontal, el ángulo de pendiente BAH toma el nombre de ángulo de elevación, siendo de depresión el CAH, para el cual la línea AC desciende, á partir del punto A. Siempre que se mida un ángulo de pendiente, es preciso tener cuidado de anotar si es de elevación ó de depresión, pues un error cometido por falta de tal cuidado, daría lugar á que para la diferencia de nivel se hallara una magnitud inexacta que diferiría de la verdadera en BC, doble del desnivel BH entre los dos puntos considerados.

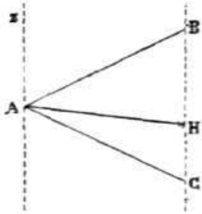

Fig. 60.

Sin embargo, se puede evitar toda confusión, midiendo en vez del ángulo de pendiente el BAZ, que forma AB con la vertical AZ. Este ángulo se denomina distancia zenital del punto B. Las distancias cenitales se cuentan desde 0° hasta 180°, pero su cálculo es del resorte del curso de Geodesia, así como su demostración.

Supongamos ahora un limbo vertical que contenga á CB (fig. 61), que une los puntos sometidos á la nivelación, é imaginemos que alrededor de su centro C gire un anteojo, arrastrando en su movimiento un nonius. Si el limbo está dispuesto de modo que sea horizontal el eje óptico AA′, cuando el cero de su graduación y el del nonius coincidan, es claro que al mirar al punto B, el cero del nonius dara una lectura que expresará el valor del ángulo de pediente BCH. Si la coincidencia de los ceros corresponde á la verticalidad del eje óptico, se obtendrá en ZCB la distancia zenital del punto mirado. Tal es el fundamento del eclímetro.

Se adapta este instrumento, por regla general, á la caja de una brújula, que es unas veces de madera y cuadrada, otras veces circular y metálica; el diámetro del limbo de esta brújula debe hallarse en un plano paralelo al eje óptico del anteojo, á fin de obtener, al mismo tiempo que los ángulos de pendiente, ó distancias cenitales, los azimutes de las direcciones que se observan. El eclímetro, así dispuesto, se llama brújula-eclímetro ó brújula-nivelante. El limbo del eclímetro puede girar sobre sí mismo, alrededor de un eje que pasa por su centro, y se halla unido á la caja de la brújula. Por otra parte, como las visuales que se dirigen al usar el instrumento, no forman ángulos muy grandes con el horizonte, se reduce ordinariamente el limbo á dos arcos unidos por una regla. La cara anterior de los arcos se halla dividida en grados y medios grados, y alrededor del centro gira un anteojo con una alidada, en cuyas extremidades se encuentran dos nonius concéntricos con el limbo y diametralmente opuestos.

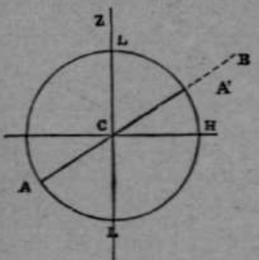

Fig. 61.

Estos nonius contienen regularmente 30 divisiones que corresponden á 29 del limbo, apreciándose por lo tanto hasta minutos.

Destinado el eclímetro á dar ángulos de pendiente, en cada uno de los arcos la división inicial marca cero en las extremidades del mismo diámetro, y aumentan las graduaciones en ambos sentidos á partir de esta división Sobre la cara interior del limbo, opuesta á las graduaciones, existe un nivel de aire N, que puede girar alrededor de una charnela colocada en una de sus extremidades, cuando al opuesto se la hace subir ó bajar con auxilio de un tornillo de corrección particular al nivel.

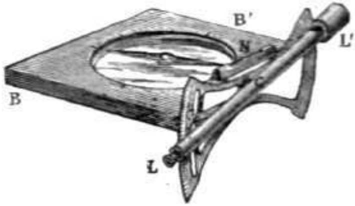

Fig. 62.

El instrumento se apoya sobre una plataforma de tres tornillos nivelantes unida á la caja de la brújula, y puede girar alrededor del eje general de rotación. El anteojo, con la alidada de los nonius, puede girar también alrededor del centro del limbo, rápida y lentamente, haciendo uso de pequeños tornillos de presión y coincidencia. Asimismo, el eclímetro puede moverse suavemente alrededor de un eje, con todas las partes que lo constituyen, por medio de un tornillo especial, que unido en su extremo á la caja de la brújula, atraviesa una tuerca fija al limbo.

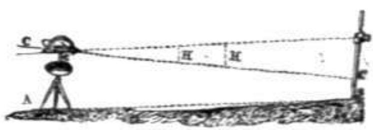

Fig. 63.

Para medir el ángulo de pendiente de una línea AB, se coloca el instrumento en estación en uno de los extremos A, y se empiezan por disponer á la vez verticalmente el eje general de giro y el limbo del eclímetro. Para conseguirlo, y en los casos de mayor perfección, la caja de la brújula lleva uno ó dos niveles fijos en todas posiciones; mas por regla general, nos limitamos á colocar aproximadamente, en situación vertical, el limbo del eclímetro. Hecho esto, se cala el nivel N. Se trae entonces el eclímetro al plano vertical que contiene el punto B, y en este plano se mira paralelamente á la línea que une dos puntos del terreno, haciendo que la tablilla de la mira colocada en B marque la altura BD igual á la del instrumento. El cero de cualquiera de los nonius señalará una lectura que expresará evidentemente el ángulo H formado por el eje óptico con la horizontal, ó sea el de inclinación de la línea A B.

El ángulo así obtenido será el verdadero siempre que se verifique la hipótesis enunciada de que al coincidir los ceros del limbo y de los nonius, sea horizontal el eje óptico del anteojo, hallándose el nivel calado. Si el diámetro de los ceros de los nonius fuera paralelo al eje óptico, ó coincidiera con su proyección sobre el limbo, claro está que la condición indicada se cumpliría siendo horizontal el diámetro de los ceros del limbo del eclímetro. Mas pudiendo ocurrir que la dirección CD de la visual forme con el diámetro de los ceros de los nonius un cierto ángulo medido por el arco Ln, será entonces necesario que el cero del limbo venga á situarse en o, siendo Ho=Ln, á fin de que el arco on, leído en el clímetro, sea igual á LH comprendido entre el eje óptico y la horizontal. Podremos pues, decir, que para que el instrumento se halle arreglado, debe verificarse que el ángulo formado por el diámetro de los ceros de los nonius con la dirección del eje óptico del anteojo, sea igual y se cuente en el mismo sentido que el que forma con la horizontal el diámetro de los ceros del limbo cuando el nivel está calado. Si esta condición no existe, y que el

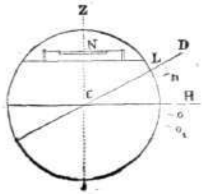

Fig. 64.

cero del limbo se halle en 0, existirá en las observaciones un error que se llama de colimación, expresado por la diferencia de aquellos dos ángulos.

Los resultados de las observaciones hechas con el eclímetro, se anotan para mayor claridad en un registro á medida que se van obteniendo, y estos elementos sirven después para el cálculo de las cotas que se ejecuta en el gabinete.

Con la brújula y el eclímetro unidos se opera de costumbre por radiación, á fin de hallar por una vuelta de horizonte las cotas de una serie de puntos convenientemente elegidos.

Fórmula de registro de nivelación con el eclímetro.

ESTACIONES	PUNTOS MIRADOS.	AZIMUTES.	DISTANCIAS HORIZONTALES	DISTANCIAS ZENITALES.	DIFERENCIA DE NIVEL.	COTAS		OBSERVACIONES.
						DADAS.	OBTDAS.	

Fórmula de nivelación con el eclímetro. — Sea A el punto de estación, y D el que se observa; siendo BD igual á la altura del instrumento, trazando la horizontal CC', llamando H el ángulo de pendiente de AB, Δ la distancia zenital, y K la distancia reducida al horizonte, claramente se descubre que la diferencia de nivel entre los puntos A y B estará expresada por la fórmula

$$dN = K \text{ tang } H - K \cot \Delta,$$

en la hipótesis que la tierra fuese plana. Esta expresión ha sido además calculada suponiendo que se dirigía la visual paralelamente á la línea que une los puntos del terreno; pero este modo de operar presenta el gran inconveniente de no ser siempre aplicable en terrenos cubiertos y exige, por otra parte, mucho tiempo, pues es

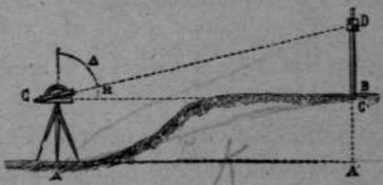

Fig. 65.

preciso tomar en cada observación una altura de mira igual á la del instrumento. Por lo tanto es preferible conservar á la línea de fe de la mira una altura constante que se fija con arreglo á las circunstancias de la localidad, y tener en cuenta en el cálculo la diferencia que existe entre esta altura y la del instrumento sobre el punto de estación. Supongamos, por ejemplo, que sea A el punto en que se coloca el eclímetro; designemos por dt la altura del centro del limbo sobre el suelo, y por m la altura BD del punto que se observa en la mira situada en B. Siendo la pendiente ascendente se ve sin dificultad que la diferencia de nivel BA' se halla indicada por

$$dN = K \text{ tang } H + (dt - m);$$

y en su virtud, representando por e la cota del punto de estación, y por b la de B, tendremos:

$$b = e + \mathrm{K} \text{ tang } \mathrm{H} + (dt - m). \tag{1}$$

Si la pendiente es descendente, la diferencia de nivel entre A y B será:

$$d\mathrm{N} = \mathrm{K} \text{ tang } \mathrm{H} + (m - dt);$$

resultando entonces para la cota del punto en que se coloca la mira,

$$b = e - \mathrm{K} \text{ tang } \mathrm{H} + (dt - m).$$

Mas si observamos que siendo de depresión el ángulo H tiene su tangente menor que cero, se reproducirá la fórmula (1), que será por lo tanto general, siempre que demos signo negativo al término K tang H cuando se refiera á ángulos de depresión.

En fin, si supusiéramos que el eclímetro midiera distancias zenitales, obtendríamos inmediatamente, en la hipótesis de que la visual fuera ascendente:

$$b = e + \mathrm{K} \cot \Delta + (dt - m). \tag{2}$$

Sucede con mucha frecuencia que se observa el punto mismo del terreno, y en tal supuesto, anulándose el valor de m, se convierten las dos fórmulas (1) y (2) en

$$b = e + \mathrm{K} \text{ tang } \mathrm{H} + dt = e + \mathrm{K} \cot \Delta + dt. \tag{3}$$

Cálculo de las cotas. — En las fórmulas anteriores es conocido desde luego el valor del primer término, y el del tercero se halla también prontamente en cada caso particular. El segundo, K tang H, ó K cot Δ, puede calcularse sin dificultad por logaritmos.

Fórmula de nivelación para largas tiradas. —

Las fórmulas que hemos empleado para determinar las cotas de los diferentes puntos, han sido calculadas con la restricción de que la tierra fuese plana. Dichas fórmulas no son aplicables, por lo tanto, cuando es muy grande la distancia que separa los puntos que se nivelan, pues en tal caso no se podrán considerar sin error de entidad, sus verticales como paralelas, ni referir las cotas á un plano de comparación. Hay que hacer, pues, dos correcciones : 1ª. Los errores de esfericidad. 2ª. Los errores de refracción. Pero entramos aquí otra vez en el dominio de la Geodesia, ciencia que se ocupa del levantamiento de planos por grandes partes del globo terrestre, y por este motivo dejaremos para ese curso estas dos demostraciones.

NIVELACIÓN TOPOGRÁFICA.

Se llama nivelación topográfica el conjunto de las operaciones que se practica, tanto sobre el terreno como en el gabinete, para determinar sobre un plano la diferencia de nivel de dos ó diferentes puntos del terreno con referencia á un plano ó línea que se llama de fe.

De nuevo dividiremos en dos estos géneros de operaciones : 1ª. Las que se operan con los niveles propiamente dichos, y que comprenden la nivelación por visuales horizontales, de las cuales debemos ocuparnos especialmente. 2ª. Las que se operan con los clisímetros, operando por la fijación de los ángulos de pendiente : nivelación especial, bien que muy poco exacta, para las grandes extensiones de terreno, y perteneciendo especialmente á la Geodesia.

Para el primer género de operaciones, sea el de visuales horizontales, hay dos métodos para operar :

1º. **Trazado de curvas horizontales.** — Las operaciones anteriores se extienden lo necesario para obtener las cotas de un número suficiente de puntos; elegidos conforme queda dicho, se puede entonces proceder al detalle de la nivelación, ó sea al trazado de las curvas horizontales. Se prepara este trazado haciendo en cada estación del nivel un croquis, en que se dibujan á ojo curvas horizontales que representen con la mayor exactitud posible las formas del terreno, sin sujetarse á equidistancia determinada, y fijándose tan sólo en la expresión de las inflexiones y pendientes de terreno, dando á aquellas líneas la curvatura que convenga, y alejándolas más ó menos, según la mayor ó menor rapidez de las pendientes. Debemos detenernos sobre todo, en la representación del terreno próximo á las divisiones de aguas, que se estudian de arriba abajo, y las vaguadas que se reconocen en dirección ascendente.

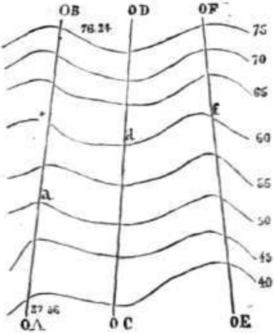

Fig. 66.

Los croquis así ejecutados, se rectifican unos á otros y se utilizan en la forma que vamos á exponer para el trazado de las curvas horizontales.

Puede hacerse este trazado, encontrando sobre el dibujo los puntos de paso de las curvas en la forma siguiente: Supongamos que AB, CD, EF, etc., representen los trazos de varios perfiles. Si los puntos cuyas cotas se han determinado sobre cada uno de ellos, se han elegido de tal suerte que resultan uniformes las pendientes entre dos consecutivos, nada será más fácil que fijarlos en el papel construyendo las escalas de pendiente de las rectas A*a*, D*d*, etc. Por lo tanto, es preciso que al escoger los puntos que han de ser acotados en los diversos perfiles, tengamos presente dicha circunstancia para hacer de modo que las líneas rectas que los unen dos á dos, puedan ser consideradas como si se hallaran sobre la superficie del suelo.

Aunque los perfiles indicados se encuentren bastante próximos, existirán entre ellos inflexiones del terreno que las operaciones de la nivelación no habrán dado á conocer, y que no deberán olvidarse para la representación más exacta del relieve en el intermedio de dichos perfiles. Para llenar estos huecos, nos valdremos de croquis ejecutados á ojo, operando según se dijo en la nivelación topoágrfica.

Cuando se desea trazar las curvas con gran precisión en una zona poco extensa, se logra mayor exactitud que con el procedimiento anterior, buscando en el mismo terreno puntos que pertenecen á las secciones horizontales. Una vez hallados estos puntos, se trasladan á la hoja del dibujo con arreglo á los métodos ordinarios de la planimetría.

2°. Método de los perfiles paralelos. — Haciendo uso del procedimiento que vamos á exponer, pueden ejecutarse simultáneamente las operaciones precisas para determinar las cotas de los puntos, y para fijar sus proyecciones en el plano. Al efecto, se elige en el terreno que debe representarse una línea AB, próximamente horizontal, sobre la cual se toman magnitudes iguales á 10 ó 20 metros. En cada punto de división 1, 2, 3, etc., marcado por un piquete, se levanta una perpendicular á AB, por medio de la escuadra. Estas perpendiculares señalan las direcciones de los perfiles paralelos, que se trasladan con facilidad al tablero de la plancheta en la escala del levantamiento. Haciendo estación en el punto E, é inclinando el instrumento, los perfiles del terreno y las líneas que los representan serán dos sistemas de rectas paralelas. Se buscan entonces sobre estos perfiles los puntos de paso de las curvas horizontales; con tal objeto, después de colocar el nivel en N, se asigna á la tablilla de la mira la altura conveniente para el trazado de una cierta curva $\alpha\,\alpha'$, y se traslada el portamira á los perfiles de modo que venga á situarse en los puntos α_1 α_2 α_3, etc., etc., donde aparece cubierta la línea de fe por el hilo horizontal de la retícula. Para cada una de estas posiciones se dirige con la alidada ó anteojo una visual á la mira, y la intersección de la línea que así se determina con la traza de perfil correspondiente, dará la posición del punto observado: de este modo se irán obteniendo puntos para la curva horizontal $\alpha\,\alpha'$. Con una sola estación de nivel, siendo la equidistancia igual á un metro, se podrá, por lo demás, trazar cuatro curvas, operando en la forma que hemos expuesto.

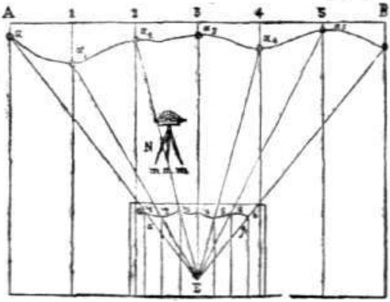

Fig. 67.

Hemos dicho en la nivelación topográfica que las cotas determinadas con ayuda del eclímetro se calculan con ciertos errores, y en general resultan por esta razón menos exactas que si se las hubiera obtenido por visuales horizontales. Hemos examinado estas últimas. Las primeras, es decir, las tomadas por el eclímetro, se admiten solamente cuando se opera en terreno sumamente desigual, porque este instrumento da el ángulo de pendiente ó la distancia zenital del eje óptico del anteojo dirigido sobre un segundo punto, y permite así calcular la cota que se busca, haciendo una sola estación. Finalmente, este instrumento es el único que se puede emplear siempre que se trate de un país muy cubierto, cortado por barrancos profundos, rápidos y escarpados; pero volvemos á repetir que esta nivelación es bastante inexacta. Sin embargo, pasaremos en revista aunque muy ligeramente, los diferentes métodos en que se emplea el eclímetro en la nivelación topográfica, para poder referirnos al teodolito en su uso general.

Primer método.—Partiendo de un punto que se supone conocido, se determina con su auxilio la de uno de los vértices principales del canevás, del A, por ejemplo; después se repite la operación en sentido inverso, para que, comprobando de este modo el resultado, ofrezca mayores garantías de exactitud. Haciendo luego estación con el eclímetro en A, se dirigen visuales á F, B, O, etc., y se leen los ángulos de pendiente ó distancias zenitales, que permiten calcular las cotas de estos puntos empleando las fórmulas de nivelación debidamente corregidas. Se transporta el eclímetro á B, y después de hechas tres observaciones sobre C, A, O respectivamente, se calculan las cotas de B, C, O, y así tendremos una verificación de las que se han obtenido para los puntos B y O en la primera estación. Si estas cotas sólo difieren en una cantidad comprendida dentro de los límites que exige la nivelación, sus promedios se consideran como valores de las cotas verdaderas.

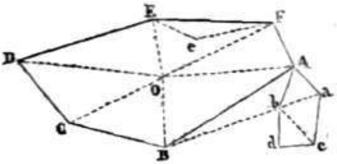

Fig. 68.

Procediendo de idéntico modo, la cota de cada punto se calcula dos veces, según la pendiente ascendente y descendente de cada lado. Cuando se llega á hacer estación en el último vértice principal, debe lograrse el cierre casi perfecto del polígono. La diferencia, que resulta siempre pequeña si se ha operado con esmero, se reparte entre todos los puntos proporcionalmente á la longitud de los lados.

Determinadas de esta suerte las cotas definitivas de los vértices pertenecientes al polígono principal, se hallan con facilidad los que corresponden á los demás puntos de la red trigonométrica. Continuando así la nivelación, se extiende sobre todo el terreno cuyo plano se trata de levantar. Las cotas sucesivas de los vértices del canevás se hallan, según vemos, apoyándose en lados cuyas longitudes son exactamente conocidas, porque en este caso no se miden en el dibujo, sino que se calculan por la resolución de los triángulos que forman la red trigonométrica. Hay una observación que hacer, sin embargo : se sabe ya que en las operaciones referentes á la planimetría del canevás poligonal, los resultados son tanto más exactos, cuanto mayores son los triángulos de que éste consta; en la nivelación, por el contrario, las cotas resultan tanto más erróneas, cuanto más largas son las bases en que se apoyan, no debiendo exceder de 1.200^m los lados de los triángulos.

Trazado de las curvas horizontales. — Como hemos dicho para las visuales horizontales, se necesita levantar un croquis bastante exacto; después de haber fijado los puntos de las curvas horizontales que se quieren tomar, se procede de la manera siguiente : Sean AB, CD, EF los trazos de secciones verticales que resultan de dos puntos acotados. En los levantamientos de grande extensión se encuentran estos puntos bastante separados, y las líneas que los unen sobre el terreno no presentan pendientes uniformes. Como por otra parte las escalas empleadas son bastante pequeñas, se determinan los puntos de paso de las curvas por un procedimiento expedito que da la suficiente aproximación. Fijémonos en el plano vertical AB, que une los puntos acotados 37^m,56 y 75^m,24, y supongamos que sea de 5 metros la equidistancia entre las secciones horizontales: se empieza á determinar á ojo, según las indicaciones de los croquis de nivelación, los puntos de paso de las curvas 40^m y 75^m, que son los más próximos á los acotados A y B. Á los mismos croquis referiremos también á ojo los puntos en que cortan á la sección A B las curvas intermedias 45^m, 50^m, etc., aproximándolos más, donde aparezcan las pendientes más fuertes, y alejándolos donde sean más débiles. Igual operación se ejecuta sobre los planos verticales CD, EF, y se termina fácilmente el trazado de las curvas de nivel.

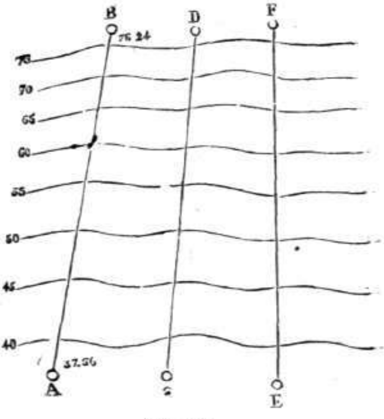

Fig. 69.

Cuando se trate de levantamiento de planos de gran escala y reducida extensión, destinados á representar con mucho rigor las formas del terreno, deben aproximarse los puntos nivelados, á fin de que resulte uniforme la pendiente del suelo entre cada dos consecutivos.

Terminaremos diciendo, que cuando se presentan dentro de la zona del levantamiento de planos superficies inaccesibles que no pueden representarse por una nivelación rigurosa, se prolongan las curvas horizontales hasta los límites del escarpado, y se dibujan después con arreglo á signos convencionales las formas de estas superficies, que no es posible trazar por los procedimientos ordinarios.

Del teodolito para el canevás topográfico.—Hemos visto el empleo de este instrumento en la planimetría en

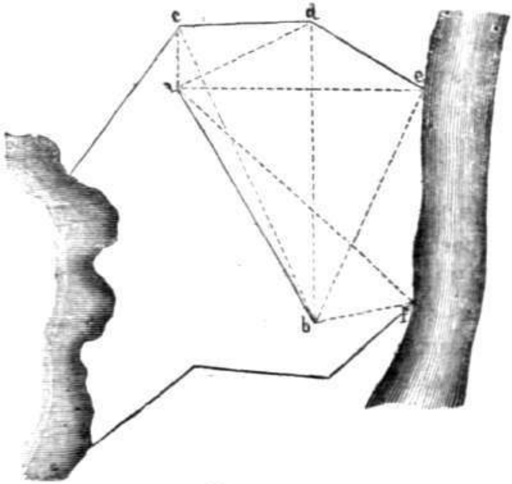

Fig. 70.

general, tomando ángulos con él; pero nos toca ahora considerarlo para formar el canevás topográfico, y aun su uso, como eclímetro en la nivelación topográfica.

Examinaremos el primer caso, es decir, la formación del canevás topográfico. Para formar este canevás con dicho instrumento, se trata de abarcar el polígono que se desea levantar, en una red completa de triángulos: es lo que se llama el método de triangulación. Éste consiste en tomar una base interior en el polígono, la mayor posible en tamaño, y de cuyas dos extremidades se puedan ver todos los vértices del polígono cuyo plano se quiera levantar. Sea un polígono cuyos vértices principales son *c*, *d*, *e*, *f*, etc... y la base *ab*: haciendo estación en los extremos *a* y *b*, se dirigen visuales á todos los puntos que se trata de levantar, observando los ángulos de dichas visuales con la base.

Construiremos el plano por el registro de campo, el cual será:

Estación	en *a*. —	(base *ab*.)	
Visual	» *c*.		200°.
»	» *d*.		270°.
»	» *e*.		300°.
»	» *f*.		340°.
Estación	en *b*. —	(misma base.)	
Visual	*a* *c*. —		20°.
»	» *d*. —		60°.
»	» *e*. —		87°.
»	» *f*. —		120°.

Además de dichas anotaciones, se llevará un croquis del terreno.

De los ángulos del registro se deducen los ángulos menores de 180° que forman parte de los triángulos, y se procede á construir una minuta que se hace trazando la base *ab*, que se ha medido bien; con el transportador se construyen los ángulos tomados, y se marca la intersección de las visuales de las dos extremidades de la base, lo que nos da los vértices del polígono. Para obtener el área, sea del polígono entero, sea de cualquiera de sus triángulos en que ha sido subdividido, los métodos ordinarios de la trigonometría rectilínea nos bastarán. Si al mismo tiempo queremos nivelar los mismos vértices, nos serviremos del anteojo del teodolito como de un eclímetro, y por los métodos explicados más arriba, obtendremos las diferencias de nivel y las curvas pedidas.

Hay tres métodos para construir el plano en el caso que nos ocupa:

El primero es el que acabamos de indicar, con transportador y núñez. Haciendo la minuta del plano, es el método más fácil.

El segundo, resolviendo los triángulos, calculando las distancias *ac*, *bc*; *ad*, *bd*, etc., y fijando los puntos por la intersección de arcos de círculos.

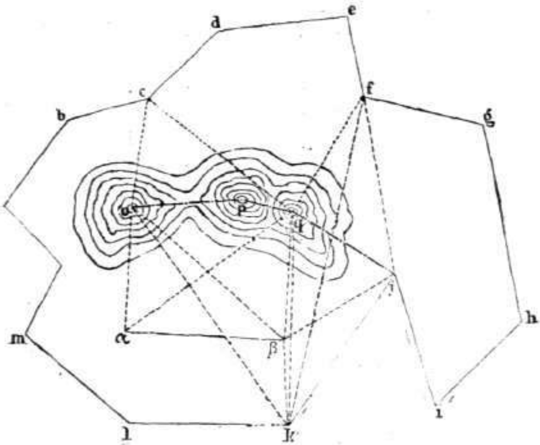

Fig. 71.

El tercer método, y el más exacto, es el siguiente: Hecha la minuta con el transportador, y resueltos los triángulos, se calculan las coordenadas de todos los puntos con respecto á dos ejes rectangulares, y se fija cada punto por medio de dichas coordenadas rectangulares. Este método lleva la ventaja de que cada punto se construye independientemente de los demás, y que no puede haber acumulación de errores de dibujo.

Puede suceder que con una base no sea posible ver desde sus extremos todos los vértices del polígono. Entonces se necesita de más de una base; pero ésta, ó las que se fijan, deben estar todas relacionadas entre sí, y sobre todo con la primera.

La figura adjunta da un ejemplo del caso enunciado: Suponemos un polígono atravesado por una cadena de cerros. La primera base es $\alpha\beta$, única que se mide con la mayor exactitud. La segunda base es oq, en la cumbre de los cerros. La tercera, βq, para fijar K y g. La cuarta será qK, para fijar f y j. La quinta sería fj, para pasar á la otra parte del polígono.

Observación práctica. —En topografía, basta la construcción del plano por medio del transportador con núñez.

Los triángulos no deben tener ángulos menores que 30°.

En los triángulos importantes se deben observar los tres ángulos, y exigir que la suma sea igual á 180°. Habiendo fijado los vértices, y, si es necesario, los ángulos de pendiente con el teodolito, se servirá uno de la plancheta ó de la brújula para el levantamiento de los detalles.

LEVANTAMIENTO DEL PLANO DE UN EDIFICIO.

El levantamiento del plano de un edificio es la representación de su conjunto, de su distribución, de su decoración y de sus detalles, hecha sobre el papel por medio de las proyecciones.

Las proyecciones están ejecutadas sobre planos, paralelos á las diferentes partes del edificio.

El levantamiento se subdivide en tres partes: 1ª. Operaciones exteriores. 2ª. Dibujo del plano. 3ª. Redacción de la memoria.

1°. Operaciones exteriores. — Las operaciones exteriores consisten en la ejecución de los croquis, tanto del conjunto como de los detalles, y en la inscripción de las notas que deben servir de base á la redacción de la memoria.

Se empieza por hacer el reconocimiento del edificio y de sus límites. Estos límites comprenden el espesor entero de las paredes que rodean la parte que se debe representar, así como las partes de pared que se prolongan.

Después del reconocimiento, se preparan los planos de los pisos bajos y de los altos.

Planos. — La sección por un plano horizontal de todas las piezas que componen un piso, con la proyección sobre este plano de todo lo que está visto por debajo, es lo que se entiende por plano de un piso (el suelo, el pavimento; excepto las tablas que no se hallan figuradas).

La posición del plano secante ó cortante, está dispuesto de la manera siguiente:

1ª. En los subterráneos, á la altura de las bóvedas.

2ª. Por el piso de abajo y los de arriba, á 10 centímetros encima de las tablillas de las ventanas.

Si las ventanas de un piso no se encuentran todas á la misma altura, la posición del plano secante deberá ser tal, que las corte todas, ó á lo menos su mayor número.

Por los desvanes, como por todos los pisos superiores, según la forma de su construcción.

Cuando es imposible conformarse á estas prescripciones, se tomará nota del plano secante ó cortante.

Cada plano estará dibujado en hoja de papel separado.

Cada pieza del edificio llevará una letra capital, la cual corresponderá á una leyenda, haciendo conocer el destino de dicha pieza. Por último, el lado de la fachada principal se situará debajo de la primera hoja.

Piso bajo. — Se determina en primer lugar el canevás.

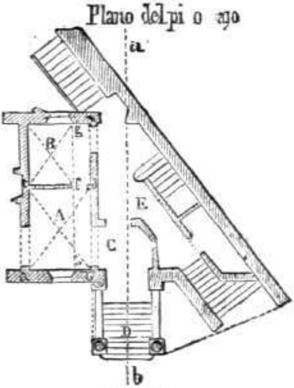

Fig. 72.

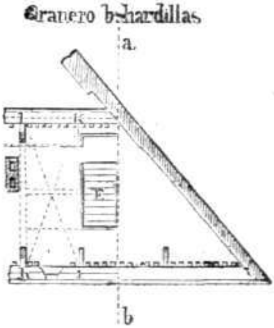

Fig. 73.

Para eso se mide las caras ab, cd, etc., y las diagonales de

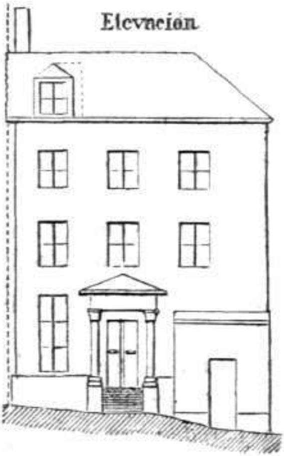

Fig. 74 A.

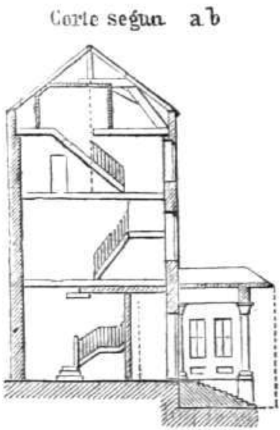

Fig. 74 B.

una de las piezas, y con estas dimensiones se construye un polígono *abcd*, el cual es el canevás, al que se van ligando los detalles, procediendo en el orden siguiente:

1°. Espesor de las paredes que forman la pieza A.

2°. Chimeneas.

3°. Aristas de las bóvedas.

4°. Puertas y ventanas.

5°. Ornamentos.

6°. Escaleras.

El levantamiento del plano de los detalles, habiendo acabado en la pieza A, se liga esta primera pieza á la segunda B, por medio de una recta *efg*, que se hace pasar por una comunicación existente entre las dos piezas, y de la cual se fija la posición midiendo las distancias *ae*, *cf*. Se determina después el punto *g*, y luego se toman los ángulos del cuarto B con relación á la línea *fg*.

Si ninguna comunicación directa existiera entre las dos piezas, se emplearía una línea quebrada, de la cual se determinaría la posición por las operaciones del levantamiento con el metro.

El canevás de B, estando construído, se levantan los detalles, y se siguen las operaciones en el mismo orden para las demás piezas del piso bajo.

Como advertencia, se debe inscribir las cotas de todas las líneas medidas sobre el croquis y sobre otras líneas.

Plano de los otros pisos. — Se levantan como el plano del piso bajo.

Plano del granero y desvanes. — Se construye el canevás *hikl* de una de las piezas del granero, determinando el polígono formado por las paredes que constituyen esta pieza.

Se figura el techo por una sección desde el vértice ó por su mitad, y se proyecta sobre el plano todo lo que está visto por debajo del plano secante, como lo largo de la pared, la gotera, etc., etc.

Todo lo que se ha dicho anteriormente para la representación de los detalles, la inscripción de las cotas y la manera de relacionar las piezas de un piso, todo esto es aplicable á este piso.

Cortes verticales. — Una sección por un plano vertical, con una proyección sobre este plano de todo lo que está visto por encima de él, es lo que se llama un corte.

La simple sección se llama perfil.

Los cortes deben tener los detalles de construcción, los cuales no se encuentran bastante determinados por los planos, la altura de las puertas, de las ventanas, etc., etc.; la inclinación del suelo, etc.

Los cortes están todos hechos sobre una hoja especial.

Elevación. — Una elevación es la proyección vertical de una cara exterior del edificio ; debe dar todos los detalles de la fachada.

Dibujo del levantamiento del plano. — Los dibujos están construídos según los croquis. Las cotas deben escribirse con tinta colorada.

Redacción de la memoria. — La memoria sobre el levantamiento del plano del edificio estará dividida en cinco artículos :

1°. Preliminares. — Comprende una nota sucinta sobre el edificio, indicando poco más ó menos los motivos de su construcción, su época, sus diferentes destinos, y los cambios sucesivos y principales de la distribución de las piezas; las principales reparaciones que ha tenido; en suma, todo lo que puede presentar interés.

2°. Distribución. — Situación y exposición del edificio; uso de esta distribución, general y particular; disposición de los ejes de las paredes; relación entre las distribuciones de los diferentes pisos; disposición de las comunicaciones interiores y exteriores, como puertas, corredores, galerías, etc., etc.; especie y situación de las bóvedas y de los tablados; disposición de las chimeneas: disposición del techo y vertientes de las aguas de lluvia.

3°. Construccion. — Tratará de la mampostería de las paredes, de sus espesores, de sus vestimentos, indicando si hay piedras; de la mampostería de las bóvedas, de las chimeneas, de las escaleras, de los tablados y pisos de madera ú otros; de los cielos rasos, del techo, de las aberturas en general, de la madera empleada en los marcos de las puertas y de las ventanas; de las cerraduras y cerrojos de puertas y ventanas; de los vidrios de las ventanas y puertas.

4°. Decoracion. — Se hará conocer el carácter general de la arquitectura del edificio, los detalles más notables de dicha arquitectura, así como la decoración de los cielos rasos, sus pinturas, como las de las paredes, si las hay; en fin, todo lo notable y capaz de embellecer el edificio.

5°. Observaciones generales. — Observaciones sobre el estado actual del edificio, y si hay composturas que hacerle: propuestas de cambio para evitar inconvenientes notados en la distribución; decoración de la construcción.

AGRIMENSURA.

La Agrimensura comprende dos partes:

1ª. La valuación de la superficie de los terrenos.

2ª. La división de dicha superficie según relaciones dadas.

1°. Valuacion de las superficies. — Esta operación consiste en determinar la superficie de la proyección horizontal del terreno que se mide.

Para la agrimensura de un terreno, es útil levantar el plano completo de éste, pues sobre el papel se descompone más fácilmente que sobre el terreno la superficie total en figuras geométricas muy cómodas para valuar.

Cuando un terreno está formado por diferentes partes, de las cuales se necesita tener las áreas separadas, como sucede para los avalúos cadastrales, se determina antes que todo la superficie de todas las partes reunidas, después la superficie de cada parte, y se ve si la suma de todas ellas corresponde al área total. Se admite, según la ley, un error de $\frac{1}{300}$, con lo cual no se tiene que volver á empezar la operación.

El cálculo de las superficies terminadas por líneas rectas no presenta ninguna dificultad. Vamos á dar los ejemplos siguientes :

Sea determinar el área de un polígono levantado :

1°. Con la escuadra por caminata.

Las operaciones mismas del levantamiento del plano dividen el polígono en triángulos, trapecios, rectángulos, etc., cuyas dimensiones son conocidas.

2°. Con la escuadra por intersecciones.

Para levantar el plano del polígono, se baja de sus vértices perpendiculares sobre sus dos bases O M, O N, y se miden las distancias

$$oB = x_1 \; oC = x_2 \; oD = x_3 \; oE = x_4 \; oF = x_5 \; oG = x_6.$$
$$oB' = y_1 \; oC' = y_2 \; oD' = y_3 \; oE' = y_4 \; oF' = y_5 \; oG' = y_6.$$

Si se resta del rectángulo ODHE′ los cinco trapecios, el rectángulo y el triángulo, que son exteriores al polígono A_1, A_2, A_3..., se tendrá la superficie de este polígono.

Efectuando los cálculos, se obtiene la fórmula siguiente:

Superficie del polígono :

$$=\frac{1}{2}\left\{x_1(y_2-y_6)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_5-y_3)+x_5(y_6-y_4)+x_6(y_1-y_5).\right\}$$

Fórmula que es fácil generalizar para un polígono de un número cualquiera de lados.

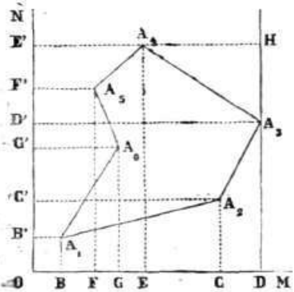

Fig. 75.

3°. Con la plancheta :

Se trazan con el lápiz perpendiculares de todos los vértices sobre una directriz cualquiera. Se obtienen así triángulos, trapecios, etc., etc., de los cuales se toma las dimensiones con la escala del plano.

4°. Con un goniómetro por caminata :

Se podría proceder como en el caso anterior, pero es más exacto servirse exclusivamente de los ángulos y de las distancias tomadas sobre el terreno é inscritas en el registro de campo. Esta observación puede aplicarse á los dos ejemplos siguientes :

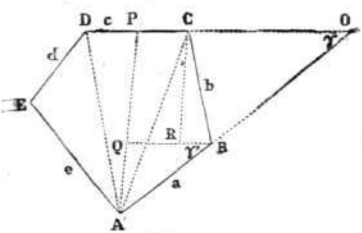

Fig. 76.

Designaremos los ángulos del polígono por A, B, C, D, E, y los lados por *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

La superficie S=ABC + DAC + DAE.

El primer triángulo $ABC = \frac{ab}{2}$ sen B, y el último,

$DAE = \frac{de}{2}$ sen E ; el segundo $DAC = \frac{c}{2} AP$.

Bajaremos de B la perpendicular BQ, sobre la AP, por C llevaremos la CR á esta altura, y prolongaremos AB y DC hasta su encuentro en O.

$$\left.\begin{array}{l} DAC = \frac{c}{2} AP = \frac{c}{2}(PQ + QA). \\ PQ = Rc = b \text{ sen } RBc = b \text{ sen } c. \\ QA = a \text{ sen } \gamma = a \text{ sen } (B + c - \\ \quad 180^\circ) = -a \text{ sen } (B + c) \end{array}\right\} DAC = \frac{cb}{2} \text{sen } C - \frac{ac}{2} \text{sen}(B+c),$$

por consiguiente

$$S = \frac{1}{2}\left\{\left(ab \text{ sen } B + de \text{ sen } E + cb \text{ sen } C - ac \text{ sen } (B + c)\right).\right\}$$

5°. Al goniómetro por irradiación :

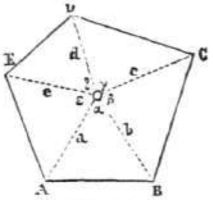

Fig. 77.

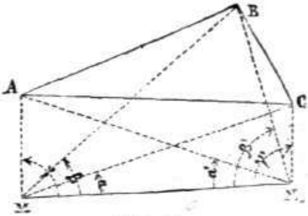

Fig. 78.

Empleando nada más que los elementos recogidos sobre el terreno, se tiene :

$$S = \frac{1}{2}\left(ad \text{ sen } \alpha + bc \text{ sen } \beta + cd \text{ sen } \gamma + de \text{ sen } \delta + ea \text{ sen } \varepsilon\right).$$

6°. Al goniómetro por intersecciones.

Los elementos del levantamiento son : la base $MN = b$ y los ángulos de la base α, β, γ; α', β', γ'.

$$S = ANB + BNC - ANC.$$

La superficie de cada uno de los triángulos puede ser expresada en función de cantidades conocidas. En efecto: tomemos el triángulo BNC, (fig. 78). En este triángulo se conoce el ángulo BNC $=\gamma'-\beta'$, y los dos lados que comprenden este ángulo están dados por las relaciones

$$\frac{\mathrm{NC}}{b}=\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \mathrm{M}c\mathrm{N}}=\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x+\gamma')}$$
$$\frac{\mathrm{NB}}{b}=\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \mathrm{MBN}}=\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta+\beta')}$$

Cuando se trata de valuar la superficie de un terreno terminado por líneas curvas, el problema no es suceptible de una solución muy exacta, pero por la práctica se obtiene un resultado bastante satisfactorio dividiendo las curvas en arcos demasiado pequeños para que se confundan sensiblemente con sus cuerdas.

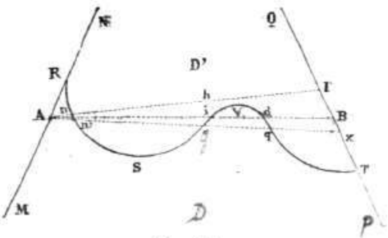

Fig. 79.

División de superficies. — Los problemas que tienen relación con la división de las superficies no se encuentran sin dificultad, sobre todo cuando tienen que sujetarse á condiciones particulares de interés ó de localidad. Se resuelven estos problemas sobre el plano de la manera siguiente:

Se opera la división pedida al tanteo, se miden las áreas particulares de las divisiones, y se reconoce la cantidad que cada una tiene de más ó de menos; se corrigen entonces las líneas de división, y después de algunos tanteos, se llega á un resultado satisfactorio.

Hé aquí una aplicación de esta solución general:

Dos terrenos comprendidos entre las rectas NM, PQ, están separados por una línea ondulada RST. Se desea reemplazar este límite por una recta, partiendo del punto A, de manera que las dos propiedades tengan todavía la misma extensión superficial, (fig. 79).

Después de haber hecho el levantamiento del plano MNPQRST de los límites de los terrenos D y D', se traza una recta AB, que satisfaga aproximadamente á la condición requerida; se valúan las áreas $mSi = a^2$; $dTB = b^2$, que se quitan al propietario del terreno D', y las áreas $nAR = a'^2$; $iVD = b^2$, que se quitan al propietario del terreno D.

Supondremos que las sumas de las áreas primeras exceden á las de las segundas en c metros cuadrados. Se construirá el triángulo ABx, equivalente á c metros cuadrados, y la recta Ax será el límite pedido. La posición de esta recta está determinada por el valor de Bx, la cual es $\frac{2c}{h}$, visto que $ABx = c = \frac{Bx \times h}{2}$. Es fácil de ver que la recta Ax quita á los dos terrenos superficies iguales. En efecto, la superficie quitada al terreno D' es :

$$S = a^2 + b^2 - mngi - dBxq,$$

y la que se le da es :

$$S' = ARn + ggV = a'^2 + b'^2 + mAn + igqd.$$

Por consiguiente

$$S - S' = a^2 + b^2 - (a'^2 + b'^2) - (mAn + mngi + igqd + dBxq),$$

ó más bien :

$$S - S' = c - ABx = 0.$$

La recta Ax, estando así construída, se le fija sobre el terreno, haciendo en el punto que corresponde á A del papel un ángulo MAx con el homólogo de la recta AM.

DEMOSTRACIÓN

DEL TEOREMA DE SIMPSÓN, QUE SIRVE PARA TOMAR EN LA AGRIMENSURA, EL ÁREA DE LOS LÍMITES CURVOS DE CAMPOS CON LA MAYOR APROXIMACIÓN.

Busquemos, en primer lugar, el área de un pequeño segmento CEM de una curva cualquiera, referida á los ejes rectangulares Ax, Ay, y llamemos α el ángulo MCH, formado por la cuerda CM con Ax. Tiremos la ordenada KE por el medio K entre las ordenadas terminales CB, MP. Se puede sensiblemente imirar el arco CM como perteneciente á una parábola, cuyo vértice L corresponde al medio I de la cuerda. El área del segmento es, pues :

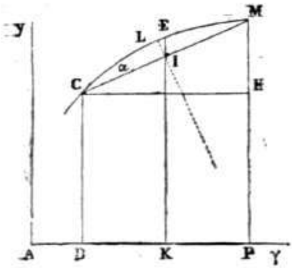

Fig. 80.

$$\mathrm{CEMI} = \frac{2}{3}\,\mathrm{CMLI}.$$

Pero los triángulos LEI, MCH, dan :

$$\mathrm{LI} = \mathrm{EI}\cos x.\quad c\mathrm{M} = \frac{c\mathrm{H}}{\cos x},$$

de donde

$$\mathrm{CEMI} = \frac{2}{3}\,\mathrm{EI}\times\mathrm{CH}.$$

Hagamos :

$$\mathrm{BK} = \mathrm{KP} = h,\ \mathrm{CB} = y',\ \mathrm{KE} = y'',\ \mathrm{PM} = y'''.$$

El área CBPM se compone de un trapecio :

$$\text{CBPM} = h\,(y' + y'''),$$

y de

$$\text{CEMI} = \frac{4}{3}\,h\,\text{EI}.$$

Por

$$\text{EI} = \text{EK} - \text{KI} = \frac{1}{2}\,(2y'' - y' - y''');$$

por consiguiente, el segmento

$$\text{CEMI} = \frac{2}{3}\,h\,(2y'' - y' - y'''),$$

y la pequeña área

$$\text{CEMPB} = \frac{2}{3}\,h\left(\frac{1}{2}y' + 2y'' + \frac{1}{2}y'''\right).$$

Supongamos el área plana B A C D, que se la quiera tener limitada por la curva A C, la recta B D y las perpendiculares AB, CD. Se cortará la base BD en un número par de partes iguales, de la cual h será la longitud, y por los puntos de división se llevarán las ordenadas y', y'', y'''....y^n, que cortarán el área en elementos cuyas superficies respectivas estarán expresadas de dos en dos por la fórmula anterior, es decir, la segunda. La tercera será :

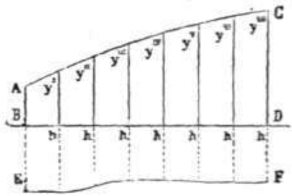

Fig. 81.

$$\frac{2}{3}\,h\left(\frac{1}{2}\,y''' + 2y \;\; + \frac{1}{2}\,y^{\text{v}}\right), \frac{2}{3}\,h\left(\frac{1}{2}\,y^{\text{v}} + 2y^{\text{vi}} + \frac{1}{2}\,y^{\text{vii}}\right),$$

etcétera, etc.

La suma será igual á :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}y' + 2y'' + y''' + 2y^{\text{IV}} + y^{\text{V}} \ldots + \frac{1}{2}y^{n}\right).$$

$$\text{BACD} = \frac{2}{3}h\left(\frac{1}{2}(y'+y'')+(y''+y'''+\ldots y^{n-1})+(y'''+y^{\text{IV}}+y^{\text{V}}\ldots y^{(n-1)}\right).$$

Tal es el teorema de Simpsón : el área formada de un número par de trapecios rectángulos y curvilíneos de la misma altura h, se encuentra tomando :

La mitad de la suma de las ordenadas extremas, más la suma de todas las coordenadas; aquellas primeras exceptuadas; más, en fin, las sumas de todas las ordenadas de rango par; el todo multiplicado por $\frac{2}{3}h$.

La misma regla se aplica evidentemente al caso en que el área, como ACFE, esta terminada por dos curvas opuestas, llamando y', y'', y''', etc..., la longitud total de cada paralela.

Cuanto más pequeña es h, tanto más se acerca al resultado el área pedida. Este teorema se aplica á toda superficie irregular, porque se puede descomponer en otras que se valúan separadamente y que se añaden ó restan después, según los casos. Cuando sucede que la base se encuentra cortada por la curva, la misma regla recibe su aplicación, haciendo igual á cero la ordenada del punto de sección.