



TESIS DOCTORAL
POR COMPENDIO DE PUBLICACIONES

**HERRAMIENTAS MEJORADAS
PARA LA CARACTERIZACIÓN DE
SISTEMAS FOTOVOLTAICOS
AUTÓNOMOS**

Autor: Francisco José Casares de la Torre.

*Directores: Dr. D. Rafael López Luque.
Dr. D. José Cristóbal Ramírez Faz.*

Córdoba, Noviembre 2015

TITULO: *Herramientas mejoradas para la caracterización de sistemas fotovoltaicos autónomos.*

AUTOR: *Francisco José Casares de la Torre*

© Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba. 2016
Campus de Rabanales
Ctra. Nacional IV, Km. 396 A
14071 Córdoba

www.uco.es/publicaciones
publicaciones@uco.es

Lista de publicaciones originales

Esta tesis se presenta en forma de compendio de publicaciones, de acuerdo con el artículo 24 de la normativa reguladora de los estudios de Doctorado de la Universidad de Córdoba (Aprobado en el consejo de gobierno de 21 de Diciembre de 2011 y modificada por el mismo órgano el 29 de Mayo de 2013 y el 23 de Julio de 2013) que desarrolla el RD 1393/2007 y el RD 99/2011 por el que se regulan las enseñanzas de doctorado. Dichas publicaciones recogen los resultados que han sido obtenidos en los diferentes trabajos de investigación desarrollados con el fin de alcanzar el objetivo fijado para la realización de la tesis. A continuación se listan las referidas publicaciones que constituyen los anexos de la presente memoria de tesis.

Anexo 1

F.J. Casares, R. López-Luque, R. Posadillo, M. Varo-Martínez. *Mathematical approach to the characterization of daily energy balance in autonomous photovoltaic solar systems*. Energy, 2014, 72, 393-404. <http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2014.05.053>.

Energy: Factor de impacto: 4,844.

Q1 en el área de ENERGY&FUELS (JCR), posición 12/ 89

Q1 en el área de THERMODYNAMICS (JCR), posición 2/55

Anexo 2

F.J. Casares, J. Ramírez-Faz, R. López-Luque. *Development of synthetic hemispheric projections suitable for assessing the sky view factor on horizontal planes*. Energy and Buildings, 2014, 82, 696-702. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enbuild.2014.06.057>.

Energy and Buildings: Factor de impacto: 2,884.

Q1 en el área de ENGINEERING, CIVIL (JCR), posición 6/125

Q1 en el área de CONSTRUCTION&BUILDING TECHNOLOGY (JCR), posición 5/59

Q2 en el área de ENERGY&FUELS (JCR), posición 30/ 89

Anexo 3

J. Ramírez-Faz, R. López-Luque, F.J. Casares. *Development of synthetic hemispheric projections suitable for assessing the sky view factor on vertical planes*. Renewable Energy, 2015, 74, 279-286. <http://dx.doi.org/10.1016/j.renene.2014.08.025>

Renewable Energy: Factor de impacto: 3,476.

Q1 en el área de ENERGY&FUELS (JCR), posición 20/ 89

TÍTULO DE LA TESIS: HERRAMIENTAS MEJORADAS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE SISTEMAS FOTOVOLTAICOS AUTÓNOMOS.

DOCTORANDO: FRANCISCO JOSE CASARES DE LA TORRE

INFORME RAZONADO DE LOS DIRECTORES DE LA TESIS

Dentro de la amplia problemática de la fiabilidad de los Sistemas FotoVoltaicos Autónomos (SFVA), que abarca aspectos económicos y técnicos, relacionados entre sí debidos al carácter descentralizado de la aplicación, la presente Tesis desarrolla herramientas que permiten mejorar la caracterización del funcionamiento de estos sistemas. Concretamente caracteriza matemáticamente el balance energético de los SFVA para la obtención del índice de fiabilidad LLP de estos, sin tener que recurrir a métodos de simulación, pues se basa en la modelización de la radiación solar diaria realizada por Aguiar como procesos estocásticos de primer orden, y por otro lado, aporta herramientas de estudio para escenarios particulares de la radiación difusa en localizaciones con sombreado y obstrucción solar. En este caso, es de especial interés el desarrollo matemático presentado pues constituye una herramienta de aplicación en la generación de proyecciones específicas para poder determinar el SVF mediante ratio de superficies.

Por todo esto, consideramos que se trata de una Tesis de gran calidad, que aborda un problema real, de gran actualidad y con gran aplicabilidad al sector.

La Tesis se presenta como un compendio de tres publicaciones en algunas de las revistas más prestigiosas en el área de investigación, todas en el primer cuartil.

ENERGY (2014, Volumen 72, páginas 393-404), Factor de impacto: 4,844.

RENEWABLE ENERGY (2015, Volumen 74, páginas 279-286), Factor de impacto: 3,476.

ENERGY AND BUILDINGS (2014, Volumen 82, páginas 696-702), Factor de impacto: 2,884.

Por todo ello, se autoriza la presentación de la tesis doctoral.

Córdoba, 5 de noviembre de 2.015

Firma de los directores



Fdo.: RAFAEL LÓPEZ LUQUE



Fdo.: JOSÉ RAMÍREZ FÁZ

RESUMEN

El dimensionado de un Sistema FotoVoltaico Autónomo (SFVA) consiste en calcular, con la máxima fiabilidad posible, el tamaño óptimo del generador fotovoltaico y el de las baterías, que son los elementos encargados de proporcionar la energía requerida por las cargas a partir de la radiación disponible en la zona. Normalmente, para estudiar la fiabilidad de una solución se tendrá que simular durante una serie de años el comportamiento del sistema y poder así calcular la energía que NO es capaz de suministrar en ese tiempo. En esta fase no se tiene en cuenta el acoplamiento de los diferentes equipos y su localización exacta por lo que no se puede determinar con exactitud las diferentes pérdidas de energía que se producen en el campo solar por sombreo, por temperatura, etc. y las perdidas en el resto de los elementos.

La investigación que soporta esta Tesis revisa esta problemática y se marca como objetivo ofrecer herramientas que permitan mejorar la caracterización del funcionamiento de los SFVA para ayudar al dimensionamiento y diseño de estos; Concentrándose en dos aspectos: La caracterización matemática del balance energético de los SFVA para la obtención del índice de fiabilidad LLP(Probabilidad de Pérdida de Carga) de estas y el desarrollo de herramientas para el estudio de los problemas de sombreados y obstrucción solar para escenarios particulares.

Los principales métodos de dimensionamientos de los SPVA tratan de evaluar la fiabilidad del sistema mediante la simulación estocástica del balance de energía. Esta simulación estocástica implica la generación de las principales variables de estado del sistema durante un período de tiempo extenso, a partir de las ecuaciones físicas que describen el balance de energía del sistema, es decir, la energía entregada a la carga y la energía almacenada en las baterías. La mayoría de estos métodos consideran la carga de demanda diaria constante durante el año, controlando las variables indicadoras del grado de fiabilidad con que el sistema suministrará energía a la carga. Además, estos métodos se basan en modelos previos para generar datos de radiación solar y, dado que las aproximaciones de los métodos de simulación son asintóticas, conforme se requiere más precisión en la estimación de los indicadores de fiabilidad se necesita ampliar el período de simulación.

En esta Tesis se presenta una metodología matemática para determinar el balance de energía diaria sin tener que aplicar métodos de simulación, basándonos directamente en la modelización de la radiación solar diaria realizada por Aguiar como procesos

estocásticos de Markov de primer orden. Este método, como otros anteriores, utiliza el concepto de Probabilidad de Pérdida de Carga (LLP) como parámetro de caracterización del dimensionamiento. Se propone un método analítico para la evaluación y dimensionamiento de SPVA con demanda e inclinación variables diariamente.

Por otro lado, en el marco de esta tesis doctoral, se ha desarrollado un método para estimar la radiación difusa sobre planos inclinados y obstruidos para diferentes escenarios particulares. Se presenta un método matemático general para la obtención de las ecuaciones de proyección hemisférica de la bóveda celeste para poder determinar el factor de cielo visible (SVF, Sky View Factor) como ratio de superficie proyectada NO obstruida frente a la superficie global de la bóveda también proyectada en el mismo sistema, y así poder calcular la influencia del sombreadimiento en la estimación de la radiación difusa y, de ahí, su influencia en los SFVA en una localización determinada. Se han determinado las ecuaciones de proyección para planos horizontales y verticales suponiendo la hipótesis de distribución angular de la radiancia difusa descrita según el modelo de Moon y Spencer. Las proyecciones obtenidas constituyen una herramienta sencilla de estimación del SVF en localizaciones con sombras basada en equipos fácilmente asequibles.

SUMMARY

Sizing a stand-alone photovoltaic system (SAPV) consists of calculating, with the maximum possible reliability, the optimum size of the photovoltaic generator and the batteries - elements responsible for providing the power required by the loads from the radiation available in the area. Generally, a simulation during a series of years is needed to study both the reliability of the solution and to calculate the power the system cannot generate in this period. The attachment of different devices and its precise location are not considered at this stage, so that it is not possible to determine exactly the power losses produced in the solar field because of shadowing, temperature, etc. as well as the losses in other elements.

The research carried out in this dissertation reviews this issue, and aims to offer tools to improve the characterization and performance of the SAPV systems and help in their sizing and design. The project focusses on two aspects: (i) the mathematical characterization of the energy balance of SAPV systems to obtain the reliability index of the loss-of-load probability (LLP), and (ii) the development of tools to study the problems of shadowing and solar obstruction in specific scenarios.

The main methods of sizing SAPV systems try to assess their reliability by using the stochastic simulation of the energy balance. This stochastic simulation entails the generation of the main variables of the system state during a long period from physical equations that describe the system energy balance, that is, the power given to the load and the power stored in the batteries. Most of these methods consider that the daily demand load is constant during the year, monitoring the variables of the reliability level that the system will provide power to the load. Moreover, these methods are based on previous models to generate solar radiation data. Due to the fact that the approaches of the simulation methods are asymptotic, when more accuracy is required in the estimation of the reliability indicators, more simulation time is needed.

This dissertation presents a mathematical methodology to determine the balance of daily energy without applying simulation methods. Our research is directly based, however, on the modelling of daily sun radiation developed by Aguiar as first-order stochastic Markov processes. This method, like other previous studies, uses LLP as a characterization parameter for sizing. An analytical method is proposed for assessing and sizing SAPV systems daily with varying demand and inclination.

Furthermore, in this PhD dissertation, a method has been developed to estimate diffuse radiation in inclined and obstructed planes for different specific scenarios. We suggest a general mathematical method to obtain hemispheric projection equations of the sky dome to determine the sky view factor (SVF) as a non-obstructed projected surface ratio versus the global dome surface also projected on the same system. This allows the calculation of the influence of shadowing on the estimation of diffuse radiation, and hence its influence on the SAPV placed in a specific location. The projection equations for horizontal and vertical planes have been determined assuming the angle distribution of the diffuse radiance according to the Moon and Spencer model. The projections obtained are an uncomplicated tool to estimate the SVF in locations with shadows, and are based on easily obtainable equipment.

ÍNDICE

Resumen	vii
Summary.....	ix
Índice	xi
Índice de Figuras.....	xiii
Lista de símbolos y siglas.....	xv
1. Introducción y Objetivos.	1
2. Presentación y discusión de los principales resultados.	5
2.1. Dimensionado de sistemas fotovoltaicos autónomos.	5
2.1.1. Métodos numéricos de cálculo de <i>LLP</i>	7
2.1.2. Métodos analíticos de cálculo de <i>LLP</i>	8
2.1.3. Aproximación a la caracterización matemática del balance energético diario en Instalaciones Solares Fotovoltaicas Autónomas.	11
2.1.3.1. Ecuaciones consideradas para el balance energético.	11
2.1.3.1.1. Caracterización estocástica.	12
2.1.3.1.2. Notación Matricial.....	21
2.1.3.1.3. Caracterización de la esperanza del déficit.....	23
2.1.3.2. Resultados.....	24
2.2. Diseño versus dimensionado de SFV autónomos.....	25
2.2.1. Estimación de la radiación solar sobre superficies Inclinadas.	25
2.2.2. Estimación de la radiación difusa.	26
2.2.3. Herramientas para determinar la radiación difusa en cielos OVERCAST en presencia de obstáculos.	30
a) Calculo del SVF para superficies horizontales.....	35
b) Calculo del SVF para superficies verticales.	41
2.2.3.1. Resultados.....	45
3. Conclusiones.....	47
4. Bibliografía.....	49
5. Anexo 1	57

6. Anexo 2	71
7. Anexo 3	80

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Función de densidad de probabilidad de B' , $g(B')$	13
Figura 2. Función de densidad de probabilidad de B , $f(B)$	13
Figura 3. Discretización de la función de densidad de B , $f(B)$, al fragmentar la capacidad útil de la batería, C_U , en n_{B+2} intervalos.....	14
Figura 4. Evolución de los límites entre intervalos de $K_{t\beta}$ al variar β para Córdoba (España) en Diciembre.....	16
Figura 5. Evolución de los límites entre intervalos de $K_{t\beta}$ al variar β para Córdoba (España) en Marzo.....	16
Figura 6. Evolución de los límites entre intervalos de $K_{t\beta}$ al variar β para Córdoba (España) en Junio.....	17
Figura 7. Representación grafica del plano $(B_{i-1}; E_i)$ y suma geométrica de las coordenadas de un punto particular de este plano a partir de la proyección oblicua del eje B'	18
Figura 8. Estimación geométrica de la probabilidad de B'	19
Figura 9. Representación gráfica de los puntos que producen déficit de energía.....	23
Figura 10. Transformación propuesta.	31
Figura 11. Recinto considerado sobre la bóveda celeste y su transformada para superficies horizontales.	32
Figura 12. Principio geométrico de la transformación propuesta para superficies verticales.....	33
Figura 13. Recinto considerado sobre la bóveda celeste y su transformada para superficies verticales.....	34
Figura 14. Representación de líneas de igual φ y de igual θ de la bóveda celeste para $MS_{b=2}$ y superficies horizontales.	36

Figura 15. Representación del desplazamiento $r(\varphi)/r_{max}$ en función del ángulo cenital para las proyecciones estereográfica (a), polar (b), lambertiana (c), ortogonal o $MS_{b=0}$ (d), $MS_{b=0,5}$ (e), $MS_{b=1,5}$ (f), $MS_{b=3,0}$ (g), y $MSb \rightarrow \infty$ (h) sobre planos horizontales.	37
Figura 16. Fotografía del LRTV.....	38
Figura 17. Imagen cruda de la bóveda celeste, proporcionada por el dispositivo LRTV, vista desde un plano horizontal.....	39
Figura 18. Imagen transformada $MS_{b=2}$ de la bóveda celeste vista desde un plano horizontal incluyendo las trayectorias solares en diferentes meses y las líneas de posición del Sol en cada hora.	39
Figura 19. Pantalla principal del software del LRTV.	40
Figura 20. Salida numérica de las trayectorias solares del Software del LRTV.	40
Figura 21. Representación de líneas de igual φ de igual θ en las cartas verticales MS_b	42
Figura 22. Representación del desplazamiento $r(\varphi)/(r_{max})$ en función del ángulo cenital para las proyecciones estereográfica (a), polar (b), lambertiana (c), ortogonal o $MS_{b=0}$ (d), $MS_{b=0,8}$ (e), $MS_{b=2}$ (f), $MS_{b=6}$ (g), y $MSb \rightarrow \infty$ (h) sobre planos verticales.	43
Figura 23. Imagen cruda de la bóveda celeste vista desde un plano vertical tomadas con el LRTV.....	44
Figura 24. Proyección $MS_{b=2}$ obtenida de la imagen cruda de la Figura 23 incluyendo las trayectorias solares en diferentes meses y las líneas de posición horaria del Sol.	44

LISTA DE SÍMBOLOS Y SIGLAS

A_G	Área del generador fotovoltaico (m^2).
b	Parámetro dependiente de las condiciones de anisotropía del cielo.
B	Variable que nos da el estado de la batería en un instante determinado.
B_i	Energía útil almacenada en la batería al final del día i , [$\text{W}\cdot\text{h}$].
B'_i	Variable auxiliar de estado de la batería en el día i , [$\text{W}\cdot\text{h}$].
C	Magnitud genérica que cumpla la ecuación [37].
C_A	Capacidad del generador fotovoltaico (relativo a la carga). Parámetro adimensional.
C_B	Capacidad nominal del acumulador, [$\text{W}\cdot\text{h}$].
C_S	Capacidad del acumulador (relativo a la carga). Parámetro adimensional.
C_U	Capacidad útil del acumulador, [$\text{W}\cdot\text{h}$].
D	Dominio de integración en la bóveda celeste.
D_p	Dominio transformado en la proyección propuesta.
E	Energía ganada o perdida por la batería en un periodo determinado, [$\text{W}\cdot\text{h}$].
E_i	Energía ganada o perdida por la batería al final del día i , [$\text{W}\cdot\text{h}$].
f_s	Ratio entre la superficie vista del cielo no obstruido y la total en la proyección propuesta.
$f(B)$	Función de densidad de probabilidad de la variable B .
F_{S2}	Valor recomendado de C_A basado en la experiencia o de normas particulares.
F_{S2}	Valor recomendado de C_S basado en la experiencia o de normas particulares.
FV	Siglas de "Fotovoltaico".
$g(B)$	Función de densidad de probabilidad de la variable B acotada entre 0 y C_U .
$g(B')$	Función de densidad de probabilidad de la variable B sin acotación.
H_g	Irradiación global diaria sobre un plano horizontal, [$\text{W}\cdot\text{h}/\text{m}^2$].
$H_{g\beta}$	Irradiación global diaria sobre un plano inclinado un ángulo β , [$\text{W}\cdot\text{h}/\text{m}^2$].

$H_{g\beta i}$	Irradiación global diaria sobre un plano inclinado un ángulo β en el día i , [W·h/m ²].
H_{gi}	Irradiación global diaria sobre plano horizontal en el día i , [W·h/m ²].
$\bar{H}_{g\beta}$	Irradiación global diaria media mensual sobre un plano inclinado un ángulo β , [W·h/m ²].
I_β	Irradiancia Global incidente sobre un plano inclinado un ángulo β , [W/m ²].
$I_{d\beta}$	Irradiancia difusa incidente sobre un plano inclinado un ángulo β , [W/m ²].
$I_{D\beta}$	Irradiancia directa incidente sobre un plano inclinado un ángulo β , [W/m ²].
I_{dH}	Irradiancia difusa incidente sobre un plano horizontal, [W/m ²].
I_{dv}	Irradiancia difusa incidente sobre un plano vertical, [W/m ²].
I_{GH}	Irradiancia Global incidente sobre un plano horizontal, [W/m ²].
$I_{R\beta}$	Irradiancia Reflejada sobre un plano inclinado un ángulo β , [W/m ²].
$I'_{d\beta}$	Irradiancia difusa incidente sobre un plano inclinado un ángulo β y obstruido, [W/m ²].
I'_{dH}	Irradiancia difusa incidente sobre un plano horizontal y obstruido, [W/m ²].
JCR	Siglas de " <i>Journal Citation Reports</i> "
$k_{aux,i}$	Fracción de energía no satisfecha por el sistema entre los instantes $i-1$ e i . Coeficiente adimensional (0-1).
$k_{L,i}$	Fracción de energía (respecto a la batería) demandada por la carga a la batería entre los instantes $i-1$ e i . Coeficiente adimensional (0-1).
$k_{PV,i}$	Fracción de energía (respecto a la batería) aportada por el generador a la batería entre los instantes $i-1$ e i . Coeficiente adimensional (0-1).
K_t	Índice de claridad diario. Coeficiente adimensional.
\bar{K}_t	Índice de claridad diario medio mensual. Coeficiente adimensional.
L_i	Demanda energética diaria del día i , [W·h].
LLP	Probabilidad de Perdida de Carga (Loss of Load Probabilities).
LRTV	Siglas del dispositivo " <i>Light RayTracing and Visioning</i> ".
MS_b	Modelo Anisotrópico de Moon-Spencer en función del parámetro b .
MTM	Matrices de Markov.
p	Probabilidad.

P	Punto de la bóveda celeste.
P'	Proyección del punto P según la transformación propuesta.
PD_{\max}	Profundidad de descarga máxima del acumulador (0-1).
r	Coordenada radial del dominio D_p en la proyección propuesta.
$r_{d(\beta)}$	Coeficiente de proporcionalidad entre $I_{d\beta}$ e I_{dH} . Coef. Adimensional.
r_{\max}	Coordenada radial máxima del sistema considerado en el plano transformado.
$R(\varphi, \theta)$	Radiancia en un punto P cualquiera de la bóveda celeste, [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$].
R_Z	Radiancia en el céntit de la bóveda, [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$].
SFV	Siglas de " <i>Sistemas FotoVoltaicos</i> ".
SFVA	Siglas de " <i>Sistemas FotoVoltaicos Autónomos</i> ".
SOC_i	Estado de carga de la batería en un instante determinado i .
SVF	Factor de Visión del Cielo (Sky View Factor). Coef. Adimensional.
TMY	Siglas de " <i>Type Meteorological Year</i> " (Año meteorológico tipo).

LISTA DE SIMBOLOS GRIEGOS

β	Angulo de inclinación de una superficie respecto a la horizontal.
θ	Coordenada angular del sistema esférico considerado medido en el plano.
η	variable ficticia de integración.
μ	variable ficticia de integración.
ξ	Coordenada angular del dominio D_p en la proyección propuesta.
φ	Coordenada angular del sistema esférico considerado respecto de la normal del plano de trabajo.
$\rho(\varphi, \theta)$	Densidad superficial de la magnitud C en el entorno del punto P de la bóveda celeste.
Ω	Ángulo solidoo.
ϕ	Latitud.
δ	Declinación.
$\delta(x)$	Delta de Dirac.
η_G	Eficiencia de conversión del generador fotovoltaico.

1. Introducción y Objetivos.

A través de la historia, cada descubrimiento y avance tecnológico sobre la disponibilidad energética y los dispositivos para su generación y consumo han conseguido aumentar el confort y desarrollo de la sociedad. La energía y su disponibilidad han sido, y son, factores esenciales en el desarrollo del concepto calidad de vida tal y como la entendemos.

Como alternativa para mejorar nuestro confort, en sitios donde la distribución comercial de energía no alcanza llegar, o es cara la conexión a ésta para su consumo, tenemos la generación de energía a través de Sistemas Fotovoltaicos Autónomos (SFVA). Este tipo de instalaciones se caracterizan por tener una capacidad de generación de potencia del orden de kilovatios. Una de las dificultades que han encontrado los SFVA para su introducción, ha sido el coste de compra e instalación de estos sistemas, de los que en múltiples ocasiones se desconocía la fiabilidad y duración futura. Es por lo que los métodos de dimensionamiento de estos SFVA involucran dos objetivos opuestos, máxima fiabilidad y mínimo coste. Ahora bien, toda proyección de futuro no es fácil de determinar. No se trata de un problema determinista, en el que pueda predecirse con exactitud qué ocurrirá en el futuro con el sistema. El enfoque actual es de tipo probabilístico

En este trabajo de investigación, cuyo desarrollo y parte de sus resultados se plasman en la publicación de tres artículos en revistas de alto impacto, el principal tema estudiado ha sido el desarrollo de una metodología matemática para abordar el balance energético diario y poder así determinar un índice de fiabilidad de los SFVA, la Probabilidad de Perdida de carga (*LLP*), sin necesidad de acudir a métodos de simulación.

Son muchos los trabajos encaminados a obtener un método de dimensionado de instalaciones fotovoltaicas autónomas que, por una parte, sea de fácil aplicación y por otra proporcione un alto grado de fiabilidad [1-3]. Gran parte de estos métodos están basados en el estudio del balance energético mediante el método de simulación. La simulación estocástica implica la generación de las principales variables de estado del sistema durante un periodo de tiempo extenso a partir de las ecuaciones físicas que describen el sistema ante unas entradas aleatorias. Normalmente, las variables de interés son las que determinan el balance energético, radiación incidente, demanda

energética, energía entregada a la carga, y energía acumulada en baterías. Estos métodos se apoyan en modelos previos de generación de datos de radiación solar. La mayor parte de estos métodos consideran la carga de demanda diaria constante en el tiempo, controlando las variables indicadoras del grado de fiabilidad con que el sistema suministrará energía eléctrica a la carga. Conforme se requiere más precisión en las estimaciones de los indicadores de fiabilidad se necesita ampliar el periodo de simulación debido a que las aproximaciones de los métodos de simulación son asintóticas. En el primer artículo (Anexo 1) que compendia esta tesis se presenta una metodología matemática para estudiar el balance energético diario sin necesidad de acudir a métodos de simulación. La metodología se basa en la modelización de las series de radiación solar diaria como procesos estocásticos de Markov de primer orden [4]. Al tratarse de un método racional, la estimación del grado de fiabilidad no depende del número de iteraciones sino del grado de precisión de las estimaciones de las probabilidades condicionadas que constituyen las matrices de Markov de primer orden.

Por otro lado, el diseño óptimo del SFVA es muy complejo debido a la variabilidad de la radiación, de la demanda, de las características no lineales de los componentes, de la localización del sistema, etc. La solución de problemas complejos no lineales con gran número de variables y una elevada interrelación entre ellas, no puede resolverse fácilmente si no vamos acotando todas las variables que influyen en él. Para la ganancia de precisión en la solución final es útil estudiar el diseño del sistema localmente, por lo que también se aborda otro tema como es el del sombreado en escenarios particulares de forma que se tengan herramientas y métodos para determinar su valor.

La caracterización del sombreo de la componente directa de la irradiación no tiene problema hoy en día por ser conocido el movimiento astronómico del Sol. Para la caracterización del grado de obstrucción de la componente difusa se define el concepto Factor de Visión de Cielo, también denominado Sky View Factor (SVF), como porcentaje de irradiancia difusa incidente sobre el plano del sistema y obstruido versus el plano libre de obstrucciones. Es un parámetro adimensional representado como un valor entre 0 y 1, el cual se aproximarán a la unidad en un terreno abierto, sin obstrucciones y horizontal y por el contrario en situaciones de acceso solar obstruido (por edificios, vegetación u orografía), su valor puede llegar a ser considerablemente menor [5].

En la mayoría de métodos publicados, al parámetro SVF se le ha buscado una interpretación geométrica, se puede calcular como ratio de superficie celeste proyectada frente a la superficie global de la bóveda también proyectada en el mismo

sistema. Sin embargo, el tipo de proyección depende exclusivamente de las consideraciones de los autores. Se ha comprobado que en la bibliografía existen fuertes discrepancias en la definición y cálculo del parámetro *SVF*.

En los artículos presentados en los anexos 2 y 3 y como resultado del estudio de esta problemática se describe y analizan los resultados de la implementación de una técnica computerizada, partiendo de la hipótesis de distribución angular de la irradiación difusa descrita según el modelo de Moon y Spencer [6], que permite la estimación del factor de visión de cielo para la evaluación del recurso solar mediante el procesamiento digital de imágenes hemisféricas.

Dado que, el conocimiento preciso de la radiación solar incidente sobre la superficie terrestre es de gran importancia para una gran variedad de aplicaciones, tanto fotovoltaicas como térmicas o de iluminación natural de edificios. La información sobre el recurso solar es muy importante sobre todo en sistemas fotovoltaicos conectados a red en entornos urbanos, se están integrando estos en los edificios, lo cual hace que esta herramienta desarrollada pueda ayudar a la fiabilidad del diseño de estos sistemas.

OBJETIVOS DE LA TESIS

Dentro de la amplia problemática de la fiabilidad de los SFVA, que abarca aspectos económicos y técnicos, relacionados entre sí debidos al carácter descentralizado de la aplicación, la presente Tesis se marca como objetivo general,

Ofrecer herramientas que permitan mejorar la caracterización del funcionamiento de sistemas fotovoltaicos autónomos.

Concretándose dicho objetivo en la consecución de los objetivos específicos:

- Contribuir a la caracterización matemática del balance energético de los SFV autónomos para la obtención del índice de fiabilidad *LLP* de estas.
- Aportar herramientas de estudio de los problemas de sombreado y obstrucción solar para escenarios particulares.

Para la consecución de los objetivos propuestos, los artículos realizados que comprendían esta Tesis Doctoral conjugan aspectos de dimensionamiento como de diseño del sistema. Los trabajos pueden agruparse en dos grandes temas, si bien relacionados entre sí, análisis de confiabilidad y propuestas para su caracterización (artículo 1), por una parte, y desarrollo de herramientas para el estudio de las

condiciones de sombreadamiento de los sistemas fotovoltaicos (artículos 2 y 3), por otra. Ambos aspectos se han desarrollado en paralelo.

En primer lugar, presentaremos la aportación a la caracterización del balance energético de los SFVA (apartado 2.1.) y después se plantearán las herramientas aportadas para ayudar al diseño de estos sistemas (apartado 2.2.), aunque también pueden servir para otros sistemas tanto de generación eléctrica conectada a red, como térmica o como de iluminación.

2. Presentación y discusión de los principales resultados.

2.1. Dimensionado de sistemas fotovoltaicos autónomos.

El propósito del dimensionado del sistema fotovoltaico autónomo es la elección básicamente de la potencia del generador fotovoltaico (FV) y de la capacidad de la batería para suministrar de un modo fiable un determinado consumo eléctrico. Ello involucra el balance entre dos objetivos, normalmente opuestos, máxima fiabilidad y mínimo coste [7].

Prácticamente todos los métodos de dimensionado de estos sistemas (SFVA) intentan asegurar el grado de fiabilidad, es decir, que no se produzca fallo en el suministro de energía a la carga. Para ello se define la Probabilidad de Pérdida de Carga, *LLP* (Loss of Load Probability) [2, 7-16] como la relación entre el déficit y la demanda de energía, considerados ambos en la carga y durante todo el tiempo de funcionamiento de la instalación, el cual debe ser un periodo significativamente grande. El valor de la *LLP* representa el porcentaje de energía demandada que no es satisfecha por el SFVA que debida a la naturaleza de la radiación solar este valor es siempre mayor que cero.

$$LLP = \frac{\int_t \text{deficit energía}}{\int_t \text{demanda energía}}. \quad [1]$$

La gran mayoría de los diferentes métodos que basan su dimensionamiento en el cálculo de la *LLP* utilizan los modelos de los distintos componentes (radiación solar, generador, batería, regulador,...) para determinar cuál es el tamaño del generador y de la batería necesario para suministrar el consumo de diseño con una determinada fiabilidad o probabilidad de fallo. Si al simular la instalación con métodos numéricos esta *LLP* no es admisible habrá que redimensionar la instalación; Se trata por tanto de un proceso iterativo para obtener el correcto diseño del sistema fotovoltaico y encontrar ese par de valores, tamaño de generador FV y batería de acumulación, con máxima fiabilidad y menor coste. . Son métodos que requieren extensos cálculos numéricos, por lo que, su aplicabilidad depende de programas informáticos.

Posadillo y López Luque [8, 9], consideran además como indicador de la fiabilidad la *Probabilidad de Fallo de la instalación* que se define como la fracción de días en que la demanda no queda plenamente satisfecha.

La mayoría de los autores caracterizan el SFVA por medio de dos parámetros adimensionales, C_A y C_s , que intentan relacionar los tamaños del generador FV y el del

acumulador con las energías diarias medias consumidas. Por lo que, se define la *capacidad del generador fotovoltaico*, C_A , como la relación o cociente entre la energía media diaria producida por el generador y la energía diaria promedio, L , consumida por la carga (Ecuación [2]), y se define la *capacidad del acumulador*, C_S , como la máxima energía que se puede extraer de él, C_U , dividido por L (Ecuación[3]),

$$C_A = \frac{\eta_G A_G \bar{H}_{g\beta}}{L} \quad [2]$$

$$C_S = \frac{C_U}{L} = \frac{PD_{max} C_B}{L} \quad [3]$$

donde A_G es el área del generador PV ; η_G es la eficiencia de conversión de este; $\bar{H}_{g\beta}$ es el valor medio mensual de la irradiación diaria sobre el plano del generador; PD_{max} es la máxima profundidad de descarga de la batería y C_B es la capacidad nominal de esta.

Para una ubicación específica y, dadas las cargas mensuales, dos consideraciones son evidentes, en primer lugar, es posible encontrar diferentes pares de valores de (C_A , C_S) que conducen al mismo valor LLP , y en segundo lugar, cuanto más grande en tamaño sea el sistema fotovoltaico, mayor es su coste y fiabilidad. Por lo tanto, dado que la fiabilidad es un requisito de la carga, el problema se formula de la siguiente manera, ¿qué par de valores (C_A , C_S) nos llevan a un valor dado de LLP con un coste mínimo?. Por este motivo, los métodos de cálculo de los SFVA suelen orientarse a la relación entre (C_A , C_S) y la LLP , para más tarde determinar el tamaño del generador y la capacidad de la batería. Aunque muchas veces, en la práctica, el dimensionamiento de estos sistemas se reduce a establecer una relación cuantitativa de los valores (C_A , C_S) asegurando una LLP según la experiencia del proyectista:

$$C_A = F_{S1} \quad y \quad C_S = F_{S2} \quad [4]$$

donde F_{S1} y F_{S2} son factores arbitrarios. Por ejemplo, $C_A = 1,1$ y $3 \leq C_S \leq 5$ son valores comunes en electrificación rural [17].

Los métodos de dimensionamiento con cierta rigurosidad que permiten cuantificar la fiabilidad del sistema se pueden clasificar en dos grupos diferentes, métodos numéricos y métodos analíticos.

2.1.1. Métodos numéricos de cálculo de *LLP*.

Basados en la simulación detallada del comportamiento del sistema fotovoltaico, realizan dicha simulación sobre un determinado período de tiempo (horario, diario o incluso decenal) con ecuaciones individuales de balance de energía. Destacan los métodos propuestos por Egido y Lorenzo [2] , Bucciarelli [14] , Groumpas y Papageorgiou [18], Chapman [19], Klein y Beckman [20], así como Labed y Lorenzo [21].

Estos métodos desarrollan el cálculo en cuatro pasos:

- 1.- Obtener información sobre la radiación solar en la localidad en cuestión.
- 2.- Preparación de las secuencias de irradiación global horizontal
- 3.- Transformación de los valores de irradiación horizontal en los de irradiación sobre superficie inclinada.
- 4.- Simulación del comportamiento del sistema fotovoltaico con el objeto de cuantificar la *LLP* correspondiente al par de valores de (C_A , C_S) (o “tamaño” de generador y batería).

En términos generales, los métodos propuestos, por estos investigadores, realizan una simulación con datos reales o artificiales de radiación para calcular el valor de la *LLP* para cada pareja de valores de (C_A , C_S) y el balance de energía del sistema FV se determina por medio del coeficiente adimensional *SOC* (estado de la carga de la batería) calculado después de cada intervalo de tiempo y se define como la energía que la batería puede proporcionar a la carga con respecto a la máxima energía que podría proporcionar a plena carga. La ecuación de balance de energía será:

$$SOC_i = SOC_{i-1} + K_{PV,i} - K_{L,i} \quad \epsilon [0,1], \quad [5]$$

donde SOC_i es el estado de la batería al final del período de simulación i ; $K_{PV,i}$ y $K_{L,i}$ son la fracción de energía aportada por el generador y la demandada por la carga, respectivamente, en el período de balance energético. Si $K_{L,i} > SOC_{i-1} + K_{PV,i}$ hay una fracción de energía que no es satisfecha por el sistema y esta se puede expresar como:

$$K_{aux,i} = \max \{0 ; K_{L,i} - SOC_{i-1} - K_{PV,i}\}. \quad [6]$$

Si esta simulación se lleva a cabo para un número de periodos lo suficientemente grande como para tener significado estadístico, el valor de la *LLP* correspondiente al sistema fotovoltaico autónomo viene dado por:

$$LLP = \frac{\sum K_{aux,i}}{\text{demanda de energía total}} . \quad [7]$$

Los principales inconvenientes de estos métodos son el largo tiempo de cálculo con ordenador y la necesidad de largas secuencias de datos de radiación. Mientras que el primero de estos inconvenientes queda solventado por los avances en hardware experimentados en los últimos años, el segundo se soluciona, en los casos en que no exista disponibilidad de secuencias históricas, generando secuencias sintéticas de radiación con similares propiedades estadísticas, mediante alguno de los métodos universalmente aplicados [4, 22-25]. Algunos autores [26], han propuesto algoritmos con el fin de facilitar el proceso de optimización del dimensionado con estos métodos.

Muchas discrepancias nos podemos encontrar entre éstos métodos numéricos. Estas discrepancias pueden deberse al hecho de que las simulaciones se llevan a cabo en diferentes períodos de tiempo o que los componentes del sistema se modelen de diferente manera [2, 20, 21]. Comúnmente, se supone que la eficiencia del generador se mantiene constante [10]. En ese sentido, algunos autores [27] encontraron resultados similares en la simulación considerando constante la eficiencia del generador o variable a lo largo del periodo de simulación.

Por otro lado, los métodos numéricos tienen la ventaja de ser precisos y permiten el análisis de aspectos adicionales del dimensionamiento, como los diferentes modelos para los componentes del sistema fotovoltaico.

2.1.2. Métodos analíticos de cálculo de *LLP*.

Estos métodos, aplicados en la fase de dimensionamiento del sistema, intentan evitar la simulación del balance energético para largos períodos de tiempo, planteando relaciones analíticas entre los parámetros de dimensionamiento del sistema y el índice de fiabilidad (relaciones obtenidas normalmente a partir de la aplicación del método numérico a series largas de radiación, o con fórmulas simples basadas en resultados obtenidos con datos históricos) [12-14, 28-30].

Estos métodos simplifican en gran medida la tarea del dimensionamiento debido a que está se realiza normalmente sobre mapas con curvas de

isofiability, las cuales se pueden describir de forma analítica para cada ciudad. Sin embargo, según algunos autores [28], una de las principales deficiencias de estos métodos es su carácter local.

En los últimos años, en la literatura especializada, está apareciendo un grupo alternativo de métodos de dimensionamiento de SFVA que combina lo mejor de ambos tipos de métodos. Estos pueden ser descritos como una mezcla entre los métodos numéricos y los métodos de análisis, y todos tienen el mismo objetivo, encontrar el par de valores (C_A, C_S), con el mínimo coste, que nos da una *LLP* determinada y expresar las líneas isofiables sobre los mapas de fiabilidad y describir estas líneas mediante expresiones analíticas.

Los trabajos más destacados sobre métodos numéricos-analíticos [2, 8, 9, 11, 31-33] tienen en común varios puntos:

- ⇒ Todos ellos tratan de establecer relaciones entre (C_A, C_S) y la *LLP* a partir de la simulación numérica del comportamiento del sistema, basándose para ello en valores históricos diarios de radiación o series generadas sintéticamente con un comportamiento igual al real.
- ⇒ La mayoría de ellos asumen una demanda diaria constante durante todo el año, a excepción de la de Posadillo y López-Luque [8, 9] que se puede aplicar a la demanda mensual variable.
- ⇒ La capacidad del generador fotovoltaico está normalizada a la carga, por lo general 1 kWh/día, y la capacidad máxima de acumulación de energía referida a la carga, C_S (Ecuación [3]), representa los días de autonomía.
- ⇒ Con el fin de desarrollar un método genérico, se considera que el sistema, una vez montado, tiene una eficiencia igual a la unidad.
- ⇒ El consumo se produce por la noche.

Estas hipótesis de partida son perfectamente adecuadas para analizar el problema puramente de dimensionamiento, es decir determinar el par de valores (C_A, C_S) que nos da una *LLP* determinada. En el siguiente paso, el diseño del sistema (determinar la potencia del generador y la capacidad de la batería escogida, la elección de los conductores, el tamaño del regulador, etc.), hay que tener en cuenta los efectos de las no idealidades de estos componentes y el **efecto de la localización del sistema con sus sombras correspondientes**.

Como desventaja de estos métodos, puesta de manifiesto por algunos autores [28], es la necesidad de largas series de radiación no disponibles en todas las localidades, desventaja que puede ser solventada como hemos comentado con la generación

sintética de las mismas mediante métodos ampliamente aceptados y comprobados [4, 22-24].

Sí habría que hacer notar, según diversos autores [19, 20, 26], el hecho de que esta metodología de dimensionado está limitada al rango $0,01 < LLP < 1$. Evidentemente, si reducimos la longitud de la serie de datos, por ejemplo utilizando el año meteorológico tipo (TMY) como lo hace Negro [16], la validez de estos métodos estaría restringida todavía más, en concreto a $0,1 < LLP < 1$.

Recientemente, se han desarrollado métodos basados en técnicas de IA (Inteligencia Artificial). Mellit *et al.* [34] presentan una revisión de estas técnicas (redes neuronales, algoritmos genéticos, etc.) que se utilizan para determinar el tamaño de los SFVA, los sistemas de conexión a red y los sistemas fotovoltaicos híbridos [28, 35-39]. Según los autores [34], estas técnicas dimensionan los sistemas fotovoltaicos satisfactoriamente y con una precisión razonable.

Por último, otros autores han desarrollado nuevos métodos de dimensionamiento técnico-económicos basados en criterios económicos [40, 41].

2.1.3. Aproximación a la caracterización matemática del balance energético diario en ISF autónomas.

La mayoría de los métodos de cálculo de la *LLP* están basados en la simulación del comportamiento del sistema a lo largo de un cierto periodo temporal lo suficientemente largo para obtener cierta precisión. Para cada unidad de tiempo en la que se divide el periodo de simulación, se calcula el balance energético del sistema y el estado de carga de la batería.

Esta tesis, entre otros resultados, presenta un método racional de estimación diaria del balance energético, para determinar la *LLP* de un par de valores (C_A , C_S), especialmente adecuado para los casos en que las series de radiación sintéticas se generan a partir de series estocásticas de Markov y, sobre todo, a partir de las matrices de probabilidad de transición de estados ofrecidas por Aguiar [4]. Este método no requiere de técnicas de simulación y, en consecuencia, su fiabilidad no depende del número de iteraciones, pero depende de la precisión de las probabilidades condicionales incluidas en MTM (matrices de Markov), y, en consecuencia, en los valores dados por Aguiar. En ese sentido, Tavora *et al.* [25] han demostrado que los modelos estocásticos retratan de una manera más precisa el funcionamiento de los sistemas fotovoltaicos.

2.1.3.1. Ecuaciones consideradas para el balance energético.

El estudio estadístico de la función de distribución de probabilidad, asociado al estado de la batería en el día i , B_i , se aborda a partir de las ecuaciones [8] y [9] de balance energético diario.

$$B'_i = B_{i-1} + \eta_G A_G H_{g\beta i} - L_i \quad [8]$$

$$B_i = \begin{cases} C_u & \text{si } B'_i \geq C_u \\ B'_i & \text{si } 0 < B'_i < C_u \\ 0 & \text{si } B'_i \leq 0 \end{cases} \quad [9]$$

Donde, B_i representa la energía útil almacenada en la batería de acumuladores al finalizar el día i . (Supondremos que el estado de la batería se contabiliza en el momento del día en que radiación y demanda han cesado). La variable B_i se

encuentra acotada entre el valor cero (batería agotada) y por C_U (Capacidad máxima de almacenamiento energético).

B'_i es una variable auxiliar de balance que se identifica con B_i salvo en los casos en que esta alcanza alguno de sus límites.

η_G , Rendimiento del generador fotovoltaico.

A_G , Área afectiva del generador fotovoltaico.

$H_{g\beta i}$, Irradiación global diaria sobre el plano del generador en el día i . Supondremos que el generador fotovoltaico se encuentra inclinado un ángulo β respecto de la horizontal y orientado siempre al sur.

L_i , Demanda energética total durante el día i .

2.1.3.1.1. Caracterización estocástica.

Este trabajo considera la ecuación [8] como suma de dos variables estocásticas:

$$B'_i = B_{i-1} + E_i \quad [10]$$

donde:

$$E_i = \eta_G A_G H_{g\beta i} - L_i \quad [11]$$

y representa la energía ganada o perdida por la batería durante el día i , que no es más que la diferencia entre la generada por los paneles y la consumida por los receptores.

Dado que la variable $H_{g\beta i}$ es una variable aleatoria y correlacionada con $H_{g\beta(i-1)}$, la ecuación [10] y la [11] hace que B'_i también pueda ser considerada una variable aleatoria.

La estrategia del presente trabajo es la caracterización de esas variables estocásticas, B y E . Sin embargo, ambas variables son probabilísticamente interdependientes, desde el momento en que el estado de la batería, B , depende de la energía ganada o perdida, E .

Por tanto, la estrategia consistirá en caracterizar la variable B y la variable E y dada la interdependencia temporal, se ha caracterizar la probabilidad de que ocurra E_i condicionada a la ocurrencia de B_{i-1} .

a) Caracterización de B .

La caracterización de B' se podría hacer mediante su función de densidad, $g(B')$. Ahora bien, esta no estaría acotada por los límites físicos de la batería mencionados anteriormente, 0 y C_U (Figura 1), por lo que, con el fin de obtener la función de

densidad del estado real de la batería es necesaria modificar esta función. A la vista de la ecuación [9] se podrá establecer la función:

$$f(B_i) = p_0 \cdot \delta(0) + g(B_i) + p_f \cdot \delta(C_U) \quad [12]$$

siendo, $\delta(x_0)$ la función de Dirac centrada en x_0 ; p_0 la probabilidad de que la batería esté vacía ($B_i = 0$); p_f la probabilidad de que la batería esté llena ($B_i = C_U$) y $g(B_i)$ una función definida en el dominio $(0, C_U)$ e igual a la función $g(B')$ en este dominio (Figura 2).

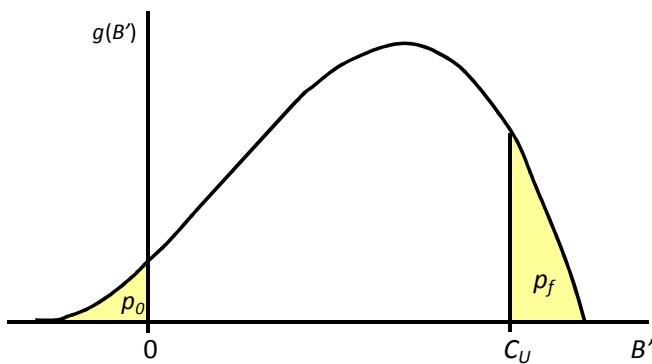


Figura 1. Función de densidad de probabilidad de B' , $g(B')$.

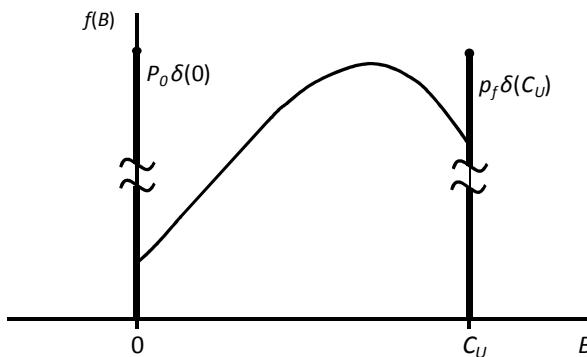


Figura 2. Función de densidad de probabilidad de B , $f(B)$.

La condición de normalización conduce a:

$$\int_0^{C_U} f(B_i) dB_i = p_0 + \int_0^{C_U} g(B_i) dB_i + p_f = 1 \quad [13]$$

Si se divide el intervalo de variación de B_i , $[0; C_U]$, en n_B intervalos de igual longitud, e identificamos la probabilidad p_{Bk}^i de que B_i pertenezca a un intervalo k ($k = 1, 2, \dots, n_B$), con la integral de la ecuación [12] se podrá discretizar la función $f(B_i)$.

$$p_{Bk}^i = \int_{(k-1)C_U/n_B}^{kC_U/n_B} f(B_i) dB_i \quad [14]$$

Gracias al teorema de la media el valor de la función $f(B_i)$ puede estimarse en el interior de un intervalo k como:

$$f(B_i) = \frac{n_B}{C_U} p_{Bk}^i \quad [15]$$

Si denominamos p_{B0}^i a p_0 , es decir, la probabilidad de que la batería esté vacía ($B_i = 0$) y $p_{Bn_B+1}^i$ a p_f (probabilidad de que la batería esté llena), la condición de normalización se puede escribir a partir de esa discretización como:

$$\sum_{k=0}^{k=n_B+1} p_{Bk}^i = 1 \quad [16]$$

Esta simplificación implica la posibilidad de describir la función de densidad de probabilidad $f(B_i)$ mediante el vector $\overline{p_B^i}$ de $n_B + 2$ filas.

$$\overline{p_B^i} = \begin{bmatrix} p_{B0}^i \\ p_{B1}^i \\ \dots \\ p_{Bn_B+1}^i \end{bmatrix} \quad [17]$$

Los elementos de este vector se pueden interpretar como las superficies subtendidas en cada intervalo por la función de densidad $f(B_i)$, donde se ha de tener en cuenta que el primer y último intervalo son de longitud cero (Figura 3).

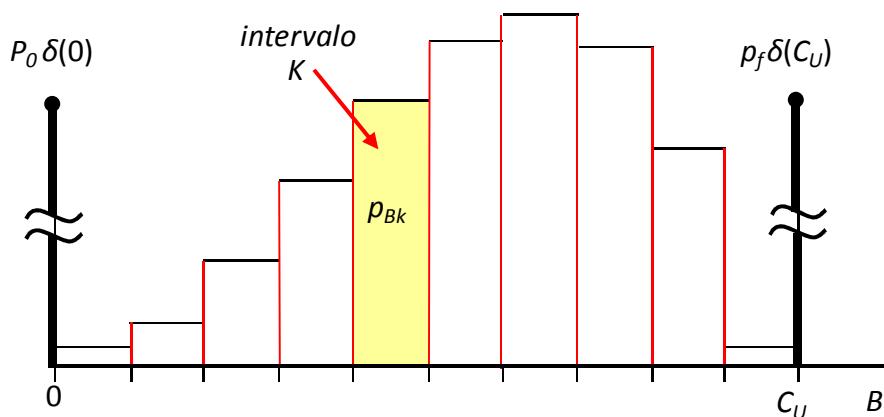


Figura 3. Discretización de la función de densidad de B , $f(B)$, al fragmentar la capacidad útil de la batería, C_U , en n_B+2 intervalos.

b) Caracterización de E .

b.1) Relación entre $H_{g\beta i}$ y esta variable en el día anterior $H_{g\beta(i-1)}$.

La relación entre H_{gi} y esta variable en el día anterior $H_{g(i-1)}$ ha sido estadísticamente caracterizada por Aguiar (4) mediante procesos de Markov de primer orden.

En ese trabajo Aguiar propone una librería de 10 matrices de validez supuestamente universal. Aguiar, describe la dependencia de H_{gi} y $H_{g(i-1)}$ a partir del índice de claridad diario, K_t , de forma que la matriz correspondiente a cada mes y clima se selecciona a partir del índice de claridad diario medio mensual \bar{K}_t . Por otro lado, a cada matriz se le asocia un intervalo de valores del índice de claridad diario, K_t , definido por sus valores máximos y mínimos, $K_{tmáx}$ y $K_{tmín}$. Este intervalo se divide en 10 subintervalos, tantos como filas y columnas tiene cada matriz de transición, estos subintervalos se representaran por el índice q .

La utilización del método de Aguiar también puede ser válido para la generación de series sintéticas de radiación sobre superficie inclinada $H_{g\beta i}$, ya que las matrices de transición son las mismas y lo único que varían son los límites y longitudes de los subintervalos de clase para un valor medio dado de \bar{K}_t . Esto es debido a que la radiación diaria sobre superficie inclinada puede ser calculada a partir de una función matemática donde entra el índice de claridad K_t . Asumiendo la existencia de esta función que permite determinar $H_{g\beta i}$ a partir de K_t ($H_{g\beta i} = H_{g\beta i}(K_t, \beta, \delta, \phi)$), los límites máximos y mínimos de la variable E , ganancia de energía de la batería, para un día cualquiera, haciendo la transformación correspondiente serán:

$$\begin{aligned} K_{tmín} \rightarrow E_{mín} &= \eta_G A_G H_{g\beta}(K_{tmín}, \beta, \delta, \phi) - L \\ K_{tmáx} \rightarrow E_{máx} &= \eta_G A_G H_{g\beta}(K_{tmáx}, \beta, \delta, \phi) - L \end{aligned} \quad [18]$$

Y podremos utilizar las matrices de transición para describir la variable aleatoria $E = \eta_G A_G H_{g\beta} - L$, siendo necesario redefinir los 10 intervalos consecutivos propuestos por Aguiar, estos serán:

$$\begin{aligned} I_{E1} &= [\eta_G A_G H_{g\beta}(K_{tmín}, \beta, \delta, \phi) - L ; \eta_G A_G H_{g\beta}(K_{t1}, \beta, \delta, \phi) - L] \\ I_{E2} &= [\eta_G A_G H_{g\beta}(K_{t1}, \beta, \delta, \phi) - L ; \eta_G A_G H_{g\beta}(K_{t2}, \beta, \delta, \phi) - L] \\ \dots \\ I_{E10} &= [\eta_G A_G H_{g\beta}(K_{t9}, \beta, \delta, \phi) - L ; \eta_G A_G H_{g\beta}(K_{tmáx}, \beta, \delta, \phi) - L] \end{aligned} \quad [19]$$

Se puede observar que el efecto introducido al variar la inclinación β del panel, no es sino el de variar los límites de los subintervalos en que se divide el rango de variación de K_t diario según Aguiar. Los intervalos definidos para la variable E no son de igual longitud, se puede observar representando la evolución de los límites de esta variable al hacerlo el ángulo de inclinación del panel.

Como ejemplo, las figuras 4, 5 y 6, representan la evolución de los límites de los subintervalos en función de la inclinación del generador, para Córdoba ($\phi = 37,85^\circ$ N, España), y en meses caracterizados por la variación acusada de la declinación solar entre los mismos. Cada curva representa la frontera entre dos intervalos consecutivos.

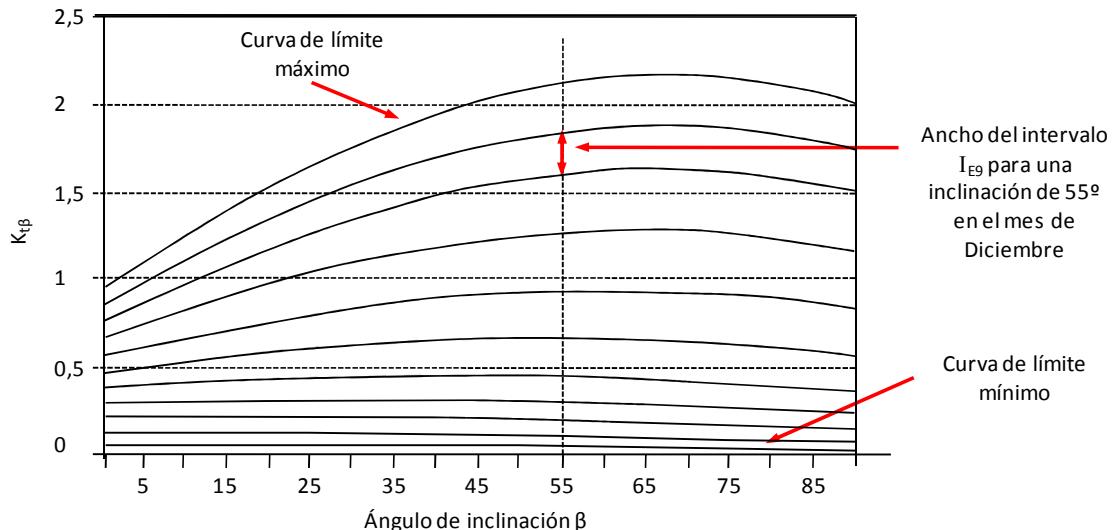


Figura 4. Evolución de los límites entre intervalos de $K_{t\beta}$ al variar β para Córdoba (España) en Diciembre.

En estas figuras, se puede observar que para una inclinación β de 55° , señalada en las tres figuras, el ancho de los 10 subintervalos es variable para cada mes. Se ha remarcado el ancho del intervalo noveno.

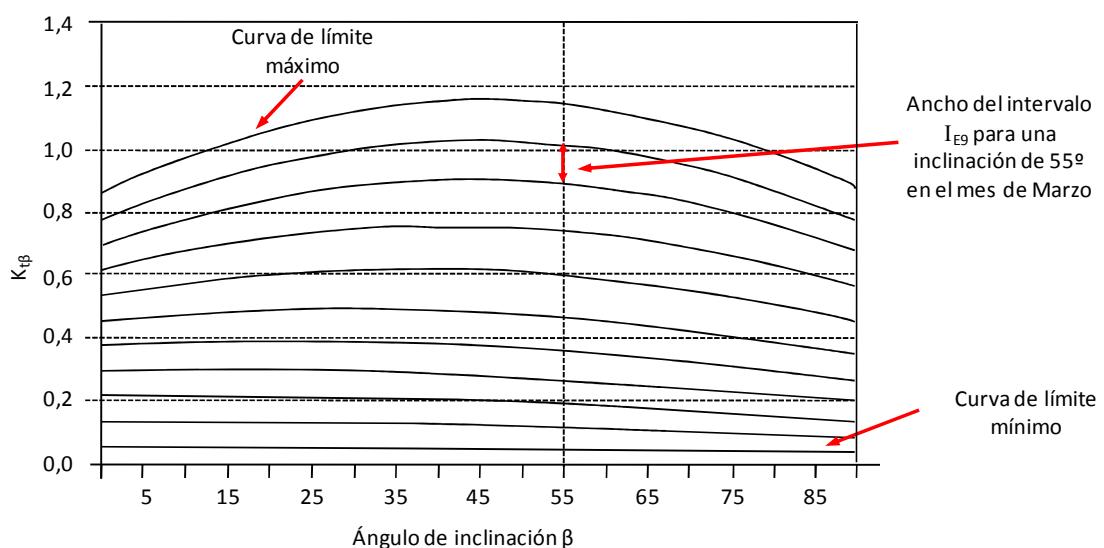


Figura 5. Evolución de los límites entre intervalos de $K_{t\beta}$ al variar β para Córdoba (España) en Marzo.

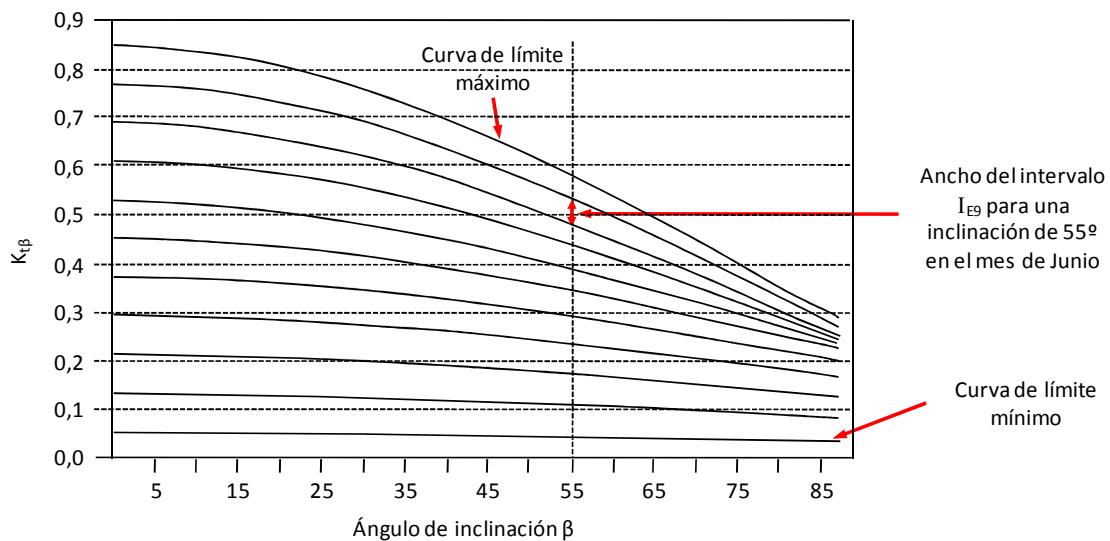


Figura 6. Evolución de los límites entre intervalos de $K_{t\beta}$ al variar β para Córdoba (España) en Junio.

Por todo lo comentado, la caracterización estadística de la variable E coincide con la de la variable K_t dada por Aguiar. Esto implica que la ganancia de la batería en un día cualquiera está correlacionado con la ganancia en el día anterior y esta caracterización dependerá de la correlación de la radiación de un día respecto de la ocurrida en el día anterior.

b.2) Estimación del factor de corrección del Área $m(j,k,q)$

De acuerdo a la ecuación [10], B'_i es la suma de B_{i-1} y E_i . Esa suma esta geométricamente representada en la Figura 7. En ella, el plano (B_{i-1}, E) y el eje B' , paralelo al eje E , son definidos; de forma que la suma de las coordenadas un punto cualquiera del plano (B_{i-1}, E) , se puede obtener a partir de la proyección oblicua de 45° sobre el eje B' . Recordando la ecuación [9] , valores negativos de B' representan esas situaciones de baterías vacías y valores de B' mayores que C_U corresponden a baterías totalmente llenas.

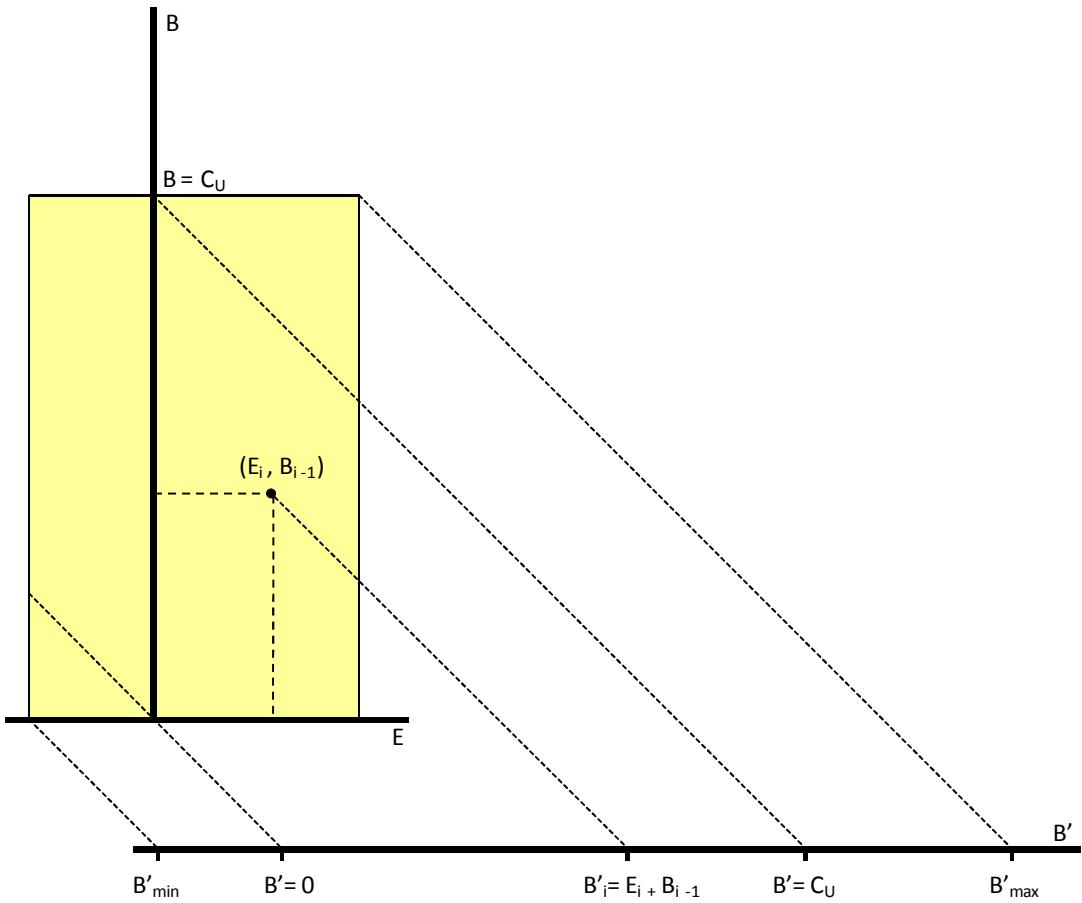


Figura 7. Representación grafica del plano $(B_{i-1}; E_i)$ y suma geométrica de las coordenadas de un punto particular de este plano a partir de la proyección oblicua del eje B' .

Como se puede ver en la Figura 8, para un intervalo k de B_{i-1} y un intervalo q de E_i , el resultado geométrico de las correspondientes variables en el eje B' , intervalo j , puede ser localizado en la región de las dos líneas paralelas de 45° . La probabilidad de que el valor de B'_i este dentro del intervalo j será la suma de las probabilidades de los puntos del plano (B_{i-1}, E_i) incluido en cada uno de los polígonos entre las dos líneas de 45° que limitan este intervalo j .

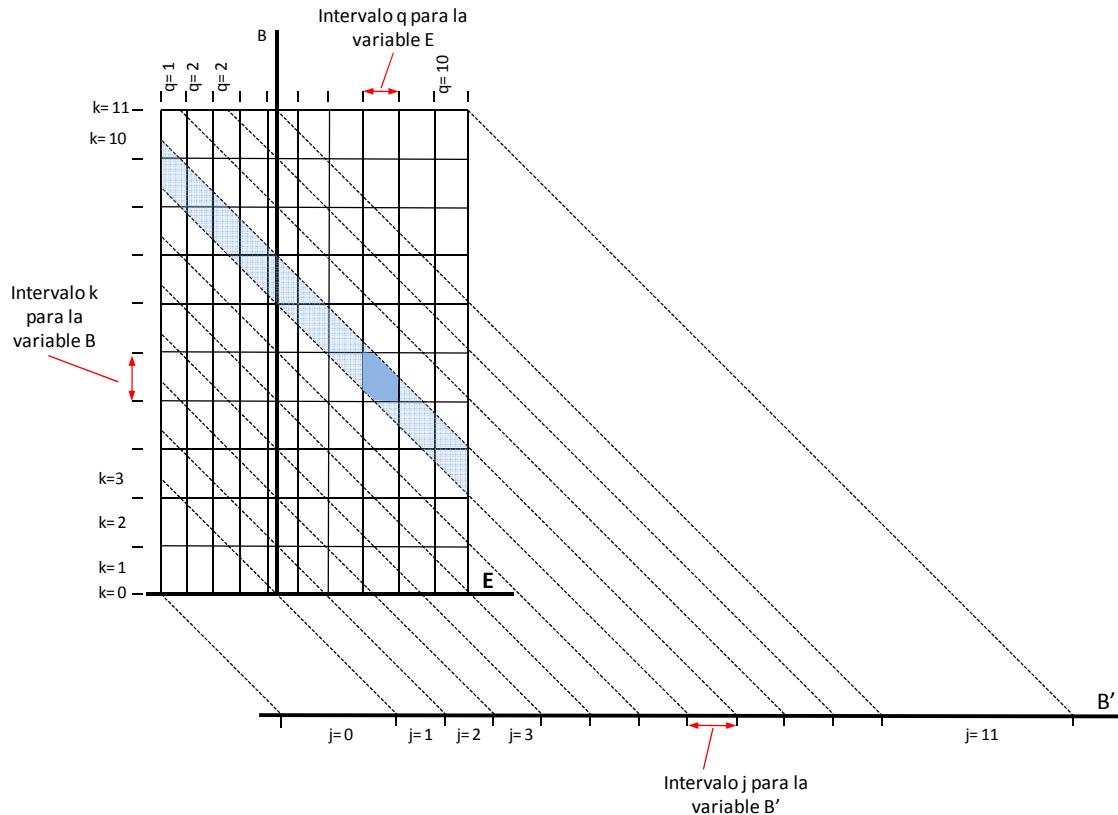


Figura 8. Estimación geométrica de la probabilidad de B' .

Para calcular la probabilidad de esos polígonos es necesario introducir un factor de corrección de área, $m(j,k,q)$, que representa la probabilidad de B'_i a ser incluido en el intervalo j cuando B_i pertenece al intervalo k y E_i al intervalo q . Gráficamente esta probabilidad será relacionada con los puntos que satisfacen las siguientes condiciones,

La proyección sobre el eje horizontal está incluida en el intervalo q de E_i .

La proyección sobre el eje vertical está incluida en el intervalo k de B_{i-1} .

La proyección oblicua sobre la dirección descendente a 45º está incluida en el intervalo j de B'_i .

Particularmente, $m(j,q,k)$ puede ser estimada a partir de la ecuación [20]

$$m(i, j, q) = \frac{s_{j,k,q}}{I_k I_q} \quad [20]$$

siendo $s_{j,k,q}$ el área del polígono cuya proyección esta simultáneamente sobre el intervalo vertical k , sobre el intervalo horizontal q y sobre las oblicuas del intervalo j . I_k es la longitud del intervalo k y I_q la longitud del intervalo q .

b.3) Estimación de la probabilidad E condicionada a la ocurrencia de B en el día anterior.

Debido a que la ecuación [10] representa la suma de dos variables aleatorias interdependientes, también es necesario caracterizar la probabilidad de E condicionada a la ocurrencia de B . Para ello, es necesario introducir la probabilidad de la ocurrencia de E_i perteneciente al intervalo q condicionado al estado de la batería que pertenece a un cierto intervalo k , $p(q/k)$.

De hecho, se supone que esta probabilidad depende del intervalo k al que pertenece B_{i-1} . De esa manera, es intuitivamente fácil de entender que un bajo (alto) B_{i-1} corresponde a un bajo (alto) índice de intervalo k y se correlacionan estadísticamente a una baja (alta) ocurrencia de radiación solar en el día anterior. Por otro lado, el valor E_i también depende del valor de la radiación solar día anterior. Por lo tanto, para valores de k bajos (altos) de los intervalos de B_{i-1} , la esperanza de un bajo (alto) valor de q para los intervalos E_i es más grande. El término $p(q/k)$ con $q = 1, 2, \dots, 10$ y $k = 0, 1, 2, \dots, n_{B+1}$ expresan esta dependencia. Estas probabilidades condicionales deben ser recalculadas cada nuevo día.

Desde el teorema de Bayes, esta probabilidad se podría calcular por la ecuación [21].

$$p_C^i(r/j) = \frac{\sum_{k,q} p_{Bk}^{i-1} m^{i-1}(j,k,q) p^{i-1}(q/k) p_A(q \rightarrow r)}{\sum_{k,q} p_{Bk}^{i-1} m^{i-1}(j,k,q) p^{i-1}(q/k)} \quad [21]$$

donde $p_A(q \rightarrow r)$ se identifica con el elemento a_{qr} de la matriz de transición de Markov, dada por Aguiar [18], y representa la probabilidad de que la radiación solar se cambie de un estado q en un día particular a un estado r en el día siguiente.

Por último, la probabilidad de que B' pertenezca a un intervalo j , es decir, la probabilidad de que la batería este en un estado j en el día siguiente, también puede determinarse a partir del teorema de Bayes como la suma de las probabilidades de todas las posibles combinaciones de términos cuyo resultado final puedan ser incluidos en el intervalo j .

$$p_{Bj}^i = \sum_{k,q} p_{Bk}^{i-1} m^i(j,k,q) p^i(q/k) \quad [22]$$

2.1.3.1.2. Notación Matricial.

Para sistematizar los cálculos, la metodología presentada ha sido reescrita en notación matricial. Primeramente, la probabilidad de los diferentes estados de la batería al final de los días ($i - 1$) puede ser descrita por el vector p_B^i .

$$p_B^i = \begin{bmatrix} p_{B0}^i \\ p_{B1}^i \\ p_{B2}^i \\ \dots \\ p_{B_{n_B+1}}^i \end{bmatrix} \quad [23]$$

Similarmente, el factor de corrección de área $m(j, k, q)$ para cualquier día i puede ser considerado como un vector lineal cuyos elementos son matrices de dos dimensiones,

$$m^i(j, k, q) = \begin{bmatrix} \llbracket m^i(j=0, k, q) \rrbracket \\ \llbracket m^i(j=1, k, q) \rrbracket \\ \llbracket m^i(j=2, k, q) \rrbracket \\ \dots \\ \llbracket m^i(j=n_B+1, k, q) \rrbracket \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \llbracket m_0^i \rrbracket \\ \llbracket m_1^i \rrbracket \\ \llbracket m_2^i \rrbracket \\ \dots \\ \llbracket m_{n_B+1}^i \rrbracket \end{bmatrix} \quad [24]$$

Por lo que se refiere a la probabilidad condicionada $p(q/k)$, podría ser reescrita por una matriz bidimensional con n_{B+2} filas (que van desde 0 a n_{B+1}) y 10 columnas de modo que el elemento dentro de la fila k y la columna q está dada por la ecuación [25].

$$C_{kq}^i = p_C^i(q/k) \quad [25]$$

Se llamará $\llbracket m_j^i C^i \rrbracket$ a la matriz que se obtiene a partir de la matriz $\llbracket m_j^i \rrbracket$ y $\llbracket C^i \rrbracket$, de modo que el elemento de la fila k y la columna q de $\llbracket m_j^i C^i \rrbracket$ se obtiene mediante el producto de los elementos de la fila k de $\llbracket m_j^i \rrbracket$ y la columna q de $\llbracket C^i \rrbracket$, ver ecuación [26].

$$(\llbracket m_j^i C^i \rrbracket)_{kq} = m^i(j, k, q) C^i(k, q) = m^i(j, k, q) p_C^i(q/k) \quad [26]$$

No se trata de un producto matricial sino de la matriz en la cual cada elemento es el producto de los elementos que ocupan idéntica posición.

Con esta notación y teniendo en cuenta que los resultados para el día i (depende de los datos de los días $i-1$) las ecuaciones [21] y [22] en forma vectorial quedarán,

$$\{p_B^i\} = \begin{pmatrix} \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_1^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dots \\ \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dots \end{pmatrix} \quad [27]$$

$$[\![C^i]\!] = \begin{bmatrix} \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{10,1} \end{pmatrix} & \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{10r} \end{pmatrix} \\ \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dots & \dots & \dots \\ \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{10,1} \end{pmatrix} & \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{10r} \end{pmatrix} \\ \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \{p_B^{i-1}\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad [28]$$

2.1.3.1.3. Caracterización de la esperanza del déficit.

Para caracterizar el déficit esperable del día i , definiremos la matriz de déficit $\llbracket D^i \rrbracket$, de n_B+1 filas y 10 columnas, donde cada elemento de la matriz viene dado por la ecuación[29].

$$D_{kq} = -\bar{E}(s_{0,k,q}) - \bar{B}(s_{0,k,q}) \quad [29]$$

Donde $\bar{E}(s_{0,k,q})$ designa la coordenada E del centro de masa de la superficie $s_{0,k,q}$ y $\bar{B}(s_{0,k,q})$ designa la coordenada B del centro de masa de la superficie $s_{0,k,q}$; Solamente se tendrán en cuenta aquellas combinaciones que producen déficit.

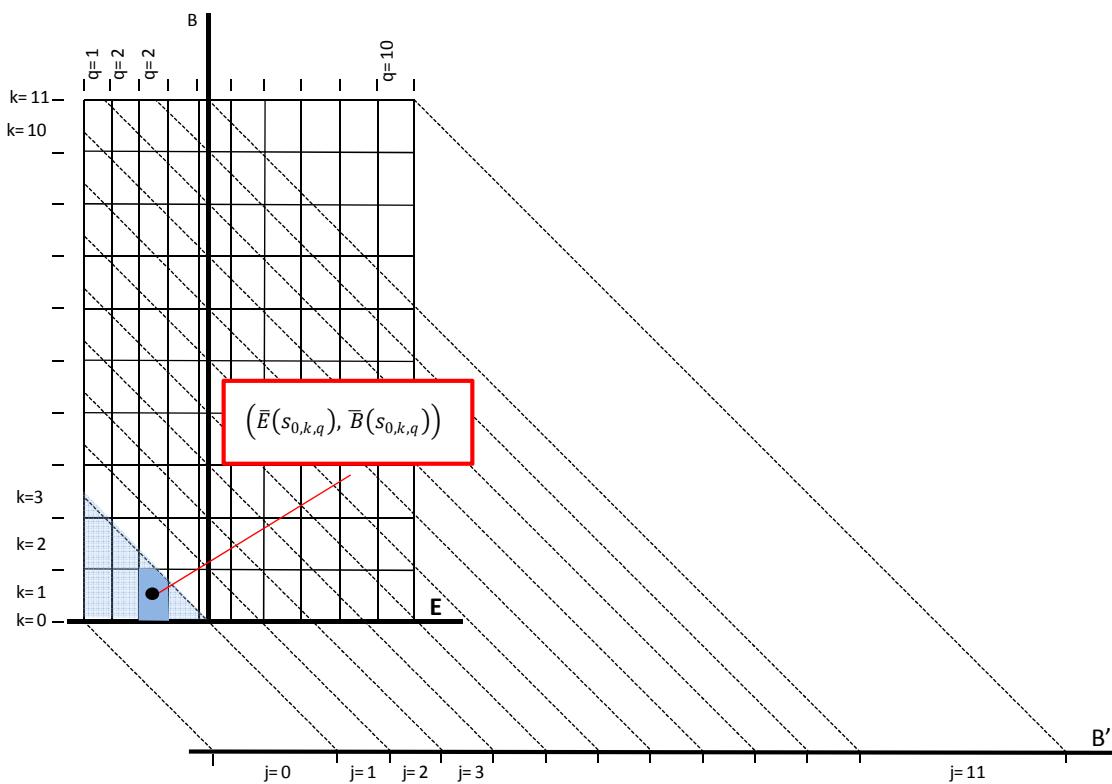


Figura 9. Representación gráfica de los puntos que producen déficit de energía.

Y siguiendo la notación previamente expuesta, se tendrá:

$$\bar{d}^i = \{p_B^i\}^T \llbracket m_{j=0}^i C^i D^i \rrbracket \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix} \quad [30]$$

donde $\llbracket m_{j=0}^i C^i D^i \rrbracket$ no representa un producto matricial sino la matriz cuyos elementos están formados por el producto de los tres elementos que ocupan idéntica posición en las tres matrices $\llbracket m_{j=0}^i \rrbracket$, $\llbracket C^i \rrbracket$ y $\llbracket D^i \rrbracket$.

La suma de déficits esperables durante un conjunto de días (comprendido entre 1 y T) referida a la suma de demandas se define como *LLP* o probabilidad de pérdida de carga.

$$LLP = \frac{\sum_{i=1}^T \bar{d}^i}{\sum_{i=1}^T L_i} \quad [31]$$

La proyección oblicua de la masa probabilística señalada en la Figura 9 corresponde a la función de densidad de probabilidad del déficit energético durante el día de estudio.

2.1.3.2. Resultados.

Se ha presentado un método matemático para el cálculo de la LLP.

Este método caracteriza las variables B y E necesarias para hacer el balance energético diario. La variable B es de tipo estocástico y dependiente de B_{i-1} . La variable E puede ser descrita con un proceso de Markov igual al propuesto por Aguiar, debido que esta variable depende de los valores de H_{gB} y estos pueden ser estimados a partir de las matrices de Aguiar que nos generan los índices de claridad diario del lugar. Ambos son probabilísticamente interdependientes y la estrategia del método consiste en caracterizar la probabilidad de que ocurra E_i condicionado a la ocurrencia de B_{i-1} , por lo que, el método no requiere de técnicas de simulación pero si de la precisión de las probabilidades condicionadas incluidas en las MTM para la caracterización de la radiación solar diaria.

Este método permite el estudio de instalaciones con demandas diarias variables o con seguimiento solar sin incrementar las necesidades de computación ya que no requieren de técnicas de simulación, y en consecuencia su fiabilidad no depende del número de iteraciones.

También es posible obtener el número de fallos, n_f , su distribución a lo largo del año, la función de densidad de probabilidad asociada al estado de baterías, la esperanza de déficit energético; De forma que podemos obtener otros indicadores de fiabilidad del sistema como la *probabilidad de fallo de la instalación* [8, 9]. Esto se consigue por la caracterización estadística del abastecimiento energético durante cada día de funcionamiento del año.

2.2. Diseño versus dimensionado de SFV autónomos.

Para poder hacer el diseño del sistema fotovoltaico se hace en una fase previa, la de dimensionamiento, una simulación del funcionamiento ideal del sistema mediante un modelo teórico con un alto grado de abstracción, suficientemente simple, pero a la vez lo más parecido al funcionamiento del sistema cuya tarea fundamental es la determinación del tamaño óptimo del generador fotovoltaico como del conjunto de baterías. En esta fase no se tiene en cuenta el acoplamiento de los diferentes equipos y su localización exacta por lo que no se puede determinar con exactitud las diferentes perdidas de energía que se producen en el campo solar **por sombreo**, por inclinación de los rayos solares, por temperatura, etc. y las perdidas en el resto de los elementos que componen la instalación que se ha considerado que tienen eficiencia unidad.

Es en la fase de diseño donde se tiene en cuenta la multitud de factores que afectan al sistema. En esta fase se volverá a hacer una simulación precisa con la solución obtenida en la fase de dimensionamiento para obtener los índices de fiabilidad del sistema, como la *LLP* o probabilidad de pérdida de energía, número de días (horas) al año en el que esperamos no satisfacer la demanda con la generación disponible, duración y frecuencias de los fallos, etc.

En esta nueva fase, la determinación de la radiación solar sobre el lugar donde se ubicara la instalación, es el factor principal que afecta al diseño, sobre todo en situaciones de sombreo.

2.2.1. Estimación de la radiación solar sobre superficies inclinadas.

La radiación se mide en las estaciones meteorológicas sobre superficies horizontales libre de obstáculos, sin embargo, los generadores fotovoltaicos se instalan con inclinación, o bien para optimizar la captación de energía, o por integración arquitectónica. Por lo tanto es necesario determinar la radiación sobre estas superficies a partir de los datos sobre superficie horizontal.

Múltiples autores como Gueymard [42]; Hay [43]; Klucher [44]; Muneer [45]; Pérez *et al.* [46], [47]; Reindl *et al.* [48][49] han elaborado modelos de caracterización de la irradiancia solar utilizando como base la ecuación [32], que describe de modo general que la irradiancia solar incidente sobre un plano inclinado un ángulo β con respecto al horizontal es suma de tres componentes, La irradiancia directa proveniente del disco solar ($I_{D\beta}$) , la irradiancia difusa proveniente del resto del cielo ($I_{d\beta}$) y la irradiancia

reflejada por el suelo ($I_{R\beta}$). Loutzenhisler *et al.* [50], Kapchun *et al.* [51] presentan estudios de comparación de estos modelos.

$$I_\beta = I_{D\beta} + I_{d\beta} + I_{R\beta} \quad [32]$$

La evaluación de la componente directa es un problema de geometría y la reflejada depende de la proporción de suelo que ve el plano inclinado y del albedo medio de este. Esta última tiene poca importancia en comparación con la difusa.

2.2.2. Estimación de la radiación difusa.

En la fase de dimensionado de las ISF el cálculo de la irradiancia difusa incidente sobre superficies inclinadas se hace a partir de la irradiancia difusa sobre superficie horizontal (I_{dH}), mediante un coeficiente de proporcionalidad que llamaremos $r_{d(\beta)}$ de forma que:

$$I_{d\beta} = r_{d(\beta)} I_{dH} \quad [33]$$

Existen diferentes modelos para calcular $r_{d(\beta)}$, los cuales se pueden agrupar en tres grupos según se considere la radiación difusa incidente sobre el plano inclinado.

Modelo Circunsolar, Supone que toda la radiación que llega a una superficie horizontal parece proceder de la dirección del Sol, de manera que la difusa se trata de la misma forma que la directa.

Modelo Isotrópico, En este modelo la intensidad de la radiación difundida por el cielo se supone uniforme en la cúpula celeste, con lo que el coeficiente de proporcionalidad $r_{d(\beta)}$, nos medirá la parte de la bóveda celeste "vista" por la superficie inclinada respecto a la que ve un plano horizontal.

$$r_{d(\beta)} = \frac{1 + \cos \beta}{2} \quad [34]$$

Modelo Anisotrópico, Supone que la distribución de la radiación en la porción de bóveda celeste que ilumina una superficie inclinada no es uniforme, en general, es fuertemente dependiente del tipo de nubes, porcentaje de cobertura, homogeneidad, etc.

Con el cielo cubierto de nubes la distribución de la radiación difusa se puede considerar constante (carácter isótropo), pero con cielos despejados se presentan unos máximos en las cercanías del Sol y en el horizonte. Este efecto ha sido descrito por varios autores proponiendo diferentes modelos para calcular $r_{d(\beta)}$.

En estos modelos, para determinación de $r_{d(\beta)}$, se asume que no hay obstáculos que oscurezcan parte del cielo. Para integrar estos obstáculos se tendrá que evaluar la proporción de cielo visto y de un método para estimar la radiación procedente de las zonas sin obstáculos.

Por lo que para caracterizar la componente difusa en presencia de obstáculos se define un nuevo coeficiente, el Factor de Cielo Visible *SVF* (por sus siglas en inglés, Sky View Factor).

El *SVF* se define como el cociente entre la irradiancia difusa incidente sobre un plano inclinado y obstruido ($I'_{d\beta}$) versus un plano horizontal y libre de obstrucciones [35].

$$SVF = \frac{I'_{d\beta}}{I_{dH}} \quad [35]$$

El valor de *SVF* sobre planos inclinados en ausencia de obstrucciones depende de orientación e inclinación. Noorian *et al.* [52] comparan el poder predictivo de doce modelos cuyas diferencias fundamentales se encuentran en el tratamiento de la radiación difusa y las expresiones consideradas para *SVF*. Encuentran la imposibilidad de ordenar los modelos considerados en función de su calidad predictiva pues los resultados dependen de la orientación y la inclinación de la superficie de estudio.

La ecuación [35] muestra que el *SVF* depende de la distribución angular de la radiancia difusa en la bóveda celeste. Por tanto, el efecto de la anisotropía en la distribución celeste también influye sobre el valor a considerar del *SVF* aunque el cielo esté libre de obstrucciones.

Muchos autores [53-58] han desarrollados metodologías para la determinación del *SVF* basadas en el modelo isótropo, y las revisiones bibliográficas realizadas por Chen *et al.* [59] y Kapchun *et al.* [51] nos muestran que la distribución isótropa es la más utilizada.

Estudios más completos hacen interdependientes los efectos de la inclinación, orientación, distribución angular de la radiancia en la bóveda celeste y perfil de obstrucciones para el cálculo de *SVF*. Teniendo en cuenta todos estos factores, Kastendeuch [60] propone la discretización en triángulos de la bóveda celeste visibles para calcular el *SVF* y Tsangrassoulis *et al.* [61] proponen un método basado en la simulación de Monte-Carlo para contemplar tanto la anisotropía como la orientación e inclinación de las superficies. Por otro lado, Quaschning y Hanitsch [62] proponen ignorar la anisotropía de la radiación difusa en los momentos en que no incida la irradiancia directa y autores como Nguyen y Pearce [63] o Elderlyi *et al.* [64] proponen modelos donde el *SVF* se calcula en todos los casos sobre superficie horizontal y los

valores correctores por inclinación no dependen de las obstrucciones. Ivanova S.M. [65,66] considera como más adecuada la distribución angular de la radiancia de fondo de Muneer [45]. Maor y Appelbaum [67], así como Kapchun *et al.* [51] utilizan modelos anisótropos para el cálculo de irradiancia sobre planos inclinados utilizando valores de SVF basados en el modelo isótropo.

Las proyecciones hemisféricas representan los puntos existentes sobre una superficie esférica en una superficie plana circular, por lo que la hacen adecuadas para el estudio de las obstrucciones. Muchos autores recomiendan que se escoja la proyección adecuada de la variable de estudio por las propiedades métricas de la proyección.

El estudio del SVF para la realización de cálculos radiativos presenta una analogía formal con los estudios que analizan la disponibilidad del recurso solar para el acondicionamiento térmico-lumínico de los espacios. En este campo, E. Ramírez *et al.* [68] vieron la utilidad de la generación de proyecciones adecuadas para el estudio de la iluminancia desarrollando proyecciones específicas para la obtención del SVF en diferentes tipos de superficies.

Presentamos las principales referencias encontradas en la bibliografía para el estudio del SVF mediante proyecciones gráficas de la bóveda celeste cuando existen obstrucciones,

- **Proyección estereográfica.** Este tipo de proyección respeta las distancias angulares. La representación plana de circunferencias 3D incluidas en la bóveda celeste son transformadas en circunferencias 2D. Pleijel [69], desarrolló un dispositivo óptico, globoscopio, que permite obtener directamente imágenes estereográficas a partir de la reflexión de la bóveda sobre un espejo parabólico. Esta proyección es extensamente utilizada tanto en Arquitectura como en el ámbito de descripción gráfica de los perfiles de obstrucción. Ivanova [65, 66], Teller y Azar [70], Souza *et al.* [71] hacen uso de ella sólo como representación gráfica de obstrucciones. An *et al.* [72] utilizan una definición de SVF en la que atribuyen propiedades métricas a esta proyección, pues consideran que SVF es el ratio de área celeste no obstruida vista en proyección estereográfica frente al área de proyectada de la semibóveda.
- **Proyección ortogonal,** La analogía de Nusselt [53] muestra que en cielos isotrópicos, el SVF se puede calcular como la relación entre la superficie proyectada de cielo no obstruido frente a la total de la carta ortogonal dando así base matemática al cálculo de este factor. Torres *et al.* [73] muestran la utilidad de este método en la determinación del SVF. Márquez García *et al.* [74] presentan un método de estimación de SVF; Consideran un haz de rayos

emergentes y demuestran que *SVF* se estima adecuadamente como el ratio de rayos que no inciden en el suelo ni en obstrucciones frente al total. Las direcciones utilizadas en la generación de rayos coinciden con las descritas por Ratti y Richens [75] en el método que proponen de visibilidad.

- **Proyección de Lambert** o equal-area hemispherical. En esta proyección los ángulos sólidos son proporcionales a las superficies proyectadas. Esta propiedad permite determinar el *SVF* como la relación entre el área del cielo NO obstruido proyectado versus el área proyectada de la bóveda. Rakovec y Zaksek [76], Tian *et al.* [77] estiman esta proyección como la más adecuada bajo sus hipótesis.
- **Proyección Polar.** La distancia de la proyección de cualquier punto P al centro de la imagen es proporcional al ángulo cenital φ del punto representado. Idealmente, las lentes ojo de pez producen proyecciones polares; Por lo que es la proyección que, de modo teórico, se considera para introducir métrica en las fotografías hemisféricas y desarrollar métodos como los propuestos por Johnson and Watson [55], Steyn *et al.* [78], Holmer *et al.* [58] y Chapman *et al.* [79]. Matzarakis y Matuschek [80] proponen el modelo Rayman en el que se propone la medida de *SVF* como porcentaje de área dentro de la carta polar.
- **Proyección Cilíndrica.** Se trata de una carta de aspecto rectangular. En su eje horizontal se representa el azimut de los objetos celestes y en el vertical la elevación. Aunque carece de características métricas, Gharakhani *et al.* [81] la utilizan como carta de referencia del *SVF*. Redweik *et al.* [82] presentan una modificación del método de Ratti y Richens [75], basado en esta carta, para estimar el *SVF* sobre superficies horizontales. Este método de cálculo de *SVF* da igual peso a cada porción de superficie de la carta cilíndrica. Los autores lo proponen también para superficies verticales.

En la actualidad no existe una técnica definitiva para el cálculo del *SVF* en localizaciones con obstáculos, siendo la influencia de estos importantes en el diseño de las ISF. En esta tesis se presenta una nueva proyección hemisférica que permite representar la bóveda celeste visible en una superficie horizontal, esta proyección presenta características métricas directamente relacionadas con la ecuación [36] relativa a la distribución angular de la radiancia considerando el modelo anisótropo de Moon y Spencer [6]. Hasta ahora, debido a la dificultad matemática de los cálculos, solo se ha podido obtener las proyecciones de planos verticales y horizontales. A efectos prácticos, esta proyección supone un avance en la línea abierta por Ivanova S.M. [65] y [66] porque permite determinar la influencia de las obstrucciones con forma compleja sobre la radiación incidente en superficies verticales y horizontales.

2.2.3. Herramientas para la determinación de la radiación difusa en cielos OVERCAST en presencia de obstáculos.

En primer lugar, como paso previo, se desarrolla y presenta el método matemático genérico para obtener las ecuaciones de proyecciones hemisféricas derivadas de cualquier distribución angular de la radiancia, según el modelo anisotrópico de Moon-Spencer (MS_b), ecuación [36], que caracteriza el cielo más común utilizado en las simulaciones, el Overcast o cielo cubierto, donde la radiancia en un punto P de la bóveda celeste cambia con la altura cenital del punto, siendo el cenit de la bóveda el de mas radiación.

$$R(\varphi, \theta) = R_Z \frac{1+b\cos\varphi}{1+b} \quad [36]$$

donde,

$R(\varphi, \theta)$ = Radiancia en el punto P de la bóveda celeste.

R_Z = Radiancia en el cenit de la bóveda.

b = Parámetro dependiente de las condiciones de cielo.

φ = Ángulo cenital del punto P .

θ = Ángulo acimutal del punto P .

Un caso particular de este tipo de cielo es el isotrópico donde $b=0$.

Las ecuaciones que se obtienen al implementarlas en ordenador permiten calcular el SVF a partir del procesamiento de una imagen digital hemisférica tomada con una cámara con una lente ojo de pez. Esta técnica ha sido testeada con otras metodologías disponibles para la obtención del SVF.

Método matemático para el desarrollo de proyecciones hemisféricas vinculadas a atributos integrables

Este método permite el estudio grafico de todas aquellas magnitudes físicas C que cumplan con la ecuación [37], al asignarle una superficie plana a esa magnitud física. Es decir, la magnitud C es obtenida mediante la integración en las direcciones del ángulo cenital φ y azimut θ , extendiéndola sobre el dominio D de interés. Ejemplos de este tipo de magnitudes son el ángulo sólido con el que se observa la irradiancia y la iluminancia.

$$C = \iint_D \rho(\varphi, \theta) d\varphi d\theta \quad [37]$$

Donde $\rho(\varphi, \theta)$ = Función núcleo de la proyección (representa la densidad superficial o densidad de la magnitud C en el entorno del punto $P(\varphi, \theta)$) y D = Región espacial que constituye un subdominio de la bóveda.

Si una de estas magnitudes está afectada por la presencia de obstrucciones en la bóveda celeste se plantea la dificultad de la determinación de la función $\varphi(\theta)$ que delimita el dominio de integración. Ante esta dificultad se propone en estos artículos una metodología basada en el desarrollo de proyecciones. Éstas muestran como ventaja la posibilidad de cuantificar fácilmente la variable objeto de estudio utilizando técnicas de análisis de imagen.

El objetivo de las proyecciones propuestas se basa en la transformación de la bóveda celeste en una superficie plana donde la ecuación [37] se transforma en una integral de determinación de una superficie (Figura 10) delimitada por un recinto circular.

Para ello se propone una transformación de variables dada por las ecuaciones [38] y [39].

$$r = r(\varphi, \theta) \quad [38]$$

$$\xi = \xi(\varphi, \theta) \quad [39]$$

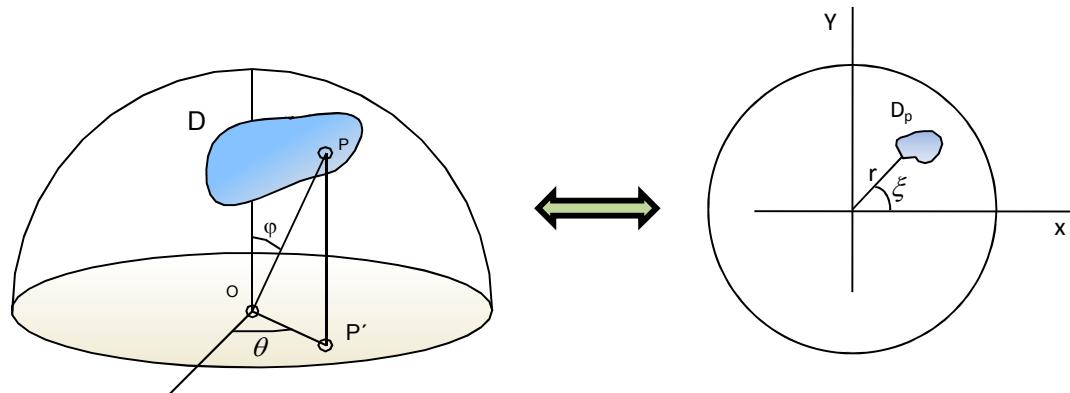


Figura 10. Transformación propuesta.

Para transformar la variable en la bóveda celeste como una superficie en el plano de coordenadas polares (r, ξ) se ha de verificar [40].

$$\iint_D \rho(\varphi, \theta) d\varphi d\theta = \iint_{D_p} r dr d\xi \quad [40]$$

La ecuación [40], matemáticamente implica un cambio de variables en una integral doble, por lo que los integrandos deben cumplir la condición de Jacobi expresada en [41].

$$\rho = r \begin{vmatrix} \frac{\delta r}{\delta \varphi} & \frac{\delta r}{\delta \theta} \\ \frac{\delta \xi}{\delta \varphi} & \frac{\delta \xi}{\delta \theta} \end{vmatrix} \quad [41]$$

O lo que es equivalente

$$\frac{\delta r^2}{\delta \varphi} \frac{\delta \xi}{\delta \theta} - \frac{\delta r^2}{\delta \theta} \frac{\delta \xi}{\delta \varphi} = 2\rho(\varphi, \theta) \quad [42]$$

La solución a la ecuación [42] no es única, por lo que se pueden imponer restricciones que den lugar a las mejores posibilidades de una posterior representación gráfica. Una característica común de las ecuaciones de las proyecciones hemisféricas más frecuentes es la independencia de r respecto de θ . Así, la ecuación [38] queda simplificada en [43].

$$r = r(\varphi) \rightarrow \frac{\delta r^2}{\delta \theta} = 0 \quad [43]$$

En el caso de la bóveda celeste vista desde un plano horizontal esta restricción implica gráficamente que todos los puntos de igual ángulo cenital en la bóveda celeste que observa se representan en circunferencias concéntricas en el plano proyectado.

Para definir una solución para la ecuación coherente con [42] y [43] se plantea la equivalencia entre el valor del atributo correspondiente a un recinto considerado sobre la bóveda celeste y el plano proyectado (Figura 11).

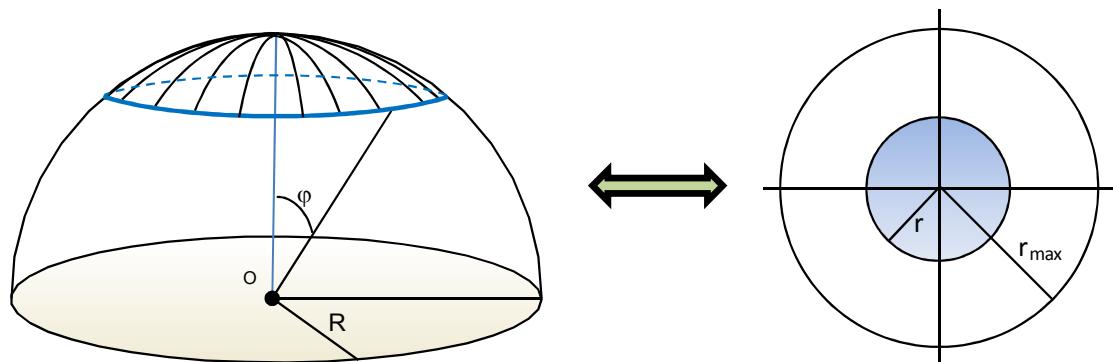


Figura 11. Recinto considerado sobre la bóveda celeste y su transformada para superficies horizontales.

El valor del atributo viene dado por las ecuaciones [44] y [45] en la bóveda celeste y en la transformación, respectivamente.

$$C = \int_0^\varphi \left[\int_0^{2\pi} \rho(\mu, \eta) d\eta \right] d\mu \quad [44]$$

$$\text{Área transformada} = \pi r^2 \quad [45]$$

Igualando [44] y [45] se obtiene la función de transformación $r(\varphi)$ para planos horizontales [46].

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\varphi \left[\int_0^{2\pi} \rho(\mu, \eta) d\eta \right] d\mu} \quad [46]$$

Sustituyendo [46] y [43] en [42] e integrando obtenemos la segunda función de transformación para planos horizontales en la ecuación [47].

$$\xi(\theta) = 2\pi \frac{\int_0^\theta \rho(\mu, \eta) d\eta}{\int_0^{2\pi} \rho(\mu, \eta) d\eta} \quad [47]$$

En el caso de la bóveda celeste vista desde un plano vertical la restricción propuesta consiste en restringir el espacio proyectado a un semicírculo (Figura 12).

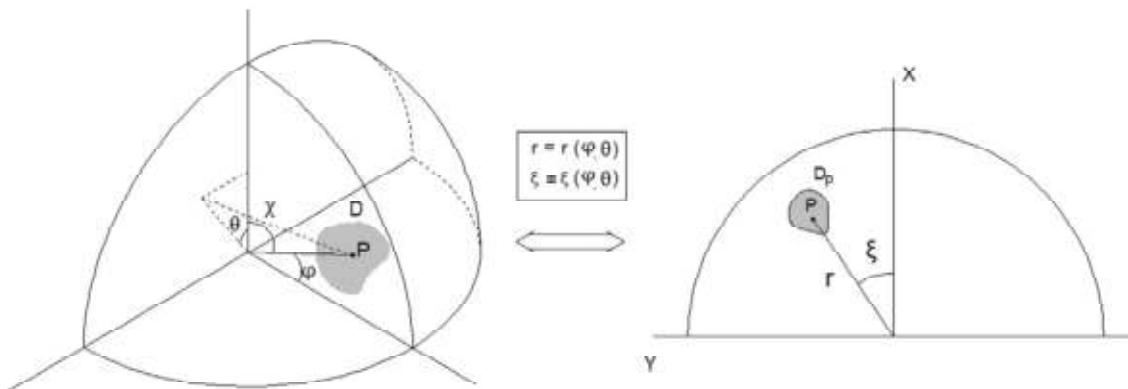


Figura 12. Principio geométrico de la transformación propuesta para superficies verticales.

Para definir una solución para la ecuación coherente con [42] y [43] se plantea la equivalencia entre el valor del atributo correspondiente a un recinto considerado sobre la bóveda celeste y el plano proyectado (Figura 13).

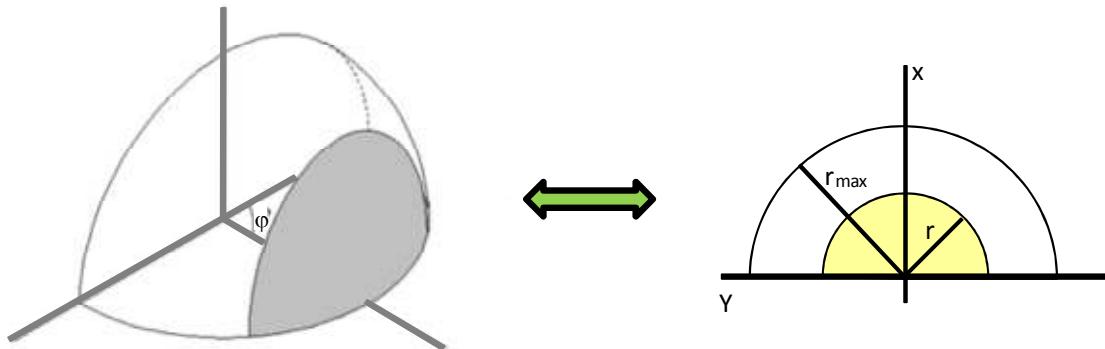


Figura 13. Recinto considerado sobre la bóveda celeste y su transformada para superficies verticales.

El valor del atributo viene dado por las ecuaciones [48] y [49] en la bóveda celeste y en la transformación, respectivamente.

$$C = \int_0^\varphi \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\mu, \eta) d\eta \right] d\mu \quad [48]$$

$$\text{Área transformada} = \frac{\pi}{2} r^2 \quad [49]$$

Igualando [48] y [49] se obtiene la función de transformación $r(\varphi)$ para planos verticales [50].

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^\varphi \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\mu, \eta) d\eta \right] d\mu} \quad [50]$$

Sustituyendo [50] y [43] en [42] e integrando obtenemos la segunda función de transformación para planos verticales [51].

$$\xi(\varphi, \theta) = \pi \frac{\int_0^\theta \rho(\varphi, \eta) d\eta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\varphi, \eta) d\eta} \quad [51]$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de transformación para cualquier magnitud que cumpla [37] en estos dos casos particulares, superficies verticales y horizontales, se puede aplicar para el cálculo de la irradiancia en cielos CIE OVERCAST dados por el modelo de Moon y Spencer ampliamente utilizado.

a) Calculo del SVF para superficies horizontales.

En el caso de la bóveda celeste vista desde una superficie Horizontal, la irradiancia proporcionada en el plano de proyección horizontal por un diferencial de superficie centrado en el punto P de la bóveda celesta vendrá dada por:

$$dI = R(\varphi, \theta) d\Omega \cos \varphi \quad [52]$$

Sustituyendo $R(\varphi, \theta)$ según [36] obtenemos:

$$dI = R_Z \frac{1 + b \cos \varphi}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta \quad [53]$$

Integrando:

$$I = \iint R_Z \frac{1 + b \cos \varphi}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta \quad [54]$$

En este caso la función núcleo de la proyección será:

$$\rho = R_Z \frac{1 + b \cos \varphi}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi \quad [55]$$

Sustituyendo en [46]:

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\varphi \left[\int_0^{2\pi} R_Z \frac{1 + b \cos \mu}{1 + b} \cos \mu \sin \mu d\mu \right] d\eta} \quad [56]$$

Integrando:

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{R_Z}{6}} \sqrt{\frac{3b(1-\cos \varphi) + 3(1-\cos 2\varphi) + b(1-\cos 3\varphi)}{1+b}} \quad [57]$$

De [47] se deduce que:

$$\xi(\theta) = \theta \quad [58]$$

Por tanto, la ecuación [57] puede simplificarse teniendo en cuenta que:

$$r_{max} = r_{\varphi=\pi/2} = \sqrt{\frac{R_Z}{6}} \sqrt{\frac{6+4b}{1+b}} \quad [59]$$

Quedando [60] al sustituir R_Z en [57].

$$r(\varphi) = r_{max} \sqrt{\frac{3b(1-\cos \varphi) + 3(1-\cos 2\varphi) + b(1-\cos 3\varphi)}{6+4b}} \quad [60]$$

Consecuentemente el factor SVF para superficies horizontales quedará:

$$SVF = \frac{\iint_{D_p} r dr d\xi}{\pi r_{max}^2} \quad [61]$$

En la Figura 14 se muestran las líneas de igual φ y de igual θ de la carta hemisférica obtenida para $b=2$ para superficies horizontales.

En la Figura 15 se comparan los desplazamientos asignados a cada ángulo cenital φ según la proyección considerada sobre planos horizontales y deducidos de la ecuación de Moon-Spencer, ecuación [55], con los asignados por las proyecciones estereográfica, polar, lambertiana y ortogonal. Por definición la proyección ortogonal coincide con la de Moon-Spencer para $b = 0$.

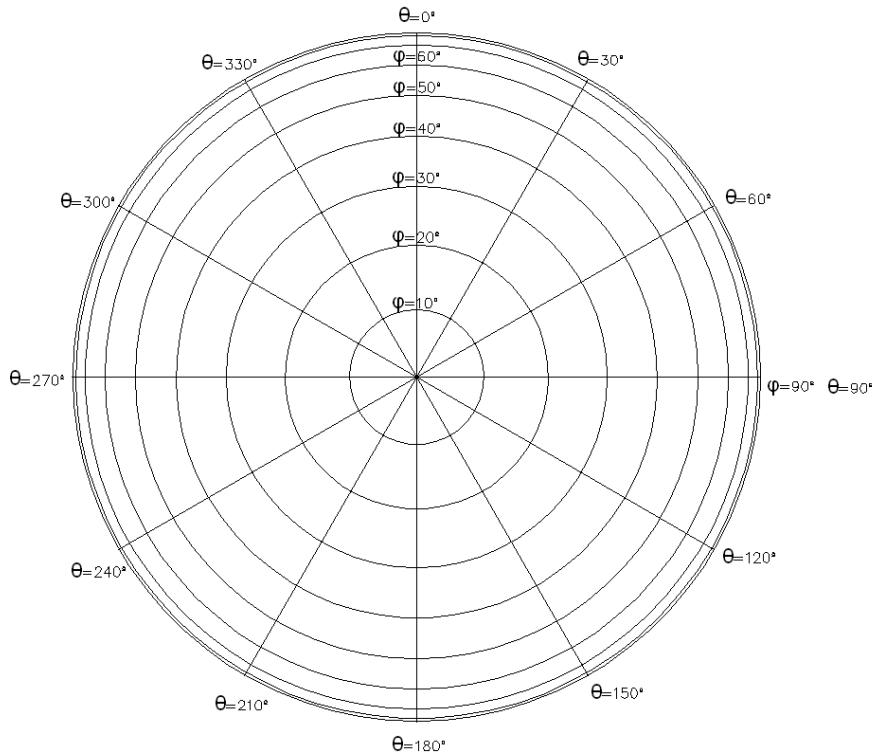


Figura 14. Representación de líneas de igual φ y de igual θ de la bóveda celeste para $MS_{b=2}$ y superficies horizontales.

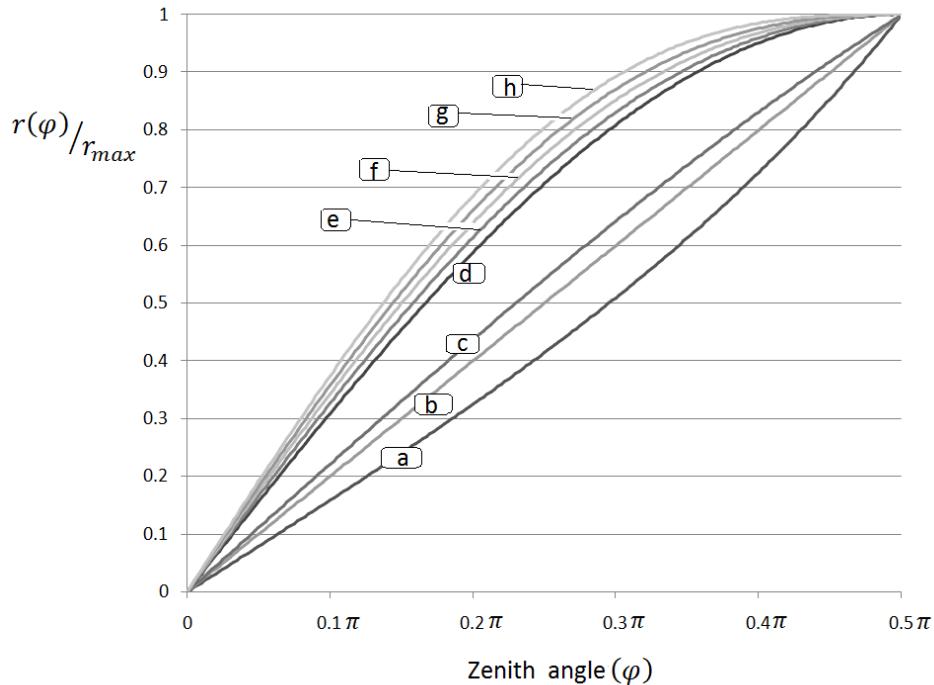


Figura 15. Representación del desplazamiento $r(\varphi)/r_{max}$ en función del ángulo cenital para las proyecciones estereográfica (a), polar (b), lambertiana (c), ortogonal o $MS_{b=0}$ (d), $MS_{b=0,5}$ (e), $MS_{b=1,5}$ (f), $MS_{b=3,0}$ (g), y $MS_{b \rightarrow \infty}$ (h) sobre planos horizontales.

Una vez obtenidas las ecuaciones de proyección de la irradiación estas se han implementado mediante subrutinas de Visual Basic y han sido integradas en el Software de un equipo desarrollado por Ramírez [83] denominado LRTV (Light Ray Tracing and Visioning Device). Este dispositivo, mostrado en la Figura 15, permite fotografiar el reflejo de la bóveda celeste sobre una esfera especular mediante una cámara pinhole; Y mediante el análisis geométrico de la imagen obtenida y su tratamiento matemático visto en las ecuaciones anteriores se puede reubicar cada pixel o detalle de la bóveda celeste (ver Figura 16 imagen cruda) obteniéndose la proyección requerida (ver Figura 17 obtenida para $MS_{b=2}$), que sería la adecuada para estudiar en este caso de superficies horizontales el SVF como fracción de superficie celeste frente a la superficie total de la carta circular.



Figura 16. *Fotografía del LRTV.*

En la imagen de la Figura 18 se observa la mayor consideración de la porción de cielo en la zona cenital, acorde a la expresión de la radiancia utilizada, en comparación con la imagen cruda de esta que se puede observar en la Figura 17. Asimismo, las obstrucciones más próximas al horizonte pierden influencia quedando reducidas en la imagen transformada. Sobre la proyección se ha dibujado la posición solar a lo largo del día (de 8 a 16 h) y en diferentes meses y por tanto se puede obtener la disponibilidad de la radiación directa en el emplazamiento analizado. Si la posición del Sol se encuentra dentro del cielo visible en ese momento el Sol resultará visto, por lo que el pixel correspondiente en cada una de las imágenes se marca del color IC (Incidence Color). En caso de no incidencia, el pixel se marca con el color NIC (No Incidence Color). De esta forma podemos obtener también la fracción de directa obstruida.



Figura 17. *Imagen cruda de la bóveda celeste, proporcionada por el dispositivo LRTV, vista desde un plano horizontal.*



Figura 18. *Imagen transformada $MS_{b=2}$ de la bóveda celeste vista desde un plano horizontal incluyendo las trayectorias solares en diferentes meses y las líneas de posición del Sol en cada hora.*

El Software del LRTV es capaz de reconocer los obstáculos de la imagen transformada hasta generar una línea cerrada que encierra el cielo visible desde la posición analizada, esto se hace comparando el color de cada pixel de la imagen con un umbral valor de discriminación, y a partir de aquí se puede estimar el *SVF* para superficies horizontales como ratio entre el número de píxeles clasificados como cielo (representados en blanco) frente al número de píxeles que componen la carta circular. En la Figura 19 se muestra la pantalla principal del programa.



Figura 19. Pantalla principal del software del LRTV.

Además de la representación gráfica de las trayectorias solares el software del LRTV dispone de una salida numérica que nos da la hora del orto y el ocaso en la localización estudiada y los mismos valores teniendo en cuenta los bloqueos debidos a los obstáculos. En la Figura 20 se pueden observar los resultados para el punto en cuestión.

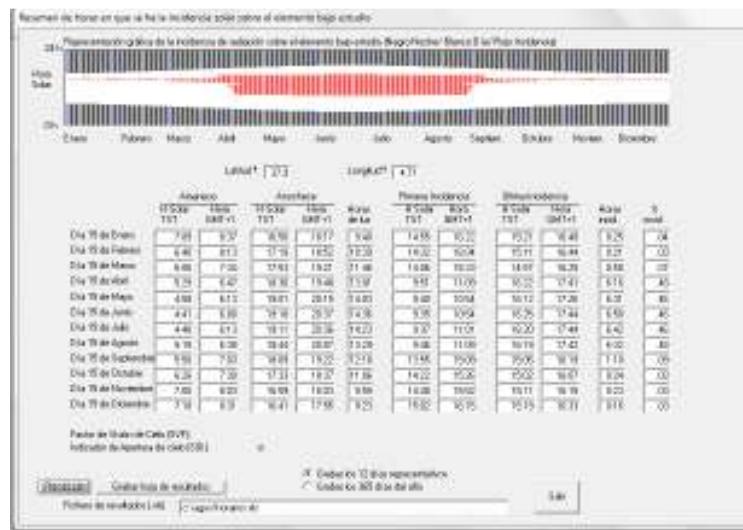


Figura 20. Salida numérica de las trayectorias solares del Software del LRTV.

b) Calculo del SVF para superficies verticales.

En el caso de la bóveda celeste visto desde una superficie Vertical, la irradiancia proporcionada en el plano de proyección horizontal por un diferencial de superficie centrado en el punto P de la bóveda celesta vendrá dada por [52], e integrando obtendremos que ,

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{R_Z}{\pi}} \sqrt{\frac{3\pi + 4b \operatorname{sen} \varphi}{3(1+b)} \operatorname{sen}^2 \varphi} \quad [62]$$

De [51] se deduce que:

$$\xi(\theta) = \pi \frac{\theta + b \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta}{\pi + 2b \operatorname{sen} \varphi} \quad [63]$$

La ecuación [62] puede simplificarse sabiendo que:

$$r_{max} = r_{\varphi=\pi/2} = \sqrt{\frac{R_Z}{\pi}} \sqrt{\frac{3\pi + 4b}{3(1+b)}} \quad [64]$$

Quedando [65] al sustituir R_Z en [62]:

$$r(\varphi) = r_{max} \sqrt{\frac{3\pi + 4b \operatorname{sen} \varphi}{3\pi + 4b} \operatorname{sen}^2 \varphi} \quad [65]$$

Consecuentemente el factor *SVF* para superficies verticales quedará:

$$SVF = \frac{\iint_{D_p} r \, dr \, d\xi}{I_{dH}} = \frac{3\pi + 4b}{2\pi(3+2b)} \frac{\iint_{D_p} r \, dr \, d\xi}{\frac{\pi}{2} r_{max}^2} \quad [66]$$

Teniendo en cuenta que:

$$I_{dH} = \frac{\pi R_Z}{3} \frac{3+2b}{1+b} \quad [67]$$

$$I_{dV} = \frac{\pi}{2} r_{max}^2 = \frac{R_Z}{6} \frac{3\pi + 4b}{1+b} \quad [68]$$

Si llamamos f_s a la fracción de superficie ocupada por la bóveda celeste no obstruida en la proyección propuesta [69], resulta la ecuación [70].

$$f_s = \frac{\iint_{D_p} r dr d\xi}{\frac{\pi}{2} r_{max}^2} \quad [69]$$

$$SVF = \frac{3\pi + 4b}{2\pi(3 + 2b)} f_s \quad [70]$$

La ecuación [70] muestra la proporcionalidad entre SVF sobre una superficie vertical obstruida y la fracción de superficie f_s en la proyección propuesta. Resulta fácil comprobar que la constante de proporcionalidad se localiza entre los valores 0,5 (si $b = 0$, cielo isotrópico) y 0,31 (si $b \rightarrow \infty$).

Las ecuaciones [63] y [65] son la solución a las transformaciones impuestas a las ecuaciones [38] y [39]. La Figura 21 muestra las líneas de igual φ y de igual θ de las proyecciones obtenidas para diferentes parámetros b .

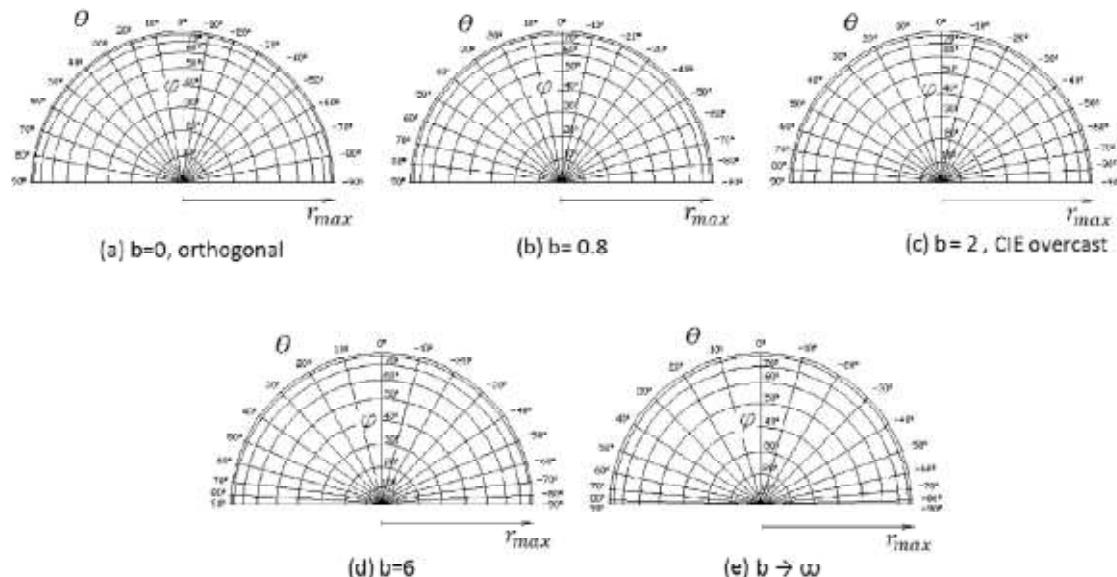


Figura 21. Representación de líneas de igual φ y de igual θ en las cartas verticales MS_b .

En la Figura 22 se comparan los desplazamientos asignados a cada ángulo φ según la proyección considerada sobre planos verticales (ecuación [57]) y deducidos de la ecuación de Moon-Spencer, con los asignados por las proyecciones estereográfica, polar, lambertiana y ortogonal. Por definición la proyección ortogonal coincide con la de Moon-Spencer para $b = 0$.

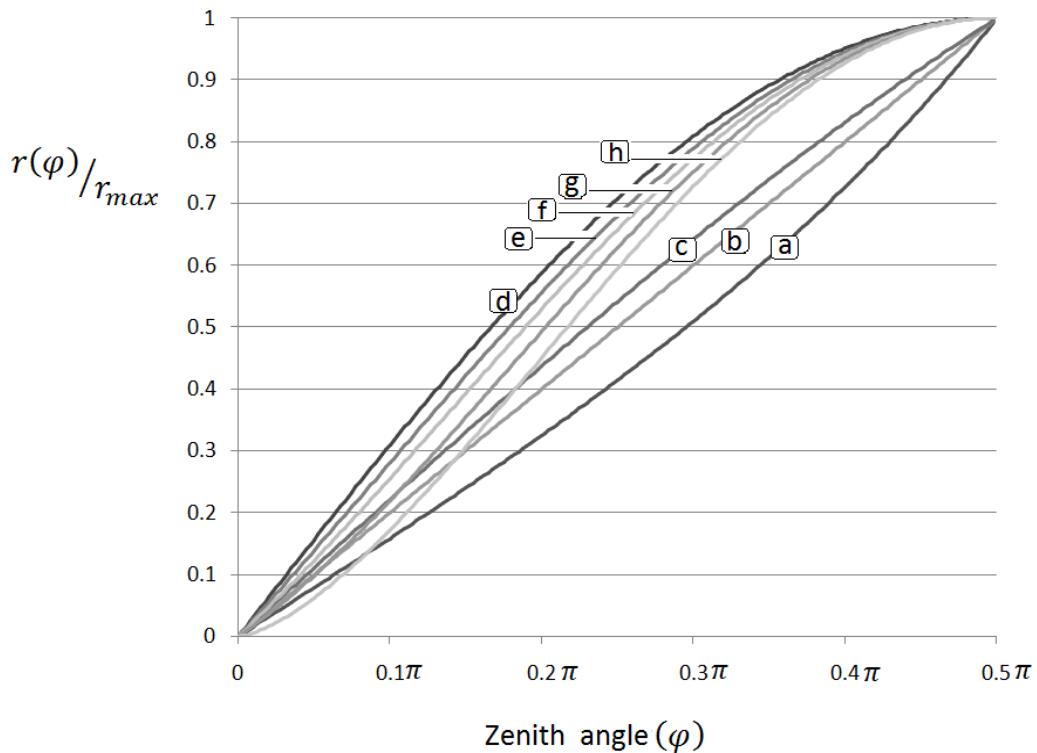


Figura 22. Representación del desplazamiento $r(\varphi)/r_{max}$ en función del ángulo cenital para las proyecciones estereográfica (a), polar (b), lambertiana (c), ortogonal o $MS_{b=0}$ (d), $MS_{b=0,8}$ (e), $MS_{b=2}$ (f), $MS_{b=6}$ (g), y $MS_{b \rightarrow \infty}$ (h) sobre planos verticales.

Como en el caso anterior, una vez obtenidas las ecuaciones de transformación [63] y [65] se han implementado en Visual Basic de forma que mediante el análisis geométrico de las imágenes de la bóveda celeste obtenida con el LRTV se puede reubicar cada pixel en la carta correspondiente. En la Figura 24 se puede observar la proyección $MS_{b=2}$ de la bóveda celeste obtenida a partir de la imagen de la Figura 23.

El valor del SVF será obtenido como la relación entre el número de pixeles que representan al cielo obstruido y el total de pixeles de la imagen obtenida.



Figura 23. *Imagen cruda de la bóveda celeste vista desde un plano vertical tomadas con el LRTV.*

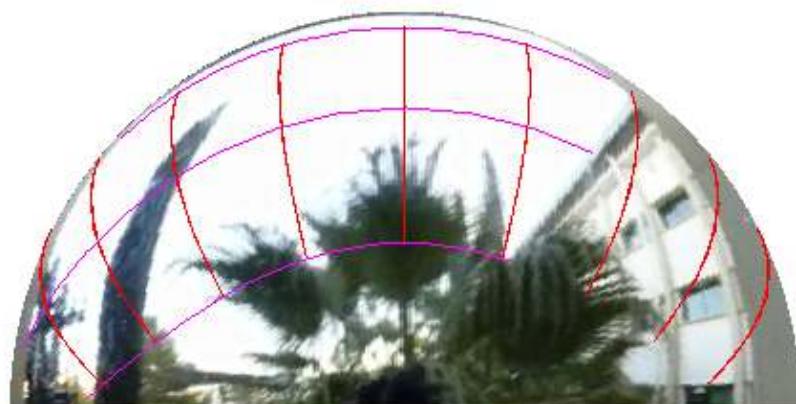


Figura 24. *Proyección $MS_{b=2}$ obtenida de la imagen cruda de la Figura 23 incluyendo las trayectorias solares en diferentes meses y las líneas de posición horaria del Sol.*

2.2.3.1 Resultados.

Se han obtenido ecuaciones que permiten obtener las proyecciones hemisféricas en la que la superficie con que cada dominio aparece representado es proporcional a algún tipo de propiedad física C (ecuación [37]) que incide en el.

Como caso concreto se ha obtenido la proyección hemisférica para la representación de la bóveda celeste de modo proporcional a la distribución angular de la radiancia de Moon-Spencer para superficies horizontales y verticales, de forma que se puede calcular fácilmente el *SVF* como ratio entre superficies proyectadas y así estimar el impacto del sombreadamiento en la radiación difusa.

La Figura 15 y Figura 22 permiten la comparación entre las familias de proyecciones obtenidas, así como con las utilizadas frecuentemente en la bibliografía. De su interpretación se deduce que partiendo de una distribución isótropa ($b=0$) conforme b aumenta en el caso de una superficie horizontal ganan peso los puntos cenitales ($r < 0,4 r_{\max}$) de la bóveda y lo disminuyen los cercanos ($r > 0,7 r_{\max}$) al horizonte, y en el caso de superficies verticales conforme b aumenta la parte central de las cartas MS_b ($r < 0,4 r_{\max}$) tiende a aproximarse a las representaciones lambertiana, polar y estereográfica y para la zona perimetral de las cartas ($r > 0,7 r_{\max}$) las representaciones tienden a aproximarse a la proyección ortogonal.

Aunque se requerirá un análisis más extenso, la proximidad entre curvas ($b = 0$) ($b = \infty$) hace pensar que los *SVF* obtenidos al considerar cualquiera de los cielos anisótropos deben ser muy similares.

Muchos modelos teóricos y empíricos consideran el parámetro b entre 1 y 2 [39], por lo que un criterio práctico sería considerar la proyección $b = 2$ para determinar los valores de *SVF* teniendo en cuenta la anisotropía celeste.

La obtención de proyecciones adecuadas para cielos anisótropos y su comparación con el conjunto de proyecciones más frecuentes (ver Figura 15 y Figura 22) nos lleva a ordenar las proyecciones existentes respecto de la anisotropía resultando la estereográfica como más inadecuada para la estimación del *SVF*, seguida de polar, lambertiana y ortogonal. La cercanía de la ortogonal al conjunto de curvas anisótropas la hace adecuada para estimar el *SVF* aún cuando se utilicen modelos anisótropos.

Las proyecciones obtenidas constituyen una herramienta sencilla de estimación del *SVF* en localizaciones con sombras basada en equipos fácilmente asequibles.

3. Conclusiones.

En los artículos presentados se describe y analizan los resultados de la implementación, por un lado, de un método racional basado en las hipótesis de balance energético diario especialmente adecuado para su integración con los modelos de generación de series sintéticas de radiación basados en las series de Markov (Aguiar), y por otro, de una técnica computerizada que permite la estimación del factor de visión de cielo para la evaluación del recurso solar en diferentes escenarios representativos mediante el procesamiento digital de imágenes hemiesféricas.

El primer artículo muestra la caracterización de las variables asociadas al balance energético utilizando un método matemático obteniendo así un modelo de dimensionado fotovoltaico autónomo basado en la fiabilidad de este. Este método ofrece la alternativa al método de simulación y evita algunos de sus inconvenientes, como son la necesidad de un elevado número de cálculos para obtener resultados precisos o la necesidad de fijar variables (demanda, inclinación de colectores, etc.) para limitar las necesidades de computación.

Sobre la base de este método el modelo de dimensionado tiene las siguientes capacidades,

- Caracterizar estadísticamente el abastecimiento energético durante todos los días del año. Permite, por tanto, extraer información relevante durante los períodos o días que el diseñador considere significativos.
- Permite conocer, para cada día del periodo de funcionamiento, la función de densidad de probabilidad asociada al estado de baterías, la esperanza de déficit energético, la probabilidad de fallo en la instalación e incluso la función de densidad de probabilidad del déficit diario.
- Permite estudiar instalaciones con demandas diaria variable o con seguimiento solar sin incrementar las necesidades computacionales.
- La aproximación estadística sólo se encuentra limitada por la caracterización de las matrices de Markov utilizadas para la caracterización de la radiación solar diaria.

Los otros dos artículos desarrollan una herramienta de análisis del factor de cielo que contribuye al estudio y dimensionado de las ISF en localizaciones con sombras y para

diferentes inclinaciones. Se han obtenido las ecuaciones del desarrollo de una proyección hemisférica para el estudio de la irradiancia (o de cualquier otra magnitud que cumpla [37]) sobre la bóveda celeste considerando su distribución como de Moon-Spencer's.

Para superficies verticales:

$$r(\varphi) = r_{max} \sqrt{\frac{3\pi+4b \operatorname{sen} \varphi}{3\pi+4b} \operatorname{sen}^2 \varphi} \quad [71]$$

$$\xi(\theta) = \pi \frac{\theta + b \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta}{\pi + 2b \operatorname{sen} \varphi} \quad [72]$$

Para superficies horizontales:

$$r(\varphi) = r_{max} \sqrt{\frac{3b(1-\cos \varphi) + 3(1-\cos 2\varphi) + b(1-\cos 3\varphi)}{6 + 4b}} \quad [73]$$

$$\xi(\theta) = \theta \quad [74]$$

Estas ecuaciones se han implementado en el equipo LRTV de forma que sea fácil la obtención de las variables solares en localizaciones con sombras.

Destacar que la metodología propuesta está siendo analizada con detenimiento a fin de poder ampliar el procesamiento digital de la imagen a otros tipos de cielo, no solo Overcast, y otras inclinaciones del sistema que mejoren esta herramienta y así la precisión del método para los diferentes escenarios posibles del entorno.

4. Bibliografía.

- [1] SILVESTRE, S. Review of System Design and Sizing Tools. En: T. Markvart y L. Castañer, coord. *Practical Handbook of Photovoltaics. Fundamentals and Applications*. New York: Elsevier, 2003. ISBN: 978-1-85617-390-2.
- [2] EGIDO, M. y LORENZO, E. The Sizing of Stand Alone PV-Systems: a Review and a Proposed New Method. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 1992, 26, pp. 51–69.
- [3] MELLIT, A. y KALOGIROU SOTERIS, A. Artificial intelligence techniques for photovoltaic applications, A review. *Progress in Energy and Combustion Science*, 2008, 34, pp. 574-632.
- [4] AGUIAR, R., COLLARES-PEREIRA, M. y CONDE, J. Simple procedure for generating sequences of daily radiation values using a library of Markov Transition Matrices. *Solar Energy*, 1988, 40, pp. 269-79.
- [5] MODEST, M. F. *Radiative Heat Transfer, Third Edition*. San Diego: Academic Press, 2013. ISBN: 9780844242064.
- [6] MOOM, P. y SPENCER D.E. Illumination from a non-uniform sky. *Transactions of the Illuminating Engineering Society*, London 1947, 37, 707-726
- [7] ALONSO ABELLA, Miguel. *Sistemas Fotovoltaicos. Introducción al Diseño y Dimensionado de Instalaciones de Energía Solar Fotovoltaica*. Madrid: Era Solar, 2005. ISBN: 84-86913-12-8.
- [8] POSADILLO, R. y LÓPEZ LUQUE, R. Approaches for developing a sizing method for stand-alone PV systems with variable demand. *Renewable Energy*, 2008, 33, pp. 1037–48.
- [9] POSADILLO, R. y LÓPEZ LUQUE, R. A sizing method for stand-alone PV installations with variable demand. *Renewable Energy*, 2008, 33, pp. 1049–55.
- [10] LORENZO PIGUEIRAS, E. *Electricidad Solar. Ingeniería de los sistemas fotovoltaicos*. Sevilla: Progensa, 1994. ISBN: 978-84-86505-45-5.
- [11] SIDRACH DE CARDONA M. y MORA LÓPEZ LI. A simple model for sizing stand alone photovoltaic systems. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 1998, 55, pp. 199–214.

- [12] BARRA, L. *et al.* An analytical method to determine the optimal size of a photovoltaic plant. *Solar Energy*, 1984, 33, pp. 509-14.
- [13] BARTOLI, B. *et al.* The design of photovoltaic plants, an optimization procedure. *Applied Energy*, 1984, 18, pp. 37-47.
- [14] BUCCIARELLI, L.L. Estimating loss-of-power probabilities of stand-alone photovoltaic solar energy systems. *Solar Energy*, 1984, 32, pp. 205-09.
- [15] BUCCIARELLI, L.L. The effect of day-to-day correlation in solar radiation on the probability of loss-of-power in a standalone photovoltaic energy system. *Solar Energy*, 1986, 36, pp. 11-14.
- [16] NEGRO, E. On PV simulation tools and sizing techniques, a comparative analysis toward a reference procedure. *Proc. 13th Europ. PV Solar Energy Conf.*, Nice, 1995, pp. 687-90.
- [17] NARVARTE FERNÁNDEZ, Luis. *Hacia un Paradigma de Electrificación rural Descentralizada con Sistemas Fotovoltaicos*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 2001.
- [18] GROUMPOS, P. y PAPAGEORGIOU, G. An optimal sizing method for stand-alone photovoltaic power systems. *Solar Energy*, 1987, 38, pp. 341-351.
- [19] CHAPMAN, R.N. *Sizing Handbook for Stand alone Photovoltaic/Storage Systems*. Sandia National Laboratories, 1987.
- [20] KLEIN S.A. y BECKMAN, W.A. Loss-of-load probabilities for stand-alone photovoltaic systems. *Solar Energy*, 1987, 39, pp. 499-512.
- [21] LABED, S y LORENZO, E. The impact of solar radiation variability and data discrepancies on the design of PV systems. *Renewable Energy*, 2004, 29, pp. 1007-1022.
- [22] GRAHAM, V.A., Hollands, K. G. T. y Unny, T. E. A time series model for K_t with application to global synthetic weather generation. *Solar Energy*, 1988, 40, pp. 83-92.
- [23] MORA LÓPEZ, L.L. y SIDRACH DE CARDONA, M. Characterization and simulation of hourly exposure series of global radiation. *Solar Energy*, 1997, 60, pp. 257-70.
- [24] ARUM, P., BANERJEE, R. y BANDYOPADHYAY, S. Optimum sizing of photovoltaic battery systems incorporating uncertainty through design space approach. *Solar Energy*, 2009, 83, pp. 1013-25.
- [25] TAVORA CABRAL, C.V. *et al.* A stochastic method for stand-alone photovoltaic system sizing. *Solar Energy*, 2010, 84(9), pp. 1628-1636.

- [26] TSALIDES, P.H., THANAILAKIS, A. Loss of load probability and related parameters in optimum computer aided design of stand-alone photovoltaic systems. *Solar Cells*, 1986, 18, pp. 115-127.
- [27] AMBROSONE, G. *et al.* Comparison between power and energy methods of analyses of photovoltaic plants. *Solar Energy*, 1985, 34, pp. 1-8.
- [28] HONTORIA, L., AGUILERA, J. y ZUFIRIA, P. A new approach for sizing stand alone photovoltaic systems based in neural networks. *Solar Energy*, 2005, 78, pp. 313-19.
- [29] GORDON, J.M. Optimal sizing of stand-alone photovoltaic solar power systems. *Solar Cells*, 1987, 20, pp. 295-313.
- [30] JAKHRANI,A.Q. *et al.* A novel analytical model for optimal sizing of stand-alone photovoltaic systems. *Energy*, 2012, 46, pp. 675-682.
- [31] SIDRACH DE CARDONA, M. y MORA LÓPEZ LI. A general multivariate qualitative model for sizing stand-alone photovoltaic systems. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 1999, 59, pp. 185-97.
- [32] FRAGAKI, A. y MARKVART, T. Stand-alone PV system desing, result using a new sizing approach. *Renewable Energy*, 2008, 33, pp. 162-7.
- [33] CHEN, S.G. An efficient sizing method for a stand-alone PV system in terms of the observed block extremes. *Applied Energy*, 2012, 91, pp. 375-384.
- [34] MELLIT, A. KALOGIROU, S.A., HONTORIA, L. y SHAARI, S. Artificial intelligence techniques for sizing photovoltaic systems: a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2009, 13(2), pp. 406-419.
- [35] LUCIO, J.H., VALDÉS, R. y RODRÍGUEZ, L.R. Loss of load probability model for standalone photovoltaic systems in Europe. *Solar Energy*, 2012, 86, pp. 2515-2535.
- [36] MELLIT, A., BENGHANEM, M., HADJ ARAB, A. y GUESSOUM, A. An adaptive artificial neural network model for sizing stand-alone photovoltaic systems: Application for isolated sites in Algeria. *Renewable Energy*, 2005, 30, pp. 1501-1524.
- [37] MELLIT, A. y BENGHANEM, M. Sizing of stand-alone photovoltaic systems using neural network adaptive model. *Desalination*, 2007, 209 (1), pp. 64-72.
- [38] MELLIT, A., KALOGIROU, S.A. y DRIF, M. Application of neural networks and genetic algorithms for sizing of photovoltaic systems. *Renewable Energy*, 2010, 35, pp. 2881-2893.

- [39] OHSAWA, Y., EMURD, S. y ARAI, K. Optimal operation of photovoltaic/diesel power generation system by neural network. En: *Proceedings of the second international forum on applications of neural networks to power systems (NNPS) 93*, 1993, pp. 99-103.
- [40] WISSEM, Z., GUEORGUI, K. y Hédi, K. Modeling and technical economic optimization of an autonomous photovoltaic system. *Energy*, 2012, 37, pp. 263-272.
- [41] SEMAOUI, S., ARAB, A.H., BACHA, S. y AZOUI, B. Optimal sizing of a stand-alone photovoltaic system with energy management in isolated areas. *Energy Procedia* 2013, 36, pp.358-368.
- [42] GUEYMARD, C. An anisotropic solar irradiance model for tilted surfaces and its comparison with selected engineering algorithms. *Solar Energy*, 1987, 38, pp. 367-386.
- [43] HAY, J.E. Calculating solar radiation for inclined surfaces, Practical approaches. *Renewable Energy*, 1993, 3, pp. 373-380.
- [44] KLUCHER, T.M. Evaluation of models to predict insolation on tilted surfaces. *Solar Energy*, 1979, 23, pp. 111–114.
- [45] MUNEER,T. *Solar radiation and daylight models*. Oxford: Elsevier Butterworth Heinemann, 2004. ISBN: 978-0-7506-5974-1.
- [46] PEREZ, R., SEALS, R., INEICHEN, P., SCOTT, J., STEWART, R. y MENICUCCI D. A new simplified version of the Perez diffuse irradiance model for tilted surfaces. *Solar Energy*, 1987, 39, pp. 221–232.
- [47] PEREZ, R., INEICHEN, P., SEALS, R., MICHALSKY, J. y STEWART, R. Modeling daylight availability and irradiance components from direct and global irradiance. *Solar Energy*, 1990, 44, pp. 271-289.
- [48] REINDL, D.T., BECKMANN, W.A. y DUFFIE, J.A. Diffuse fraction correlations. *Solar Energy*, 1990, 45, pp. 1–7.
- [49] REINDL, D.T., BECKMANN, W.A. y DUFFIE, J.A. Evaluation of hourly tilted surface radiation models. *Solar Energy*, 1990, 45, pp. 9–17.
- [50] LOUTZENHISER, G.P. *et al.* Empirical validation of models to compute solar irradiance on inclined surfaces for building energy simulation. *Solar Energy*, 2007, 81, pp. 254-267.

- [51] KAPCHUN, Y. *et al.* Evaluation of hourly solar radiation on inclined surfaces at Seoul by Photographical Method. *Solar Energy*, 2014, 100, pp. 203-216.
- [52] NOORIAN, A.M., MORADI, I. y KAMALI, G.A. Evaluation of 12 models to estimate hourly diffuse irradiation on inclined surfaces. *Renewable Energy*, 2008, 33, pp. 1406-1412.
- [53] NUSSELT, W. Graphische Bestimmung des Winkelverhältnisses bei der Warmestrahlung. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 1928, 72, 673.
- [54] OKE, T.R. Canyon geometry and the nocturnal urban heat island, Comparison of scale model and field observations, *International Journal of Climatology*. Climatol. 1981, 1, pp. 237–254.
- [55] JOHNSON, G.T. y WATSON, I.D. The determination of view-factors in urban canyons. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 1984, 23, pp. 329-335.
- [56] STEYN, D.G. The calculation of view-factors from fisheye-lens photograph, Research note. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 1980, 18, 254-258.
- [57] HAY, J.E., WATSON, I.D. y JOHNSON, G.T. The determination of sky-view factors in urban environments using video imagery. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 1986, 3, pp. 759-764.
- [58] HOLMER, B., POSTGARD, U. y ERIKSSON M. Sky view factors in canopies calculated with IDRISI. *Theoretical and Applied Climatology*, 2001, 68, pp. 33-40.
- [59] CHEN LIANG *et al.* Sky view factor analysis of street canyons and its implications for daytime intra-urban air temperature differentials in high-rise, high-density urban areas of Hong Kong, a GIS-based simulation approach. *International Journal of Climatology*, 2012, 32, pp. 121-136.
- [60] KASTENDEUCH, P. A method to estimate sky view factors from digital elevation models. *International Journal of Climatology*, 2013, 33, pp. 1574-1578.
- [61] TSANGRASSOULIS, A. *et al.* A numerical method to estimate time-varying values of diffuse irradiance on surfaces in complex geometrical environments. *Renewable Energy*, 2002, 27, pp. 427-439.
- [62] QUASCHNING, V. y HANITSCH R. Irradiance calculation on shaded surfaces. *Solar Energy*, 1998, 62, pp. 369-375.

- [63] NGUYEN, H. y PEARCE, J. Incorporating shading losses in solar photovoltaic potential assessment at the municipal scale. *Solar Energy*, 2012, 86, pp. 1245-1260.
- [64] ERDÉLYI, R. et al. Three-dimensional Solar RAdiation Model (SORAM) and its application to 3-D urban planning. *Solar Energy*, 2014, 101, pp. 63-73.
- [65] IVANOVA S.M. Estimation of background diffuse irradiance on orthogonal surfaces under partially obstructed anisotropic sky. Part I – Vertical surfaces. *Solar Energy*, 2013, 95, pp. 376-391.
- [66] IVANOVA S.M. Estimation of background diffuse irradiance on orthogonal surfaces under partially obstructed anisotropic sky. Part II – Horizontal surfaces. *Solar Energy*, 2014, 100, pp. 234-250.
- [67] MAOR, T. y APPELBAUM, J. View factors of photovoltaic collector systems. *Solar Energy*, 2012, 86, pp. 1701-1708.
- [68] RAMÍREZ, E., PUJOLS, W.C., CASARES, F.J., RAMÍREZ FAZ, J. y LÓPEZ LUQUE, R. Development of a suitable synthetic projection to simultaneously study solar exposure and natural lighting in building windows. *Energy and Buildings*, 2013, 65, pp. 391-397.
- [69] JENNESS, J.R. The globoscope. *Solar Energy*, 1997, 19, pp. 361-363.
- [70] TELLER J. y AZAR S. Townscope II. A computer system to support solar access decision making. *Solar Energy*, 2001, 70, pp. 187-200.
- [71] SOUZA, L., RODRIGUES, D. y MENDES, J. Sky view factors estimation using a 3D-GIS extension. En actas de: *Eighth international IBPSA Conference*, Eindhoven (Netherland), 2003, pp. 1227-1234.
- [72] AN, S.M. et al. Three-dimensional point cloud based sky view factor analysis in complex urban settings. *International Journal of Climatology*, 2014, 34, pp. 2685-2701.
- [73] TORRES, J.L., GARCÍA, A., DE BLAS, M., DE FRANCISCO, A. Calculation of the horizon brightness irradiance in the model of Perez using the unit-sphere method. *Renewable Energy*, 2008 , 33, pp. 148-153.
- [74] MÁRQUEZ GARCÍA, A., VARO MARTÍNEZ, M. y LÓPEZ LUQUE, R. *Solar Energy in Urban Environments: A New Solar Radiation Model For The Analysis Of Energy On Facades*. LAP Lambert Academic Publishing, 2013. ISBN: 9783659495854.

- [75] RATTI C. y RICHENS P. Raster analysis of urban form. *Environ and Plan B. Planning and Design*, 2004, 31, pp. 297–309.
- [76] RAKOVEC, J. y ZAKSEK, K. On the proper analytical expression for the sky-view factor and the diffuse irradiation of a slope for an isotropic sky. *Renewable Energy*, 2012, 37, pp. 440-444.
- [77] TIAN, Y.Q., DAVIES-COLLEY, R.J., GONGA, P. y THORROLD, B.W. Estimating solar radiation on slopes of arbitrary aspect. *Agricultural and Forest Meteorology*, 2001, 109, pp. 67–74.
- [78] STEYN, D.G., HAY, J.E., WATSON y JOHNSON, G.T. The determination of sky-view factors in urban environments using video imagery. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 1986, 3, pp. 759-764.
- [79] CHAPMAN, L., THORNES, J.E., BRADLEY, A.V. Rapid determination of canyon geometry parameters for use in surface radiation budgets. *Theoretical and Applied Climatology*, 2001, 69, pp. 81-89.
- [80] MATZARAKIS, A. y MATUSCHEK, O. Sky view factor as a parameter in applied climatology – rapid estimation by the SkyHelios model. *Meteorologische Zeitschrift*, 2011, 20, pp. 39-45.
- [81] GHARAKHANI SIRAKI, A. y PRAGASEN PILLAY. Study of optimum tilt angles for solar panels in different latitudes for urban applications. *Solar Energy*, 2012, 86, pp. 1920-1928.
- [82] REDWEIK, P. CATITA, C. y BRITO, M. Solar energy potential on roofs and facades in an urban landscape. *Solar Energy*, 2013, 97, pp. 332-341.
- [83] RAMÍREZ FAZ, J. *Desarrollo de un Prototipo para la Cuantificación de la Disponibilidad de Radiación Solar en Ubicaciones Sombreadas*. Trabajo profesional fin de carrera. Madrid: E.T.S.I. Industriales UNED, 2005.

5. Anexo 1

F.J. CASARES, R. LÓPEZ-LUQUE, R. POSADILLO, M. VARO-MARTÍNEZ.
Mathematical approach to the characterization of daily energy balance in
autonomous photovoltaic solar systems. *Energy*, 2014, 72, pp. 393-404.

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544214006197>

[http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2014.05.053.](http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2014.05.053)

Energy: Factor de impacto: 4,844.

Q1 en el área de ENERGY&FUELS, posición 12/ 89

Q1 en el área de THERMODYNAMICS, posición 2/55



Mathematical approach to the characterization of daily energy balance in autonomous photovoltaic solar systems



F.J. Casares ^a, R. Lopez-Luque ^b, R. Posadillo ^b, M. Varo-Martinez ^{b,*}

^a Electrical Engineering Department, University of Cordoba, Leonardo da Vinci Building, Rabanales Campus, 14071 Cordoba, Spain

^b Physics for Engineering and Renewable Resources Research Team, University of Cordoba, Albert Einstein Building, Rabanales Campus, 14071 Cordoba, Spain

ARTICLE INFO

Article history:

Received 26 March 2014

Received in revised form

29 April 2014

Accepted 14 May 2014

Available online 11 June 2014

Key words:

SAPV

LLP

Aguiar matrixes

PV sizing

ABSTRACT

Sizing SAPV techniques try to assess the reliability of the system from the stochastic simulation of the energy balance. This stochastic simulation implies the generation, for an extended period of time, of the main state variables of the physical equations describing the energy balance of the system, that is, the energy delivered to the load and the energy stored in the batteries. Most of these methods consider the daily load as a constant over the year and control the variables indicating the reliability associated with the supply of power to the load. Furthermore, these methods rely on previous random models for generating solar radiation data and, since the approximations of the simulation methods are asymptotic, when more precise reliability indicators are required, the simulation period needs to be extended.

This paper presents a mathematical methodology to address the daily energy balance without resorting to simulation methods. This method is directly based on daily solar radiation series modelled according to Markov stochastic processes and Aguiar matrices. The characterization presented is the base of a rational method in which reliability does not depend on the number of iterations but on the precision of the conditional probabilities included in Aguiar matrices.

© 2014 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Nowadays, technologies for power production from renewable energy sources are advancing by leaps and bounds. Specifically, technologies based on solar radiation are becoming more frequent since solar energy is one of the most abundant, free and clean natural power resources. In that sense, the fall in the prices of PV modules together with the continuous increase in prices of conventional petrochemical fuels used for generating electricity have resulted in the wider employment of PV systems. However, the future of the establishment of this technology for power production lies in their economic feasibility and an adequate sizing of the PV system which ensures the quality and continuity of the supply [1]. For these reasons, when designing a PV system, it is important to size it so that it works properly, efficiently and economically to meet the desired load requirements under the local climatic conditions and to guarantee the continuity of supply [2].

Several authors have worked on the characterization of SAPV (stand-alone photovoltaic) systems in order to obtain simple sizing methods with a high reliability degree [3–5]. In that sense, the

reliability index given by most of the SAPV dimensioning methods is the *Loss of Load Probability*, LLP [4,6–14], defined as:

$$\text{LLP} = \frac{\int_{\text{time}} \text{Energy deficit}}{\int_{\text{time}} \text{Energy demand}} \quad (1)$$

On the other hand, Posadillo and Lopez-Luque [6,7] also considered, as a reliability indicator, the *System Failure Probability*, that is, the fraction of days for which demand is not fully satisfied.

The task of sizing a SAPV system involves reaching a compromise between cost and reliability. When sizing a system, it is therefore necessary to determine both, the number or area of modules to install and the capacity or total number of ampere-hours collectable in the battery. The ratio between these parameters and the load is frequently used in the simulation of the daily behaviour of the system. In that way, most authors characterize SAPV by means of two dimensionless parameters, C_A and C_S which, respectively, represent the mean capacity of the PV panel array and the storage capacity of the system. Hence, the *photovoltaic generator capacity*, C_A , is defined as the ratio or quotient between the

* Corresponding author. Tel.: +34 957212633; fax: +34 957212068.

E-mail address: fa2vam@uco.es (M. Varo-Martinez).

average daily energy produced by the generator and the average daily energy, L , consumed by the load (Eq. (2)). The *accumulator capacity*, C_S , is defined as the maximum energy that can be extracted from the accumulator or the useful storage capacity of the accumulator, C_U , divided by L (Eq.3):

$$C_A = \frac{\eta_G A_G \bar{H}_{g\beta}}{L} \quad (2)$$

$$C_S = \frac{C}{L} = \frac{PD_{max} C_B}{L} \quad (3)$$

where A_G and η_G are the area and conversion efficiency of the photovoltaic generator, respectively, $\bar{H}_{g\beta}$ is the monthly mean value of the daily irradiation on the plane of the array, PD_{max} is the maximum allowable discharge depth of the battery and C_B is the nominal capacity of the battery [4].

For a specific location and given the monthly loads, two considerations are apparent: firstly, it is possible to find different pairs of C_A and C_S values that lead to the same LLP value, and secondly, the larger the photovoltaic system is, the higher its cost and reliability become. Thus, given that the reliability is an aprioristic requisite of the load, the problem is formulated in the following way: which pair of C_A and C_S values leads to a given value of LLP with a minimum cost?

LLP prediction methods with a high degree of reliability, can be classified into two different groups: numerical and analytical methods.

1.1. Numerical methods

These methods [4,13,15–18] are based on the thorough simulation of the physical behaviour of the photovoltaic system. Its useful life is considered as a sequence of time steps (hour, day) in which energy balance equations are applicable as single equations.

In general terms, the authors perform a simulation with real or artificial insolation data in order to compute the LLP value for each given (C_S , C_A) pair. The energy balance of a PV system is determined by means of the dimensionless SOC (state of the battery charge) calculated after each time interval and it is defined as the energy that the battery can provide to the load relative to the maximum energy it could provide at full charge. Commonly, it is assumed that the generator efficiency remains constant [8]. In that sense, some authors [19] found similar simulation results considering constant generator efficiency or variable.

The main drawbacks of these methods are the long computation time and the need for long sequences of irradiation data. Whereas, when historical sequences are not available, synthetic irradiation sequences can be generated using one of the methods universally developed for that purpose [20–24]. Some authors [25] have proposed algorithms to simplify the sizing optimization with these methods.

Many discrepancies have been found between these numerical methods. These discrepancies might be due to the fact that simulations are carried out over different time periods or that the system components are modelled in different ways [4,17,18].

On the other hand, numerical methods have the advantages of being precise and allowing the analysis of additional aspects of sizing such as the different models for the PV system components.

1.2. Analytical methods

These methods attempt to avoid the simulation of the daily energy balance for extended periods of time during the dimensioning phase. They postulate analytic relations between

the system sizing parameters and the reliability indexes [10,11,12,26–28].

These methods greatly simplify the sizing task because they are based on the graphical information of isoreliability lines. However, according to some authors [26], one of the main shortcomings of these methods is their local nature.

Combining the best of both methods, an alternative group of methods for the SAPV sizing has been proposed in the literature. They can be described as lying somewhere between the poles of the numerical methods and the analytical methods since they propose an analytical relation between the sizing parameters obtained by applying numerical methods to long irradiation series. Taking into account economic criteria in order to minimize the global cost, different pairs of C_A and C_S leading to the same LLP value are obtained by simulation and represented by the so-called isoreliability curves. Consequently, LLP can be fitted to some analytical function as $LLP = f(C_A, C_S)$.

Most remarkable works on numerical–analytical methods [4,6,7,9,29–31] share several aspects:

All of them try to establish relations between the sizing parameters and the reliability indexes from the numerical simulation of the system behaviour.

Most of them assume a constant daily demand throughout the year, except for the one of Posadillo and Lopez-Luque [6,7] that can be applied to monthly variable demand.

The capacity of the PV generator is a normalized load, usually 1 kWh/day, and the maximum capacity of energy accumulation referred to the load, C_S (Eq. (2)), represents the days of autonomy.

In order to develop a generic method, an ideal system with both the generation and the accumulation system efficiency equal to unity is considered.

The consumption occurs at night.

The main disadvantage of these methods is the need of long radiation series not available in all locations. However, they can be synthetically generated by one of the widely accepted and checked methods [20–23]. On the other hand, some authors [16,17,25] have noted that this sizing method is suitable for LLP ranging from 0.01 to 1, although, when the length of the data series is reduced, the model validity is obviously restricted.

Recently, methods based on AI (Artificial Intelligence) techniques have been developed. Mellit et al. [2] present a review of diverse AI-techniques (neural networks, genetic algorithms, etc.) used for sizing stand-alone, grid-connected and PV-hybrid PV systems [1,26,32–36]. According to the authors [2], AI-techniques have demonstrated the possibility for sizing PV systems successfully and with reasonable accuracy. In that way, the significance of this new methodology increases specially for isolated areas in which all required data for conventional methods (climatic data, information concerning the sites, etc.) are not available. However, conventional methods cannot be totally disregarded, since the new proposed AI-techniques for sizing PV systems are based on the first ones [2].

Finally, other authors have developed new technical-economic sizing methods based on economic criterion [37, 38].

This paper presents a rational method for the daily energy balance estimation, especially suitable for those cases in which synthetic radiation series are generated from Markov stochastic series and, particularly, from Aguiar's matrices [20]. This method does not require simulation techniques and, consequently, its reliability does not depend on the number of iterations but on the precision of the conditional probabilities included in MTM (Markov matrices), and consequently, in the ones given by Aguiar. In that

sense, Tavora et al. [39] has proved that stochastic models portray in a more accurate way the operation of photovoltaic systems.

2. Equations considered for the energy balance

The statistical analysis of the probability distribution function associated to the battery state, B , is tackled by means of daily energy balance equations. Every day, the battery state depends on its previous state, the quantity of energy produced and the user's consumption [37,40]. In that sense, considering that the battery state is recorded at the beginning of the solar day, B_i represents the useful energy stored in the battery before the sunrise of the day i and it will range from zero (discharged battery) to C_U (maximum energy storage), as shown in Eq. (4)

$$B_i = \begin{cases} C_U & \text{if } B'_i \geq C_U \\ B'_i & \text{if } 0 < B'_i < C_U \\ 0 & \text{if } B'_i \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

where B'_i is an auxiliary variable given by:

$$B'_i = B_{i-1} + \eta_G A_G H_{g\beta i} - L_i \quad (5)$$

In Eq. (5), B'_i represents the net energy balance required to meet adequately the demand, B_{i-1} is the energy stored in the battery or the state of the battery at the end of consumption on day $(i-1)$ and L_i represents the energy demand during the day i .

In that way, this work deals with the estimation of B . However, instead of being based on the daily simulation of the system, as in the other analytic methods, the present study is focused on the probability density function of B .

The present approach disengages the load and the daily production of energy, as most of the studies. This hypothesis is based on the results of Gordon [27], Chapman [16] and Ejido and Lorenzo [4] that found a negligible effect of the short-term (hourly) variations of demanded energy on LLP.

Although Eq. (5) supposes a linear model, non-linearities in the battery charging process or in the PV array efficiency can be taken into account and corrected. Lorenzo and Navarrete [41] recommend the use of proper correction factors when translating C_A and C_S values into nominal PV array power and battery capacity.

2.1. Stochastic characterization of B

According to Eq. (4), B' can be considered as the sum of two stochastic variables:

$$B'_i = B_{i-1} + E \quad (6)$$

where

$$E_i = \eta_G A_G H_{g\beta i} - L_i \quad (7)$$

represents the net energy gain of the battery during the day i , that is, the difference between the incoming energy and the energy demand. Furthermore, since $H_{g\beta}$ is a random variable, according to Eqs. (6) and (7), E and, consequently, B' can be also considered as random variables.

Therefore, the strategy of the present work entails the characterization of these stochastic variables B and E . However, both variables are probabilistic interdependent, since the state of the battery, B , depends on the net energy gain, E . In that sense, a high energy gain in the battery in the day $(i-1)$ might be related to clear sky conditions. Similar sky conditions are very probable to be maintained in the day i , and, consequently, E might be very probably high again. For that reason, it is also necessary to characterize

the probability of E conditioned to the occurrence of B in the previous day.

According to that, the strategy in this work follows the following steps:

Characterization of B

Characterization of E

Relation between $H_{g\beta i}$ and this variable in a previous day

$H_{g\beta(i-1)}$

Estimation of the area correction factors $m(j,k,q)$

Estimation of the E probability conditioned to the B occurrence in the previous day.

2.1.1. Characterization of B

In this epigraph, as a previous step, B' characterization is tackled by means of its probability density function, $g(B')$. However, as it can be seen in Fig. 1, this function is not bounded, so, in order to obtain the probability density function of the real state of the battery and taking into account the physical limits of the battery previously mentioned, 0 and C_U , this function is necessary modified into:

$$f(B) = p_0 \cdot \delta(0) + g(B) + p_f \cdot \delta(C_U) \quad (8)$$

where p_0 and p_f are, respectively, the probability of an empty ($B = 0$) and full ($B = C_U$) battery, $\delta(0)$ and $\delta(C_U)$ represent the Dirac Delta Functions [42] centred on the possible extreme energy levels of the battery and $g(B)$ is a function defined in the domain $(0, C_U)$ and equal to the function $g(B')$ in this domain (Fig. 2).

The methodology presented is based on the fragmentation of the dominium of the function $f(B)$, $[0, C_U]$, into n_B intervals of equal length. Thus, the probability of B belonging to an interval k ($k = 1, 2, 3, \dots, n_B$) is given by p_{Bk} (Fig. 3). Therefore, the normalization condition leads to:

$$\sum_{k=0}^{n_B+1} p_{Bk} = 1 \quad (9)$$

where p_0 and p_f have been renamed as p_{B0} and p_{Bn_B+1} respectively.

In that way, Eqs. (8) and (9) suppose a refinement of the method presented by Gordon [27] to characterize the different stored energy states.

2.1.2. Characterization of E

2.1.2.1. Relation between $H_{g\beta i}$ and this variable in a previous day $H_{g\beta(i-1)}$. The relation between H_{gi} and $H_{g(i-1)}$ was statistically characterized by Aguiar as a first order Markov process [20]. In that work, using a 10 transition matrix library, A , Aguiar describes the

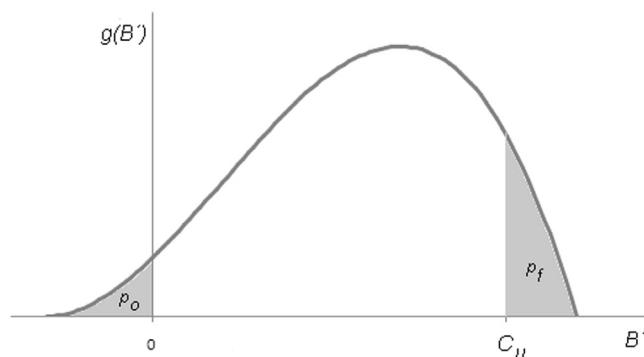


Fig. 1. Probability density function of B' , $g(B')$.

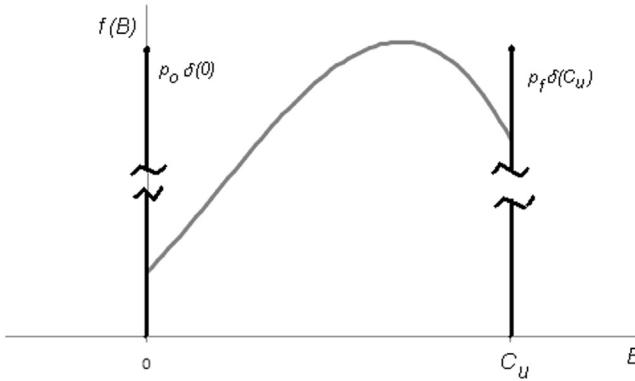


Fig. 2. Probability density function of B , $f(B)$.

dependency between H_{gi} and $H_{g(i-1)}$ in terms of the daily clearness index, K_t . Thus, the matrix corresponding to each month and climate is selected from the mean monthly clearness index \bar{K}_t . Besides, associated to each matrix, two K_t extreme values ($K_{t,\min}$ and $K_{t,\max}$) have been defined so that they represent the possible daily K_t range. This domain is divided into 10 intervals, represented by the q index, coinciding with the number of rows and columns of each transition matrix, A .

Assuming that the daily radiation on inclined surface $H_{g\beta}$ can be assessed from a mathematical function dependent, among other variables, on horizontal daily clearness index, $H_{g\beta} = H_{g\beta}(K_t, \beta, \delta, \phi)$, it is possible to use Aguiar method to generate $H_{g\beta}$ synthetic series considering the same transition matrices published by Aguiar for horizontal radiation [20] but recalculating the limits and lengths of the $H_{g\beta}$ class intervals since they depend on the tilt angle, β [6,7]. As an example, in Figs. 4 and 5, each curve represents the frontier value between two consecutive intervals of $H_{g\beta}$ and its dependence on β for Cordoba ($\phi = 37.85^\circ\text{N}$) (Spain). In that way, for a specific β , the intersections of a vertical line with each curve define the 11 frontier values of the 10 intervals considered for $H_{g\beta}$. In Fig. 4 the limits for the ninth interval and $\beta = 50^\circ$ is remarked.

Thus, in the same way that the stochastic characterization for H_g is valid for $H_{g\beta}$, it may also be valid for E . However, it is necessary to redefine E class intervals, denoted by I_{Eq} (with q from 1 to 10), according to Eq. (10)

$$\begin{aligned} I_{E1} &= [\eta_G A_G H_{g\beta}(K_{t\min}, \beta, \delta, \phi) - L, \quad \eta_G A_G H_{g\beta}(K_{t1}, \beta, \delta, \phi) - L] \\ I_{E2} &= [\eta_G A_G H_{g\beta}(K_{t1}, \beta, \delta, \phi) - L, \quad \eta_G A_G H_{g\beta}(K_{t2}, \beta, \delta, \phi) - L] \\ &\dots \\ I_{E10} &= [\eta_G A_G H_{g\beta}(K_{t9}, \beta, \delta, \phi) - L, \quad \eta_G A_G H_{g\beta}(K_{t\max}, \beta, \delta, \phi) - L] \end{aligned} \quad (10)$$

Despite the different lengths of the defined E intervals, the Markov matrices for E match with Aguiar's ones.

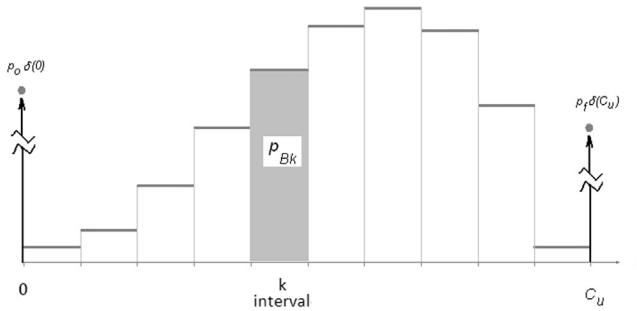


Fig. 3. Approach taken for the $f(B)$ dominium fragmentation.

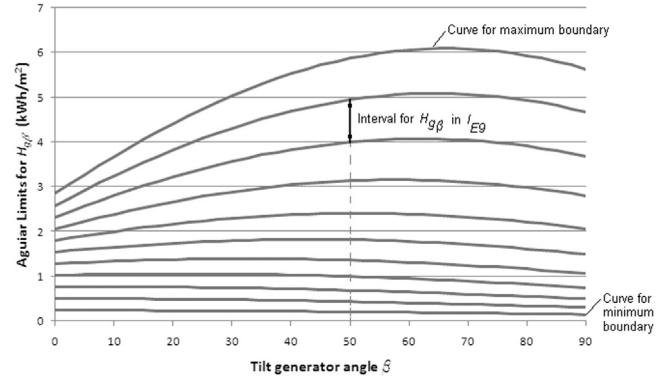


Fig. 4. $H_{g\beta}$ interval boundary evolution versus the tilt angle for Córdoba (Spain) in December.

2.1.2.2. Estimation of the area correction factors $m(j,k,q)$. According to Eq. (6), B'_i is given by the sum of B_{i-1} and E_i . This sum is geometrically represented in Fig. 6. In it, the plane (B_{i-1}, E_i) and a B' axis, parallel to the E axis have been defined. Thus, for a particular point of the (B_{i-1}, E_i) plane, the sum of these coordinates can be obtained as its 45° oblique projection on the B' axis. According to Eq. (4), negative values of the B' axis represents those situations of empty batteries whereas B' values greater than C_U correspond to full batteries.

As it can be seen in Fig. 7, for a k interval for B_{i-1} and a q interval for E_i , the geometrical result of these variables corresponding to a particular j interval of B' might be located in the region between two parallel 45° tilted straight lines. Thus, the probability of B'_i being in a j interval will be the sum of the probabilities of the (B_{i-1}, E_i) point included in each of the polygons between the two consecutive 45° tilted lines that limit this j interval.

In order to calculate the probability of these polygons it is necessary to introduce an area correction factor, $m(j,k,q)$, that represents the probability of B'_i being included in its j interval when B_i belongs to the k interval and E_i to the q interval. Graphically this probability will be related with the set of points satisfying the following conditions (Fig. 7):

The projection onto the horizontal axis is included in the q interval of E_i .

The projection onto the vertical axis is included in the k interval of B_{i-1} .

The oblique projection onto a 45° descendent direction is included in the j interval of B'_i .

Particularly, $m(j,k,q)$ can be estimated from Eq. (11)

$$m(j, k, q) = \frac{s_{j,k,q}}{l_k l_q} \quad (11)$$

being $s_{j,k,q}$ the area of the polygon whose projection is simultaneously onto the k interval vertical, onto the q interval horizontal and obliquely onto the j interval. l_k the k vertical interval length and l_q the q horizontal interval length.

2.1.2.3. Estimation of the E probability conditioned to the B occurrence in the previous day. Since Eq. (6) represents the sum of two interdependent random variables, it is also necessary to characterize the probability of E conditioned to the occurrence of B . For that purpose, it is necessary to introduce the probability of occurrence of an E_i value belonging to a q interval conditioned to the state of the battery belonging to a certain k interval, $p(q/k)$.

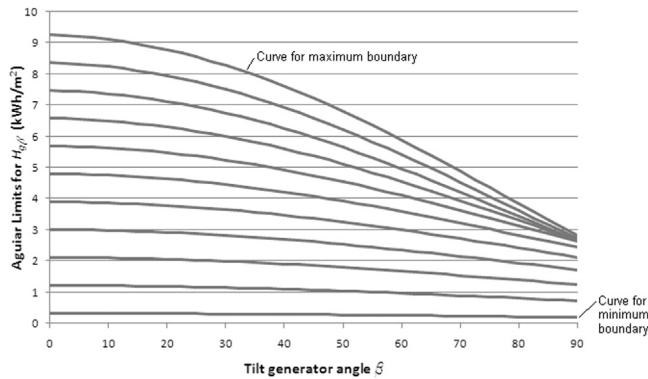


Fig. 5. H_{g0} interval boundary evolution versus the tilt angle for Córdoba (Spain) in June.

Indeed, it is assumed that this probability depends on the k interval to which B_{i-1} belongs. In that way, it is intuitively easy to understand that a low (high) B_{i-1} corresponds to an also low (high) k interval index and it will be statistically correlated to a low (high) solar radiation occurrence on the previous day. On the other hand, the E_i value also depends on the previous day solar radiation value. Therefore, for low (high) k values of the B_{i-1} interval, the expectancy of a low (high) q value for the E_i interval is bigger. The term $p(q/k)$ with $q = 1, 2, \dots, 10$ and $k = 0, 1, 2, \dots, n_B + 1$ expresses this dependency. These conditional probabilities must be recalculated for each new day.

From Bayes theorem, the conditioned probability in the day i , $p^i(r/j)$, is calculated from the ones in the previous day $p^{i-1}(q/k)$ as given in Eq. (12)

$$p^i(r/j) = \frac{\sum_{k,q} p_{Bk}^{i-1} m(j, k, q) p^{i-1}(q/k) p_A(q \rightarrow r)}{\sum_{k,q} p_{Bk}^{i-1} m(j, k, q) p^{i-1}(q/k)} \quad (12)$$

where $p_A(q \rightarrow r)$ is identified with the a_{qr} element of the Markov's transition matrix, given by Aguiar [20] and represents the probability of the solar radiation changing from a q state in a particular day to a state r in the following day.

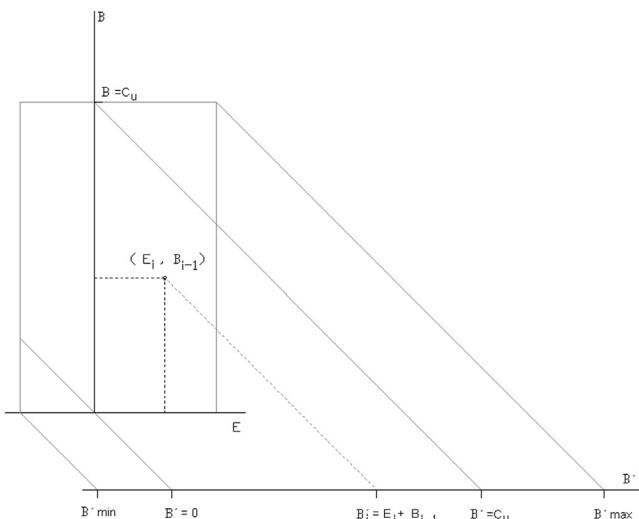


Fig. 6. Graphical representation of the plane (B_{i-1}, E_i) and geometrical sum of the coordinates of a particular point of this plane as its 45° oblique projection onto the B' axis

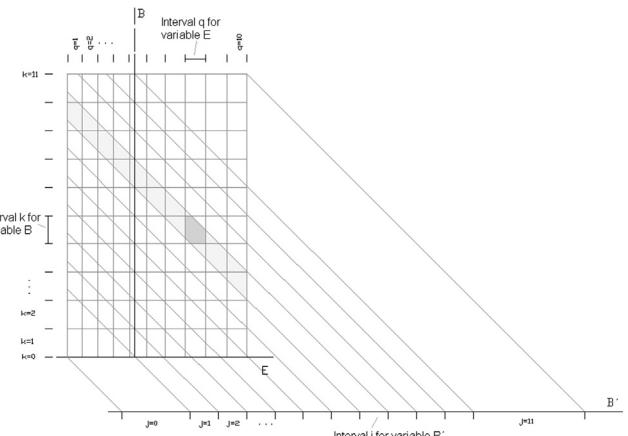


Fig. 7. Geometrical estimation of the probability of B' .

Finally, the probability of B' belonging to a j interval, that is, the probability of the battery being in a state j in the following day, can be also determined from the Bayes theorem as the sum of the probabilities of all the possible terms combinations whose final result would be included in the j interval:

$$p_{Bj}^i = \sum_{k,q} p_{Bk}^{i-1} m(j, k, q) p^{i-1}(q/k) \quad (13)$$

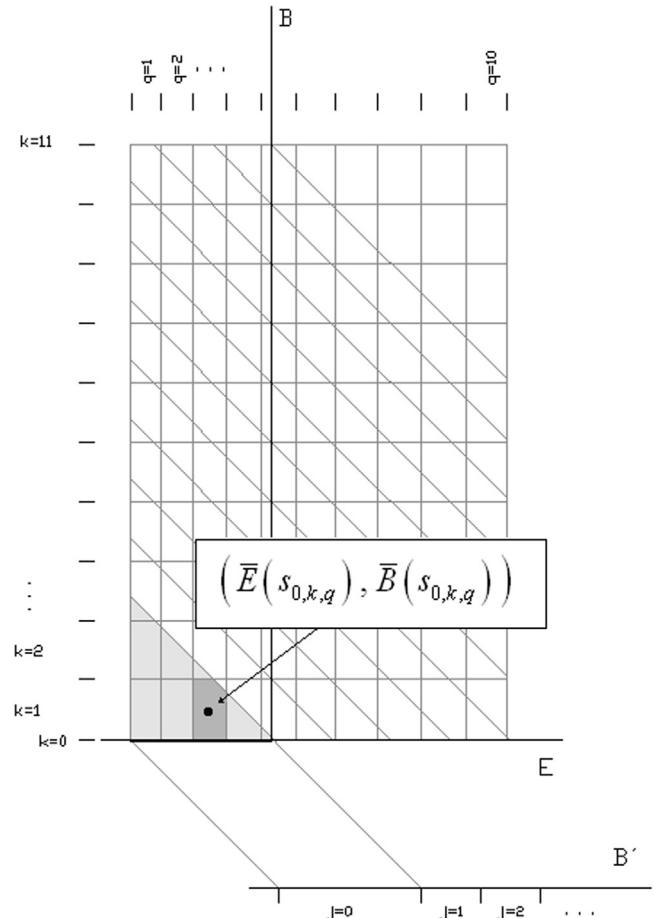


Fig. 8. Representation of the set of points producing energy deficit.

2.2. Matrix notation

Trying to systematize the calculations, the methodology presented has been rewritten in matrix notation. Firstly, the probability of the different battery states at the end of the day ($i - 1$), can be described by means of the \mathbf{p}_B^i vector.

$$\mathbf{p}_B^i = \begin{bmatrix} p_{B0}^i \\ p_{B1}^i \\ \vdots \\ p_B^i n_B + 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Similarly, the area correction factors $\mathbf{m}(j, k, q)$ can be considered as a lineal vector whose elements are two-dimensional matrices:

$$\mathbf{m}(j, k, q) = \begin{bmatrix} [\![m(j=0, k, q)]\!] \\ [\![m(j=1, k, q)]\!] \\ [\![m(j=2, k, q)]\!] \\ \vdots \\ [\![m(j=n_B+1, k, q)]\!] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\![m_0]\!] \\ [\![m_1]\!] \\ [\![m_2]\!] \\ \vdots \\ [\![m_{n_B+1}]\!] \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[\![C^i]\!] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{10,1} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{10r} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \\ \hline \cdots & \cdots \\ \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{10,1} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{10r} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \\ \hline \cdots & \cdots \\ \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{10,1} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{10r} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \right] \quad (19)$$

As far as the conditioned probability $p(q/k)$ is concerned, it might be rewritten by a two-dimensional matrix $[\![C]\!]$ with $n_B + 2$ rows (k ranging from 0 to $n_B + 1$) and 10 columns so that the element within the k row and the q column is given by Eq. (16).

$$C_{kq} = p(q/k) \quad (16)$$

Accordingly, from $[\![m_j]\!]$ and $[\![C]\!]$ matrixes, the $[\![m_j C]\!]$ matrix is that whose element within the k row and the q column is obtained as the product of the elements within the k row of $[\![m_j]\!]$ and the q column of $[\![C]\!]$, as expressed in Eq. (17):

$$([\![m_j C]\!])_{kq} = m(j, k, q) C(q/k) = m(j, k, q) p(q/k) \quad (17)$$

It is important to note that it is not a matrix multiplication since each $[\![m_j C]\!]$ element is the product of the $[\![m_j]\!]$ and $[\![C]\!]$ elements within the same position.

With this notation and taking into account that the results for the day i depend on the $i - 1$ day data, Eqs. (13) and (12) get the matrix form:

$$\left\{ p_B^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_1^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{10,1} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{10r} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_0^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \\ \hline \cdots & \cdots \\ \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{10,1} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{10r} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \\ \hline \cdots & \cdots \\ \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{10,1} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{10r} \end{pmatrix} \\ \hline \left\{ p_B^{i-1} \right\}^T [\![m_j^{i-1} C^{i-1}]\!] \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

2.3. Characterization of the deficit expectancy

Finally, in this mathematical method, the mean deficit is represented by the first order moment of the negative tail of the $g(B')$ function (Fig. 1). Thus, it can be calculated as the sum of the first order moments of all the polygons corresponding to the $j=0$ interval of the variable B' .

In order to characterize the expected deficit on the day i , the deficit matrix $[\![D]\!]$ is defined as a matrix with $n_B + 1$ rows and 10 columns whose elements are given by Eq. (20):

$$D_{kq} = -(\bar{B}(s_{0,k,q}) + \bar{E}(s_{0,k,q})) = -\bar{B}' \quad (20)$$

where $\bar{E}(s_{0,k,q})$ denotes the horizontal coordinate of the centre of mass of the polygon $s_{0,k,q}$ plotted in Fig. 8 and it represents the

Table 1

Monthly loads and collector inclinations for the sizing method application example.

Month	L (kWh/day)	β (degree)
January	3	45
February	4	45
March	4	45
April	5	30
May	8	20
June	9	20
July	9	20
August	9	20
September	5	30
October	5	30
November	5	45
December	3	45

Table 4

Frontier values, in kWh, of the intervals considered for the variables B and B' .

B' intervals			B intervals		
j Index	Lower limit	Upper limit	k Index	Lower limit	Upper limit
0	$-\infty$	0.0	0	0.0	0.0
1	0.0	1.8	1	0.0	1.8
2	1.8	3.6	2	1.8	3.6
3	3.6	5.4	3	3.6	5.4
4	5.4	7.2	4	5.4	7.2
5	7.2	9.0	5	7.2	9.0
6	9.0	10.8	6	9.0	10.8
7	10.8	12.6	7	10.8	12.6
8	12.6	14.4	8	12.6	14.4
9	14.4	16.2	9	14.4	16.2
10	16.2	18.0	10	16.2	18.0
11	18.0	∞	11	18.0	18.0

Table 2

Typical mean clearness indexes for Cordoba (Spain).

Month	\bar{K}_t
January	0.46
February	0.51
March	0.50
April	0.49
May	0.48
June	0.59
July	0.64
August	0.64
September	0.58
October	0.49
November	0.46
December	0.42

average energy increment for days with energy deficit in which E_i and B_{i-1} belong to k and q interval, respectively. Thus, $\bar{E}(s_{0,k,q})$ is negative for all k and q . $\bar{B}(s_{0,k,q})$ denotes the vertical coordinate of the centre of mass of the polygon $s_{0,k,q}$ plotted in Fig. 8 and it represents the average stored energy previous to a deficit day being E_i and B_{i-1} included in the k and q interval, respectively.

Following the notation previously described, Eq. (20) gets the form:

$$\bar{d} = \{p_B\}^T [m_{j=0} CD] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

where, once more, $[m_{j=0} CD]$ is not a matrix multiplication but the matrix whose elements result from the product of the three

elements of the $[m_{j=0}]$, $[C]$ and $[D]$ matrixes within the same row and column.

According to that, the loss of load probability, LLP, is defined as the ratio of the sum of the expected deficits for a number of days to the sum of the demands (Eq.22):

$$LLP = \frac{\sum_{i=1}^{365} \bar{d}^i}{\sum_{i=1}^{365} L^i} \quad (22)$$

In that way, the oblique projection of the probability mass marked in Fig. 8 represents the probability density function of the energy deficit during the day of study.

3. Application of the mathematical method to a study case

The methodology described is applied to the sizing example proposed by Posadillo and Lopez [7] for a photovoltaic installation with monthly variable demands and panel inclinations. Specifically, it is a 12 V photovoltaic installation located in Cordoba (Spain) (Latitude:37.85°N; Longitude:4.48°W), with three different tilts along the year to follow the sun position and optimize the yield of the panels (Table 1). It must satisfy the daily demands listed in Table 1. This demand profile matches a constant monthly demand but a variable seasonal load which could be the representative profile characteristic of a Mediterranean farm.

As a starting point, a photovoltaic installation consisted of 20 modules of 80 Wp with a maximum power point tracker and 30 Pb-acid accumulator cell batteries system of 600 Ah, 2 V and a discharge depth of 50% is analysed. Accordingly, the effective area of the installation, $A_G \eta_G$, will be given by Eq. (23):

Table 3

Frontier values, in kWh, of the intervals considered for the variable E .

Month	E_{\min}	Frontier values between intervals								E_{\max}
		$I_{E1} - I_{E2}$	$I_{E2} - I_{E3}$	$I_{E3} - I_{E4}$	$I_{E4} - I_{E5}$	$I_{E5} - I_{E6}$	$I_{E6} - I_{E7}$	$I_{E7} - I_{E8}$	$I_{E8} - I_{E9}$	
January	-2.67	-2.22	-1.72	-1.12	-0.42	0.48	1.62	3.01	4.60	6.21
February	-3.55	-2.95	-2.30	-1.58	-0.76	0.23	1.43	2.84	4.42	6.02
March	-3.42	-2.64	-1.83	-0.96	-0.02	1.03	2.22	3.57	5.03	6.50
April	-4.25	-3.21	-2.17	-1.10	-0.01	1.12	2.30	3.54	4.81	6.09
May	-7.13	-5.92	-4.72	-3.52	-2.31	-1.10	0.11	1.33	2.55	3.77
June	-8.50	-7.10	-5.71	-4.32	-2.94	-1.58	-0.24	1.09	2.40	3.72
July	-8.07	-6.66	-5.26	-3.85	-2.46	-1.07	0.30	1.67	3.04	4.42
August	-8.15	-6.87	-5.58	-4.27	-2.95	-1.60	-0.22	1.19	2.60	3.97
September	-4.63	-3.62	-2.59	-1.52	-0.39	0.82	2.14	3.56	5.05	6.48
October	-4.48	-3.76	-3.02	-2.23	-1.36	-0.39	0.72	1.98	3.36	4.74
November	-4.64	-4.14	-3.60	-2.97	-2.23	-1.30	-0.15	1.25	2.83	4.44
December	-2.66	-2.28	-1.87	-1.38	-0.80	-0.07	0.84	1.96	3.29	4.74

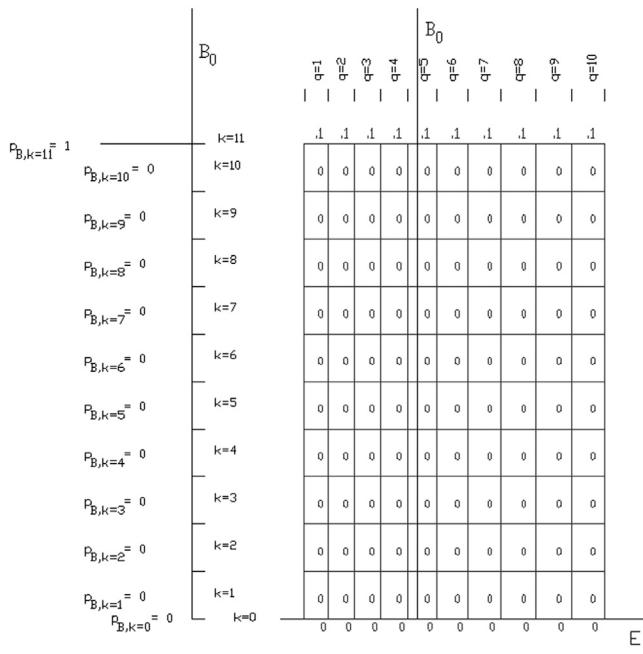


Fig. 9. Probability distributions for the variables B and E in the first day of the installation.

$$A_G \eta_G = 20 \cdot \frac{80 \text{ Wp}}{1000 \text{ W/m}^2} = 1.6 \text{ m}^2 \quad (23)$$

and the battery useful storage capacity will be given by Eq. (24):

$$C_U = 0.5 \cdot 30 \cdot 2V \cdot 600\text{Ah} \cdot 3600(\text{s/h}) = 64,800,000 \text{ J} = 18 \text{ kWh} \quad (24)$$

Once C_U and $A_G \eta_G$ have been calculated, it is necessary to determine the extreme values of the sub-intervals considered for

the variables involved in the study, that is, the state of the battery, B , the net energy balance B' and the net energy gain, E .

The method presented considered that the variation of E can be described as a Markov process equal to the one proposed by Aguiar [20]. Thus, the extreme values of the variable E , that according to Eq. (5) depend on the extreme values of $H_{g\beta}$, can be estimated from Aguiar matrixes that depend, in turn, on the typical clearness indexes of the emplacement. In that way, for the example analysed, the Aguiar matrix corresponding to each month will be determined by the typical clearness indexes of Cordoba (Table 2).

From these clearness indexes and the suitable Aguiar matrix corresponding to each clearness index, it is possible to determine, for each month, the minimum and maximum values of the dominium of the variable E , that is, E_{\min} and E_{\max} , respectively (Table 3). In addition, in order to use the probability transition values of Aguiar [20], it is necessary to divide the dominium of E into 10 intervals. According to that, Table 3 shows, together with E_{\min} and E_{\max} , the nine intermediate values, denoted by the sub-index q , that divide the dominium of E into 10 intervals.

On the other hand, Table 4 shows the intervals of the variables B and B' , represented by the indexes k and j , respectively. These intervals do not depend on the month and remain constant along the year.

To start the recursive method, the probability density function for the state of the battery in the first day is considered known. Specifically, the batteries are supposed to be full in the first day. According to that, the probability of the $k = 11$ interval of B is equal to the unit whereas the probability of the rest of the intervals is considered null. On the other hand, since information of the previous days is not available, the matrix C , consisted of the elements $C_{kq} = p(q/k)$ that represent the probability of E conditioned to B (Eq. (12)), is initialized for the day zero as an uniform probability distribution in which each element is equal to a tenth, $C_{kq} = p(q/k) = 1/10$.

Fig. 9 explains the basis of the geometrical estimation of the net energy balance at the end of a day, B' , as the sum of the two stochastic variables representing the useful energy stored in the

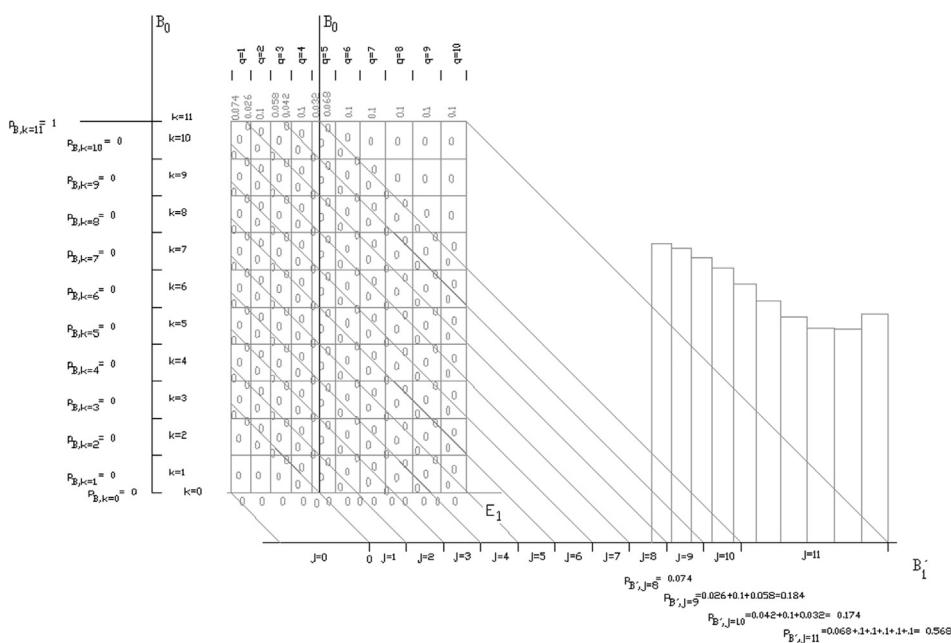


Fig. 10. Geometrical estimation of the probability distributions for the variables B' as the sum of the probability distributions for the variables B and E in the first day of the installation.

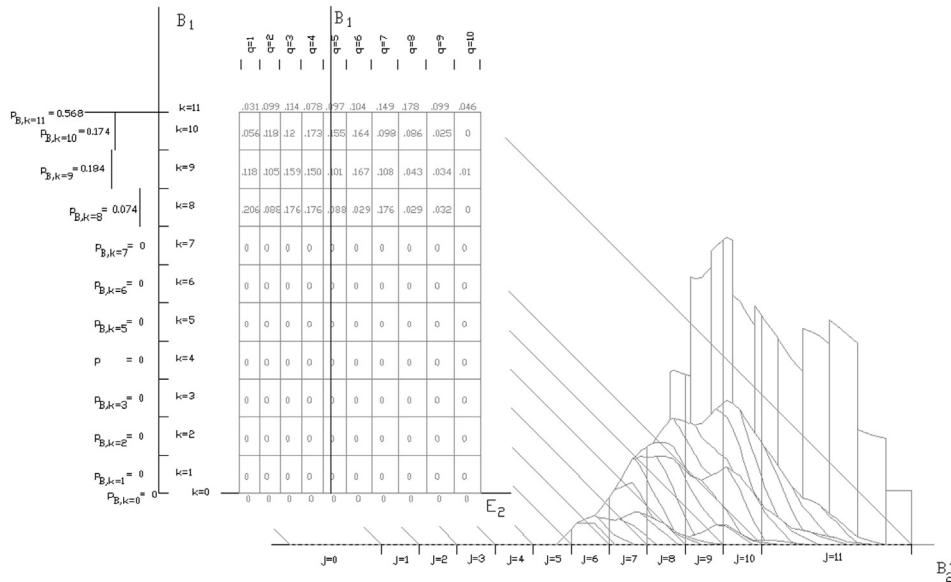


Fig. 11. Geometrical estimation of the probability distributions for the variables B' as the sum of the probability distributions for the variables B and E in the second day of the installation.

previous day, B , and the net energy gain along the day, E , respectively (Eq. (5)). In this figure, the occurrence probabilities of both addends for the first day, that is, B_0 and E_1 , are represented. The intersection between their interval frontiers sets up the rectangular clusters the plane (B_0, E_1) is initially divided into. All these clusters are rectangular except for the ones corresponding to $B_0 = 0$ and $B_0 = C_U$ that are lineal segments. However, in order to generalize and systematize the process, they can be considered as rectangles of null height. As hypothesis, it is assumed that the occurrence probability in a rectangular cluster is uniformly distributed inside it.

Once the plane (B_0, E_1) has been defined, it is possible to obtain B'_1 as the geometrical sum of B_0 and E_1 . In that way, the probability of each sub-interval j of the variable B'_1 will be given by the sum of the probabilities of all the polygons between the two oblique lines

that demarcate this particular sub-interval. These polygons depend on the parameters $m(j, k, q)$ that represents the points of the whole rectangular cluster (with indexes k and q) whose sum of coordinates is included in the interval j of B'_1 (Fig. 10).

On the other hand, Fig. 10 shows the geometrical interpretation of Eq. (13) for the estimation of the probability corresponding to each interval j of the variable B' . This probability is obtained as the accumulative recount of the probabilistic mass of all the polygons included between the oblique lines that delimit the interval j of the variable B' .

Once the probabilities of B'_1 have been computed for the first day of the installation, the probabilities for the second day are estimated. For that purpose, according to Eq. (4), the probabilities of B' on the previous day, that is, B'_1 , become the probabilities of the useful stored energy, for this second day B_1 . As far as the

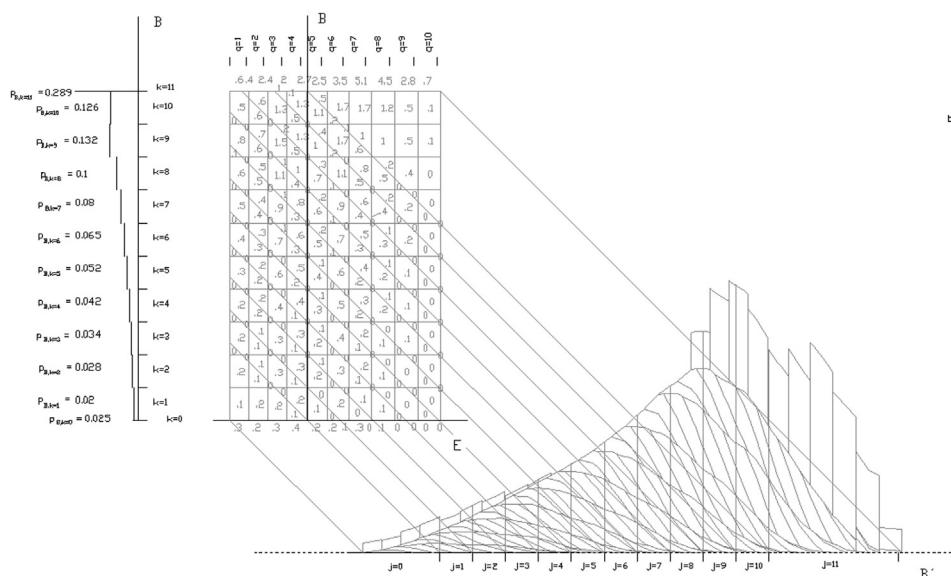


Fig. 12. Geometrical estimation of the probability distributions for the variables B' as the sum of the probability distributions for the variables B and E for an arbitrary day i of the installation.

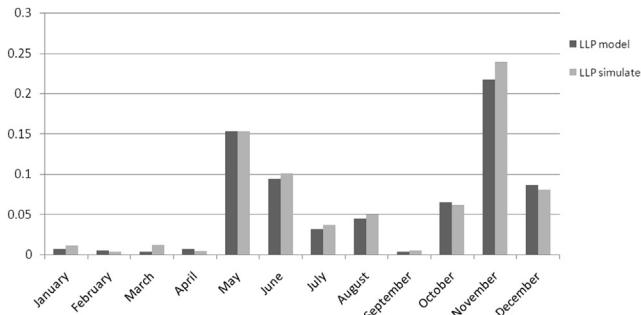


Fig. 13. LLP monthly distributions for the 20 module (of 80 Wp) and 30 vase solution. The distributions calculated by the method presented in the paper are compared with the ones obtained by simulation [6,7].

probabilities of each sub-interval of the variable E_2 are concerned, as explained before, they will be conditioned to the values of this variable in the previous day and, as a consequence, they will depend on the Markov transition matrixes given by Aguiar [20]. Fig. 11 shows the plane (B_1, E_2) for the second operation day of the PV system. Once more, from the probabilities of each sub-interval of the variables B_1 and E_2 and following the same procedure that for the first day, it is possible to estimate the probabilities of the different sub-intervals of B'_1 as the geometrical sum of B_1 and E_2 (Fig. 11).

In a similar and recursive way, for any day i , it is possible to determine the probabilities of the different sub-intervals considered for the variable B' related to the battery state. Fig. 12 shows the sum of the variables B and E for an intermediate and arbitrary day of the simulation process.

Values of B' corresponding to the sub-interval $j=0$, that is, negative values of this variable, represent possible deficits and, consequently, the probability of a system failure in the day i . The probability associated to the sub-interval $j=11$ of the variable B' represents the probability of full batteries in the day i .

Thus, repeating this recursive method, it is possible to obtain not only the annual LLP or the number of failures, n_F , but also the distribution of these values along the year, as other authors did previously [6,7].

Figs. 13 and 14 show, respectively, the LLP and n_F monthly distributions for the example previously described. These distributions computed by means of the method proposed in this paper are compared with the ones obtained by classical simulation methods [4,6,7,9] applied for a 20-year period of time.

Similar results for both variables and methodologies are obtained. Thus, from the information of Figs. 13 and 14, any user would be aware of the monthly restrictions on his energy demand.

4. Validation of the mathematical method

In order to validate the method proposed, its results have been compared with the ones obtained for the same example by Posadillo and Lopez [7] who generated the LLP, and the isocurves for the number of failures, n_F , of the PV system. Specifically, a system spectrum obtained as a result of the combination of all the possible peak powers $P_p(\text{Wp}) = [80, 160, 240, \dots, 2400]$ and $C_U(\text{kWh}) = [3.6, 7.2, 10.8, 14.4, 18]$ are analysed. These values of P_p and C_U considered are the ones corresponding to an integer number of photovoltaic collectors between 1 and 30 and an integer number of batteries cells between 1 and 6, resulting in 150 different combinations. When analysing the iso-LLP curves versus P_p and C_U , as these results are usually presented, there are no significant differences between the ones obtained from the model proposed in this paper and the ones obtained by Posadillo and Lopez [7]. Consequently, the results of the LLP and the n_F values of both methods have been directly compared.

Fig. 15 represents the LLP values according to the method proposed versus the ones obtained by Posadillo and Lopez [6,7]. A high correlation degree is observed and confirmed by the lineal regression results (Eq. (25)) which yield a high correlation coefficient ($R^2 = 0.99$) and a low standard error ($\sigma_E = 0.002$).

$$\text{LLP}_{\text{model}} = 0.999 \cdot \text{LLP}_{\text{Posadillo-Lopez}} \quad (25)$$

Similarly, Fig. 16 represents the annual number of failures according to the method proposed versus the one obtained by Posadillo and Lopez [6,7]. Once more, a high correlation degree is observed and confirmed by the lineal regression results (Eq. 26) which yields a high correlation coefficient ($R^2 = 0.99$) and a low standard error ($\sigma_E = 0.002$).

$$n_F_{\text{model}} = 1.001 \cdot n_F_{\text{Posadillo-Lopez}} \quad (26)$$

Accordingly, findings from Posadillo and Lopez [6,7] are confirmed and it is possible to conclude that, when the number of modules is low, LLP and n_F depend linearly on P_p but they do not depend on C_U .

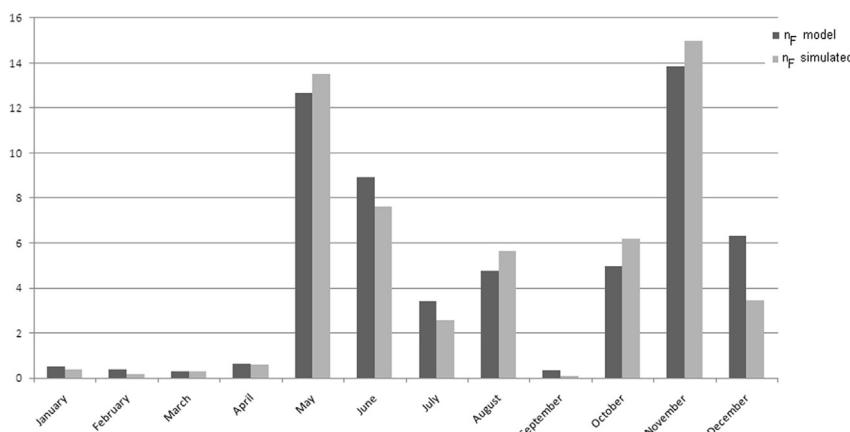


Fig. 14. f monthly distributions for the 20 module (of 80 Wp) and 30 vase solution. The distributions calculated by the method presented in the paper are compared with the ones obtained by simulation [6,7].

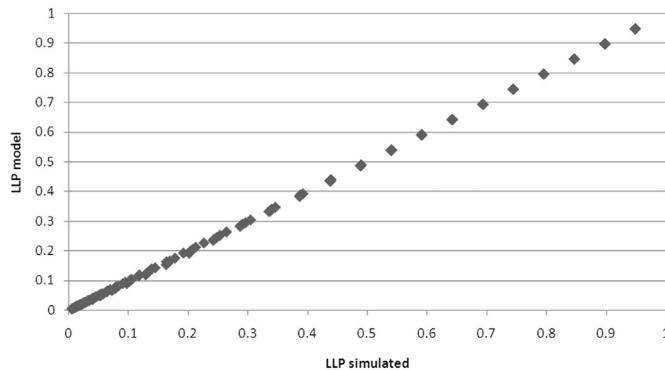


Fig. 15. LLP values obtained by the model presented versus the ones obtained by Posadillo and López [6,7] for 150 installations resulted from the combination of different system powers and useful batteries capacities.

5. Conclusions

This paper shows a mathematical method to characterize the variables associated with the energy balance of a SAPV. The method is based on the estimation of the useful energy stored in the battery, B , by means of its probability density function. Particularly, the method takes into account how this probability density function depends on the solar radiation reaching the PV panel, the net energy gain of the battery at the end of the day conditioned to the state of the battery in the previous day, the physical limits of the battery (empty or full), among other factors. As far as the solar radiation is concerned, the method not only considers its daily value but also the correlation among its values in consecutive days: For that purpose, the method is based on the transition matrixes proposed by Aguiar [20]. In that way, the method allows the estimation of the probability of the different possible states for the battery for any day of the PV system operation time. From these probabilities, it is possible to determine the situations of empty or full batteries and, consequently, the temporal distributions of the number of failures, n_f , or the Loss of Load Probability, LLP. Results of the proposed method are compared to the ones obtained by Posadillo and Lopez [6, 7] finding a high correlation degree among both of them.

Consequently, it is possible to conclude that the sizing technique described in this paper has the following characteristics:

It characterizes statistically the energy supply for every day of the year and, consequently, it let the designer extract relevant information for specific periods of time.

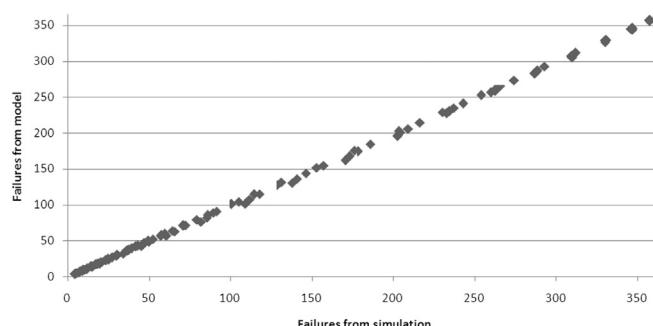


Fig. 16. Number of failures obtained by the model presented versus the ones obtained by Posadillo and López [6,7] for 150 installations resulted from the combination of different system powers and useful batteries capacities.

It provides, for each day of the operation time, the probability density function associated to the battery state, the energy deficit expectancy, the system failure probability and even the probability density function of the daily deficit.

It permits the study of systems with variable daily demands or solar tracking without increasing the computational requirements.

Its statistical approach is only limited by the Markov matrixes used for the characterization of daily solar radiation.

It relates analytically the PV sizing methods to the autocorrelative Aguiar model.

Furthermore, since the method proposed is not based on simulation techniques, its results do not entail the uncertainty characteristic of these techniques. For these reasons, the method could be promising for the analytic study of the effects of different determining factors on the LLP not studied till this moment due to their complexity, such as, daily demand changes, solar tracking or solar power concentration.

On the other hand, since the method proposed is directly based on Aguiar model [20] for the solar radiation prediction, improvements on the latest will imply improvements on the proposed method. In that sense, future works will be aimed towards the analytic study of the hourly balance.

References

- Mellit A, Benghanem M, Kalogirou SA. Modeling and simulation of a stand-alone photovoltaic system using an adaptive artificial neural network: proposition for a new sizing procedure. *Renew Energy* 2007;32(2):285–313.
- Mellit A, Kalogirou SA, Hontoria L, Shaari S. Artificial intelligence techniques for sizing photovoltaic systems: a review. *Renew Sustain Energy Rev* 2009;13(2):406–19.
- Sylvestre S. Review of system design and sizing tools. *Practical handbook of photovoltaics: fundamentals and applications*. Oxford: Elsevier; 2003.
- Egido M, Lorenzo E. The sizing of a stand-alone PV system: a review and a proposed new method. *Solar Energy Mater Solar Cells* 1992;26:51–69.
- Mellit A, Kalogirou Soteris A. Artificial intelligence techniques for photovoltaic applications: a review. *Prog Energy Combust Sci* 2008;34:574–632.
- Posadillo R, López Luque R. Approaches for developing a sizing method for stand-alone PV systems with variable demand. *Renew Energy* 2008;33: 1037–48.
- Posadillo R, López Luque R. A sizing method for stand-alone PV installations with variable demand. *Renew Energy* 2008;33:1049–55.
- Lorenzo E, Araujo G, Cuevas A, Egido MA, Miñano R, Zilles R. *Electricidad solar*. Progensa; 1994.
- Sidrach-de-Cardona M, Li Mora López. A simple model for sizing stand alone photovoltaic systems. *Solar Energy Mater Solar Cells* 1998;55:199–214.
- Barral L, Catalonotti S, Fontana F, Lavorante F. An analytical method to determine the optimal size of a photovoltaic plant. *Solar Energy* 1984;33: 509–14.
- Bartoli B, Cuomo V, Fontana F, Serio C, Silvestrini V. The design of photovoltaic plants: an optimization procedure. *Appl Energy* 1984;18:37–47.
- Bucciarelli LL. Estimating loss-of-power probabilities of stand-alone photovoltaic solar energy systems. *Solar Energy* 1984;32:205–9.
- Bucciarelli LL. The effect of day-to-day correlation in solar radiation on the probability of loss-of-power in a standalone photovoltaic energy system. *Solar Energy* 1986;36:11–4.
- Negro E. On PV simulation tools and sizing techniques: a comparative analysis toward a reference procedure. In: Proceedings of the 13th European PV solar energy conference, Nice; 1995. pp. 687–90.
- Groumpos P, Papageorgiou G. An optimal sizing method for stand-alone photovoltaic power systems. *Solar Energy* 1987;38:341–51.
- Chapman RN. *Sizing handbook for stand alone photovoltaic/storage systems*. Sandia National Laboratories; April 1987.
- Klein SA, Beckman WA. Loss-of-load probabilities for stand-alone photovoltaic systems. *Solar Energy* 1987;39:499–512.
- Labed S, Lorenzo E. The impact of solar radiation variability and data discrepancies on the design of PV systems. *Renew Energy* 2004;29:1007–22.
- Ambrosone G, Catalonotti S, Coscia U, Troise G. Comparison between power and energy methods of analyses of photovoltaic plants. *Solar Energy* 1985;34: 1–8.
- Aguiar R, Collares-Pereira M, Conde J. Simple procedure for generating sequences of daily radiation values using a library of Markov transition matrices. *Solar Energy* 1988;40:269–79.

- [21] Graham VA, Hollands KGT, Unny TE. A time series model for K_t with application to global synthetic weather generation. *Solar Energy* 1988;40: 83–92.
- [22] Mora-López LL, Sidrach de Cardona M. Characterization and simulation of hourly exposure series of global radiation. *Solar Energy* 1997;60: 257–70.
- [23] Arum P, Banerjee R, Bandyopadhyay S. Optimum sizing of photovoltaic battery systems incorporating uncertainty through design space approach. *Solar Energy* 2009;83:1013–25.
- [24] Cabral CVT, Filho DO, Diniz ASAC, Martins JH, Toledo OM, Machado Neto LDVB. A stochastic method for stand-alone photovoltaic system sizing. *Solar Energy* 2010;84:1628–36.
- [25] Tsalides PH, Thanailakis A. Loss of load probability and related parameters in optimum computer aided design of stand-alone photovoltaic systems. *Solar Cells* 1986;18:115–27.
- [26] Hontoria L, Aguilera J, Zufiria P. A new approach for sizing stand alone photovoltaic systems based in neural networks. *Solar Energy* 2005;78:313–9.
- [27] Gordon JM. Optimal sizing of stand-alone photovoltaic solar power systems. *Solar Cells* 1987;20:295–313.
- [28] Jakhrani AQ, Othman AK, Rigit ARH, Samo SR, Kamboh SA. A novel analytical model for optimal sizing of standalone photovoltaic systems. *Energy* 2012;46(1):675–82.
- [29] Sidrach-de-Cardona M, Mora López LL. A general multivariate qualitative model for sizing stand-alone photovoltaic systems. *Solar Energy Mater Solar Cells* 1999;59:185–97.
- [30] Fragaki A, Markvart T. Stand-alone PV system design: result using a new sizing approach. *Renew Energy* 2008;33:162–237.
- [31] Chen SG. An efficient sizing method for a stand-alone PV system in terms of the observed block extremes. *Appl Energy* 2012;91(1):375–84.
- [32] Lucio JH, Valdés R, Rodríguez LR. Loss of load probability model for stand-alone photovoltaic systems in Europe. *Solar Energy* 2012;86:2515–35.
- [33] Mellit A, Benghanem M, Hadj Arab A, Guessoum A. An adaptive artificial neural network model for sizing stand-alone photovoltaic systems: application for isolated sites in Algeria. *Renew Energy* 2005;30:1501–24.
- [34] Mellit A, Benghanem M. Sizing of stand-alone photovoltaic systems using neural network adaptive model. *Desalination* 2007;209:64–72.
- [35] Mellit A, Kalogirou SA, Drif M. Application of neural networks and genetic algorithms for sizing of photovoltaic systems. *Renew Energy* 2010;35(12): 2881–93.
- [36] Ohsawa Y, Emurd S, Arai K. Optimal operation of photovoltaic/diesel power generation system by neural network. In: Proceedings of the second international forum on applications of neural networks to power systems (NNPS) 93; 1993. pp. 99–103.
- [37] Wissem Z, Gueorgui K, Hédi K. Modeling and technical-economic optimization of an autonomous photovoltaic system. *Energy* 2012;37(1):263–72.
- [38] Semaoui S, Arab AH, Bacha S, Azoui B. Optimal sizing of a stand-alone photovoltaic system with energy management in isolated areas. *Energy Procedia* 2013;36:358–68.
- [39] Tavora Cabral CV, Oliveira Filho D, Alves C, Diniz AS, Helvecio Martins J, Moraes Toledo O, et al. A stochastic method for stand-alone photovoltaic system sizing. *Solar Energy* 2010;84(9):1628–36.
- [40] Fragaki A, Markvart T. System memory effects in the sizing of stand-alone PV systems. *Prog Photovolt Res Appl* 2013;21(4):724–35.
- [41] Lorenzo E, Navarre L. On the usefulness of stand-alone PV sizing methods. *Prog Photovolt Res Appl* 2000;8:391–409.
- [42] Arfken GB, Weber HJ. Mathematical methods for physicists. 5th ed. Academic Press; 2000, ISBN 978-0-12-059825-0.

Nomenclature

- SOC : state of battery charge
 LLP : loss of load probability
 n_f : number of failures
 C_A : PV generator capacity relative to the load
 C_S : battery storage capacity relative to the load
 C_U : useful storage capacity (kWh)
 C_B : nominal capacity (kWh)
 L : daily load (kWh)
 η_G : PV generator efficiency
 A_G : PV generator area (m^2)
 PD_{max} : battery maximum depth of discharge
 P_p : peak power of the PV system
 H_g : daily irradiation on horizontal surface (kWh/m^2)
 $H_{g\beta}$: daily irradiation on tilted surface (kWh/m^2)
 $\bar{H}_{g\beta}$: monthly mean irradiation on tilted surface (kWh/m^2)
 K_t : daily clearness index
 \bar{K}_t : daily clearness index monthly average
 δ : declination
 ϕ : latitude
 β : PV generator tilt angle (degrees)
 B' : net energy balance for a specific day (kWh)
 B : useful energy stored in the battery before the sunrise of a specific day (kWh)
 $f(B)$: probability density function for the random and bounded variable B
 $g(B)$: probability density function for random variable B
 n_B : number of intervals of the variable B considered in the domain $[0, C_U]$
 E : Auxiliar variable representing the difference between the incoming energy and the energy demand
 I_{Eq} : interval q of the variable E
 p : probability
 C : conditioned probability matrix
 A : Aguiar transition matrix
 $\delta(x)$: Dirac Delta Function
 D : daily energy deficit to the load for a specific day (kWh)
 s : area of the polygon representing the geometric result of the sum of stochastic variables
 l : interval length in the geometric representation of the sum of stochastic variables
 $m(j,k,q)$: area correction factor in the geometric representation of the sum of stochastic variables

Subscripts and Superscripts

- i : index for the day of interest
 k : index for the variable B on the day of interest
 j : index for the variable B on the following day to the one of interest
 q : index for the variable E on the day of interest
 r : index for the variable E on the following day to the one of interest
 min : to indicate minimum value of a random variable
 max : to indicate maximum value of a random variable

6. Anexo 2

F.J. CASARES, J. RAMÍREZ-FAZ, R. LÓPEZ-LUQUE. Development of synthetic hemispheric projections suitable for assessing the sky view factor on horizontal planes. *Energy and Buildings*, 2014, 82, pp. 696-702.

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378778814005829>

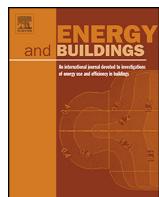
[http://dx.doi.org/10.1016/j.enbuild.2014.06.057.](http://dx.doi.org/10.1016/j.enbuild.2014.06.057)

Energy and Buildings: Factor de impacto: 2,884.

Q1 en el área de ENGINEERING, CIVIL, posición 6/125

Q1 en el área de CONSTRUCTION&BUILDING TECHNOLOGY, posición 5/59

Q2 en el área de ENERGY&FUELS, posición 30/ 89



Development of synthetic hemispheric projections suitable for assessing the sky view factor on horizontal planes



F.J. Casares, J. Ramírez-Faz*, R. López-Luque

Research Group of Physics for Renewable Energies and Resources. University of Córdoba. Edificio Albert Einstein. Campus de Rabanales, 14071 Córdoba, Spain

ARTICLE INFO

Article history:

Received 28 March 2014

Received in revised form 28 May 2014

Accepted 14 June 2014

Available online 29 July 2014

Keywords:

Sky view factor

Hemispherical projection

Daylight

ABSTRACT

The solar radiation balance in buildings has a significant impact on their energy needs, as well as on their potential for buildings-integrated photovoltaics (BIPV) energy production. It also influences the potentials of daylight, its healthiness and sustainability. Solar radiation models for urban environments require the characterization of the obstruction degree to which each point is subjected due to other buildings, topography, vegetation, etc. This characterization is carried out with the parameter known as sky view factor (SVF). In this paper, we check that significant disagreements exist in the literature with respect to the definition of SVF. Most published methods show that SVF admits a geometric interpretation as a ratio of projected sky surface versus the global surface of the sky vault projected on the same system. Nevertheless, the type of projection depends only on the authors' considerations. The geometric comparison of the methods opens a new way to explain their differences. This paper presents a general mathematical method to obtain projection equations, which allows the interpretation of SVF as a surface ratio. It is also proposed the adequate projection for horizontal surfaces under the hypothesis of angular distribution of diffuse radiance based on Moon–Spencer's model.

© 2014 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Incident solar radiation in buildings determines the energetic balance and healthiness of rooms. It also supports heating systems in cold seasons and acts as a natural light source. Excess insolation, however, may have a negative impact due to two main reasons, namely: (i) solar radiation can be a heating load that needs to be balanced with air conditioning; and (ii) it may cause glaring and, as a consequence, natural lighting can be uncomfortable. The development of distributed energy networks, together with energy generation in situ through building-integrated photovoltaic (BIPV) systems, make solar radiation on roofs and facades to be a potential resource of the building.

The high number of obstructions in urban environments, however, remarkably determines solar incidence on facades and horizontal surfaces [1,2]. As a result, it affects differently the direct, diffuse, and reflected components of solar irradiance (Eq. (1)). On the one hand, direct shading studies based on the astronomical movement allow the characterization of the obstructions effect on the direct component. On the other hand, to obtain the

characterization of the diffuse component, we define SVF as the diffuse irradiance percentage impinging on an obstructed, inclined plane versus a horizontal plane with no obstructions (Eq. (2)).

$$I = I_{DN} \cos i + I_{dH} f(SVF) + I_{GH} \rho GVF, \quad (1)$$

when $|i| > 90^\circ$, $\cos i = 0$,

$$SVF = \frac{I_{d\beta}}{I_{dH}}. \quad (2)$$

Numerous studies have focused their interest on the determination of SVF in vertical wall surfaces. Compagnon [3], Kapchun et al. [4], Papadakis et al. [5] focus their attention on SVF characterization, as it determines the photovoltaic potential in BIPV installations, or some characteristics related to the equivalent psychological temperature inside buildings.

The definition given by Eq. (1) entails that SVF depends on the angular distribution of the diffuse radiance in the sky vault. It is known that for obtaining accurate predictions of solar irradiance in any unobstructed plane it is necessary to use suitable models that take into account the correct angular distribution [6]. The predictive capacity of the isotropic model, radiance uniform distribution of radiance for every direction in the sky vault, is surpassed by

* Corresponding author. Tel.: +34 957218474.
E-mail address: jramirez@uco.es (J. Ramírez-Faz).

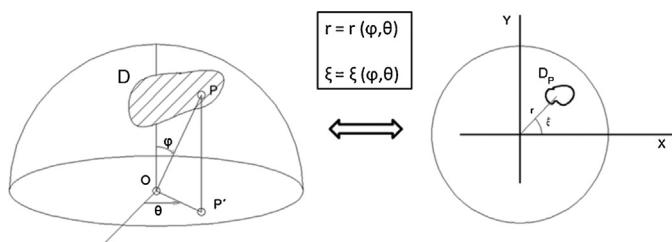


Fig. 1. Proposed transformation.

anisotropic models [6,7]. They consider the radiance $R(\varphi, \theta)$ coming from a spatial direction OP depending on azimuth angle (θ) and zenith angle (φ) represented on Fig. 1. Similarly the angular distribution of the luminance from the sky vault exhibits frequently a marked anisotropy [8]. Nusselt [9], Oke [10], Johnson and Watson [11], Steyn [12] and Hay et al. [13], and Holmer et al. [14] used the isotropic model to estimate SVF. In fact, the classification and systematization of methods carried out by Chen et al. [15] and Kapchun et al. [4] reflect that the isotropic method is the most widely used. Ivanova [16], nevertheless, considers the angular distribution of the background radiance by Muneer [17] as the most adequate method. Otherwise, Rakovec and Zaksek [18], and Tian et al. [19] define SVF as the solid angle fraction with which the obstructed sky vault is seen versus a non-obstructed sky vault (2π sr). Finally, some authors estimate the value of SVF as the percentage of surfaces on images obtained by all-sky cameras.

Maor and Appelbaum [20] and Kapchun et al. [4] use anisotropic models to calculate irradiances on inclined planes by using SVF values based on the isotropic model.

Hemispheric projections allow the representation of points on a spherical surface (i.e., the sky vault on a plane chart). Hemispheric representations of the sky vault allow the correct understanding and decision-making processes in problems related to shading or solar access. Teller et al. [21], Ramírez-Faz and López-Luque [22], Whan et al. [23] and Littlefair [24] recommend the choice of the most adequate hemispheric projection according to the metrical properties and the variables of each study. In our study, we consider the following projections:

- Stereographic projection. This type of projection preserves angular distances. The plane representation of 3D circumferences included in the 3D sphere is transformed into 2D circumferences. Pleigel [25] developed the globoscope, an optical instrument for obtaining stereographic images directly from the reflection of the sky vault in a parabolic mirror. This projection is widely used in both architecture and the field of graphic description of obstruction profiles. Ivanova [16], Teller et al. [21], and Souza et al. [26] use it only as a means of representing graphically the existent obstructions. An et al. [27] use a definition where they assign metric properties to SVF, as they consider SVF as the ratio of non-obstructed sky area in the stereographic projection versus the projected area in the semi-vault.
- Orthogonal projection. Nusselt's analogy [9] shows that the sky view factor based on the isotropic model coincides with the 2D surface ratio of the obstructed sky of the orthogonal projection. Torres et al. [28] show the usefulness of this method to determine shape factors. Souza et al. [26], despite being focused on the graphic study to obtain SVF, only show the lateral orthogonal projection. Considering this property, Márquez García et al. [29] propose an estimation mode for SVF. They consider a set of rays emerging from the inclined surface and, as a consequence, the authors demonstrate that SVF is correctly estimated as the ratio of rays that are non-incident neither on the floor nor on

the obstructions. Conceptually, the directions used coincide with those described by Ratti and Richens [30].

- Lambert projection or equal-area hemispherical. In this projection, the solid angles are proportional to the projected surfaces. This property permits the SVF to be determined, according to Rakovec and Zaksek [18] and Tian et al. [19], as the ratio of non-obstructed sky area in the projection versus the projected area of the semi-vault.
- Polar projection. The distance from every 2D point representation to the center of the image is proportional to the zenith angle of the 3D original point. Ideally, fisheye lenses produce polar projections. Theoretically, this is the projection considered to introduce metric parameters in hemispheric all-sky camera's photographs, as well as to develop methods such as Johnson and Watson [11], Steyn and Hay [5], Holmer et al. [14], and Chapman et al. [31]. Matzarakis and Matuschek [32] follow Rayman's model, where SVF is estimated as the area percentage on the polar chart.
- Cylindrical projection. This projection appears in the form of rectangular chart. The horizontal axis shows the azimuth of sky elements, while the vertical axis represents the altitude angle. Despite the lack of metric features, Gharakhani and Pillay [33] use the cylindrical projection as a SVF reference chart. Redweik et al. [34] suggest a modification in Ratti and Richens' method for horizontal surfaces [30]. These authors propose a calculation method for SVF that gives equal weight to each surface portion of the cylindrical chart.

The study of SVF for radiative calculations shows a formal analogy with the calculations of sky component (SC) in the study of natural lightning. In this field, Waldrum developed graphic projections adequate for SC calculations. The utility of the generation of adequate projections for each illuminance was stated by Ramírez et al. [35], who developed specific projections to obtain the SC parameter in windows and vertical wall surfaces.

This paper proposes a new type of projection that permits the representation of the visible sky semi-vault from a horizontal surface. This projection presents metric features directly related to Eq. (3), concerning the radiance angular distribution of Moon-Spencer's anisotropic model [36]. From a practical point of view, this projection is a step forward in the way started by Ivanova [16], due to the fact that it allows the determination of the obstructive potential in the horizontal plane of complex surfaces under anisotropic sky radiance model. We call Moon-Spencer projection (MS_b) to the one presented in this paper.

$$R(\varphi, \theta) = R_Z \frac{1 + b \cos \varphi}{1 + b}, \quad (3)$$

where:

$R(\varphi, \theta)$ = radiance in point P ,

R_Z = radiance in the zenith of the vault, b = parameter depending on sky conditions,

φ = zenith angle,

θ = azimuth angle.

Firstly, and as a previous stage, it is developed and show the general mathematical method to obtain the equations of hemispherical projections derived from any angular distribution of radiance.

2. Methodology

2.1. Ramírez's mathematical method to develop hemispheric projections

This method allows the graphical study of all physical magnitudes (C) satisfying Eq. (4). For that, the method assigns a plane surface to these physical magnitudes. That is, C is obtained by the integral in the directions of zenith angle φ and azimuth θ . The

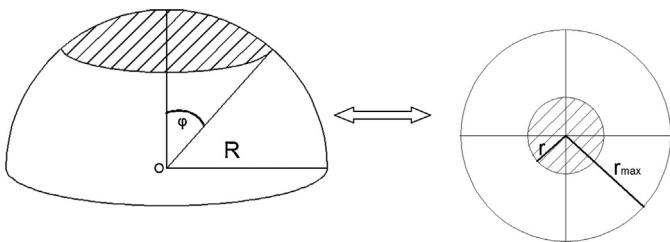


Fig. 2. Considered enclosure in the sky vault and the transformed projection.

integral is extended over the domain of interest D . Some examples of this type of magnitudes are the solid angle by which a point is observed, the irradiance and the illuminance on a plane.

$$C = \iint_D \rho(\varphi, \theta) d\varphi d\theta. \quad (4)$$

Even though Eq. (4) allows the resolution of any integral attribute, when one of these magnitudes is affected by obstructions in the sky vault, we may find the difficulty of determining function $\varphi(\theta)$, which sets the boundaries of the integration domain. Considering this difficulty, this paper proposes a methodology based on the development of projections. Projections have the advantage of an easy quantification of variables by using image analysis techniques.

The objective of the proposed projections consists of the transformation of the sky vault into a plane surface, where C in Eq. (4) is transformed into a surface (Fig. 1), and the global total sky vault is represented in a circular enclosure.

When transforming the sky vault into a circular enclosure, we should check Eq. (5).

$$\iint_D \rho(\varphi, \theta) d\varphi d\theta = \iint_{D_p} r dr d\xi. \quad (5)$$

Transformation defined by Eqs. (6) and (7):

$$r = r(\varphi, \theta), \quad (6)$$

$$\xi = \xi(\varphi, \theta). \quad (7)$$

Mathematically, Eq. (5) entails a change of variables in a double integration, so that integrands must satisfy Jacobi's condition, shown in Eq. (8):

$$\rho = r \begin{vmatrix} \frac{\delta r}{\delta \varphi} & \frac{\delta r}{\delta \theta} \\ \frac{\delta \xi}{\delta \varphi} & \frac{\delta \xi}{\delta \theta} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

or equivalently:

$$\frac{\delta r^2}{\delta \theta} \frac{\delta \xi}{\delta \theta} - \frac{\delta r^2}{\delta \varphi} \frac{\delta \xi}{\delta \varphi} = 2\rho(\varphi, \theta). \quad (9)$$

There is no single solution for Eq. (9). Thus, restrictions may be imposed in order to get better possibilities for later graphic representation. A common feature of the most frequent hemispheric projection equations is that r is not depending on θ . Graphically, this restriction entails that all points having the same zenith angle are arranged on concentric circumferences. As a result, Eq. (9) can be simplified into Eq. (10).

$$r = r(\varphi) \rightarrow \frac{\delta r^2}{\delta \theta} = 0. \quad (10)$$

To define a solution for the equation, coherent with Eqs. (6) and (7), we consider the equivalence between the value of the attribute of a given enclosure in the sky vault and the projected plane (Fig. 2).

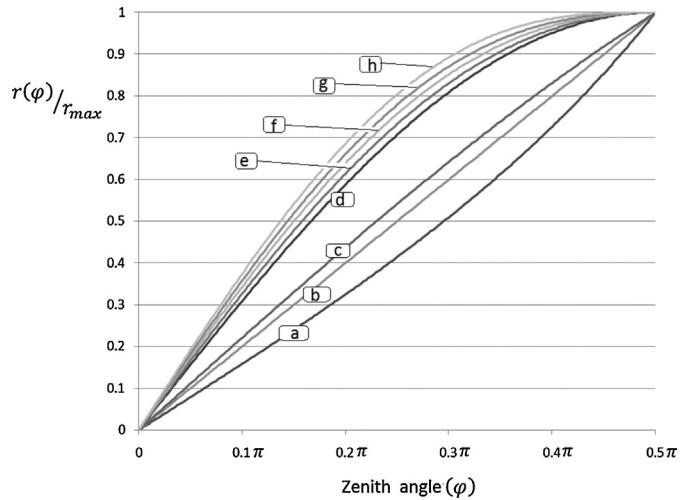


Fig. 3. Representation of the displacement $r(\varphi)/r_{max}$ with respect to the zenith angle in different projections: stereographic (a), polar (b), Lambert (c), orthogonal or $MS_b = 0$ (d), $MS_b = 0.5$ (e), $MS_b = 1.5$ (f), $MS_b = 3.0$ (g), and $MS_b \rightarrow \infty$ (h).

The value of the attribute is given by Eq. (11) and (12) both in the sky vault and in the transformation, respectively:

$$C = \int_0^\varphi \left[\int_0^{2\pi} \rho(\mu, \eta) d\eta \right] d\mu, \quad (11)$$

$$\text{Transformed area} = \pi r^2. \quad (12)$$

If we match Eqs. (11) and (12), we obtain the function of transformation $r(\varphi)$ in Eq. (13).

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\varphi \left[\int_0^{2\pi} \rho(\mu, \eta) d\eta \right] d\mu}. \quad (13)$$

Substituting Eqs. (10) and (13) in (9) and integrating, we get the second function of transformation in Eq. (14).

$$\xi(\theta) = 2\pi \frac{\int_0^\theta \rho(\mu, \eta) d\eta}{\int_0^{2\pi} \rho(\mu, \eta) d\eta}. \quad (14)$$

2.2. Hemispheric circle projection derived from Moon–Spencer's equation

When Eqs. (13) and (14) are obtained, this method can be generally applied to magnitudes satisfying Eq. (4). For instance, in this case we apply the method to obtain the irradiances in CIE-Overcast skies given by Moon–Spencer's method:

Irradiance provided in the horizontal plane by a surface differential on point P will be given by:

$$dI = R(\varphi, \theta) d\Omega \cos \varphi. \quad (15)$$

Substituting $R(\varphi, \theta)$ with respect to Eq. (3) we obtain:

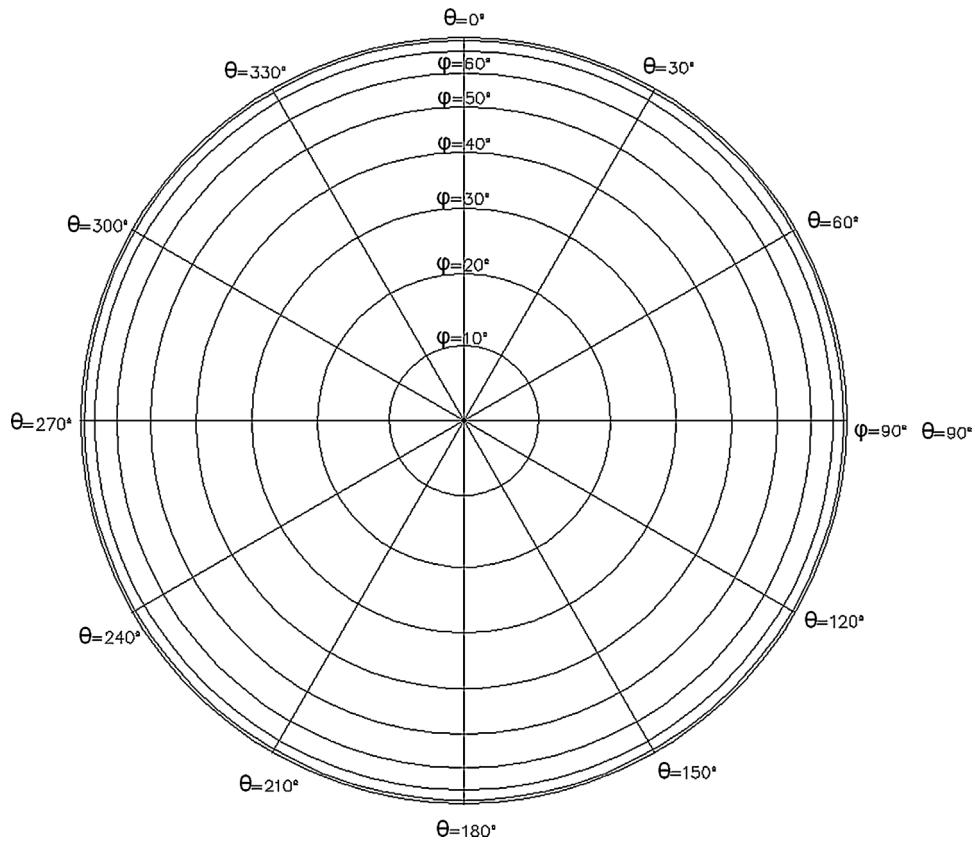
$$dI = R_z \frac{1 + b \cos \varphi}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta. \quad (16)$$

Integrating:

$$I = \iint R_z \frac{1 + b \cos \varphi}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta. \quad (17)$$

In this case, the nucleus function of the projection will be:

$$\rho = R_z \frac{1 + b \cos \varphi}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi. \quad (18)$$

**Fig. 4.** Circular representation.

Substituting in Eq. (13):

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\varphi \left[\int_0^{2\pi} R_z \frac{1 + b \cos \mu}{1 + b} \cos \mu \sin \mu d\eta \right] d\mu}. \quad (19)$$

From Eq. (14), it is deduced that:

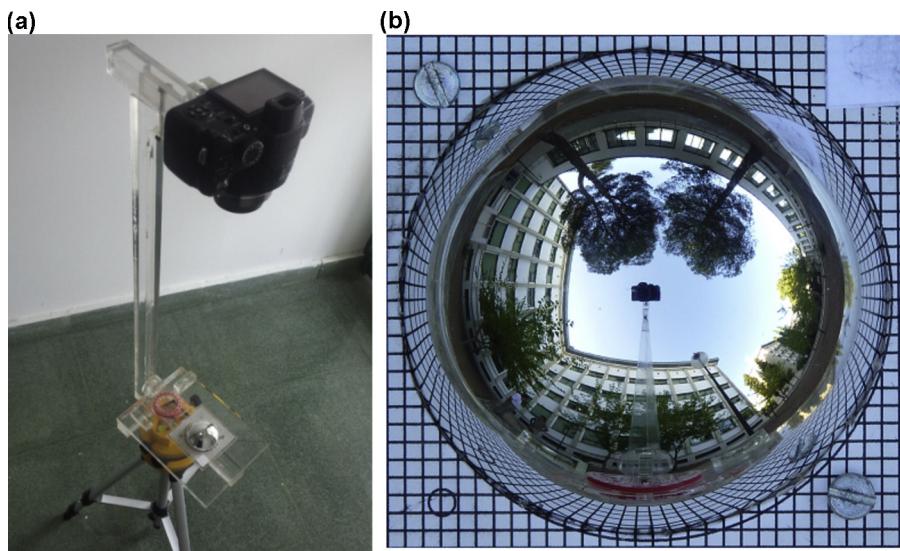
$$\xi(\theta) = \theta. \quad (21)$$

Integrating:

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{R_z}{6}} \sqrt{\frac{3b(1 - \cos \varphi) + 3(1 - \cos 2\varphi) + b(1 - \cos 3\varphi)}{1 + b}}. \quad (20)$$

Eq. (20) can be simplified considering:

$$r_{\max} = r\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{R_z}{6}} \sqrt{\frac{6 + 4b}{1 + b}}. \quad (22)$$

**Fig. 5.** (a) LRTV device; (b) raw image taken by the camera.

Having Eq. (23) when substituting R_z in Eq. (20):

$$r(\varphi) = r_{\max} \sqrt{\frac{3b(1 - \cos \varphi) + 3(1 - \cos 2\varphi) + b(1 - \cos 3\varphi)}{6 + 4b}}. \quad (23)$$

Consequently, SVF will be:

$$\text{SVF} = \frac{\iint_{R_p} r dr d\xi}{\pi r_{\max}^2}. \quad (24)$$

Fig 3 shows the comparison between the displacements assigned to each zenith angle φ obtained with Moon–Spencer's equation—Eq. (23)—and those assigned by the stereographic, polar, Lambert and orthogonal projections. By definition, the orthogonal projection coincides with Moon–Spencer's projection when $b=0$. As there is no crossing point, the projections in Fig. 3 can be ordered considering the weight they give to the zenithal part of the sky.

2.3. Practical application

This section presents in more detail the MS hemispheric projection considering $b=2$, due to the fact that this is the CIE-Overcast standard equation to describe the angular distribution of luminance. Moreover, the results published by Gueymard [37] showed a high similarity between the models of radiance distribution and luminance distribution, as well as the azimuthal independence. As a result, it is confirmed that MS projection $b=2$ would be the most adequate to study both SVF and the sky surface fraction versus the total surface of the circular chart.

On this chart we can identify SVF with sky component (SC), which is a widely studied parameter because of its relation to day-lighting.

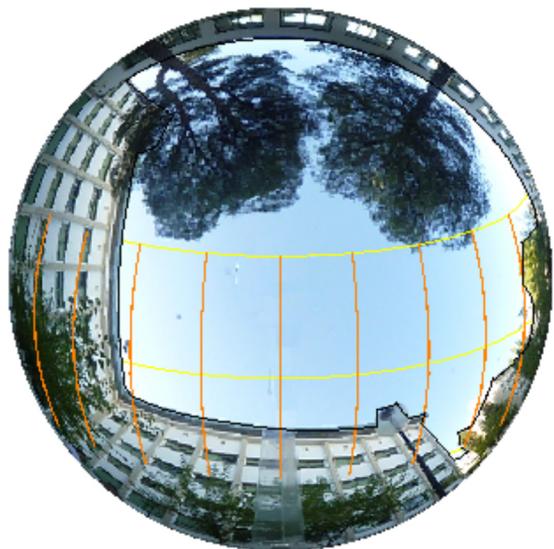


Fig. 6. Transformed image.

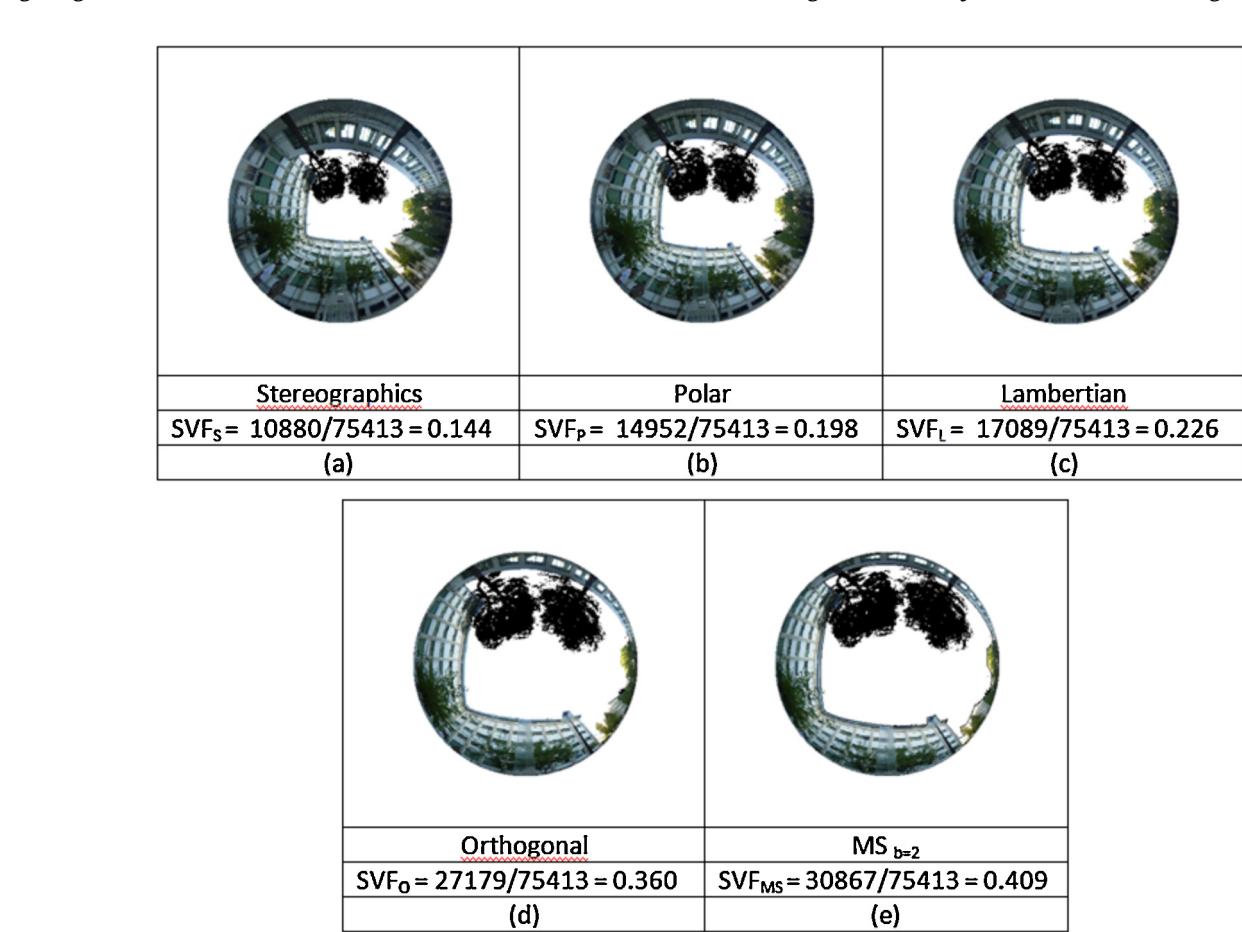


Fig. 7. Comparison between the most common projections and $MS_{b=2}$ with details of SVF estimations.

image treatment allows the extraction of the color of each pixel or detail of the sky vault, and the relocation on the chart shown in Fig. 6.

Fig. 6 shows the image after being transformed into $MS_{b=2}$. In this figure, sun trajectories in different months and lines of sun position at each hour have been also added.

Fig. 6 also shows the highest consideration of the sky section in the zenith area, according to the expression of luminance used. Moreover, the obstructions that are closer to the horizon lose influence as being reduced in the transformed area.

Moreover, Fig. 7 shows the differences between the estimations of SVF according to the main projections considered in literature. All these projections are bounded by a circle with 75413 pixels, and the same methodology to count pixels of a non-obstructed sky has been used. Canopies of trees, meanwhile, have been treated with the same filter of color. Values of SVF are obtained by dividing the number of pixels of a non-obstructed sky by the total number of pixels (75413 pxs). The most widely used projections offer a wide interval for the estimation of SVF (0.14, 0.36). The $MS_{b=2}$ projection, however, gives a value outside of this interval. As done in Fig. 3, projections have been ordered according to the relative weight considered for the zenithal part of the vault versus the horizontal part.

3. Results and conclusions

Eqs. (12) and (13) allow to unify the obtainment methods for suitable hemispheric projections, where the surface of each represented object is proportional to any type of physical property C (Eq. (3)). This type of physical magnitudes are related to objects and surfaces visibility from the point of study, or to the obstructive capacity of these objects.

As a particular case, we have obtained the hemispheric projection for the sky vault representation proportionally to Moon–Spencer's angular distribution. Fig. 3 allows the comparison between the different projections obtained, as well as between the most commonly used projections in literature. In interpreting this figure it is deduced that, considering an isotropic distribution ($b=0$), if b is increased, zenith points get more weight while those points closer to the horizon lose it.

Further analysis are required, but proximity between curves ($b=0$) ($b=\infty$) suggests that the SVF obtained when considering any anisotropic sky radiance model must be really similar to each other. When $b=2$, we obtain a curve (shown in Fig. 4), an equidistant projection between those corresponding to $b=0$ and $a \times b = \infty$. Most of the theoretical and empirical determinations of parameter b consider that it is between 1 and 2 [29]. As a consequence, the projection $b=2$ is considered as a practical criteria in order to establish SVF values regarding sky anisotropy. The standardization of CIE-Overcast as a distribution pattern of luminance entails that the sky projection shown in Fig. 4 is really useful for natural lighting studies. In this projection $SVF=SC$, that is, the sky component matches with the sky view factor.

The obtainment of adequate projections for anisotropic sky radiance distributions and its comparison to the most frequent projections in Fig. 4 allow us to organize current projections with respect to the anisotropic. According to this study, from the least adequate for SVF estimations to the most suitable, we can organize the projections as follows: stereographic, polar, Lambert, and orthogonal. The proximity of the orthogonal projection to the set of anisotropic curves makes it suitable for estimating SVF, even though anisotropic models are used.

References

- [1] Y. Etzion, A general expression for solar rights determination, *Energy and Buildings* 12 (1988) 149–154.
- [2] Ralph Knowles, The solar envelope: Its meaning for energy and buildings, *Energy and Buildings* 35 (2003) 15–25.
- [3] R. Compagnon, Solar and daylight availability in the urban fabric, *Energy and Buildings* 36 (2004) 321–328.
- [4] Yoon Kapchun, Yun Gyeong, Jeon Jongug, Kim, Kang Soo, Evaluation of hourly solar radiation on inclined surfaces at Seoul by photographic method, *Solar Energy* 100 (2014) 203–216.
- [5] G. Papadakis, P. Tsamis, S. Kyritsis, An experimental investigation of the effect of shading with plants for solar control in buildings, *Energy and Buildings* 33 (2001) 831–836.
- [6] D.T. Reindl, W.A. Beckman, J.A. Duffie, Evaluation of hourly tilted surface radiation models, *Solar Energy* 45 (1990) 9–17.
- [7] H.D. Kambezidis, B.E. Psiloglou, C. Guemard, Measurements and models for total solar irradiance on inclined surface in Athens, Greece, *Solar Energy* 53 (1994) 177–185.
- [8] H.W. Li Danny, H.W. Cheung Gary, C.S. Lau Chris, A simplified procedure for determining indoor daylight illuminance using daylight coefficient concept, *Building and Environment* 41 (2006) 579–589.
- [9] W. Nusselt, Graphische Bestimmung des Winkelverhältnisses bei der Warmestrahlung, *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* 72 (1928) 673.
- [10] T.R. Oke, Canyon geometry and the nocturnal urban heat island: Comparison of scale model and field observations, *Journal of Climatology* 1 (1981) 237–254.
- [11] G.T. Johnson, I.D. Watson, The determination of view-factors in urban canyons, *Journal of Applied Climate Meteorology* 23 (1984) 329–335.
- [12] D.G. Steyn, The calculation of view-factors from fisheye-lens photograph: Research note, *Journal of Atmospheric and Ocean Science* 18 (1980) 254–258.
- [13] J.D. Hay, I.D. Watson, G.T. Johnson, The determination of sky-view factors in urban environments using video imagery, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* 3 (1986) 759–764.
- [14] B. Holmer, U. Postgard, M. Eriksson, Sky view factors in canopies calculated with IDRISI, *Theoretical and Applied Climatology* 68 (2001) 33–40.
- [15] Liang Chen, Edward Ng, Xipo An, Chao Ren, Max Lee, Una Wang, Zhengjun He, Sky view factor analysis of street canyons and its implications for daytime intra-urban air temperature differentials in high-rise, high-density urban areas of Hong Kong: A GIS-based simulation approach, *International Journal of Climatology* 32 (2012) 121–136.
- [16] S.M. Ivanova, Estimation of background diffuse irradiance on orthogonal surfaces under partially obstructed anisotropic sky. Part I – Vertical surfaces, *Solar Energy* 95 (2013) 376–391; Part II – Horizontal surfaces, *Solar Energy* 100 (2014) 234–250.
- [17] T. Munee, *Solar Radiation and Daylight Models*, Elsevier Butterworth Heinemann, 2004.
- [18] J. Rakovec, K. Zásek, On the proper analytical expression for the sky-view factor and the diffuse irradiation of a slope for an isotropic sky, *Renewable Energy* 37 (2012) 440–444.
- [19] Y.Q. Tian, R.J. Davies-Colley, P. Gong, B.W. Thorrold, Estimating solar radiation on slopes of arbitrary aspect, *Agricultural and Forest Meteorology* 109 (2001) 67–74.
- [20] T. Maor, J. Appelbaum, View factors of photovoltaic collector systems, *Solar Energy* 86 (2012) 1701–1708.
- [21] J. Teller, S. Azar, I.I. Townscope, A computer system to support solar access decision making, *Solar Energy* 70 (2001) 187–200.
- [22] J. Ramírez-Faz, R. López-Luque, Development of a methodology for quantifying insolation variables in windows and building openings, *Renewable Energy* 37 (2012) 426–433.
- [23] J.K. Whan Oh, J.S. Haberl, L. Degelman, Enhanced software for displaying orthographic, stereographic, in: *Gnomic and Cylindrical Projections of the Sunpath Diagram and Shading Mask Protractor*, Proceedings of the Twelfth Symposium on Improving Building Systems in Hot and Humid Climates, San Antonio, TX, 2000.
- [24] P. Littlefair, *Site Layout Planning for Daylight and Sunlight: A Guide to Good Practice*, HIS BRE Press, 2011.
- [25] J.R. Jenness, The globoscope, *Solar Energy* 19 (1977) 361–363.
- [26] L. Souza, S. Daniel, Rodrigues, F.G. José, Mendes, Sky View Factors Estimation Using a 3d-GIS Extension, Eighth International IBPSA Conference, Eindhoven (Netherlands), 2003.
- [27] S.M. An, B.S. Kim, H.Y. Lee, C.H. Kim, C.Y. Yi, J.H. Eum, J.H. Woo, Three-dimensional point cloud based sky view factor analysis in complex urban settings, *International Journal of Climatology* 34 (2014) 2685–2701.
- [28] J.L. Torres, A. García, M. De Blas, A. De Francisco, Calculation of the horizon brightness irradiance in the model of Perez using the unit-sphere method, *Renewable Energy* 33 (2008) 148–153.
- [29] A. Márquez-García, M. Varo-Martínez, R. López-Luque, *Solar Energy in Urban Environments*, LAP Lambert Academic Publishing, 2013.
- [30] C. Ratti, P. Richens, Raster analysis of urban form, *Environment and Planning B: Planning and Design* 31 (2004) 297–309.
- [31] L. Chapman, J.E. Thorne, A.V. Bradley, Rapid determination of canyon geometry parameters for use in surface radiation budgets, *Theoretical and Applied Climatology* 69 (2001) 81–89.
- [32] A. Matzarakis, O. Matuschek, Sky view factor as a parameter in applied climatology—Rapid estimation by the SkyHelios model, *Meteorologische Zeitschrift* 20 (2011) 39–45.

- [33] A. Gharakhani Siraki, Pragases Pillay, Study of optimum tilt angles for solar panels in different latitudes for urban applications, *Solar Energy* 86 (2012) 1920–1928.
- [34] P. Redweik, C. Catita, M. Brito, Solar energy potential on roofs and facades in an urban landscape, *Solar Energy* 97 (2013) 332–341.
- [35] E. Ramírez, W.C. Pujols, F.J. Casares, J. Ramírez-Faz, R. López-Luque, Development of a suitable synthetic projection to simultaneously study solar exposure and natural lighting in building windows, *Energy and Buildings* 65 (2013) 391–397.
- [36] P. Moon, D.E. Spencer, Illumination from a non-uniform sky, *Transactions of the Illuminating Engineering Society, London* 37 (1947) 707.
- [37] C. Gueymard, An anisotropic solar irradiance model for tilted surfaces and its comparison with selected engineering algorithms, *Solar Energy* 38 (1987) 367–386.

7. Anexo 3

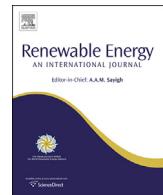
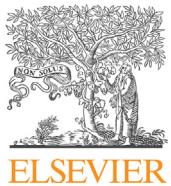
J. RAMÍREZ-FAZ, R. LÓPEZ-LUQUE, F.J. CASARES. Development of synthetic hemispheric projections suitable for assessing the sky view factor on vertical planes. *Renewable Energy*, 2015, 74, pp. 279-286.

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148114004844>

<http://dx.doi.org/10.1016/j.renene.2014.08.025>

Renewable Energy: Factor de impacto: 3,476.

Q1 en el área de ENERGY&FUELS, posición 20/ 89



Development of synthetic hemispheric projections suitable for assessing the sky view factor on vertical planes

J. Ramírez-Faz*, R. López-Luque, F.J. Casares

Research Group of Physics for Renewable Energies and Resources, University of Córdoba, Edificio Albert Einstein, Campus de Rabanales, 14071 Córdoba, Spain

ARTICLE INFO

Article history:

Received 16 April 2014

Accepted 9 August 2014

Available online

Keywords:

Sky view factor

Hemispherical projection

Daylight

ABSTRACT

The solar radiation balance in buildings has a significant impact on their energy needs, as well as on their potential BIPV energy production. It also influences the potentials of daylight, its healthiness and sustainability. Solar radiation models for urban environments require the characterization of the obstruction degree to which each point is subjected due to other buildings, topography, vegetation, etc. This characterization is carried out with the parameter known as sky view factor (SVF). In this paper, we deepen and extend the study of SVF on vertical surfaces that have a high level of obstruction. This paper aims to present a general mathematical method to obtain projection equations in vertical planes, which allow the study of SVF as a surface ratio. It is also proposed an adequate projection for vertical planes under the hypothesis of angular distribution of diffuse radiance based on Moon-Spencer's model.

© 2014 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Incident solar radiation in buildings determines the energetic balance and healthiness of rooms. It also supports heating systems in cold seasons and acts as a natural light source. Excess insolation, however, may have a negative impact due to two main reasons, namely: (i) solar radiation can be a heating load that needs to be balanced with air conditioning; and (ii) it may cause glaring and, as a consequence, daylighting can be uncomfortable. Furthermore, the development of distributed electric energy networks, together with energy generation *in situ* through Building Integrated Photovoltaic (BIPV) systems, make solar radiation on roofs and facades to be a potential resource of the building [1,2]. The study of solar radiation on inclined planes with high levels of obstruction entails an enormous difficulty to assess the solar potential [3,4].

Numerous authors, including Guemard [5]; Hay [6]; Klucher [7]; Muneer [8]; Perez et al. [9], [10]; Reindl et al. [11,12], have developed characterization models of solar irradiance by using equation (1), which describes in a general way the terms of direct, diffuse, and incident reflected irradiances on any given surface. Loutzenhiser et al. [13], and Kapchun et al. [14] have carried out studies to compare these models.

$$I = I_{DN} \cos i + I_{dH} f(\text{SVF}) + I_{GH} \rho \text{GVF} \quad (1)$$

When $|i| > 90^\circ$, $\cos i = 0$

$$\text{SVF} = \frac{I_{d\beta}}{I_{dH}} \quad (2)$$

Shading studies based on the astronomical movement of the sun allow the characterization of the obstructions on the direct component of irradiance. In order to obtain the characterization of the diffuse component, the SVF parameter is defined as the diffuse irradiance percentage impinging on an obstructed, inclined plane versus a horizontal plane with no obstructions equation (2).

The value of SVF on inclined planes with no obstructions depends on orientation and inclination. Noorian et al. [15] compare the predictive power of twelve models whose main differences lie in the treatment of diffuse radiation, as well as the expressions considered for SVF. They reported the accuracy of the models measured with the relative mean bias errors (MBE) that are comprised in the interval of percentages (-38; 40). They found, however, that it was impossible to organize these models according to the function of their predictive quality due to the fact that the results depend on the orientation and inclination of the studied surface.

equation (2) shows that SVF depends on the angular distribution of diffuse radiance. As a consequence, the effect of anisotropy of the sky radiance distribution has also an influence on the value to be

* Corresponding author. Tel.: +34 957218474; fax: +34 957212086.

E-mail address: jramirez@uco.es (J. Ramírez-Faz).

Glossary	
$\text{abs}(x)$	absolute value function
b	parameter in Muneer's equation depending on the sky anisotropy degree
C	general physical magnitude calculated by spatial integration
D	integration domain corresponding to the open visible sky
D_p	transformed domain
f_s	surface occupied by the visible sky versus total area, both measured in the proposed projection
GVF	Ground View Factor
i	angle of incidence of sun's rays on the inclined plane
I	global irradiance on tilted planes
I_{dH}	diffuse irradiance on the horizontal plane
$I_{d\beta}$	diffuse irradiance on the tilted plane
I_{DN}	direct normal irradiance
I_{GH}	horizontal global irradiance
r	radius polar coordinate for the system considered in the transformed plane
$R(\chi, \gamma)$	radiance in point P
R_z	radiance in zenith of the sky vault
SVF	sky view factor
$\alpha(\phi, \theta)$	Generic function
γ	azimuth angle
η	dummy variable of integration
θ	angular coordinate of the considered spherical system
μ	dummy variable of integration
ξ	angular polar coordinate for the system considered in the transformed plane
ρ	albedo
φ	angular coordinate of the considered spherical system
χ	zenith angle
Ω	solid angle

considered for SVF on a plane, even if the sky is seen without obstructions and the plane is tilted. Reviews carried out by Chen et al. [16], and Kapchun [14] show that the isotropic distribution of radiance is the most widely used very likely because it is easy to use although isotropy should be only suitable for modeling the diffuse radiation by cloudy sky. Nusselt [17], Oke [18], Johnson and Watson [19], Steyn [20], Hay [21], and Holmer et al. [22] propose methodologies to determine SVF based on the isotropic model of radiance distribution.

The most complete studies highlight the interdependence between inclination, orientation, angle distribution of the sky vault radiance and the obstruction profile to calculate SVF. Regarding all these factors, Kastendeuch [23] proposed the discretization in visible triangles of the sky vault in order to calculate SVF. Tsangrassoulis et al. [24] suggested a method based on Monte Carlo simulation to assess both anisotropy, and windows orientation and inclination effects on SVF. Quaschning et al. [25], however, consider that the differences between isotropic and anisotropic models can be neglected when there is shading of the direct irradiance. Other authors, such as Nguyen et al. [26] or Erdélyi et al. [27], propose models where SVF is calculated on horizontal surfaces, and affected by a corrector value due to inclination independent on obstructions. Ivanova S.M [28]. considers Muneer's angle distribution of background radiance [29] to be the most adequate. T. Maor et al. [30] and Kapchun [14] apply an isotropic models to calculate irradiance on inclined planes by using SVF values based on the isotropic models.

As mathematical techniques to assess view factors, Modest [31] points out direct integration, statistical simulation based on the technique of Monte Carlo simulation and special methods. Among these special methods, we can highlight the algebraic methods (as they use symmetries, reciprocity, as well as other geometric properties of view factors) or the method of crossed strings in cylindrical surfaces of infinite length. We can also draw attention to the method of the unit sphere, which is remarkably useful when we have a radiative exchange between an infinitesimal area and a finite area. Thanks to Nusselt's analogy [17], this method allows a geometric interpretation, entailing a mathematical basis for the determination of SVF as a relation between the sky surface on an orthogonal projection versus the complete surface of the orthogonal chart. Torres et al. [32] show the usefulness of this method to determine shape factors. Souza et al. [33], despite being focused on the graphic study to obtain SVF, only show the orthogonal projection as a lateral result without considering its metric property.

Considering this property, Márquez García et al. [34] propose an estimation method for SVF. They consider a set of rays emerging whose unit vectors are orthogonally projected on a regular chart and, thus, the authors demonstrate that SVF can be correctly estimated as the ratio of rays that are non-incident neither on the floor nor on the obstructions. Conceptually, the addresses used coincide with those described by Ratti and Richens [35] in their visibility method.

The review of the literature presented to this point refers to the problem of obtaining the SVF coefficient and its interrelation with the anisotropy in the angular distribution of diffuse irradiance. An analogous problem arises in the study of illuminance on the inclined plane produced by daylight. Therefore, Tregenza [36], Li and col [37] work on an illuminance model on the inclined plane, which shows a parallelism with equation (1). There have been multiple efforts to describe luminance angular distribution of the sky vault [38,47], and its impact on illuminance inside buildings [39]. The Sky Component (SC), defined as the fraction of the illuminance derived from exposition of a portion of the sky vault versus the horizontal illuminance on non-obstructed inclined plane, entails that this parameter is analogous in its definition to SVF. On the one hand, the determination of SC on horizontal planes under the hypothesis of sky luminance distributed according to model adopted by the International Commission on Illuminance (CIE) for overcast sky – CIE-overcast sky model – has been studied with integral methods by Acosta and col [46]. On the other hand, Cheung and Chung [40] have deeply studied it on vertical planes (VSC). For this purpose, the authors recur to the orthogonal projection of the unit sphere. Kitler y Darula [41] propose a simplified method to study VSC on vertical surfaces according to the meridians method, which consists of considering vertical bands of the sky sphere as constant luminance sectors. Li et al. [42,37], use a segmentation of the sky vault into 145 sectors. Considering a constant luminance for each sector and quantifying the visible sectors from the vertical surface, illuminance coming directly from the sky is determined. In this model, the authors consider the 15 standard models adopted by the CIE.

Other methods used in the studies of natural lighting, like those based on the models by Longmore [43] or Tregenza [36], or on the improved model by Tregenza [44], require the use of model VSC coefficients, as well as the fraction of illuminance derived from the reflection from obstructions or from the ground. In this last case, it is frequent the hypothesis of isotropy in the reflected radiation, so the unit sphere method is used for the determination of the illuminance fraction reflected [45].

Even though the unit sphere method and thus orthogonal projection is the only one with characteristics that are mathematically related to SVF or SC, numerous authors defend the use of other hemispheric projections of the sky vault, namely: stereographic, Lambertian, polar and cylindrical. Here we include the main references in literature:

- Stereographic projection. This type of projection preserves angular distances. The plane representation of 3D circumferences included in the 3D sphere is transformed into 2D circumferences. Pleigel [48] developed the globoscope, an optical instrument for obtaining stereographic images directly from the reflection of the sky vault in a parabolic mirror. This projection is widely used in both Architecture and the field of graphic description of obstruction profiles. Ivanova S.M. [28], Teller et al. [49], and Souza et al. [33] use it only as a means of representing graphically the existent obstructions. An et al. [50] use a definition where they assign metric properties to SVF, as they consider SVF as the ratio of non-obstructed sky area in the stereographic projection versus the projected area in the semi-vault.
- Lambert projection or equal-area hemispherical. In this projection, the solid angles are proportional to the projected surfaces. This is the most adequate projection under the hypothesis of authors such as Rakovec and Zaksek [51], and Tian et al. [52] as they define SVF as the fraction of solid angle with which the sky vault is seen versus the solid angle of a non-obstructed vault (2π steroradian).
- Polar projection. The distance from every 2D point representation to the center of the image is proportional to the zenith angle of the point φ . Ideally, fisheye lenses produce polar projections. Theoretically, this is the projection considered to introduce metric parameters in hemispheric all-sky cameras photographs, as well as to develop methods such as Johnson and Watson [19], Steyn and Hay [20], Holmer et al. [22], and Chapman et al. [53]. Matzarakis and Matuschek [54] follow Rayman's model, where SVF is estimated as the area percentage on the polar chart.
- Cylindrical projection. This projection appears in the form of rectangular chart. The horizontal axis shows the azimuth of sky elements, while the vertical axis represents the elevation. Despite lacking of metric features, Gharakhani and Pragasen [55] use the cylindrical projection as an SVF reference chart. Redweik et al. [56] suggest a modification in Ratti and Richens' method [35] based on this chart for the calculation of SVF on horizontal surfaces [35]. This calculation method for SVF gives equal weight to each surface portion of the cylindrical chart, so that authors suggest that this method can also be used for vertical surfaces.

This paper presents a family of projections that permits the representation of the visible sky semi-vault from a vertical surface. This projection presents metric features that are directly related to equation (3), concerning the radiance angular distribution of Moon-Spencer's an isotropic model [57]. The radiance distribution given by equation (3) appears to be symmetrical with respect to the zenith, while parameter b shows the degree of anisotropy ($b = 0$ refers to isotropy; $b \rightarrow \infty$ refers to the maximum degree of anisotropy). We call them MS_b projections. From a practical point of view, this collection of projections is a step forward in the way started by Ivanova S.M. [28], due to the fact that it allows the determination of the obstructive potential in the horizontal plane of complex surfaces.

$$R(\chi, \gamma) = R_Z \frac{1 + b \cos \chi}{1 + b} \quad (3)$$

Firstly, and as a previous stage, it is developed and shown the general mathematical method to obtain the equations of hemispherical projections derived from any angular distribution of radiance.

As a particularly interesting case, we consider that the projection conforms $MS_{b=2}$, as equation (3) with $b = 2$ corresponds with the CIE-overcast standard model to measure angular distribution of the luminance. Furthermore, the results published by Gueymard [5] showed a high similarity between the models of radiance and luminance distributions, as well as the azimuthal independence. As a consequence, it is confirmed that the projection $MS_{b=2}$ would be the most adequate to study the vertical sky component (VSC). Littlefair [58] defines this parameter as 'Ratio of that part of illuminance, at a point on a given vertical plane that is received directly from a CIE standard overcast sky'. Consequently VSC does not include the illuminance component derived from reflection, and it is calculated for vertical planes that are generally parallel and exterior to the window studied.

2. Methodology

2.1. Ramírez's mathematical method to develop hemispheric projections for vertical surfaces

In the first part of this section, we present the mathematical method for obtaining graphically physical magnitudes C satisfying equation (4):

$$C = \iint_D \alpha(\varphi, \theta) d\varphi d\theta \quad (4)$$

(e.g. the solid angle corresponding to a visible domain of a sphere is determined by $\Omega = \int_D \sin \varphi d\varphi d\theta$; variable Ω sets $\alpha(\varphi, \theta) = \sin \varphi$).

For this purpose, we suggest the need of transformation of variables:

$$r = r(\varphi, \theta) \quad (5)$$

$$\xi = \xi(\varphi, \theta) \quad (6)$$

So that the property can be considered as a surface in the plane of polar coordinates (r, ξ)

$$\iint_D \alpha(\varphi, \theta) d\varphi d\theta = \iint_{D_p} r dr d\xi \quad (7)$$

Fig. 1 represents the required transformation from two spherical coordinates (φ, θ) into a transformed plane, where the polar coordinates (r, ξ) are considered.

Mathematically, equation (7) entails a change of variables in a double integral, so that integrands must satisfy Jacobi's condition, as shown in equation (8):

$$\alpha(\varphi, \theta) = r \begin{vmatrix} \frac{\delta r}{\delta \varphi} & \frac{\delta r}{\delta \theta} \\ \frac{\delta \xi}{\delta \varphi} & \frac{\delta \xi}{\delta \theta} \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\frac{\delta r^2}{\delta \varphi} \frac{\delta \xi}{\delta \theta} - \frac{\delta r^2}{\delta \theta} \frac{\delta \xi}{\delta \varphi} = 2\alpha(\varphi, \theta) \quad (9)$$

There is no single solution for equation (8). Thus, restrictions may be imposed in order to get better possibilities for later graphic representations. The first restriction comes from the limitation of the global space. In this case, the transformed representation of

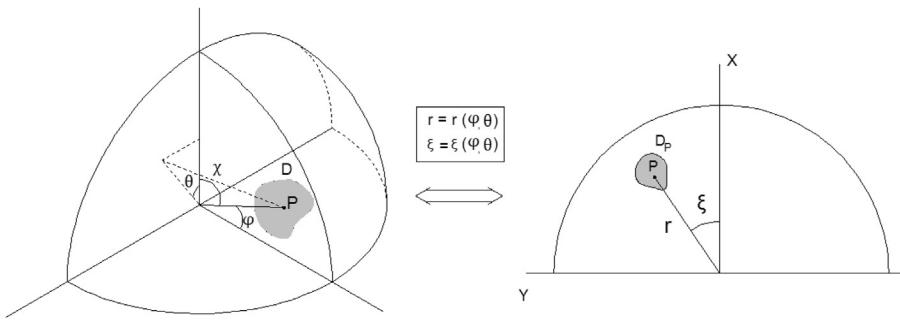


Fig. 1. Geometric principle of the proposed transformation.

points belonging to a quarter of the sphere (Fig. 1, left) must lie inside a semicircle of the transformed space (Fig. 1, right). A second restriction is also considered: the iso- φ lines should be transformed into semicircles. This second restriction sets r independent of θ .

$$r = r(\varphi) \rightarrow \frac{\delta r^2}{\delta \theta} = 0 \quad (10)$$

To define a solution for the equations (5) and (6), which is coherent with equations (9) and (10), we consider the equivalence between the value of the attribute of a given enclosure in the sky vault and the projected plane (Fig. 2).

The value of the attribute is given by equations (11) and (12) both in the sky vault and in the transformation, respectively.

$$C = \int_0^\varphi \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha(\mu, \eta) d\eta \right] d\mu \quad (11)$$

$$C = \text{Transformed area} = \frac{\pi}{2} r^2 \quad (12)$$

If we match equations (11) and (12), we obtain the function of transformation $r(\varphi)$ equation (13).

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^\varphi \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha(\mu, \eta) d\eta \right] d\mu} \quad (13)$$

Substituting equation (10) in (9)

$$\frac{\delta r^2}{\delta \varphi} \frac{\delta \xi}{\delta \theta} = 2\alpha(\varphi, \theta) \quad (14)$$

From equation (13) results.

$$\frac{\delta r^2}{\delta \varphi} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha(\varphi, \eta) d\eta \quad (15)$$

And equation (14) can be written.

$$\frac{\delta \xi}{\delta \theta} = \pi \frac{\alpha(\varphi, \theta)}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha(\varphi, \eta) d\eta} \quad (16)$$

and integrating, we get the second function of transformation equation (6)

$$\xi(\varphi, \theta) = \pi \frac{\int_0^\theta \alpha(\varphi, \eta) d\eta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha(\varphi, \eta) d\eta} \quad (17)$$

2.2. Hemispheric circle projection on vertical plane derived from Moon-Spencer's equation

When equations (13) and (17) are obtained, we achieve a method that can be generally applied to magnitudes satisfying equation (4). For instance, in this case we apply the method to obtain the irradiances in CIE-overcast skies given by Moon-Spencer's method:

The irradiance provided in the vertical plane (Fig. 1, left) by a surface differential on point P will be given by:

$$dI = R(\varphi, \theta) d\Omega \cos \varphi \quad (18)$$

Substituting $R(\varphi, \theta)$ with respect to equation (3) we obtain:

$$dI = R_Z \frac{1 + b \cos \chi}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta \quad (19)$$

Considering in Fig. 1 that:

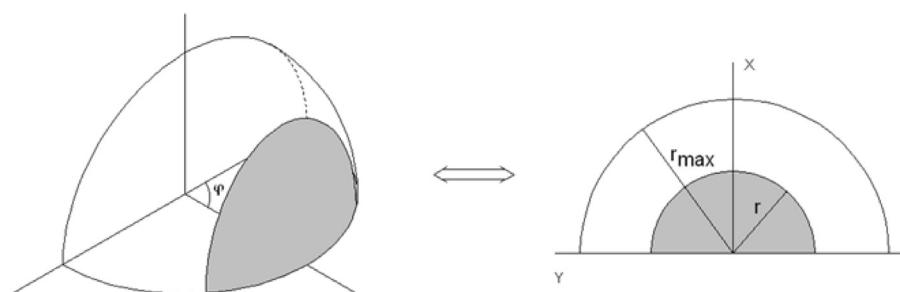


Fig. 2. Considered enclosure in the sky vault and the transformed projection.

$$\cos \chi = \sin \varphi \cos \theta \quad (20)$$

Integrating:

$$I = \iint R_Z \frac{1 + b \sin \varphi \cos \theta}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta \quad (21)$$

In this case, we can formally match the function equations (21) and (4), considering:

$$\alpha(\varphi, \theta) = R_Z \frac{1 + b \sin \varphi \cos \theta}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi \quad (22)$$

Substituting in equation (13):

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^\varphi \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_Z \frac{1 + b \sin \mu \cos \eta}{1 + b} \cos \mu \sin \mu d\eta \right] d\mu} \quad (23)$$

Integrating:

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{R_Z}{\pi}} \sqrt{\frac{3\pi + 4b \sin \varphi \sin^2 \varphi}{3(1+b)}} \quad (24)$$

From (17), it is deduced:

$$\begin{aligned} \xi(\varphi, \theta) &= \pi \frac{\int_0^\theta R_Z \frac{1 + b \sin \varphi \cos \eta}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi d\eta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_Z \frac{1 + b \sin \varphi \cos \eta}{1 + b} \cos \varphi \sin \varphi d\eta} \\ &= \pi \frac{\theta + b \sin \varphi \sin \theta}{\pi + 2b \sin \varphi} \end{aligned} \quad (25)$$

equations (24) and (25) are the solution to equations (5) and (6) according to the imposed conditions. Fig. 4 shows the iso- φ and iso- θ projected lines for different projections depending on b .

equation (24) can be simplified considering:

$$r_{max} = r(\varphi = \pi/2) = \sqrt{\frac{R_Z}{\pi}} \sqrt{\frac{3\pi + 4b}{3(1+b)}} \quad (26)$$

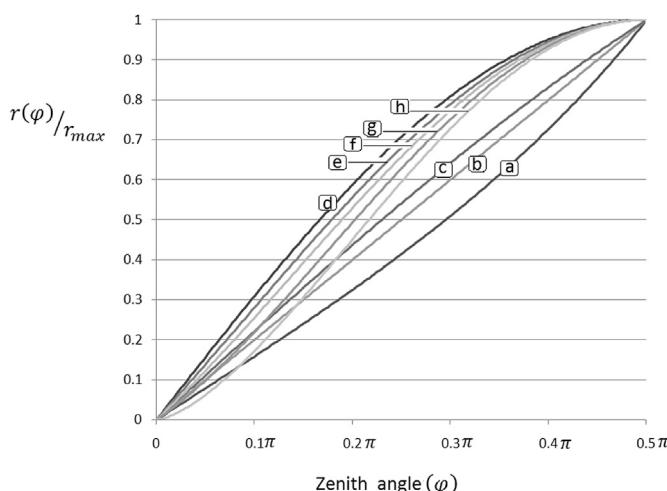


Fig. 3. Representation of the displacement $r(\varphi)/r_{max}$ with respect to the zenith angle in different projections: stereographic (a), polar (b), Lambert (c), orthogonal or $MS_b = 0$ (d), $MS_b = 0.8$ (e), $MS_b = 2$ (f), $MS_b = 6$ (g), y $MS_b \rightarrow \infty$ (h).

According to equation (7), it is easy to check the expression equation (27):

$$I_{dv} = \frac{\pi}{2} r_{max}^2 = R_Z \frac{3\pi + 4b}{6(1+b)} \quad (27)$$

Having equation (28) when substituting R_Z in equation (24).

$$r(\varphi) = r_{max} \sqrt{\frac{3\pi + 4b \sin \varphi \sin^2 \varphi}{3\pi + 4b}} \quad (28)$$

Consequently, SVF will be:

$$SVF = \frac{\iint_{D_p} rdrd\xi}{I_{dH}} = \frac{I_{dv}}{I_{dH}} \frac{\int_{D_p} rdrd\xi}{\frac{\pi}{2} r_{max}^2} \quad (29)$$

Considering:

$$I_{dH} = \frac{\pi R_Z}{3} \frac{3+2b}{1+b} \quad (30)$$

If we call f_s the fraction of the surface occupied by the unobstructed sky vault in the proposed projection equation (31), we have equation (32)

$$f_s = \frac{\iint_{D_p} rdrd\xi}{\frac{\pi}{2} r_{max}^2} \quad (31)$$

$$SVF = \frac{3\pi + 4b}{2\pi(3+2b)} f_s \quad (32)$$

equation (32) shows the proportionality between SVF on an obstructed vertical surface and surface fraction f_s . It is easy to check that the constant of proportionality is located between the values 0.5 (when $b = 0$, isotropic sky) and 0.31 ($b \rightarrow \infty$).

The CIE standard overcast model, calculation basis for VSC, considers $b = 2$, thus we can substitute in equation (32), and obtaining equation (33):

$$VSC = SVF_{b=2} = 0.39 f_s \quad (33)$$

Fig. 3 shows the comparison between the displacements assigned to each angle φ following the considered projection – equation (23) – and those assigned by the stereographic, polar, Lambert and orthogonal projections. By definition, the orthogonal projection coincides with Moon-Spencer's projection when $b = 0$.

2.3. Practical application

In this paper, we deepen in the $MS_{b=2}$ projection represented in Fig. 4c, considering $R_Z = 120 \text{ W/m}^2$, with a practical application. For this reason, we study the visual vault of a window located at Rabanales Campus, University of Córdoba (Longitude $4^{\circ}43'$ W; Latitude $37^{\circ}55'$ N). The window is south oriented (azimuth = 0° S), and it is affected by the obstructions of another building and the canopy of a garden. The capture of the hemispheric image is carried out by a device named Light Ray Tracing and Visioning (LRTV), and following the methodology described by Ramírez [59]. This device, shown in Fig. 5a, takes photos of the sky vault reflection on a spherical mirror by using a pinhole camera (see Fig. 5b). The geometric analysis of the obtained image combined with image treatment allows the assessment of values such as the color of each pixel or detail of the sky vault, and the relocation on the $MS_{b=2}$ chart (see Fig. 4c), and so obtaining Fig. 6. Applying equation (26)

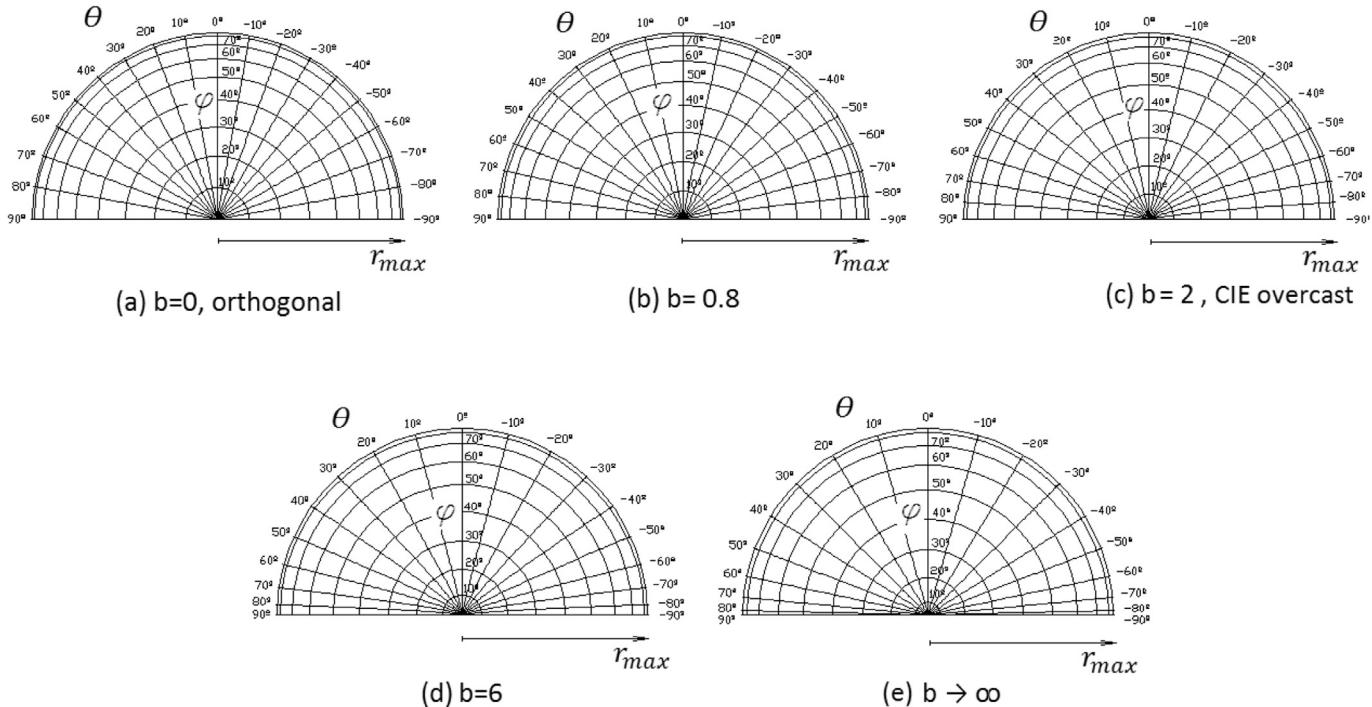


Fig. 4. Plane representation of MS_b vertical charts.

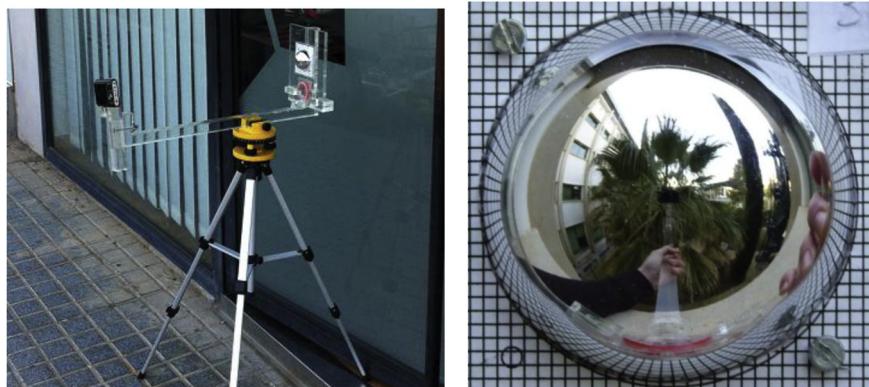


Fig. 5. Raw image taken by LRTV.

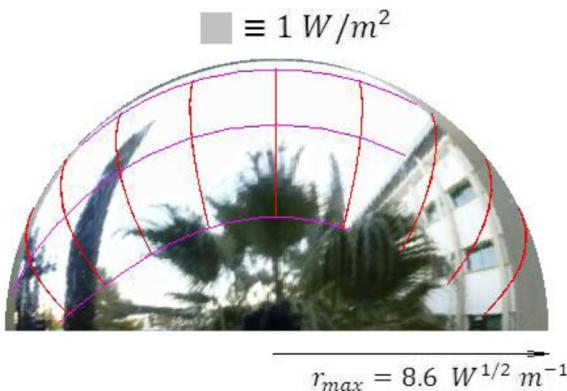


Fig. 6. $MS_{b=2}$ projection of the views of the studied window with surface equivalence for irradiance.

we obtain $r_{\max} = 8.6 \text{ W}^{1/2} \text{ m}^{-1}$. A square of side $1 \text{ W}^{1/2} \text{ m}^{-1}$ and surface 1 W/m^2 has been represented. The total area of unobstructed sky has been assessed in the transformed space (Fig. 6), thus having $I_{d\beta} = 46.46 \text{ W/m}^2$. Considering that the potential irradiance on the vertical plane is the total surface of the transformed plane ($\pi/2r_{\max}^2$), it results in $I_{dV} = 116.16 \text{ W/m}^2$. The difference ($116.16 - 46.46 = 69.7 \text{ W/m}^2$) is the obstructed irradiance. A more detailed description of the obstructed irradiance can be carried out by determining the surfaces occupied by every building and tree.

We have also included in the image $MS_{b=2}$ of Fig. 6 the sun trajectories in different solstices and equinoxes, as well as lines of the sun position at each hour have also been added.

Moreover, Fig. 7 shows the differences between the orthogonal projection and $MS_{b=2}$ projection proposed here. Therefore, in order to discriminate between the sky and the obstruction due to vegetation, we filtered the image by comparing each pixel color to the discrimination threshold value. We calculated the value of SVF in Fig. 7a as the ratio of number of pixels classified as sky (in white)

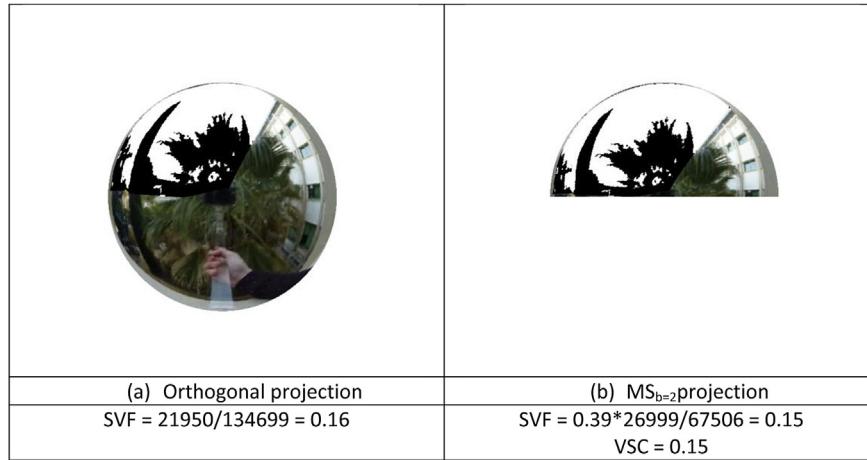


Fig. 7. Comparison of orthogonal projection versus $MS_{b=2}$ both for the example under consideration.

versus the numbers of pixels of the circular chart. In Fig. 7b, we used expression equation (29) to represent $MS_{b=2}$ and f_s is similarly calculated as ratio of number of pixels.

3. Results and discussion.

We have obtained the family of MS_b hemispheric projections for the sky vault representation proportionally to Moon-Spencer's angular distribution. Fig. 3 allows the comparison between the different projections obtained, as well as between the most commonly used projections in literature. In interpreting this figure it is deduced that, considering an isotropic distribution ($b = 0$), when b is increased, the central area of MS_b charts ($r < 0.4 r_{\max}$) tends to be closer to Lambert, polar and stereographic projections. In the perimeter area of the charts ($r > 0.7 r_{\max}$) representations tend to be closer to the orthogonal projection. Fig. 4, however, shows that as anisotropy parameter b grows, the zenith regions with a low value of $\text{abs}(\theta)$ get more weight, while the regions closer to the horizon ($\text{abs}(\theta) \rightarrow \pi/2$) lose it.

The standardization of CIE-Overcast as a distribution pattern of luminances entails that the sky projection shown in Fig. 4c to be really useful for natural lighting studies. In this case $b = 2$ and on $VSC = SVF$, i.e.: the Vertical Sky Component [46] matches with the sky view factor that can be determined on the base of the proposed projection and equation (33).

4. Conclusions

equations (13) and (17) allow the unification of the methods to obtain suitable hemispheric projections, where the surface of each represented object is equal to any type of physical property C (equation (4)).

With the proposed projections, the mathematical integration of equation (4) is simplified. In fact, it is reduced to two steps: i) the graphical representation of the unobstructed sky in the corresponding projection, and ii) the determination of the area in the transformed space. The availability of most graphical software for counting pixels helps in the determination of surfaces. This function is especially relevant in the cases in which the limits of unobstructed sky are difficult to describe (e.g. obstructions produced by vegetation). In these cases, delimitation can be done by filtering the image and selecting the pixels with higher brightness levels.

It is widely known that graphic representations of sky variables on a plane chart also allow the correct understanding of obstruction

problems, as well as the building decision making processes for windows (Teller et al. [49], Ramírez-Faz and López-Luque [59]). As a consequence, we consider that the family of MS_b hemispheric projections may become a valuable tool for designing windows in obstructed environments.

References

- [1] Catita C, Redweik P, Pereira J, Brito MC. Extending solar potential analysis in buildings to vertical facades. *Comput Geosciences* 2014;66:1–12.
- [2] Mardaljevic J, Rylatt M. Irradiation mapping of complex urban environments: an image-based approach. *Energy Build* 2003;35:27–35.
- [3] Etzion Y. A general expression for solar rights determination. *Energy Build* 1988;12:149–54.
- [4] Ralph Knowles. The solar envelope: its meaning for energy and buildings. *Energy Build* 2003;35:15–25.
- [5] Gueymard C. An anisotropic solar irradiance model for tilted surfaces and its comparison with selected engineering algorithms. *Sol Energy* 1987;38: 367–86.
- [6] Hay JE. Calculating solar radiation for inclined surfaces: practical approaches. *Renew Energy* 1993;3:373–80.
- [7] Klucher TM. Evaluation of models to predict insolation on tilted surfaces. *Sol Energy* 1979;23:111–4.
- [8] Muneer T. Solar radiation and daylight models for the energy efficient design of buildings. Oxford: Architectural Press; 1997.
- [9] Perez R, Seals R, Ineichen P, Scott J, Stewart R, Menicucci D. A new simplified version of the Perez diffuse irradiance model for tilted surfaces. *Sol Energy* 1987;39:221–32.
- [10] Perez R, Ineichen P, Seals R, Michalsky J, Stewart R. Modeling daylight availability and irradiance components from direct and global irradiance. *Sol Energy* 1990;44:271–89.
- [11] Reindl DT, Beckmann WA, Duffie JA. Diffuse fraction correlations. *Sol Energy* 1990;45:1–7.
- [12] Reindl DT, Beckmann WA, Duffie JA. Evaluation of hourly tilted surface radiation models. *Sol Energy* 1990;45:9–17.
- [13] Loutzenhiser GP, Manz H, Felsmann C, Strachan PA, Frank T, Maxwell GM. Empirical validation of models to compute solar irradiance on inclined surfaces for building energy simulation. *Sol Energy* 2007;81:254–67.
- [14] Yoon Kapchun, Gyeong Yun, Jongug Jeon, Kang Soo Kim. Evaluation of hourly solar radiation on inclined surfaces at Seoul by photographic method. *Sol Energy* 2014;100:203–16.
- [15] Noorian AM, Moradi I, Kamali GA. Evaluation of 12 models to estimate hourly diffuse irradiation on inclined surfaces. *Renew Energy* 2008;33:1406–12.
- [16] Chen Liang, Ng Edward, An Xipo, Ren Chao, Lee Max, Wang Una, et al. Sky view factor analysis of street canyons and its implications for daytime intra-urban air temperature differentials in high-rise, high-density urban areas of Hong Kong: a GIS-based simulation approach. *Int J Climatol* 2012;32:121–36.
- [17] Nusselt W. Graphische Bestimmung des Winkelverhältnisses bei der Warmerstrahlung. *Z Des Vereins Dtsch Ingenieure* 1928;72:673.
- [18] Oke TR. Canyon geometry and the nocturnal urban heat island: comparison of scale model and field observations. *J Climatol* 1981;1:237–54.
- [19] Johnson GT, Watson ID. The determination of view-factors in urban canyons. *J Appl Clim Meteorol* 1984;23:329–35.
- [20] Steyn DG. The calculation of view-factors from fisheye-lens photograph: research note. *J Atmos Ocean Sci* 1980;18:254–8.

- [21] Hay JE, Watson ID, Johnson GT. The determination of sky-view factors in urban environments using video imagery. *J Atmos Ocean Technol* 1986;3: 759–64.
- [22] Holmer B, Postgard U, Eriksson M. Sky view factors in canopies calculated with IDRISI. *Theor Appl Climatol* 2001;68:33–40.
- [23] Kastendeuch P. A method to estimate sky view factors from digital elevation models. *Int J Climatol* 2013;33:1574–8.
- [24] Tsangrassoulis A, Niachou K, Papakostantinou N, Pavlou C, Santamouris M. A numerical method to estimate time-varying values of diffuse irradiance on surfaces in complex geometrical environments. *Renew Energy* 2002;27: 427–39.
- [25] Quaschning V, Hanitsch R. Irradiance calculation on shaded surfaces. *Sol Energy* 1998;62:369–75.
- [26] Nguyen H, Pearce J. Incorporating shading losses in solar photovoltaic potential assessment at the municipal scale. *Sol Energy* 2012;86:1245–60.
- [27] Erdélyi R, Wang Y, Guo W, Hanna E, Colantuono G. Three-dimensional solar radiation model (SORAM) and its application to 3-D urban planning. *Sol Energy* 2014;101:63–73.
- [28] Ivanova SM. Estimation of background diffuse irradiance on orthogonalsurfaces under partially obstructed anisotropic sky. Part I – Vert surfaces. *Sol Energy* 2013;95:376–91. Part II – Horizontal surfaces. *Solar Energy* 100, 2014, pp. 234–250.
- [29] Muneer T. Solar radiation and daylight models. Elsevier Butterworth Heinemann; 2004.
- [30] Maor T, Appelbaum J. View factors of photovoltaic collector systems. *Sol Energy* 2012;86:1701–8.
- [31] Modest MF. Radiative heat transfer. 2nd ed. San Diego, CA: Academic Press; 2003.
- [32] Torres JL, García A, De Blas M, De Francisco A. Calculation of the horizon brightness irradiance in the model of Perez using the unit-sphere method. *Renew Energy* 2008;33:148–53.
- [33] Souza L, Rodrigues Daniel S, Mendes José FG. Sky view factors estimation using a 3d-GIS extension. In: Eighth international IBPSA Conference; 2003 [Eindhoven (Netherlands)].
- [34] Márquez-García A, Varo-Martínez M, López-Luque R. Solar energy in urban environments. LAP Lambert Academic Publishing; 2013.
- [35] Ratti C, Richens P. Raster analysis of urban form. *Environ Plan B: Plan Des* 2004;31:297–309.
- [36] Tregenza PR. Mean daylight illuminance in rooms facing sunlit streets. *Build Environ* 1995;30:83–9.
- [37] Li DHW, Chau NTC, Wan KKW. Predicting daylight illuminance and solar irradiance on vertical surfaces based on classified standard skies. *Energy* 2013;53:252–8.
- [38] Kittler R, Darula S, Perez R. A set of standard skies. Final report of project us-sk 92 052. Poligrafia SAV; 1998.
- [39] Li DHW, Cheung GH, Lau CCS. A simplified procedure for determining indoor daylight illuminance using daylight coefficient concept. *Build Environ* 2006;41:578–89.
- [40] Cheung HD, Chung TM. Calculation of the vertical daylight factor on window facades in a dense urban environment. *Archit Sci Rev* 2005;48(1):81–91.
- [41] Kittler R, Darula S. The method of aperture meridians: a simple calculation tool for applying the ISO/CIE standard general sky. *Light Res Technol* 2006;38(2):109–22.
- [42] Li DHW, Cheung GH, Cheung KL, Lam JC. Simple method for determining daylight illuminance in a heavily obstructed environment. *Build Environ* 2009;44:1074–80.
- [43] Tregenza PR. Modification of the split-flux formulae for mean daylight factor and internal reflected component with large external obstructions. *Light Res Technol* 1989;21(3):125–8.
- [44] Li DHW, Cheung GH, Cheung KL, Lam TNT. Determination of vertical daylight illuminance under non-overcast sky conditions. *Build Environ* 2010;45:498–508.
- [45] Chung T-M, Cheung H-D. Assessing daylighting performance of buildings using orthographically projected area of obstructions. *J Light & Vis Env* 30 2006;2:74–80.
- [46] Acosta I, Navarro J, Sendra JJ. Predictive method of the sky component in a courtyard under overcast sky conditions. *Sol Energy* 2013;89:89–99.
- [47] Li DHW, Chau TC, Wan KKW. A review of the CIE general sky classification approaches. *Renew Sustain Energy Rev* 2014;31:563–74.
- [48] Jenness JR. The globoscope. *Sol Energy* 1977;19:361–3.
- [49] Teller J, Azar S. Townscope II. A computer system to support solar access decision making. *Sol Energy* 2001;70:187–200.
- [50] An SM, Kim BS, Lee HY, Kim CH, Yi CY, Eumd JH, et al. Three-dimensional point cloud based sky view factor analysis in complex urban settings. *Int J Climatol* 2014;34:2685–701.
- [51] Rakovec J, Zakska K. On the proper analytical expression for the sky-view factor and the diffuse irradiation of a slope for an isotropic sky. *Renew Energy* 2012;37:440–4.
- [52] Tian YQ, Davies-Colley RJ, Gonga P, Thorrolf BW. Estimating solar radiation on slopes of arbitrary aspect. *Agric For Meteorology* 2001;109:67–74.
- [53] Chapman L, Thorne JE, Bradley AV. Rapid determination of canyon geometry parameters for use in surface radiation budgets. *Theor Appl Climatol* 2001;69: 81–9.
- [54] Matzarakis A, Matuschek O. Sky view factor as a parameter in applied climatology – rapid estimation by the SkyHelios model. *Meteorol Z* 2011;20: 039–45.
- [55] Gharakhani Siraki A, Pragasen Pillay. Study of optimum tilt angles for solar panels in different latitudes for urban applications. *Sol Energy* 2012;86: 1920–8.
- [56] Redweik P, Catita C, Brito M. Solar energy potential on roofs and facades in an urban landscape. *Sol Energy* 2013;97:332–41.
- [57] Moon P, Spencer DE. Illumination from a non-uniform sky. *Trans Illum Eng Soc* 1947;37:707. London.
- [58] Littlefair P. Site layout planning for daylight and sunlight: a guide to good practice. HIS BRE Press; 2011.
- [59] Ramírez-Faz J, Lopez-Luque R. Development of a methodology for quantifying insolation variables in windows and building openings. *Renew Energy* 2012;37:426–33.