



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Programa de doctorado: Ingeniería Agraria, Alimentaria,
Forestal y Desarrollo Rural Sostenible
Departamento de Ingeniería Gráfica y Geomática

Título de la tesis

**MODELO HELIOCÉNTRICO PARA EL CÁLCULO DE LA
POSICIÓN APARENTE DEL SOL BASADO EN LA GEOMETRÍA
PLANA Y EL SISTEMA DIÉDRICO DE PROYECCIÓN**

*Heliocentric method to calculate Sun's path via flat geometry and
multiview projections*

Directores

D. Francisco de Paula Montes Tubío

D.^a María Gloria del Río Cidoncha

Autor de la tesis

D. Martín Antonio Perea Álvarez de Eulate

Fecha depósito tesis en el Idep:

3/04/2018

TITULO: *MODELO HELIOCÉNTRICO PARA EL CÁLCULO DE LA POSICIÓN
APARENTE DEL SOL BASADO EN LA GEOMETRÍA PLANA Y EL
SISTEMA DIÉDRICO DE PROYECCIÓN*

AUTOR: *Martín Antonio Perea Álvarez de Eulate*

© Edita: UCOPress. 2018
Campus de Rabanales
Ctra. Nacional IV, Km. 396 A
14071 Córdoba

[https://www.uco.es/ucopress/index.php/es/
ucopress@uco.es](https://www.uco.es/ucopress/index.php/es/ucopress@uco.es)



TÍTULO DE LA TESIS:

Modelo heliocéntrico para el cálculo de la posición aparente del sol basado en la geometría plana y el sistema diédrico de proyección.

DOCTORANDO:

D. Martín Antonio Perea Álvarez de Eulate.

INFORME RAZONADO DE LOS DIRECTORES DE LA TESIS

Dña. M^a GLORIA DEL RÍO CIDONCHA, Titular de la Universidad de Sevilla. Departamento de Ingeniería Gráfica.

D. FRANCISCO DE PAULA MONTES TUBÍO, Catedrático de la Universidad de Córdoba. Departamento de Ingeniería Gráfica y Geomática.

INFORMAN:

Que la Tesis Doctoral titulada “*Modelo heliocéntrico para el cálculo de la posición aparente del sol basado en la geometría plana y el sistema diédrico de proyección*”, de la cual es autor *D. Martín Antonio Perea Álvarez de Eulate*, ha sido realizada bajo nuestra dirección y cumple todos los requisitos para su publicación y defensa exigidos por la legislación vigente para optar al TÍTULO DE DOCTOR POR LA UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA.

El desarrollo de la tesis ha supuesto un extenso y laborioso trabajo de investigación. Se han estudiado los antecedentes y el estado actual del conocimiento generado por diversos autores que han profundizado en esta materia.

La tesis presenta un método alternativo al análisis del movimiento aparente del Sol mediante el uso exclusivo de la geometría plana y el sistema diédrico de proyección. Es una metodología novedosa por la sencillez de las herramientas usadas que exime a esta disciplina de un aprendizaje exhaustivo de la Astronomía clásica y de la trigonometría esférica. A partir de la resolución gráfica del problema, usando los procedimientos clásicos de la Geometría Descriptiva, se procede a su resolución analítica con sencillas operaciones vectoriales como manera de comprobación.

Este procedimiento es una guía para abordar nuevos retos, un instrumento al servicio de un amplio sector poblacional, dirigido no a sólo técnicos o expertos en Gnomónica sino también a aficionados con conocimientos elementales de geometría plana y diédrica.

El autor no ha querido centrarse únicamente en los aspectos teóricos de su aplicación metodológica, sino que también ha contemplado la aplicación concreta del método con una serie de problemas prácticos que sirven para acreditar su utilidad.

Como indicador de su calidad y una muestra del interés que ha suscitado, la presente tesis ha dado lugar a la publicación de los artículos que se relacionan en las revistas científicas indexadas en la Web of Science (Clarivate analytics) que se indican:

- EJP (European Journal of Physics), editorial IOP Publishing, del Institute of Physics:

Perea-Alvarez de Eulate, Martín; Del Río-Cidoncha, Gloria; Montes-Tubío, Francisco.
Angle between terminator and meridian: flat geometry vs. formulae of solar azimuth and an easy approach to the daylight map.

Article reference: EJP-103471. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aab57e>
(En prensa)

- Nexus Network Journal. Architecture and mathematics, (editorial Springer Link):

Perea-Alvarez de Eulate, Martín; Del Río-Cidoncha, Gloria; Montes-Tubío, Francisco.
Reading errors in sundials with incorrect hour lines. Case of study: the 17th century sundial in Lerma (Spain)."

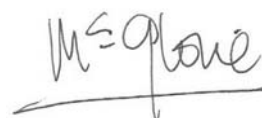
Referencia: NENJ-D-18-00020. (Artículo aceptado para publicación y actualmente en edición por NENJ para ser publicado).

Por todo ello, SE AUTORIZA presentar esta Tesis ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Córdoba, quedando firmado este informe a día 19 de Marzo de 2018.

Los directores:



Dr. Francisco Montes Tubío.



Dra. M^a Gloria del Río Cidoncha

RESUMEN

El objetivo de la presente tesis es doble: en primer lugar, crear un procedimiento alternativo para el cálculo de las expresiones geométricas de elevación y acimut solares mediante la geometría plana y el sistema diédrico de proyección sin el concurso de la trigonometría esférica. Dicho procedimiento se complementará con el desarrollo en paralelo de un sistema deductivo similar basado en el cálculo vectorial. El modelo astronómico elegido será el heliocéntrico, por oposición al más utilizado actualmente, el geocéntrico, basado en la representación de la esfera celeste. Para ello se partirá de una metodología totalmente novedosa y progresiva, con gran profusión de gráficos y figuras explicativas, y utilizando la resolución gráfica previa de los problemas geométricos mediante los procedimientos clásicos de la Geometría Descriptiva, para después proceder a la resolución analítica de aquellos basada en la solución gráfica anterior.

Una vez conseguido el primer objetivo, se presenta de forma ordenada un conjunto de algoritmos necesarios y suficientes para completar las expresiones anteriores que permita al hipotético usuario completar los cálculos mencionados satisfactoriamente. Los procedimientos presentados han sido recopilados a partir de diferentes autores, buscando siempre las fuentes primarias de los mismos, y se complementan con una serie de problemas prácticos que servirán al lector de punto de partida para la elaboración de su propio *software*.

Palabras clave:

Sistema heliocéntrico / sistema diédrico / cálculo vectorial / deducción acimut y elevación solares.

ABSTRACT

The aim of this thesis is twofold: firstly, creating an alternative procedure to derivate the geometric expressions for solar altitude and azimuth by means of flat geometry and the multi-view projection system avoiding the use of spherical trigonometry. This procedure will be completed by a similar deductive system based on vector calculus. The astronomical model will be heliocentric, instead of the most frequently used and known, the geocentric one, based on the celestial sphere. Thus, a new and progressive methodology is shown, with a great number of graphs and explanatory figures. Also, graphic resolution for the geometric problems by means of the classic procedures of the Descriptive Geometry will be prior to the mathematical derivations based on them.

Once the above objective has been achieved, a set of essential and self-sufficient algorithms is arranged in a structured way to complete the previous derived expressions. This will allow the user successfully complete the calculations in its own. The procedures have been compiled from different authors, looking always for their primary sources, and are backed with a series of practical problems that will serve the reader as a starting point for the development of his own software.

Keywords:

Heliocentric system / dihedral system / vector calculus / solar azimuth and elevation deduction.

Dedicatoria

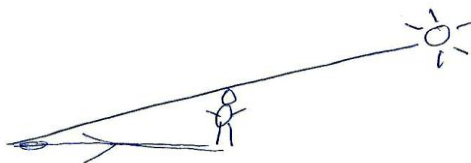
*A Patricia.
Solo a ella.*

In Sneffels Yoculis craterem kem delibat
umbra Scartaris Julii intra calendas descende,
audas viator, et terrestre centrum attinges. Kod
feci. Arne Saknussem.

JULES VERNE,
Voyage au centre de la Terre

AGRADECIMIENTOS

Toda obra científica comienza siempre con un interrogante. En el caso de la presente tesis, este surgió hace mucho tiempo, en mi primera infancia, durante un paseo con mi padre una soleada tarde de invierno. Yo tenía entonces cuatro años y estaba firmemente convencido de que la sombra de cada uno de nosotros era un *alter ego* dotado de conciencia propia cuya misión no era otra que acompañarnos allá donde fuéramos. Por eso me extrañó que aquella tarde mi sombra, por lo general de tamaño más o menos *normal*, se hubiera acrecentado hasta adquirir unas proporciones gigantescas. El esquema con el que mi padre me explicó lo que realmente era la sombra y por qué cambiaba de tamaño se quedó para siempre grabado en mi memoria:



Ese escueto dibujo, como se ve, no es sino una visión simplificada del acimut y la elevación solares, conceptos que, pasado el tiempo, se convertirían para mí en pasatiempo deductivo al principio y, con posterioridad, en el origen de la tesis que ahora se concluye. Por tanto, mi primer agradecimiento ha de ser para mi padre, D. Martín Perea Alonso. El recuerdo de aquella época me obliga igualmente a agradecer su ayuda a aquellos de quienes también aprendí tanto, y cuyo indeleble recuerdo perdura intacto muchos años después de que nos dejaran: mi madre Pilar, mi hermano Miguel...

Regresando a la actualidad, y dentro del ámbito académico, agradezco a mis directores de tesis, los doctores D.^a M.^a Gloria del Río Cidoncha y D. Francisco de Paula Montes Tubío tanto su ayuda como, en especial, su apoyo incondicional a la temática elegida como base de esta obra.

Agradezco especialmente al Director del Real Instituto y Observatorio de la Armada, y coautor del conocido algoritmo PSA para el cálculo de la posición solar, el Capitán de Navío D. Teodoro López Moratalla, su inestimable ayuda y el haberme puesto en contacto con científicos adscritos a la histórica institución que constituye un honor citar como fuente de apoyo, en especial el Teniente de Navío D. Sergio Borrallo Tirado, astrónomo y matemático.

Debo agradecer la exhaustiva, trabajosa y meticulosa labor de corrección lingüística, de forma y de estilo de presentación de la presente tesis llevada a cabo por la doctora en Filología Hispánica D.^a Myriam Gallego Fernández de Aránguiz, cuya intervención sobre el borrador inicial y sus acertadas sugerencias han mejorado sustancialmente la configuración final y la calidad formal de la obra.

También expreso mi agradecimiento a D. Rafael Soler Gayá, experto en gnomónica internacionalmente reconocido y a Mr. Rick Kohrs, programador de aplicaciones para la NASA y miembro del Space Science and Engineering Center de la University of Wisconsin-Madison. Igualmente a D. Alberto Martos Rubio, ex ingeniero técnico de las Estaciones Espaciales de la NASA y ESA en Madrid y D. Juan Castillo del Río, matemático, miembros de la Agrupación Astronómica de Madrid. Agradezco su respuesta a mis consultas a Hr. Jörg Dietrich, investigador en la Universitäts-Sternwarte München, y a Hr. Martin Matysiak, desarrollador de software. M. François Blateyron, autor del conocido programa de diseño de relojes solares Shadows, y Hr. Jürgen Giesen, conocido divulgador de astronomía, también deben figurar en este capítulo de agradecimientos.

Por su apoyo en cuestiones relativas al *software* de edición de textos, expreso mi agradecimiento a D. Enrique Morillo del Río. Igualmente a D. José M.^a Gómez Paredes, en lo relativo al *software* de edición de funciones matemáticas y presentaciones científicas. También a D. Isidro Ladrón de Guevara López, profesor de la Universidad de Málaga, por su revisión de mi artículo sobre la relación angular entre el terminador y el meridiano.

Agradezco la frase recurrente de M.^a del Carmen Fernández de Aránguiz Sanz, cuando viéndome croquizar algún esquema gnomónico, mucho antes de que esta tesis fuera ni siquiera un proyecto, solía repetir: “*Deberías escribir un libro sobre esto*”.

Sin embargo, mi mayor gratitud y reconocimiento por una inmensa ayuda que va más allá de cualquier consideración de índole científica o académica es para mi muy amada esposa, Patricia. En cada página de esta obra, tras cada expresión matemática, entre las líneas de cada tabla, se pueden encontrar, si sabe buscarse, un apoyo discreto, un gesto de cariño, una participación en un afán compartido. Muchos gráficos solares esconden tras sus trazos el recuerdo de su compañía en los dorados atardeceres de la vieja Castilla, con los últimos rayos acariciando los centenarios relojes de sol, ya mudos para siempre, redivivos por unos instantes solo gracias a su mirada alegre y su sonrisa; tal es la magia de su presencia. Ella ha estado siempre a mi lado cuando dirigía el sextante al Sol, ha fotografiado conmigo los últimos instantes de los imponentes crepúsculos de la Meseta, me ha ayudado con mis anotaciones, ha asumido la dura tarea de ocuparse de los aspectos prácticos de una investigación teórica, de poner punto y seguido a horas de abstracción estéril, dándome fuerzas para continuar al día siguiente. Ella ha soportado mis silencios cuando, absorto en algún desarrollo, perdía el hilo de una conversación, sin duda mucho más gratificante. Sin su apoyo, esta tesis no habría pasado de ser una recopilación de esquemas geométricos inconexos recogidos sin orden en alguna carpeta. Sin su impulso, no se habría escrito la primera página; sin su paciencia, jamás se habría llegado al final. Sin el hermoso brillo de sus ojos negros, no habría surgido el concepto de *plano de sombra* que, inspirado en ellos, ilumina los primeros capítulos de esta obra. Cada ilustración, cada tabla han supuesto horas robadas a ella. Por tanto, a ella, y solo a ella, va dedicada esta tesis que, de forma injusta, únicamente puede firmar uno de nosotros dos.

ÍNDICE GENERAL

PRIMERA PARTE

INTRODUCCIÓN: OBJETIVOS, ESTADO DEL ARTE Y METODOLOGÍA

INTRODUCCIÓN	3
A. Objetivos	5
B. Estado del arte	7
B.1. Proceso deductivo de H_s (horas de sol), \hat{e} (elevación solar) y γ (acimut solar)	7
B.2. Aplicación práctica: variables asociadas a \hat{e} y γ	10
C. Metodología	12
C.1. Procesos deductivos.....	12
C.1.1. Particularidades del método deductivo mediante diédrica	13
C.1.2. Sobre las comprobaciones vectoriales.....	13
C.1.3. Otras precisiones sobre el proceso deductivo general	13
C.1.4. El método del plano deslizante: un concepto nuevo	14
C.1.5. ¿Una excepción metodológica? El caso del observador fijo	15
C.2. De las deducciones geométricas a los resultados numéricos	15
C.2.1. Definición de un marco temporal adecuado	16
C.2.2. Elementos orbitales variables.....	17
C.2.3. El ángulo L_t y su expresión auxiliar L	17
C.2.4. Correcciones a L : nutación y aberración de la luz.....	18
C.2.5. La integración de la refracción atmosférica en los cálculos	18
C.2.6. La ecuación del tiempo y el método deductivo para la misma.....	19
C.2.7. Husos horarios. Angulo horario y otros conceptos afines	19
C.2.8. El método de la NOAA como ejemplo de cálculo secuencial	19
C.2.9. Cálculos de alta precisión	20

SEGUNDA PARTE

DESARROLLO DEL MÉTODO

1. CONCEPTOS BÁSICOS	23
1.1. Elementos de la órbita terrestre.....	24

1.2. Solsticios , equinoccios, línea de ápsides.....	25
1.3. Precesión	27
1.4. Desplazamiento del eje de ápsides	28
1.5. Año trópico, año sidéreo, año anomalístico	29
2. PLANO DE SOMBRA Y ÁNGULO α_s.....	31
2.1. Plano de sombra. Generalidades.....	32
2.2. Definición del ángulo diedro α_s entre el plano de sombra y el plano del ecuador terrestre	35
2.3. Cálculo gráfico directo de α_s en diédrica y deducción de la expresión analítica a partir de los abatimientos obtenidos	40
2.4. Deducción alternativa de α_s mediante geometría plana y planos auxiliares	45
2.5. Proceso alternativo de cálculo de α_s mediante el análisis vectorial	48
2.6. Los ángulos α_s y L_t y sus equivalentes en Astronomía clásica	49
2.6.1. El ángulo α_s y la declinación solar δ	49
2.6.2. El ángulo L_t . Sistema heliocéntrico vs. sistema geocéntrico.....	53
2.6.3. El punto Aries	53
2.6.4. Precisiones sobre los equinoccios: posición aparente del Sol.....	55
2.6.5. La longitud L_t según diferentes fuentes.....	57
2.6.6. Longitud, precesión y ángulo de sombra	64
2.7. Cálculo geométrico directo de δ	64
2.8. Deducción directa de la altura del Sol al mediodía	66
2.9. Valores de α_s y δ a lo largo del año en cualquier fecha	68
2.10. Aproximaciones sencillas al cálculo de L_t y δ	72
2.11. Cálculo de las horas de Sol a partir de α_s	76
2.11.1. Hipótesis de partida	76
2.11.2. Proceso de cálculo.....	76
2.12. Diferencia en la duración de los días en las diferentes latitudes a lo largo del año	79
2.13. Corrección por relación de radios Sol/Tierra. Complemento angular	82
2.13.1. Horas de sol con y sin corrección angular: significado para el observador terrestre	87
2.14. Relación geométrica entre el terminador y el meridiano del observador.	89
2.14.1. Análisis de la variación de \hat{t} en el tiempo para diferentes latitudes.....	93
2.14.2. Terminador y mapas day-night.....	96
2.14.3. Terminador y crepúsculos	103

3. ACIMUT Y ELEVACIÓN SOLARES	105
3.1. Proceso deductivo	105
3.1.1. <i>El plano deslizante</i>	105
3.1.2. <i>Reducción al centro de la esfera terrestre</i>	106
3.1.3. <i>Solución gráfica del problema</i>	107
3.1.4. <i>Solución analítica basada en la resolución gráfica</i>	111
3.2. Expresiones del acimut y elevación según los convenios más habituales en Ingeniería y Astronomía	116
3.3. Cálculo alternativo de acimut y elevación solares mediante análisis vectorial	119
3.4. Trayectoria aparente del Sol percibida desde el observador	125
3.5. Comprobación vectorial de la planitud y forma circular de la trayectoria aparente del Sol	126
3.6. Acimut y elevación solares en geometría plana desde el punto de vista de un observador fijo.....	129
3.7. Acimut en el amanecer y en el ocaso para una fecha dada en una latitud ϕ	133
3.8. Cálculo de las horas de Sol partiendo de las fórmulas de acimut y elevación.....	135
3.9. Determinación del ángulo formado por el terminador con el meridiano mediante las fórmulas del acimut solar	136
4. NOCIONES BÁSICAS SOBRE EL TIEMPO	139
4.1. El Tiempo Universal	139
4.2. La necesidad de fijar un origen de tiempos estándar: la fecha juliana o <i>JD</i>	140
4.3. Las fracciones de día. Una curiosa particularidad astronómica	141
4.4. Fecha juliana y días naturales	141
4.5. Calendario juliano, calendario gregoriano y fecha juliana: confusiones habituales.....	142
4.6. Algoritmos de conversión entre fecha de calendario gregoriano y <i>JD</i>	143
4.6.1. <i>Conversión de fecha gregoriana a día juliano</i>	143
4.6.2. <i>Conversión de fecha juliana a fecha gregoriana</i>	144
4.6.3. <i>Otros algoritmos</i>	147
4.7. La fecha juliana y la informática de uso general. Un grave error en Excel	148
4.8. Fenómenos seculares	149
4.9. Efemérides y ΔT	151
5. ELEMENTOS VARIABLES DE LA ÓRBITA: EXCENTRICIDAD e Y OBLICUIDAD MEDIA DE LA ECLÍPTICA ϵ_0	159

5.1. La excentricidad e de la órbita y su variación en el tiempo.....	159
5.2. Oblicuidad media de la eclíptica ϵ_0	161
6. EL ÁNGULO L: CUANTIFICACIÓN DE LA TRASLACIÓN TERRESTRE	165
6.1. Procedimientos para el cálculo de L . Hipótesis de órbita plana	165
6.2. El sistema clásico de cálculo mediante la ecuación de centro	167
6.2.1. <i>Procedimiento propuesto por Duffett-Smith. Análisis crítico</i>	169
6.2.2. <i>Ventajas del sistema propuesto frente a la resolución clásica de Duffett-Smith</i>	176
6.2.3. <i>Expresiones aproximadas para la ecuación de centro</i>	177
6.3. Métodos polinómicos directos de cálculo	178
6.3.1. <i>Método de cálculo polinómico mediante la Ecuación de Centro</i>	178
6.3.2. <i>Método de cálculo polinómico combinado con la Ecuación de Kepler</i>	182
6.4. El método <i>VSOP</i>	185
6.5. Latitud orbital	192
7. NUTACIÓN.....	195
7.1. Componentes geométricos de la nutación	195
7.2. Cálculo de la nutación.....	198
7.3. Teoría de la nutación (1980).....	198
7.4. Expresiones simplificadas	202
7.4.1. <i>Propuesta de Jean Meeus</i>	202
7.4.2. <i>Aplicación NOAA</i>	203
8. LA ABERRACIÓN DE LA LUZ.....	207
9. CORRECCIONES A L Y ϵ_0: LONGITUD APARENTE L_T Y ECLÍPTICA CORREGIDA ϵ. ..	209
9.1. Correcciones a L	209
9.1.1. <i>La aberración y la longitud</i>	209
9.1.2. <i>Nutación en longitud y L</i>	210
9.2. Longitud aparente: L_t	211
9.2.1. <i>Corrección de la oblicuidad de la eclíptica</i>	212

10. REFRACCIÓN ATMOSFÉRICA	213
10.1. Aproximaciones empíricas.....	213
10.1.1. Propuesta de Jean Meeus (basada en Bennett y Saemundsson)	213
10.1.2. Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid	214
10.1.3. Aplicación informática de la NOAA	217
10.1.4. Fórmula “inversa” de Saemundsson	218
10.2. Análisis comparativo.....	220
10.3. Cómo aplicar la refracción atmosférica a nuestros cálculos.....	221
10.3.1. Refracción en orto y ocaso. Su influencia en el cálculo de las horas de sol.....	221
10.4. Duración del día: la constante 0,833 ^º (NOAA) vs algoritmo de M. Perea basado en 2.13.	224
11. LA ECUACIÓN DEL TIEMPO (EOT)	227
11.1. Introducción y nociones generales	227
11.1.1. La paradoja del mediodía cambiante.....	227
11.2. Definiciones para la ecuación del tiempo	230
11.3. Deducción intuitiva	231
11.4. Primer término de la EoT debido a la excentricidad de la órbita	233
11.4.1. Variación anual del primer término de la EoT debido a la órbita elíptica	236
11.5. Segundo término de la EoT debido a la inclinación del eje de rotación con respecto a la eclíptica: reducción al ecuador	237
11.5.1. Variación anual del segundo término de la EoT debido a la inclinación del eje de rotación	245
11.6. EoT: resultante de la suma de sus dos términos	245
11.7. Alternativas para el cálculo directo de la ecuación del tiempo	246
11.7.1. Algoritmo de Smart	246
11.7.2. El concepto de ascensión recta como base de otros algoritmos	248
11.8. Representación clásica de la ecuación del tiempo	250
11.9. Comparación entre diferentes procedimientos de cálculo de EoT	256
11.10. Evolución de la EoT a lo largo de los años	261
12. HORAS DEL MEDIODÍA, SALIDA Y PUESTA DEL SOL. ÁNGULO HORARIO ω	263
12.1. Los husos horarios	263
12.1.1. Horario de verano o DST	265

12.2. Cálculo de la hora del mediodía para el observador	265
12.3. Horas de salida y puesta de sol.....	268
12.4. El ángulo horario ω	269
13. ANÁLISIS CRÍTICO DEL MÉTODO SIMPLIFICADO NOAA	271
13.1. Análisis previo del método	271
13.2. Limitación temporal.....	272
13.3. Datos de partida	273
13.4. Secuencia de funciones por columnas.....	274
13.5. Conclusiones sobre el método simplificado NOAA.....	284
14. CÁLCULOS DE ALTA PRECISIÓN. EL SPA	285
14.1. Generalización del concepto de declinación solar para el análisis de la órbita terrestre con componentes tridimensionales	286
14.2. Cálculo de la δ generalizada para órbitas tridimensionales. Métodos	288
14.2.1. Cálculo de δ generalizada mediante el sistema diédrico	288
14.2.2. Cálculo de δ generalizada mediante análisis vectorial y proyección diédrica sobre el plano de la eclíptica (plano horizontal).....	296
14.2.3. Comparación de las expresiones obtenidas con las habituales en Astronomía	297
14.3. Adaptación de la ascensión recta al caso de órbitas tridimensionales (con latitud eclíptica B)	299
14.4. Los conceptos de ángulo horario y tiempo sidéreo.....	302
14.5. Correcciones por paralaje	304
14.6. Definición geodésica simplificada de la superficie terrestre	305
14.7. El SPA en síntesis	308
14.8. Comentarios sobre el procedimiento de Reda	313

TERCERA PARTE

CONCLUSIONES, LIMITACIONES DEL MÉTODO Y DESARROLLOS FUTUROS

I. CONCLUSIONES.....	317
II. LIMITACIONES DEL MÉTODO Y DESARROLLOS FUTUROS.....	319

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA 323

APÉNDICES

I. Apéndice N.º 1. LA ELIPSE..... **331**

 I.1. Elementos básicos..... 331

 I.2. Circunferencia y elipse: proporcionalidad de áreas 332

II. Apéndice n.º 2. LA ECUACIÓN DE KEPLER. Anomalías..... **335**

 II.1. Las leyes de Kepler..... 335

 II.2. Anomalías 335

 II.3. Demostración de la ecuación de Kepler 336

 II.4. Cálculo de la anomalía verdadera en función de la excéntrica. (basado en el método descrito en [6]) 339

III. Apéndice n.º 3. TABLAS “1980 IAU Theory of Nutation” **343**

IV. Apéndice n.º 4. ΔT **347**

V. Apéndice n.º 5. DIRECTIVA 2000/84/CE del Parlamento Europeo y del Consejo de 19 de enero de 2001 sobre la hora de verano [66] **351**

VI. Apéndice n.º 6. EXPRESIONES LATINAS UTILIZADAS EN LA TESIS **355**

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

I.0-1. Representaciones clásicas de la bóveda celeste.	8
1-1. Representación clásica de la traslación y rotación terrestres.	23
1-2. Solsticios, equinoccios y línea de ápsides.	26
1-3. Representación simplificada de la precesión.	27
1-4. Precesión de los equinoccios y traslación terrestre.	28
1-5. Representación ideal del giro del eje de ápsides a lo largo del tiempo.	29
2-1. Plano de la eclíptica y plano de sombra.	31
2-2. Eje terrestre en planta y alzado.	32
2-3. Traslación terrestre esquematizada.	33
2-4. Definición de L_t respecto al equinoccio de otoño.	34
2-5. Plano de sombra y su variación en el tiempo.	35
2-6. Plano de sombra en relación con los planos ecuatorial y de la eclíptica.	36
2-7. Planta y alzado del plano de sombra en relación con la esfera terrestre.	37
2-8. Efecto del giro del plano de sombra sobre el ángulo diedro α_s	38
2-9. Valores de α_s en solsticios y equinoccios.	39
2-10. Definición de los vectores directores de los planos de sombra y del ecuador.	40
2-11. Representación diédrica de los elementos fundamentales de la fig 2-10.	41
2-12. Abatimiento auxiliar de r en torno a t	42
2-13. Obtención final de α_s	43
2-14. Giro L_t del plano de sombra respecto al ecuador y eclíptica.	45
2-15. Triángulos auxiliares de corte para el cálculo de α_s	46
2-16. Planta en diédrica del plano de sombra y su vector director \vec{v}	48
2-17. Definición de la declinación .F. Martín Asín.	50
2-18. Definición de la declinación.P. Duffett-Smith.	50
2-19. Declinación solar.	51
2-20. Declinación solar en diédrica. Alzado.	51
2-21. La declinación en solsticios y equinoccios.	52
2-22. Orígenes de ángulos en los sistemas heliocéntrico y geocéntrico.	54
2-23. Relación entre la órbita elíptica terrestre real (T) y la solar aparente (S).	55
2-24. Equinoccio otoñal: la posición aparente del Sol como origen de ángulos.	57
2-25. Deducción geométrica directa de δ	64
2-26. Representación de la altura del Sol a mediodía.	66
2-27. Representación de la altura ficticia del Sol a medianoche.	67

2-28. Evolución de α y δ a lo largo del año.....	69
2-29. Valores de δ según diferentes procedimientos (Perrin, Cooper, Spencer, MICA) para 2017.	74
2-30. Planta y alzado del plano de sombra	77
2-31. Horas de Sol en diferentes latitudes a lo largo del año.....	81
2-32. Complemento angular σ a la zona iluminada de la Tierra.....	82
2-33. Cálculo clásico de σ	83
2-34. Plano de sombra y su paralelo por diferencia de radios.	84
2-35. Planta de la figura 2-34.	84
2-36. Relaciones angulares para el cálculo de μ , definitorio de la posición del plano por diferencia de radios.....	85
2-37. Centro solar sobre el horizonte.....	87
2-38. Corona solar tangente al horizonte.....	87
2-39. Vista aparente de la corona solar sobre el horizonte.	88
2-40. Relación angular entre el terminador y el meridiano en V.	89
2-41. Ejemplo de la relación entre el terminador y el meridiano sobre la superficie terrestre.	90
2-42. Relaciones angulares para el cálculo de \hat{t}	91
2-43. Valores para \hat{t} en el orto (amanecer) a lo largo del año correspondientes a distintas latitudes.	94
2-44. Evolución de \hat{t} a lo largo el año en el orto y ocaso para diferentes latitudes.	95
2-45. Definición del punto V del terminador mediante \hat{u} y Φ	96
2-46. Representación desarrollada sobre plano del terminador para $\delta = 15^\circ$	97
2-47. Representación de la zona sombreada bajo el terminador para declinaciones positivas.	98
2-48. Representación de la zona sombreada sobre el terminador para declinaciones negativas.	98
2-49. Planisferio terrestre obtenido de la NASA (“Visible Earth”).....	99
2-50. Ajuste de la imagen 2-47 superpuesta sobre el planisferio extraído de la NASA	99
2-51. Imagen de la USNO (“Day and night across the Earth”).....	100
2-52. Ejemplo de desplazamiento aparente del terminador como consecuencia de la rotación terrestre.	100
2-53. Horas de salida y puesta del Sol en los solsticios . Evolución del terminador. R. Soler.....	102
3-1. Definición geométrica del plano del observador.	105
3-2. Cono de revolución de generatriz OV	106
3-3. Visuales al Sol.	106
3-4. Reducción a V por distancia al Sol.....	107
3-5. Representación diédrica del cono de revolución y posición del Sol en S.	108
3-6. Referencias de γ y \hat{e} sobre el plano del observador.....	109
3-7. Esquema tridimensional del problema del acimut y la elevación en diédrica.	110

3-8. Primer abatimiento auxiliar del plano paralelo al plano VPQ por S sobre el plano horizontal.	110
3-9. Segundo abatimiento: el plano del observador sobre el plano horizontal en torno a QR.	111
3-10. Simplificación de la representación del cono de revolución	119
3-11. Sección por plano vertical conteniendo a PQV.	120
3-12. El vector \vec{s} en relación con el plano del observador.	120
3-13. Elevación y acimut respecto al plano del observador. Vectores directores.	122
3-14. Trayectoria aparente del Sol.	125
3-15. Relaciones angulares para la comprobación de la planitud de la trayectoria aparente solar.	126
3-16. Representación en planta y alzado de la trayectoria aparente del Sol.	128
3-17. Acimut y elevación respecto a la trayectoria aparente del Sol	129
3-18. Trayectoria aparente del Sol en alzado.	130
3-19. Representación del plano π paralelo al del observador por el centro de la trayectoria aparente del Sol.....	131
3-20. Situación relativa del acimut sur γ_S y el ángulo horario ω	132
3-21. Representación en planta de la trayectoria diurna solar.	134
3-22. Relación entre Ψ y γ_N	137
4-1. Años de implantación del calendario gregoriano en diferentes Estados.	142
4-2. Algoritmo general para el cálculo del día juliano	145
4-3. Conversión de día juliano a fecha gregoriana.	146
4-4. Valores para ΔT obtenidos de la aplicación MICA entre 1800 y 2050.....	151
5-1. Variación de la excentricidad de la órbita terrestre en un intervalo de 2.000.000 años.	159
5-2. Evolución de la excentricidad orbital con el tiempo.	161
5-3. Oblicuidad de la eclíptica.	161
6-1. Variación de la latitud astronómica de la Tierra	166
6-2. Movimiento elíptico. Ángulos fundamentales	167
6-3. Relación entre anomalías y longitudes.	168
6-4. Desfase de 180° entre la órbita real terrestre y la aparente del Sol.....	179
6-5. Representación del concepto de latitud orbital B.....	192
7-1. Concepto de la nutación terrestre.	195
7-2. Representación gráfica de los componentes de la nutación.....	196
7-3. Composición de la nutación y la precesión.	196
7-4. Precesión + nutación (a).....	197
7-5. Precesión + nutación (b).....	197
7-6. Precesión + nutación (c).....	197
7-7. Carácter cíclico de la corrección de la longitud por nutación.	205
9-1. Representación geométrica de Δt	209

9-2. Posición genérica de la Tierra. Ángulo η .	210
9-3. Comparación de orientaciones del eje de rotación	211
10-1. Esquema de la reflexión de la luz en la atmósfera.	213
10-2. Variación de la corrección $\Delta\hat{e}$ por refracción en función de la altitud solar	220
10-3. Comparación entre la corrección constante NOAA y la propuesta M. Perea para el orto solar.	225
11-1. Traslación ideal correspondiente al tiempo medio.	231
11-2. Complemento angular y rotación terrestre	232
11-3. Segunda ley de Kepler: velocidad areolar constante.	233
11-4. Primer término de la ecuación del tiempo 2017.	236
11-5. Vector Tierra-Sol respecto al eje de rotación terrestre.	237
11-6. Análisis geométrico de la diferencia entre mediodía solar y mediodía medio.	238
11-7. Relaciones angulares entre L (sobre el plano de la eclíptica) y L' (sobre el plano del ecuador).	239
11-8. Segundo término ecuación del tiempo 2017	245
11-9. Esquema auxiliar para definir α . F. Martín Asín.	248
11-10. Representación de la ecuación del tiempo para 2017.	250
11-11. Diferencias en segundos MICA-2 términos vs MICA-NOAA para 2017.	257
11-12. Diferencias en segundos en los valores de EoT entre MICA-2 términos y MICA-NOAA	259
11-13. Diferencias en segundos entre EoT según NOAA y el algoritmo de 2 términos.	260
11-14. Diferencias en segundos entre EoT NOAA y el algoritmo de 2 términos	261
11-15. Evolución de la ecuación del tiempo a lo largo de los años.	262
12-1. Husos horarios geográficos y oficiales en 2011.	264
12-2. Esquema de detalle de horas oficiales y husos horarios.	267
13-1. Corrección al ángulo horario.	281
13-2. Determinación correcta del acimut. Problemas de las funciones recíprocas.	283
14-1. Definición del ángulo \hat{B}	286
14-2. Plano de sombra real por basculación respecto a la eclíptica.	287
14-3. Representación en diédrica de los planos ecuatorial y de sombra	288
14-4. Abatimiento de OU y plano vertical por P.	289
14-5. Abatimiento de U y R sobre el plano horizontal.	290
14-6. Nuevo eje de charnela U'R'.	291
14-7. Determinación de O'.	292
14-8. Obtención final de α_s .	293
14-9. Proyección diédrica en planta de los vectores de la fig. 14-2.	296
14-10. Esfera terrestre y posición aparente del Sol con latitud \hat{B}	299
14-11. Relación entre ángulos en el plano de la eclíptica	300
14-12. Proyección sobre el plano de la eclíptica del ángulo L corregido.	301

14-13. Angulo horario y tiempo sidéreo.....	303
14-14. Ángulo de paralaje.	304
14-15. Relación entre latitud terrestre geocéntrica y latitud geográfica terrestre.	305
AI-1. Elementos principales de la elipse.	331
AI-2. Relación de la elipse con la circunferencia circunscrita.	332
All-1. Definición de las anomalías excéntrica E, media M y verdadera v.	332
All-2. Relación entre E y v. Sistema de coordenadas con origen en F.	332
AVI-I. Leyenda latina en un reloj de Sol del s. XVII.	332

Nota: todas las ilustraciones, salvo las indicadas en los pies de las mismas y numeradas con referencia bibliográfica, son de elaboración propia, y, por tanto, propiedad del autor.

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1. Valores de L obtenidos del MICA [20] para marzo 2017.	59
Tabla 2-2. Valores de L obtenidos de la aplicación informática NOAA [20] simplificada	60
Tabla 2-3. Posiciones geocéntricas aparentes del Sol para marzo 2017	62
Tabla 2-4. Posiciones geocéntricas aparentes del Sol para marzo 2017	63
Tabla 2-5. Solsticios y equinoccios 2017 (obtenida a través del MICA [33]).	69
Tabla 2-6. Valores declinación δ meses enero-junio 2017 obtenidos aplicando a los valores de L de MICA [33] para las 0:00:00 TU de cada fecha las expresiones de α y δ	70
Tabla 2-7. Valores declinación δ meses julio-diciembre 2017 obtenidos aplicando a los valores de L de MICA [33] para las 0:00:00 TU de cada fecha las expresiones de α y δ	71
Tabla 2-8. Valores de δ y de las horas de Sol para diferentes latitudes a partir de las L a las 00:00:00 de cada fecha obtenidas del MICA [33]. Meses de enero y febrero 2017.	80
Tabla 4-1. Diferencias, en segundos., entre tiempo universal UT y tiempo atómico TD.	152
Tabla 4-2. Valores históricos estimados para ΔT	156
Tabla 4-3. Valores reales registrados para ΔT	157
Tabla 5-1. Comparativa entre coeficientes de Laskar, Lieske y Bretagnon. Extraída de [36].	163
Tabla 6-1. Elementos periódicos de la órbita terrestre (I).	187
Tabla 6-2. Elementos periódicos de la órbita terrestre (II).	188
Tabla 6-3. Elementos periódicos de la órbita terrestre (III).	189
Tabla 6-4. Elementos periódicos de la órbita terrestre (IV).	190
Tabla 7-1. Términos para el cálculo de la nutación, basados en el VSOP 87.	201
Tabla 10-1. Corrección de la refracción atmosférica, entradas por grados	215
Tabla 10-2. Corrección de la refracción para \hat{e} entre 0° y 20°	215
Tabla 10-3. Comparativa para $\Delta \hat{e}$ por refracción atmosférica.	219
Tabla 11-1. Orto, ocaso y culminación en febrero y noviembre de 2013.	228
Tabla 11-2. Orto, ocaso y culminación solares en diciembre de 2012 y enero de 2013.	229
Tabla 11-3. Valores EoT (minutos) para 2017 obtenidos de la NOAA [20].	253
Tabla 11-4. Valores EoT (minutos) para 2017 como suma de dos términos.	254
Tabla 11-5. Valores en minutos de la EoT para 2017 obtenidos del MICA [33].	255
Tabla AIII-1. Tablas Theory of Nutation. Autor: Seidelmann, P.K. Elementos 1-28.	343
Tabla AIII-2. Tablas Theory of Nutation. Autor: Seidelmann, P.K. Elementos 29-79.	344
Tabla AIII-3. Tablas Theory of Nutation. Autor: Seidelmann, P.K. Elementos 80-106.	345
Tabla AIV-1. Valores de ΔT entre 1800 y 1901 extraídos a partir de MICA [1]	348
Tabla AIV-2. Valores de ΔT entre 1902 y 2000 extraídos a partir de MICA [1]	349

Tabla AIV-3. Valores de ΔT entre 2000 y 2050 extraídos a partir de MICA [1].....350

Nota: todas las tablas, salvo las indicadas en los pies de las mismas y numeradas con referencia bibliográfica, son de elaboración propia, y, por tanto, propiedad del autor. Las tablas realizadas a través del MICA (Multiyear Interactive Computer Almanac) o del programa de la NOAA contienen datos obtenidos por el autor mediante la utilización de dichas aplicaciones interactivos.

PRIMERA PARTE

**INTRODUCCIÓN: OBJETIVOS, ESTADO DEL ARTE Y
METODOLOGÍA**

INTRODUCCIÓN

Nascor cum sol oritur

Todo trabajo de investigación podría caracterizarse mediante dos categorías: su nivel de innovación y el público al que va dirigido. En ese sentido, la presente tesis, en tanto que fruto de una prolongada labor de reflexión y búsqueda, supone una novedad en el campo de la Astronomía aplicada al análisis del movimiento aparente del Sol, ya que, por primera vez, se desarrollan los procesos deductivos relacionados con aquel utilizando herramientas sencillas propias de la Geometría Descriptiva: en concreto, el sistema diédrico de proyección, sin ninguna referencia a la trigonometría esférica.

También es novedoso el procedimiento de chequeo de las expresiones analíticas obtenidas mediante la utilización de sencillas operaciones vectoriales adaptadas a cada caso concreto, sin la rigidez de un marco general de referencia que, por otra parte, comienzan poco a poco a desarrollar tecnólogos de la energía solar que desean liberar a esta disciplina de la larga curva de aprendizaje de la Astronomía general y su supeditación a las fórmulas de Bessel. Podemos decir que nuestro objetivo es similar al de dichos tecnólogos, pero lo alcanzamos mediante un procedimiento más sencillo e intuitivo.

Llamará igualmente la atención del lector la novedad consistente en estudiar el movimiento aparente del Sol partiendo del principio de considerar fija la posición de este: el observador se sitúa sobre una Tierra que gira con respecto al Sol en su traslación durante el año, y sobre un plano que gira a lo largo del día alrededor de su eje en relación con un Sol inmóvil. Se ha creado el modelo que reproduce geoméricamente de forma satisfactoria estos movimientos naturales, liberando al estudioso del proceso de aprendizaje de la trigonometría esférica y los cambios sucesivos de sistemas de coordenadas espaciales a ella asociados.

Es también nuevo el desarrollo paulatino de un procedimiento intuitivo, progresivo y completo, para transmitir los conocimientos necesarios en esta técnica de forma gradual y sin necesidad de recurrir, prácticamente, al concurso de términos astronómicos, eliminando todos los elementos superfluos de la Astronomía clásica que nos alejan de nuestro objetivo.

Al lector le sorprenderá asimismo otra característica de esta tesis que la distingue de cualquier trabajo astronómico al uso: la profusión de gráficos y representaciones geométricas relacionadas directamente con los procesos deductivos, imposibles de encontrar en manuales tradicionales.

Finalmente, y en lo relativo a las características inéditas de esta obra, los elementos tomados de diferentes autores, imprescindibles para caracterizar la órbita terrestre y sus perturbaciones, se han elegido en función de su utilidad práctica a fin de permitir al lector la obtención directa de las magnitudes necesarias para los cálculos solares que desearse realizar, tratando de mostrar siempre las fuentes primarias de las expresiones matemáticas utilizadas.

Creemos, con todo lo anterior, haber cumplido con creces la primera exigencia de una investigación científica, aun restringida al especializado ámbito de la búsqueda de una nueva metodología para un análisis clásico.

En cuanto a la segunda categoría mencionada, el público al que va dirigido este estudio es, fundamentalmente, el de los técnicos (en general ingenieros y arquitectos), tecnólogos solares, topógrafos, así como aficionados o expertos en Gnomónica, que deseen, mediante un proceso acelerado, poder realizar de forma autónoma todos los cálculos que les permitan conocer la posición aparente del Sol, con plena consciencia del origen y desarrollo de los algoritmos necesarios, liberándoles así del complejo estudio de la Astronomía clásica.

En cualquier caso, creemos que los procedimientos aquí desarrollados permitirían a cualquier aficionado con conocimientos elementales de geometría plana y diédrica (estudiantes de primeros cursos universitarios de la rama científica, por ejemplo) comprender sin problema los métodos expuestos.

Esperemos que, además de interesante por su novedad y su especificidad, la lectura de la obra resulte suficientemente amena y sencilla.

A. OBJETIVOS

Se pretende mediante el desarrollo de la presente tesis conseguir los siguientes objetivos:

- Crear un modelo heliocéntrico de análisis del movimiento aparente del Sol conciso y completo, para dotar a los profesionales o estudiantes de ingeniería o arquitectura, topógrafos o gnomonicistas¹, y aficionados en general, de las herramientas para los cálculos de la posición solar que pudieren necesitar en el desarrollo de su actividad académica o profesional. Se sustanciará mediante la deducción sencilla de las expresiones del acimut y la elevación solares, cálculo de horas de Sol, determinación del *terminador*², etc. Siempre utilizando para ello las expresiones más conocidas de la trigonometría plana y el sistema diédrico de proyección.
- Reducir al mínimo la utilización de términos y conceptos específicos de Astronomía general, con el fin de disminuir de forma notable el período de aprendizaje necesario para el análisis del movimiento del Sol.
- Movilizar los conocimientos de geometría analítica plana y geometría descriptiva que haya adquirido previamente el estudioso, mediante la profusa utilización de figuras geométricas, secciones y abatimientos.
- Categorizar los procedimientos parciales, hoy en día en uso, tendentes a obtener un resultado numérico final, presentando las fuentes primarias de los mismos y dotando al estudioso de una visión modular del proceso, donde nuevas expresiones de mayor precisión pueden ir sustituyendo a las más antiguas sin ningún problema de encaje dentro del modelo.

¹ En los últimos tiempos, un nuevo auge de la afición a la gnomónica, ciencia relegada desde hace más de dos siglos al olvido tras la universalización de los relojes mecánicos, ha dado lugar al término gnomonicista para designar al experto en el arte del diseño o la construcción de relojes de sol. La voz, cada vez más en boga, no ha sido admitida como tal por la RAE en su [1] ni tampoco por las últimas ediciones del Diccionario del uso del Español [2] de María Moliner. Su utilización no parece, sin embargo, incorrecta como adaptación del término inglés gnomonist.

² Con este término, recogido por la RAE en [1], se define la línea que divide la zona iluminada de la oscura en la Luna o en un planeta. En el caso de la Tierra, separa de forma ideal las zonas de día y de noche en nuestro planeta. Se trata de una línea teórica, toda vez que la atmósfera terrestre provoca la difusión de la luz más allá de la puesta del Sol (zonas crepusculares). En antiguos textos en castellano podemos observar una cierta ambigüedad en el uso del vocablo terminador al utilizarse a veces como sinónimo de horizonte, denominado también finitor. Así, en [3], Gerónimo Velarde indica: "Orizonte, según la Ethimología del Griego, es lo mismo que Terminator, ó Finitor, es un punto que respecto del punto de la Tierra, de quien es Orizonte, determina el día, y la noche". A lo largo del tiempo se ha ido imponiendo la acepción para terminador que hemos indicado más arriba. Los textos anglosajones utilizan la expresión terminator con el mismo significado.

- Guiar al estudiante o profesional en el eventual proceso de confección de un *software* elemental de cálculo para la obtención masiva de resultados y facilitarle su comparación con programas o procedimientos existentes.
- Dotar al lector de unas referencias bibliográficas fundamentales y presentarle algunos de los recursos más útiles presentes en la red para la profundización en esta materia.

Por tanto, la intención del autor de esta tesis no es el perfeccionamiento de los sistemas de cálculo astronómico existentes en la actualidad, ni la creación de un modelo revolucionario que aumente la elevadísima precisión de los procedimientos que utilizan hoy en día los astrónomos profesionales. La ciencia incluida en los tratados existentes es el compendio de una actividad intelectual milenaria, de largos y penosos procesos deductivos, de la dedicación de vidas completas a la investigación y, últimamente, de los medios materiales y humanos utilizados por agencias como la NASA o la ESA, impensables años atrás. Sus complejos algoritmos y métodos numéricos de cálculo y sus modelos completos de perturbaciones orbitales son inaccesibles en la práctica para el público general; y sus resultados, desde dicha perspectiva, incuestionables. Antes al contrario, lo que se pretende es crear un procedimiento de aprendizaje acelerado, en lenguaje accesible, para la resolución sencilla de un problema técnico concreto, que desemboque en la creación de un manual básico de procedimiento.

Se trata, en definitiva, de ahorrar tiempo y recursos a todos aquellos que deseen conocer en detalle un método válido de cálculo de la trayectoria aparente del sol, mediante un enfoque accesible, didáctico e intuitivo; de incidir en todos aquellos aspectos que el autor considera que pueden presentar dudas razonables al estudioso, y de guiar a este en un proceso deductivo lógico que tiene mucho de auto-aprendizaje, con las ventajas que ello conlleva desde el punto de vista pedagógico; de aumentar la motivación del lector para ensayar nuevas aplicaciones por sí mismo y, a medida que vayan desarrollándose nuevos procedimientos de cálculo desconocidos a la fecha de la publicación de la presente tesis, que él mismo sea capaz de sustituir los capítulos actuales que puedan quedar obsoletos por otros nuevos, sabiendo perfectamente cómo integrarlos en el procedimiento general.

Dado que se pretende crear y desarrollar una metodología nueva para llegar a las mismas expresiones deducidas por métodos diferentes en Astronomía clásica, no tiene sentido comparar valores, pues la propia validación de las expresiones obtenidas estará constituida por la recopilación de las mismas en sus diferentes formas en todos los manuales de Astronomía aplicada existentes en la actualidad.

En lo que respecta a errores o precisiones en los procedimientos numéricos para la aplicación de las fórmulas anteriores, recopilados a partir de las obras de diferentes autores, se considerarán válidas las expresiones contrastadas por los mismos, sin que sea motivo de esta tesis el análisis pormenorizado de errores en expresiones matemáticas aceptadas previamente por la comunidad científica.

B. ESTADO DEL ARTE

Aunque la presente tesis tiene como objetivo el desarrollo de una metodología novedosa, completa y autosuficiente para el análisis del movimiento aparente del Sol, a pesar de su carácter unitario, la misma puede considerarse dividida, en cuanto a su contenido, en dos bloques diferenciados³:

- El primero, el proceso deductivo de las fórmulas generales de acimut y elevación solares mediante un método totalmente novedoso.
- El segundo, la aplicación práctica de las fórmulas anteriores mediante diferentes opciones de cálculo de las variables en ellas utilizadas, recopilando y analizando de forma crítica los procedimientos actuales más conocidos.

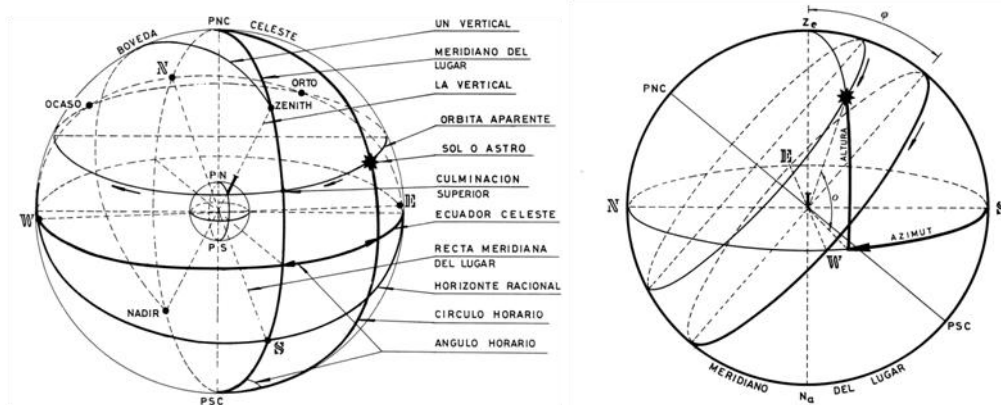
Teniendo en cuenta esta visión dual de la tesis, vamos a analizar a continuación el estado del arte de las disciplinas y conocimientos con ella relacionados.

B.1. PROCESO DEDUCTIVO DE H_s (HORAS DE SOL), \hat{e} (ELEVACIÓN SOLAR) Y γ (ACIMUT SOLAR)

Dentro del primer bloque, y en relación con la deducción de las fórmulas para el cálculo de las horas solares, determinación del terminador, y cálculo de acimut y elevación aparentes del Sol, podemos asegurar que no existen precedentes acerca de los procedimientos utilizados mediante geometría plana y el sistema diédrico. Casi sin excepción, la deducción de las expresiones citadas en Astronomía y Tecnología Solar procede de la geometría esférica mediante la aplicación directa de las fórmulas de Bessel. Ciertamente, este procedimiento, que podemos denominar *clásico*, es apropiado para el análisis del movimiento aparente de cualquier cuerpo en el contexto general de la Astronomía, donde se admite por razones prácticas la convención de considerar la Tierra inmóvil y la esfera celeste girando a su alrededor, como en el caso de la fig. I.0-1, de Soler [4]. En este sentido, la determinación de la posición de cualquier elemento sobre la misma encuentra en la trigonometría esférica un apoyo incuestionable.

Es inconmensurable el número de autores que utilizan este procedimiento, considerado indispensable. Martín Asín [5], Orús [6], Smart [7], etc. son solo ejemplos recientes: cuando Simon Newcomb presenta su obra [8] a finales del s. XIX, el análisis del movimiento solar mediante trigonometría esférica era ya un estándar de uso general.

³ Esta división es meramente descriptiva, a efectos de caracterizar de forma general el contenido de la tesis. Para dotar de uniformidad a esta, como se verá, se ha preferido numerar los capítulos de forma consecutiva, sin reflejar en el índice la dicotomía citada.



I.0-1. Representaciones clásicas de la bóveda celeste. Coordenadas eclípticas (izqda.) y locales u horizontales (dcha.). R. Soler. "Diseño y construcción de relojes de Sol y de Luna". ©Rafael Soler, © Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos [4].

Hasta tal punto es así, que es frecuente encontrar en tratados de Astronomía práctica como los de Jean Meeus [9], Peter Duffett-Smith ([10],[11]), Kartunnen & alt. [12], etc. las expresiones del acimut y la elevación presentadas directamente, sin indicación alguna sobre su deducción, en los capítulos dedicados a la transformación entre sistemas de coordenadas (horizontales, ecuatoriales, eclípticas...)⁴.

Por el contrario, el sistema diédrico, desarrollado inicialmente como una técnica para uso militar por el matemático francés Gaspard Monge en los ss. XVIII-XIX, y que se ha convertido en una *lingua franca* para todos los ingenieros dentro del ámbito de la Geometría Descriptiva, no ha sido utilizado nunca de forma sistemática para los cálculos astronómicos citados anteriormente. No hemos podido encontrar referencias a dicha aplicación, tal vez porque Bessel ya había publicado su obra aquí citada como [13] en 1818, y el valor práctico de sus fórmulas para diversas disciplinas, entre ellas la Astronomía y la navegación, fue de inmediato universalmente reconocida.

Solamente las comprobaciones vectoriales (que en esta tesis se utilizan de forma complementaria) guardan una cierta similitud conceptual con aportaciones al cálculo vectorial de autores recientes, como Alistair Sproul [14]. A diferencia de las propuestas de este, los vectores se utilizan en la presente tesis de forma auxiliar, *ad hoc*, despojados del marco rígido predefinido por Sproul, con lo que el método mejora en cualidades intuitivas. Por otra parte, el autor mencionado define unos sistemas de coordenadas que se manifiestan válidos para la hipótesis de órbita plana, pero no llega a plantear la generalización de las fórmulas de declinación o ascensión recta para el caso de

⁴ Estos autores consideran conocidas por el lector las relaciones angulares de la trigonometría esférica; otros, como Orús o Martín Asín, prefieren dedicar un capítulo o subcapítulo específico a las mismas.

perturbaciones tridimensionales, como se realiza en los capítulos finales de la presente tesis.

Las mínimas constantes astronómicas necesarias en esta parte se extraen de elementos tan sencillos de obtener como los anuarios astronómicos más usuales (por ejemplo [15],[16],[17]); y así, el desarrollo de estos capítulos iniciales referidos al proceso deductivo en sí, resulta totalmente novedoso. De esta forma, el apoyo de la bibliografía consultada se ha reducido en la práctica a la validación de las fórmulas obtenidas.

Por paradójico que pueda resultar, en esta primera parte tiene más sentido hacer referencia a manuales o tratados prácticos de geometría descriptiva como los de Palencia [18] o Izquierdo Asensi [19] que a obras de Astronomía clásica o aplicada como las citadas más arriba.

El carácter novedoso de la utilización del sistema diédrico para las deducciones citadas puede extenderse al concepto heliocéntrico utilizado en la tesis. El recurso a la esfera celeste implica, como dijimos, la aceptación de un modelo que considera inmóvil a la Tierra. Pues bien, a lo largo de la presente tesis, a la hora del cálculo de las horas de Sol para cualquier latitud en una fecha determinada, se utilizará siempre la hipótesis de una Tierra en movimiento de traslación alrededor del Sol (de acuerdo con la realidad) sobre la que este proyecta su haz luminoso. Igualmente, es totalmente nuevo el mismo concepto de utilizar una superficie cónica auxiliar para deslizar sobre la misma el plano del observador terrestre, considerando fija la posición del sol a lo largo de la rotación diurna. A pesar de las investigaciones realizadas, no se ha podido encontrar ningún procedimiento semejante al que en ese sentido se expone en esta tesis.

Otro concepto auxiliar completamente nuevo en el contexto de la Astronomía es el de *plano de sombra*, utilizado con profusión en esta obra. Tampoco se han encontrado referencias al mismo en la amplia bibliografía consultada. El cálculo de las horas de Sol para una determinada fecha se analiza igualmente de una forma novedosa. Incluso, se presentan las claves, en forma de deducción simple, de la corrección por refracción desde un punto de vista ligeramente alejado del concepto de análisis mediante el uso de una constante única que siguen, entre otros, la NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration, U.S. Department of Commerce) en su aplicación [20].

El desarrollo final de diferentes expresiones para el acimut solar en función de las referencias consideradas resulta nuevo en su presentación (diferentes formas de las mismas son utilizadas por Braun & Mitchell [21], Duffett-Smith [11], Meeus [9], Roth [22], Blanco–Muriel & alt.[23], Duffie & Beckman [24], etc. dependiendo del campo de utilización de las fórmulas), aunque es cierto que ha sido considerado anteriormente en cuanto a análisis de los problemas asociados a la utilización de funciones recíprocas por otros autores como Sproul [14], que presenta una de las propuestas más simples e interesantes para la resolución de la ambigüedad matemática asociada. En lo que respecta a la generalización de las expresiones de declinación solar δ y de la ascensión recta (concepto este último ligado en esta tesis exclusivamente a los cálculos topocéntricos adicionales, al no ser necesario como tal para las deducciones citadas más arriba), que aparecen en el capítulo dedicado a los procedimientos de mayor precisión,

tampoco se han encontrado precedentes para la deducción intuitiva de las mismas mediante los procedimientos ya descritos del uso de la geometría plana y el sistema diédrico de proyección.

B.2. APLICACIÓN PRÁCTICA: VARIABLES ASOCIADAS A \hat{e} Y γ

La deducción de las expresiones del acimut y la elevación aparentes del Sol no es el único objetivo de esta tesis, como se ha indicado anteriormente. Una vez realizado dicho proceso, nos enfrentamos a la necesidad, si queremos utilizar las expresiones de \hat{e} y de γ , del cálculo del ángulo L_t o longitud eclíptica. Dos son las líneas de obtención que analizamos: la primera de ellas, expuesta de forma sumaria, y ligada a cálculos de baja precisión, basada en cálculos sencillos y en consideraciones simplificadoras, tales como la constancia de la oblicuidad de la eclíptica y la utilización del día del año como base de los cálculos. En este sentido se presentan las conocidas expresiones de Perrin de Brichambaut [25], Cooper [26] y Spencer [27], popularizadas y difundidas ampliamente desde los años 70 del pasado siglo, y hoy en día relegadas al dominio de los cálculos elementales. La segunda línea, mucho más compleja e interesante, supone el conocimiento de una serie de variables de las que depende L_t , y que se analizan de forma secuencial a lo largo de la presente tesis. Esta parte de la misma consiste, al contrario que la citada en el apartado anterior, en la recopilación ordenada de todos aquellos factores que intervienen en el cálculo de L_t , teniendo en cuenta la literatura científica más habitual actualmente en uso.

Así, a la hora de introducir los conceptos de tiempo necesarios para los cálculos posteriores, se tienen en cuenta los diferentes algoritmos de cálculo de JD^5 de Meeus [9], Van Flandern & Pulkinnen [28], Peter Duffett-Smith [29], USNO [30], J. D. Fernie [31], etc. Para los cálculos de ΔT se presentan las tablas de Meeus [9] y Espenak [32], así como valores extraídos de la aplicación MICA [33] como contraste.

Entre los elementos variables asociados a la órbita podemos citar la obra de Simon, Bretagnon et al. [34] en lo que se refiere a la excentricidad de la órbita y las expresiones para la oblicuidad media de la eclíptica: la reducida, de la IUA [35], de 1980, utilizada actualmente para la confección del MICA [33], o la propuesta de Laskar [36] (1986), de mayor precisión. Todas ellas se recogen en la presente tesis.

El análisis de L_t - longitud eclíptica aparente - puede analizarse desde diferentes puntos de vista, y bajo diferentes hipótesis, todas ellas en uso hoy en día. Los procedimientos tradicionales estarían representados aquí por el análisis de Duffett-Smith & al. [11], mientras que la introducción a los sistemas polinómicos basados en el sistema VSOP87⁶, de los citados Simon, Bretagnon & al., viene desde los años 90 avalada por Jean Meeus [9] y Reda & al. [37], tanto en lo relativo a hipótesis de órbita plana como en lo que respecta a la consideración de órbita alabeada debido a la influencia del resto de elementos del sistema solar sobre nuestro planeta.

⁵ *JD: Julian Date*

⁶ *VSOP: Variations séculaires des orbites planétaires*

Sobre la nutación, a pesar de haberse popularizado su cuantificación numérica mediante la obra de Meeus, su fuente primaria es la “Theory of Nutation”, aceptada por la IAU en los años 80 del pasado siglo y enunciada, tal y como la conocemos actualmente, por Seidelmann [38].

Para el cálculo de la aberración de la luz podemos citar las aproximaciones de Meeus o de la NOAA [20], cuya aplicación informática simplificada sigue ofreciéndose libremente hoy en día en la red.

Dentro del capítulo dedicado a la refracción atmosférica, a pesar de las fuentes utilizadas (todas ellas aceptadas universalmente), destacamos las expresiones basadas en Bennett [39] o en las investigaciones más recientes de Saemundsson [40].

Para la ecuación del tiempo, aunque se ha analizado desde un punto de vista totalmente intuitivo mediante la suma de dos expresiones debidas a la órbita elíptica y a la inclinación del eje de la eclíptica, podemos utilizar como contraste (y de hecho así se propone) la expresión incluida por la NOAA en su aplicación informática, basada en las propuestas de Smart [7], recogidas a su vez por Meeus.

Podríamos encontrar un tratamiento ligeramente similar en relación con este apartado en la página web “Analemma”[41], de Bob Urschel, en la que se presentan unas interesantes gráficas y animaciones. Sin embargo, nos apartamos de la definición de Urschel del “Sol medio” que resulta, a nuestro modo de ver, poco gráfica y demasiado tradicional⁷.

En lo que se refiere al análisis de la trayectoria aparente del Sol para altas precisiones (que constituye uno de los últimos capítulos de esta tesis), con las correspondientes correcciones topocéntricas, el mejor exponente del estado del arte actual sería el informe de la NREL elaborado en 2007 por Reda & alt. [37].

⁷ Por otra parte, Urschel recomienda como base de cálculo la obra [10] de Duffett-Smith, justamente en lo relativo al procedimiento del autor que para nosotros constituye la parte más criticable del libro citado, como se verá en el capítulo dedicado al cálculo de la longitud L de la órbita terrestre. El libro de Duffett-Smith, por otra parte, resulta altamente recomendable para todo lo demás. En cuanto a “Analemma”, resultan muy interesantes e ilustrativas sus animaciones gráficas, y dignas de mención sus representaciones ideales de las analemas terrestres y de las previsibles para otros planetas.

C. METODOLOGÍA

Previamente a una exposición más en detalle de la metodología que vamos a emplear, conviene aclarar los siguientes puntos:

- Nuestro sistema será *heliocéntrico*, esto es, con el Sol considerado fijo y la Tierra girando a su alrededor.
- Habida cuenta de que nuestras deducciones considerarán también al Sol fijo durante la rotación diurna, podemos decir que dicho sistema puede denominarse, si tiene sentido la expresión, *doblemente heliocéntrico*.
- Este término *heliocéntrico*, por oposición a los sistemas *geocéntricos*, con la Tierra inmóvil en el centro, puede dar lugar a confusiones si hacemos entrar en juego los diferentes sistemas de coordenadas que suelen utilizarse en Astronomía. Veamos por qué.

En nuestras simplificaciones geométricas, hemos considerado que el observador y el centro de la Tierra se confunden en un punto si realizamos una comparación geométrica del radio terrestre con la distancia Tierra-Sol. Así, aunque nuestro cálculo de la longitud angular L de la órbita sea heliocéntrico, las coordenadas locales que tienen como referencia el centro de la Tierra se denominan *geocéntricas*, por oposición a las *topocéntricas*, que consideran al observador situado, de forma efectiva, sobre la superficie de la Tierra.

Así pues, si queremos caracterizar nuestro modelo atendiendo a los procedimientos y simplificaciones geométricas que vamos a realizar, podríamos decir de forma más precisa que nuestro sistema es *heliocéntrico con el observador situado en el centro de la Tierra*. Solo en el capítulo dedicado a altas precisiones consideraremos la situación topocéntrica del observador.

Aclarados estos puntos, y en relación con la metodología que se seguirá, vamos a separar el análisis de la misma en dos fases (puntos C.1. y C.2.), que coinciden con la división conceptual realizada en el capítulo anterior.

C.1. PROCESOS DEDUCTIVOS

En primer lugar, abordaremos la deducción de las fórmulas de cálculo de declinación, horas de Sol y determinación del terminador mediante la utilización de las herramientas mencionadas en capítulos anteriores: sistema diédrico y geometría plana, reduciendo a esta última los esquemas tridimensionales de partida.

C.1.1. Particularidades del método deductivo mediante diédrica

Creemos oportuno definir claramente cómo puede utilizarse un procedimiento gráfico como la diédrica para la obtención de expresiones matemáticas generales que admitan su tratamiento numérico.

A este respecto, debemos indicar que las resoluciones gráficas que van a ser utilizadas como auxiliares tienen por objeto la obtención de ángulos en verdadera magnitud. Y para ello utilizaremos las habituales técnicas de abatimiento. Con el fin de que el lector no encuentre dificultades a la hora de seguir el procedimiento hasta el final, se presentan multitud de pasos intermedios llegando a un estado de superposición de elementos sobre un mismo plano que permitirá extraer relaciones angulares en geometría plana. La sucesión de abatimientos nos ha de llevar a una representación gráfica mediante la que estaremos en condiciones de, parafraseando a Poincaré en relación con la Geometría, poder “...*bien raisonner sur des figures mal faites*”⁸ [42]. Digamos de paso que hemos tratado de representar las *figuras* de forma que a Poincaré no le hubieran resultado tan *mal faites*...

C.1.2. Sobre las comprobaciones vectoriales

El uso de vectores se eligió en un primer momento de la elaboración de la tesis como una posibilidad de comprobación, aunque en algunos casos, a la vista de su concisión y sencillez conceptual, puede considerarse una auténtica herramienta alternativa. Y autores como Sproul han comenzado a utilizar esta técnica como una novedad en el campo de la energía solar en relación con las expresiones de *acimut* y *elevación*. Sin embargo, han iniciado siempre sus razonamientos con una definición rígida en clave de sistemas de referencia que consideramos menos intuitiva. Por otra parte, y por primera vez, en nuestra tesis se aborda como auténtica novedad la generalización de δ (declinación solar) y α (ascensión recta) para el caso de órbitas tridimensionales mediante el cálculo vectorial (en el caso de δ también mediante la diédrica), con lo que damos un paso más en el campo de las metodologías alternativas a los procedimientos basados en la esfera celeste.

C.1.3. Otras precisiones sobre el proceso deductivo general

Antes de desarrollar las expresiones citadas más arriba, comenzaremos por la exposición de los conceptos más elementales relativos a la órbita terrestre. Se utilizarán solamente términos que pertenecen al acervo general, por lo que esta fase, desarrollada a lo largo del capítulo 1, no constituye sino una ordenación coherente de todos aquellos

⁸ Esta frase se atribuye habitualmente a Henri Poincaré, ilustre matemático y científico francés (1854-1912). En efecto, la misma aparece en el artículo citado, pero el hecho de precederla de “*On dit souvent...*” nos hace suponer que se trataba tal vez de una expresión habitual en los ámbitos académicos relacionados con la Geometría que el autor recoge en el artículo para reforzar su exposición.

conocimientos básicos astronómicos que todos tenemos, pero ordenados de forma conveniente para su utilización efectiva en la elaboración del modelo objeto de la tesis. Después se analizarán brevemente, sin entrar en valoraciones numéricas, los parámetros de naturaleza variable que se utilizarán más adelante.

El siguiente paso consistirá en la elaboración del modelo geométrico para la obtención de las horas de Sol diarias y la descripción de su validez para la integración de elementos angulares variables.

En esta fase, utilizaremos el concepto auxiliar, totalmente nuevo, de *plano de sombra*⁹, creado por el autor de la tesis y definido por primera vez en la misma, en un contexto en que nos servirá como apoyo para la visualización tanto de la declinación solar y de su variación en el tiempo, como de base para la deducción de otras expresiones más complejas. La variable angular α_s , también nueva, irá unida al plano de sombra; posteriormente se expondrá su relación directa con la declinación una vez que nos haya servido como apoyo para la comprensión de la evolución de la iluminación en distintas latitudes en función del ángulo de traslación terrestre.

Aunque, como queda dicho más atrás, a lo largo de todos los procesos deductivos (fundamentalmente en los caps. 2, 3 y 14.2.2.) se utilizará como sistema de comprobación del proceso seguido en diédrica el correspondiente análisis vectorial sencillo del problema para llegar a idénticas expresiones matemáticas, ello no es óbice para que se proceda a comparar las mismas con las de uso habitual en Astronomía, facilitando referencias de autores u obras conocidas.

Es importante destacar también que todo proceso deductivo que tiene como herramienta fundamental la geometría plana puede generar, y de hecho así ha ocurrido a lo largo de la confección de la tesis, expresiones realmente complejas, y cuya comparación con otras presumiblemente similares resulta aparentemente imposible. Prácticamente, cada elección de variable lleva a una expresión formalmente distinta. Solo una comparación de resultados numéricos, que resultan similares, se revela suficientemente orientativa en estos casos. Para evitar estos problemas, los procesos deductivos han sido chequeados, redirigidos y homogeneizados hasta obtener expresiones similares a las habituales en Astronomía clásica, eligiendo adecuadamente las variables angulares en cada caso.

A tal efecto, se han eliminado numerosas expresiones equivalentes, cuya presentación solamente serviría para añadir confusiones innecesarias.

C.1.4. El método del plano deslizante: un concepto nuevo

Una de las novedades presentadas en esta tesis es la consideración del observador como un punto situado sobre un plano tangente a la Tierra y sometido a la rotación de nuestro

⁹ El lector no encontrará referencias a este concepto en ningún manual de Astronomía. En tratados sobre Geometría Descriptiva, se utilizan a menudo los conceptos de sombra arrojada sobre un plano, pero con otro sentido diferente.

planeta alrededor de su eje (ver 3.1). Para llegar a integrar esta hipótesis de forma práctica dentro del procedimiento, es necesario realizar primero unas ciertas modelizaciones geométricas, entre las que destacamos la creación de un cono auxiliar tangente a la Tierra a lo largo de un paralelo, el de la latitud del observador, sobre el que se desliza el plano que contiene a este. Ello permite trasladar a diédrica fácilmente la representación ideal de un instante genérico del día para el cálculo del acimut y la elevación. No existen precedentes, conocidos por el autor, acerca de este procedimiento, tanto en lo relativo al plano deslizante en si, como en lo que respecta a su procedimiento resolutivo en diédrica.

C.1.5. ¿Una excepción metodológica? El caso del observador fijo

En el punto 3.6. se incluye un proceso deductivo que toma como origen el punto del observador, considerado como fijo, y con una construcción geométrica que se corresponde con una trayectoria variable del Sol, estaría en relación con el más clásico esquema geocéntrico. A este respecto, debemos hacer constar que dicho esquema supone una exposición del método más comúnmente usado, por ejemplo, en Gnomónica, cuando se conoce la latitud del observador y se supone constante la declinación a lo largo de un día. No existe laguna metodológica; antes bien, se pretende demostrar la total equivalencia entre ambos modelos, el geocéntrico y el heliocéntrico.

Desde el punto de vista de la coherencia del método, se ha introducido este procedimiento deduciendo previamente la planitud de la órbita aparente del Sol bajo la hipótesis simplificativa de $\delta = \text{cte}$ y su circularidad también aparente.

En este caso concreto, los cálculos se realizan solamente mediante la geometría plana, basada en esquemas explicativos previos en isométrica.

C.2. DE LAS DEDUCCIONES GEOMÉTRICAS A LOS RESULTADOS NUMÉRICOS

A partir del capítulo 3, y hasta el 14, el método varía de forma radical. Desde este punto, y con la excepción de los desarrollos ligados a la ecuación del tiempo, se han tratado de recopilar de la forma más práctica y concisa posible los elementos necesarios para permitir un cálculo numérico sencillo pero preciso de $\hat{\epsilon}$ y γ , así como del número de horas de Sol al día.

Si en las deducciones iniciales la declinación, base de nuestros cálculos (así como su equivalente α_S), quedaba en función del L_t y de ϵ , en esta parte de la tesis trataremos de calcular los valores numéricos de dichas variables. Dado que la órbita de nuestro planeta no es circular, lo que simplificaría sobremanera el problema, y que la inclinación del eje de la Tierra no es constante, debemos encontrar las expresiones que nos permitan obtener dichos valores en cualquier instante dentro de un determinado marco temporal. Para ello, se ha partido de un esquema basado en las necesidades que le van surgiendo al estudioso a la hora de realizar los cálculos y se han ido introduciendo e ilustrando convenientemente todos los conceptos que pueden necesitarse para tal fin.

Dos son los principios que se han seguido:

- Tratar de obtener las fuentes primarias de los algoritmos más comúnmente utilizados. Un análisis superficial de las aplicaciones presentes en la red nos llevaría a la falsa conclusión de que todas las fórmulas relacionadas con la Astronomía aplicada existentes en la actualidad son obra de Jean Meeus¹⁰.
- Aislar convenientemente de la Astronomía general todos aquellos procedimientos y conceptos que, siendo válidos para la observación y el cálculo predictivo aplicados a los cuerpos celestes, carecen sin embargo de utilidad cuando se analiza la trayectoria aparente del Sol desde la Tierra. Tengamos en cuenta que la distancia Tierra-Sol es suficientemente grande para poder hacer determinadas suposiciones (las simplificaciones tendentes a la definición del plano deslizante, por ejemplo), pero suficientemente pequeña como para tener que considerar fenómenos como la paralaje, etc.

Nuestro procedimiento, en lo que respecta a esta parte de nuestra investigación no es nuevo: el orden de aparición de las variables y sus correcciones sigue una línea secuencial muy similar al de aplicaciones como la de la NOAA o la propuesta de Reda, mencionadas anteriormente, pero se presentan desde un punto de vista crítico y comparativo, con una aportación de elementos gráficos de elaboración propia imposibles de encontrar en las obras citadas o, incluso, en los tratados de Astronomía de uso más general.

C.2.1. Definición de un marco temporal adecuado

Dado que tanto L_t como ε varían en función del tiempo t (en sus diferentes unidades: día, siglo, milenio), y a su vez ambas variables dependen de otros fenómenos temporales, es necesario adoptar una escala de tiempos adecuada para nuestros cálculos. Aunque aparentemente este punto parecería previo al anterior, metodológicamente es más cómodo proceder en este orden con el fin de que las necesidades de cálculo vayan siendo resueltas de forma natural en el mismo orden en que van apareciendo, con objeto de evitar cualquier similitud cuasi-axiomática con los métodos tradicionales. En el

¹⁰ El impacto de la obra [9] del insigne astrónomo belga Jean Meeus fue tan enorme desde el momento de su aparición en 1991 que ha sido adoptada por astrónomos y aficionados, así como por tecnólogos de la energía solar, como una auténtica referencia científica, una suerte de biblia del conocimiento astronómico. Realmente Meeus, aparte de su innegable contribución a la Astronomía (en los años 80 del pasado siglo un asteroide fue bautizado en su honor como 2213-Meeus) ha tenido el enorme acierto de convertirse en un magistral integrador del trabajo de otros expertos en diferentes campos de la Astronomía y de las Matemáticas, estudiosos de los fenómenos atmosféricos ligados a la refracción, etc. Solamente sus capítulos dedicados a la interpretación del VSOP87 han permitido, entre otras cosas, hacer accesible este modelo a miles de tecnólogos y aficionados de todo el mundo que nunca habrían tenido acceso a las bases informatizadas del mismo. Aplicaciones como la de la NOAA [20] declaran utilizar "las fórmulas y procedimientos de Meeus", cuando muchas de las expresiones recogidas en [9] han sido formuladas previamente por otros autores. Pero es indiscutible que todos aquellos que buscan un método práctico para obtener determinadas variables astronómicas encuentran en [9] un punto de partida impagable.

capítulo 4 se razona la utilidad de la fecha juliana (*Julian Date*) y se facilitan varios algoritmos para su obtención, habiéndose elaborado los diagramas de flujo de los más conocidos para mayor comodidad de quienes utilicen esta tesis como punto de partida para la programación de procedimientos completos de cálculo.

Es interesante poner de manifiesto que a lo largo del chequeo de algún conocido algoritmo se han detectado errores que aparecerían más allá de determinados intervalos temporales y que se ponen de manifiesto en el punto correspondiente.

C.2.2. Elementos orbitales variables

Se analizan las expresiones aceptadas por la comunidad científica para el cálculo de la excentricidad y oblicuidad de la órbita, e y ε_0 , valor este último que en capítulos posteriores se verá incrementado por $\Delta\varepsilon$ para completar el valor buscado finalmente, ε . Como veremos en diferentes apartados de la tesis, las expresiones de ambos valores se presentarán en forma de polinomios dependientes directamente de t .

C.2.3. El ángulo L_t y su expresión auxiliar L

Para el cálculo del ángulo L_t , partiremos inicialmente del ángulo real L que forma el radio vector Tierra-Sol en cada instante con el mismo radio en el instante del equinoccio de otoño, y se modificará dicho ángulo posteriormente mediante una serie de correcciones debidas, como se verá, a la nutación y a la aberración de la luz.

Su obtención puede enfocarse de forma analítica o deductiva, como en el caso de la aplicación directa de las leyes de Kepler. Este método se contempla en la tesis, basando su aplicación en las recomendaciones de Duffett-Smith¹¹, pero la influencia de los grandes planetas del sistema solar provoca perturbaciones en la órbita terrestre dignas de ser tenidas en cuenta. No obstante, el enfoque tradicional de este subapartado (se hacen a menudo referencias a la deducción de la ecuación de Kepler contenida en el apéndice II) nos permite introducir fácilmente conceptos como el de la *ecuación de centro*, que nos será de gran utilidad tanto en este capítulo como en la posterior deducción de la expresión de la *ecuación del tiempo* en capítulos posteriores.

Un intento de obtener un modelo numérico nuevo para L o L_t sería impensable en el actual estado de este campo, dominado por los astrónomos profesionales que cuentan con medios de avistamiento y de simulación numérica de una potencia inimaginable solo diez o quince años atrás; ello queda fuera del alcance de esta tesis. Pero sí es factible realizar un análisis crítico y recopilar con orden todos aquellos algoritmos de los que, estando presentes de forma reiterada en todas las páginas web de Astronomía y en un sinnúmero de aplicaciones *on-line*, nadie parece conocer, sin embargo, cuál es su

¹¹ Hemos creído oportuno realizar una crítica a dicho método en el capítulo correspondiente por considerar que en el mismo se realizan unas simplificaciones que llevarían al usuario a caer en errores conceptuales de importancia.

origen.

Esta es la opción por la que nos hemos decantado, tanto a la hora de presentar los métodos de cálculo de L como el resto de variables asociadas.

Así, se analizan tanto las expresiones simplificadas de Meeus, basadas en el truncamiento de los interminables términos del VSOP87, como otras alternativas utilizadas por la NOAA, presentándose, para una mejor comprensión, una serie de ejemplos prácticos para datos numéricos de partida similares.

La referencia final al método VSOP87 simplificado hasta los términos más significativos¹², pero de un orden muy superior al de los polinomios simplificados presentados por Meeus, nos abre las puertas a la posibilidad, que se explotará más adelante, de considerar las variaciones de la órbita terrestre en el sentido perpendicular al plano de la eclíptica, esto es, a la consideración de la órbita como una curva alabeada.

C.2.4. Correcciones a L : nutación y aberración de la luz

La nutación, como fenómeno asociado a la longitud aparente L_t de nuestro planeta, se analiza de forma gráfica, intuitiva, indicándose el porqué de la descomposición de la misma en dos términos que incrementan L_t o ϵ_0 , según el caso. Se parte de las expresiones de Meeus y de la Teoría de la Nutación, comentándose y analizándose numéricamente también la simplificación utilizada por la NOAA en [20].

Igualmente, la aberración lumínica se analiza de forma sencilla y gráfica, enfrentando la expresión de corrección de L , basada en la constante de aberración, con el proceso más sencillo planteado por nosotros, y comparando la estrecha similitud de los resultados.

C.2.5. La integración de la refracción atmosférica en los cálculos

Hemos creído conveniente presentar en el capítulo 10 las diferentes fórmulas experimentales existentes para el cálculo de la refracción atmosférica, identificando las fuentes primarias de las mismas (Bennett, Saemundsson, etc.). Un subapartado final muestra cómo integrar las mismas en los cálculos de elevación solar como corrección.

Igualmente, como aportación del autor de la presente tesis, se presenta una alternativa crítica al procedimiento recogido en la aplicación simplificada de la NOAA [20], en relación con la utilización por la citada agencia de una constante que evitaría la consideración de la corrección por diferencia de radios Tierra/Sol para diferentes latitudes y declinaciones que nosotros realizamos en 2.13., y que se cita a tal efecto nuevamente en este apartado.

¹² Estos términos surgen de las tablas de términos significativos del VSOP87 contenidos en [9], pero, paradójicamente, han sido mejor compilados y explicitados por Reda & alt. [37] a partir de [9]. Lo cual no deja de ser sorprendente, dado el carácter divulgativo de [9].

C.2.6. La ecuación del tiempo y el método deductivo para la misma

Para el cálculo de la ecuación del tiempo, concepto indispensable si queremos realizar predicciones de acimut y elevación basadas en la hora media del observador, y no en la solar, hemos desarrollado una metodología gráfica enormemente simple basada en el análisis de los dos términos que la componen. En este sentido, nos alejamos de las definiciones clásicas fundamentadas en términos como el de la ascensión recta¹³.

Hemos ilustrado el capítulo 11, correspondiente a la ecuación del tiempo, con representaciones en períodos anuales de la misma, correspondientes a diferentes épocas, para una mejor comprensión del carácter variable de la ecuación debido a sus dos términos diferenciados.

Se incluye también una comparación de la ecuación así definida por nosotros con la expresión utilizada por la NOAA, procedente de Smart [7].

C.2.7. Husos horarios. Angulo horario y otros conceptos afines

Dentro de la misma línea de posibilitar los cálculos predictivos en hora media, además de la definición y deducción de la ecuación del tiempo, hemos considerado imprescindible complementar el marco de referencia horario mediante la interpretación de los husos y los horarios oficiales. Se ha completado el capítulo con la referencia al concepto de ángulo horario, a fin de cerrar el círculo en lo relativo a enfrentar la hora oficial y la hora solar. Entendemos que los ejemplos prácticos de resolución numérica presentados son suficientemente ilustrativos.

C.2.8. El método de la NOAA como ejemplo de cálculo secuencial

Este capítulo resultará de interés para todos aquellos interesados en la confección de una hoja de cálculo para realizar sus cálculos de posición del Sol, pues aplicando *ingeniería inversa* a la aplicación simplificada de la NOAA [20] se han ido identificando todas y cada una de las expresiones matemáticas que los desarrolladores han volcado en la misma, y hemos localizado sus fuentes primarias, situándolas de la forma más certera posible en el contexto de la presente tesis, y haciendo un análisis crítico de aquellos puntos manifiestamente mejorables o de aquellos pasos que, a nuestro modo de ver, podrían obviarse.

¹³ Una particularidad de nuestra metodología general es la relacionada, precisamente, con la ascensión recta, que se define siempre en las primeras páginas de los manuales clásicos de astronomía en los apartados dedicados a las transformaciones de coordenadas. Realmente, en nuestra deducción de la ecuación del tiempo no será una premisa, sino una consecuencia, como se indica oportunamente en el capítulo correspondiente, dada su correspondencia con las relaciones angulares asociadas al segundo término de la ecuación.

C.2.9. Cálculos de alta precisión

El incluir un apartado con una serie de consideraciones topocéntricas puede parecer una excepción a la metodología seguida de considerar el Sol fijo. De hecho, así es. Sin embargo, el método de cálculo de Reda & alt. [37] necesita para su desarrollo de los conceptos generalizados de la declinación y la ascensión recta para órbitas alabeadas; y, paradójicamente, nuestro procedimiento de reducción de los problemas tridimensionales a deducciones sencillas en geometría plana, utilización de la diédrica y comprobación vectorial se acomodan perfectamente a los requerimientos de estos procedimientos de alta precisión.

La descripción del método de Reda se realiza de forma más sencilla que en la monografía aludida, habida cuenta de que la mayor parte de los conceptos en ella utilizados habrán sido desarrollado previamente a lo largo de nuestra tesis.

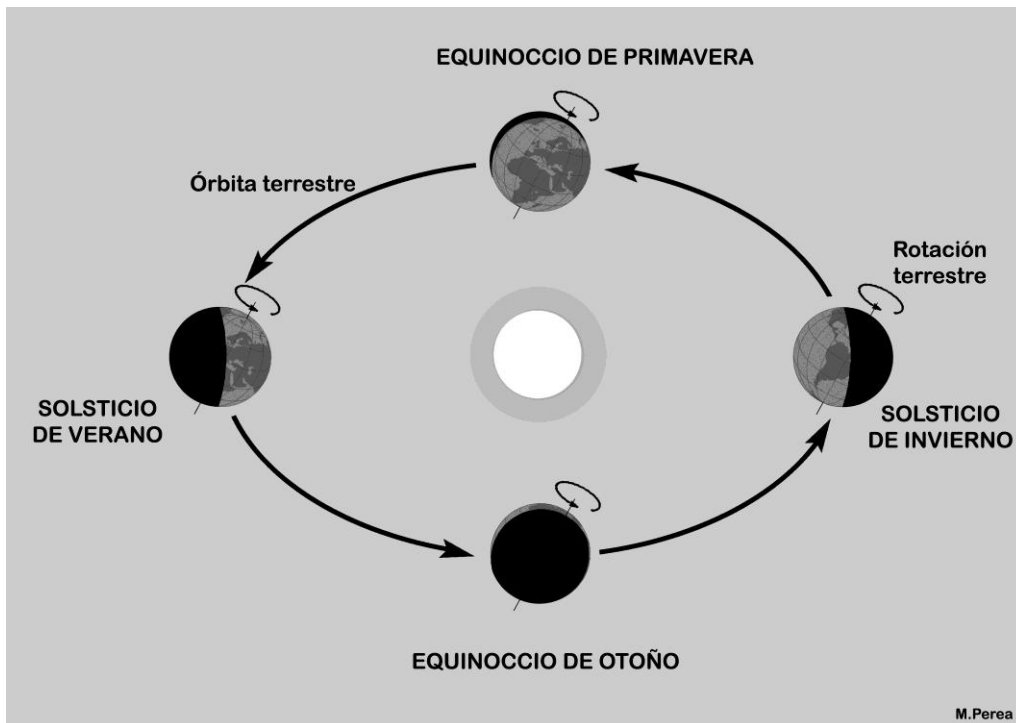
SEGUNDA PARTE

DESARROLLO DEL MÉTODO

1. CONCEPTOS BÁSICOS

Sicut erat in principio

Todos estamos familiarizados con los aspectos básicos de los movimientos de rotación y traslación terrestre. La fig. 1-1 se repite invariablemente en las primeras páginas de todos los atlas escolares, y de ella podemos extraer los principios de nuestro modelo.



1-1. Representación clásica de la traslación y rotación terrestres.

De esta figura tan simple obtenemos toda la información necesaria para poner en marcha nuestro modelo, ya que, de forma implícita, en ella se refleja lo siguiente:

- La Tierra se desplaza alrededor del Sol describiendo una órbita plana¹⁴ elíptica. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse (1.ª ley de Kepler).

¹⁴ En los capítulos siguientes se asumirá la planitud de la órbita terrestre, de acuerdo con la más tradicional concepción kepleriana del movimiento de los planetas. En capítulos posteriores se analizará la influencia de las perturbaciones externas que tienen como consecuencia pequeños alabeos en la elipse teórica.

- El eje de giro de la Tierra no es perpendicular al plano que contiene a la órbita (*plano de la eclíptica*), sino que forma un cierto ángulo ε con el vector director de aquel (*oblicuidad de la eclíptica*) y mantiene la misma dirección en el espacio a lo largo de toda la traslación. Si definimos el *plano ecuatorial terrestre* como el plano perpendicular al eje de rotación de la Tierra por el centro de esta, es evidente que dicho plano ecuatorial forma con el plano de la eclíptica un ángulo de valor, precisamente, ε .
- Observada la traslación terrestre desde un punto en el espacio “por encima” del polo Norte (según se observa en la figura, bien que los conceptos “arriba” y “abajo” no tienen sentido en el espacio), tanto esta como la rotación de nuestro planeta se producen en sentido antihorario.

Estos sencillos conceptos nos sirven como arranque para nuestro modelo. A partir de ahora, el cálculo de las horas de Sol para cualquier fecha y latitud, o la trayectoria aparente del Sol observado desde la Tierra constituirán para nosotros sencillos análisis de geometría y cinemática en lugar de un complejo proceso de cálculos astronómicos.

1.1. ELEMENTOS DE LA ÓRBITA TERRESTRE

Se indican a continuación los órdenes de magnitud de los principales elementos del movimiento elíptico terrestre. Los datos numéricos están extraídos del *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid para 2013* [17]. Se indican con (*) los valores presentes en este apartado que experimentan variación a lo largo del tiempo. Como se verá más adelante, ello no presenta inconveniente alguno para nuestro modelo.

- El radio del Sol es de 696.000 km
- El radio ecuatorial de la Tierra es de 6.378,14 km
- La órbita terrestre es una elipse de excentricidad $e = 0,01670344$ *

Dado que la excentricidad de una elipse viene dada por la expresión

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

donde a es el semieje mayor y b el menor, tendremos que $b = 0,999860487 \cdot a$, por lo que la órbita es casi circular, no pudiéndose apreciar en una representación gráfica la diferencia con la elipse real. No obstante, en lo que sigue adoptaremos frecuentemente la convención de exagerar gráficamente la diferencia entre ambos ejes para mejor comprensión de algunos fenómenos. Hay que hacer constar que, a pesar del aspecto cuasi-circular de la órbita, los fenómenos asociados a su forma elíptica se dejan observar de forma bien patente. Más adelante nos ocuparemos de ello.

- La distancia media de la Tierra al Sol es de $149,6 \cdot 10^6$ km, siendo igual al semieje mayor de la elipse, es decir, a .
- Esta magnitud coincide aproximadamente con la magnitud "Unidad Astronómica" = UA, cuyo valor se establece en:

$$UA = 1,49597871 \cdot 10^8 \text{ m}^{15}$$

- El eje mayor de la elipse se conoce como *línea de ápsides*. El punto más cercano al Sol (perihelio) se alcanza actualmente hacia el 4 de enero.
- La *oblicuidad de la eclíptica* es, aproximadamente, $\varepsilon = 23^{\circ}43'701''$ *.

1.2. SOLSTICIOS , EQUINOCCIOS, LÍNEA DE ÁPSIDES

Se definen los *equinoccios* -del latín *aequinocrium* (*aequus nocte*), "noche igual"- como los instantes en los que el Sol está situado sobre el plano del ecuador terrestre. Son dos al año, como veíamos en la fig. 1-1, y se denominan *equinoccio de primavera o vernal* (entre el 20 y 21 de marzo en el hemisferio norte) y *equinoccio de otoño* (entre el 22 y 23 de septiembre en el hemisferio norte). Dado que en estos instantes el plano perpendicular a la eclíptica por el centro de la Tierra que contiene al eje de rotación es perpendicular al radio Tierra-Sol, la duración de los días y las noches es idéntica. Esto se comprenderá más fácilmente a medida que vayamos desarrollando el modelo.

Igualmente, los *solsticios* -del latín *solstitium* (*sol sistere*), "sol quieto"- son los instantes en los que el radio Tierra-Sol forma un ángulo de valor absoluto máximo con el vector director del plano del ecuador terrestre, es decir, un ángulo $+\varepsilon$ o $-\varepsilon$. Son también dos al año, en invierno (entre el 21 y 22 de diciembre en nuestro hemisferio) y en verano (entre el 20 y el 21 de junio en el hemisferio norte). En el de verano, como puede deducirse de la fig. 1-1, la duración del día es máxima en el hemisferio norte y en el de invierno, mínima. Anticipándonos a conceptos y deducciones posteriores, indiquemos que el origen latino del término alude a que en las fechas próximas a los solsticios, la altura aparente del Sol sobre el horizonte al mediodía varía muy poco de unos días a otros y, por lo tanto, también la duración de estos.

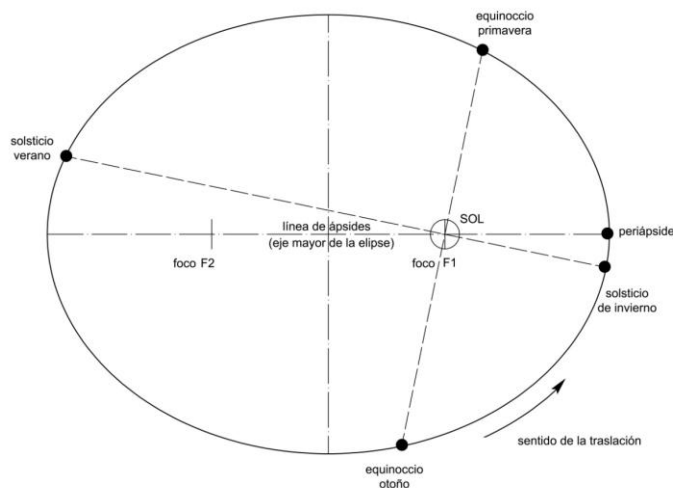
Podemos deducir de la mera observación de la fig. 1-1 que los sentidos de los solsticios y equinoccios se invierten en el hemisferio sur. Así, el equinoccio de primavera en el hemisferio Norte marcará el instante del equinoccio de otoño en el hemisferio sur y

¹⁵ A lo largo de esta tesis se adoptará la correspondencia $a = 1,000\ 001\ 018$ UA , de acuerdo con Simon, Bretagnon & alt., según [34]. Esta expresión es coherente con el resto de fórmulas matemáticas extraídas del modelo VSOP que se analizará en otros capítulos, y por esa razón se mantiene en nuestros desarrollos.

viceversa. Igualmente para los solsticios: el de verano en nuestro hemisferio será de invierno en el hemisferio sur y viceversa.

Conviene hacer algunas observaciones. Si, como hemos indicado anteriormente, el eje de rotación de la Tierra estuviera orientado siempre con total exactitud en la misma dirección, entre la línea de los solsticios y la de los equinoccios el ángulo sería exactamente de 90° . Esto no es rigurosamente cierto, y en nuestro modelo debe aparecer un concepto nuevo, conocido como *precesión* que será de gran influencia en nuestros cálculos y sobre el que volveremos más adelante. Igualmente, el ángulo ϵ está sometido a ligeras variaciones que deberán ser tenidas en cuenta.

Otra precisión: no existe relación entre el solsticio de invierno y la línea de ápsides. Su proximidad en el tiempo referida a la época actual es meramente casual. Podemos observarlo mejor en la fig. 1-2. El perigeo se produce actualmente en el entorno del 2-5 de enero.



1-2. Solsticios, equinoccios y línea de ápsides.

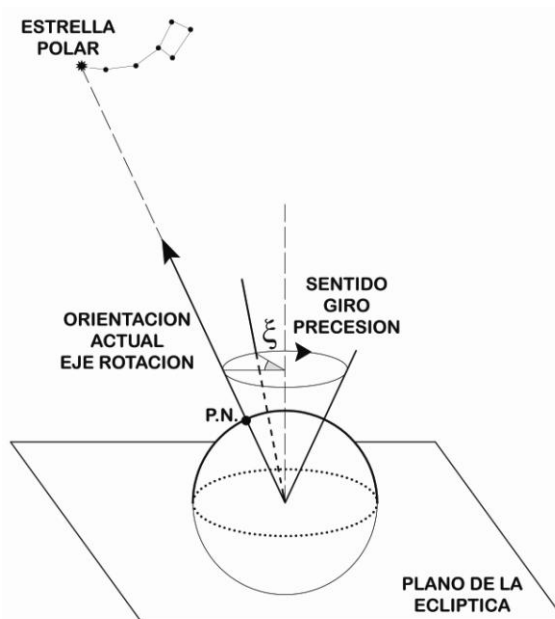
Una reflexión más en torno a los órdenes de magnitud que manejamos y de la imposibilidad de representar a una escala adecuada la órbita junto con la Tierra y el Sol: si reducimos el tamaño del Sol al de un balón de baloncesto, la Tierra tendría el de una cabeza de alfiler y estaría situada a una distancia de 25 m. de aquel.

1.3. PRECESIÓN

El movimiento de precesión consiste en el giro paulatino del eje de rotación del planeta alrededor de la perpendicular al plano de la eclíptica por el centro de la Tierra (fig.1-3).

Este movimiento se estima en aproximadamente $50''{,}2$ anuales (F. Martín,[5] pág. 250). Peter Duffett-Smith y Jonathan Zwart ([11], pág. 71) estiman que el giro completo se produce en unos 25800 años, cifra que, transformada, nos daría aproximadamente $50''{,}2$ anuales, que coincide con el valor indicado anteriormente. De esta forma, el eje de rotación terrestre describe a lo largo del tiempo un cono de revolución, del que el propio eje es la generatriz; y de semiángulo cónico, la inclinación con respecto a la eclíptica del eje, ε .

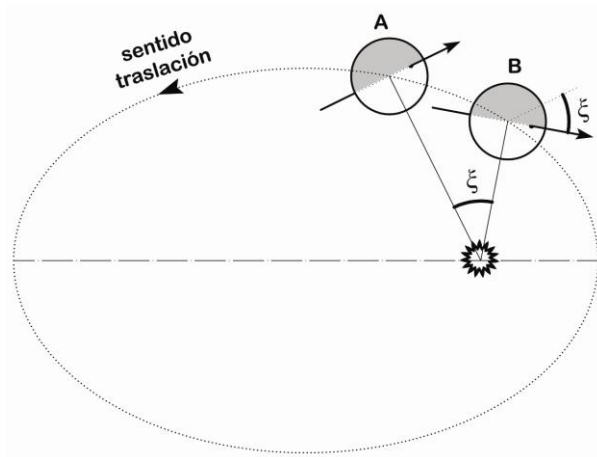
Este movimiento del eje provoca lo que en Astronomía se conoce como *precesión de los equinoccios*. En la fig. 1-3 se ha representado el giro del eje de rotación¹⁶; en la misma, ξ es el ángulo girado por dicho eje en el transcurso de un año¹⁷. Este giro es el responsable de que entre dos años consecutivos el equinoccio correspondiente al segundo (posición B en la figura 1-4) se produzca antes de que la esfera terrestre haya completado su traslación alrededor del Sol, sin haber llegado al punto inicial A (fig. 1-4). La diferencia angular equivale, precisamente, al ángulo ξ indicado en la figura mencionada.



1-3. Representación simplificada de la precesión.

¹⁶ En la actualidad, el eje de rotación terrestre está orientado, aproximadamente, hacia la estrella polar, pero esta orientación varía lentamente a lo largo de los siglos, como se ve en 1-3.

¹⁷ Utilizamos esta nomenclatura ξ de forma auxiliar en este apartado, sin identificarla con una denominación estándar en Astronomía clásica.



1-4. Precesión de los equinoccios y traslación terrestre.

Como indican Orús & alt., [6] “*el desplazamiento de los equinoccios se produce en sentido horario o retrógrado. El punto Aries no es un punto fijo en la esfera celeste sino que, debido a la precesión de los equinoccios, retrograda sobre la eclíptica a razón de 50”,29 por año*”.

En la fig. 1-4 se puede observar dicha retrogradación gráficamente. Basta con asumir que el plano de separación entre el hemisferio iluminado y el oscuro contendrá totalmente al eje terrestre en un instante diferente cada año debido a la diferencia paulatina de orientación de aquel.

El período de tiempo entre dos equinoccios de primavera se conoce como “año trópico”.

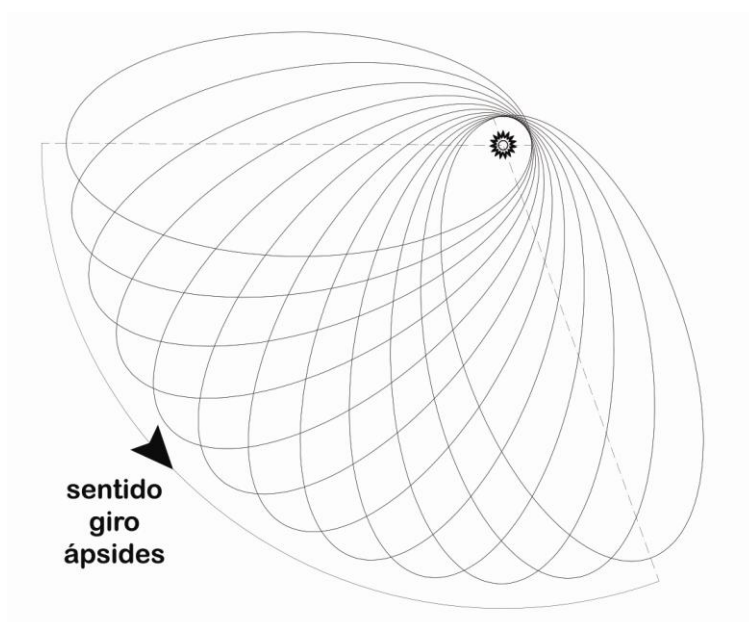
1.4. DESPLAZAMIENTO DEL EJE DE ÁPSIDES

El eje de ápsides es el eje mayor de la elipse orbital. Como sabemos, el Sol se encuentra en uno de sus focos. Pues bien, este eje no permanece fijo en el espacio, sino que va rotando alrededor del Sol lentamente a lo largo del tiempo, en sentido antihorario, según se puede observar en la fig. 1-5.

Este giro se produce a una velocidad angular de aproximadamente 11”,7 anuales según [5], que Orús estima en 11”,64 ([6], cap. 4.6). Tomando como válidos los valores aproximados de Orús, tenemos que el punto Aries y el perihelio solares se aproximan cada año:

$$50'',29 + 11'',64 = 61'',93 = 1',1'',93$$

Ello tiene una consecuencia directa en la duración de las estaciones, ya que los puntos de la órbita más cercanos al perihelio están asociados por las leyes de Kepler a una velocidad mayor de desplazamiento de la Tierra, máxima precisamente en el perihelio (ver apéndice II.1).



1-5. Representación ideal del giro del eje de ápsides a lo largo del tiempo.

Si varía la posición del eje de ápsides en relación con el punto Aries, la duración de las estaciones también se verá alterada.

En este sentido, F. Martín realiza una sencilla exposición acerca del cálculo aproximado de la duración de las estaciones a lo largo del tiempo ([5], págs. 250-254), partiendo de la distancia actual de 12° entre el perihelio y el solsticio de invierno, que recomendamos al lector, aunque no va a ser utilizada en esta tesis en lo sucesivo.

1.5. AÑO TRÓPICO, AÑO SIDÉREO, AÑO ANOMALÍSTICO

La pregunta *¿cuánto dura un año?*, cuya respuesta es imprescindible para nuestros cálculos, no es trivial. Una respuesta poco rigurosa sería “365 días”. Se aproximaría más a la realidad “365,25 días”. Si consultamos el anuario astronómico [17] nos encontraremos con lo siguiente (sección *Datos Solares*):

*Duración de los años*¹⁸

<i>año trópico:</i>	365,242189 días
<i>año sidéreo:</i>	365,256363 días
<i>año anomalístico:</i>	365,259636 días

Las definiciones son suficientemente aclaratorias:

¹⁸ En 2013. La variación anual es apenas perceptible.

El año trópico, como decíamos, es el tiempo transcurrido entre dos equinoccios vernales. Por tanto, al cabo de un año trópico, el eje terrestre señala una dirección diferente de la del equinoccio vernal anterior.

El año sidéreo es el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos por la línea que une el Sol con una estrella lejana.

El año anomalístico es el tiempo transcurrido entre dos pasos de la Tierra por el mismo punto del eje de ápsides, el perihelio.

El año civil, que es el que sirve de base para nuestra vida cotidiana, y que, a su vez, se basa en el calendario gregoriano; tiene 365 o 366 días los bisiestos, según el año. Su duración media, a largo plazo, resulta ser:

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365,2425 \text{ días naturales.}$$

El cómputo es sencillo:

- 1 bisiesto cada 4 años.
- Los años acabados en 00 no son bisiestos, salvo los múltiplos de 400.

Con lo anterior, la diferencia entre el año civil que utilizamos y el año trópico arroja una cifra de solamente $3,11 \cdot 10^{-4}$ días, por lo que únicamente habría que suprimir como corrección un bisiesto más cada 3215 años aproximadamente.

Es decir, el calendario que se ha impuesto en nuestra sociedad tiene el mismo objeto que el que perseguían los astrónomos en las más antiguas civilizaciones: la determinación correcta del inicio de la primavera (equinoccio vernal), con todo lo que ello significaba en relación con los períodos de siembra y recolección en las primeras sociedades agrarias estructuradas.

Y, anticipándonos a posteriores desarrollos, podemos decir que el período anual que tomaremos como base de nuestros cálculos será el año trópico, ligeramente inferior, como hemos visto, al año civil.

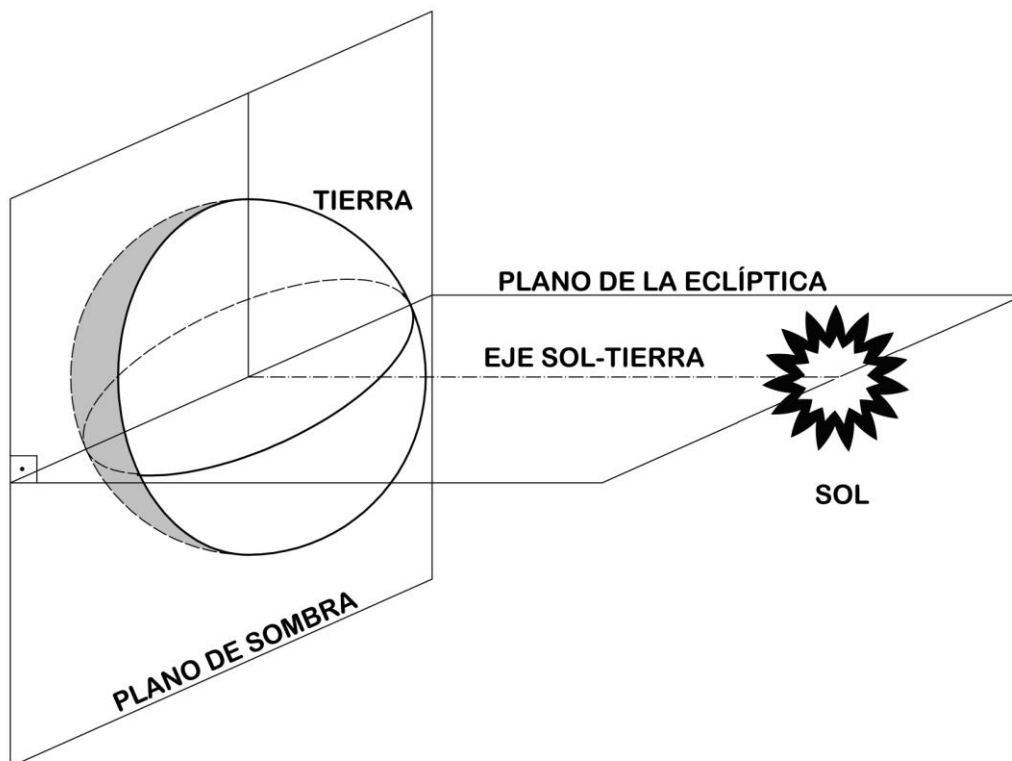
Puede resultar extraño adoptar como referencia el punto Aries, que es cambiante con el tiempo de acuerdo con la precesión de los equinoccios, pero esta elección simplifica enormemente, como veremos, todos los procesos de cálculo.

Hasta aquí no hemos hecho sino recordar y ordenar una serie de conceptos que todos hemos adquirido a lo largo de nuestros estudios elementales. A continuación, pasamos al desarrollo propiamente dicho de nuestro modelo.

2. PLANO DE SOMBRA Y ÁNGULO α_S

Hic umbra docet

Nuestros procesos deductivos se basarán en el concepto totalmente novedoso del *PLANO DE SOMBRA*, que definiremos como *el plano perpendicular al de la eclíptica, que corta a la línea que une los centros del Sol y la Tierra también perpendicularmente, y que pasa por el centro de nuestro planeta*¹⁹. Este plano, en su intersección con la esfera terrestre, separa el hemisferio iluminado por el Sol del que queda en la oscuridad, independientemente de la orientación del eje de la Tierra, como vemos en la fig. 2-1. Nos referiremos en lo sucesivo a la línea más arriba indicada como “*línea Tierra-Sol*” o “*eje Tierra-Sol*”.

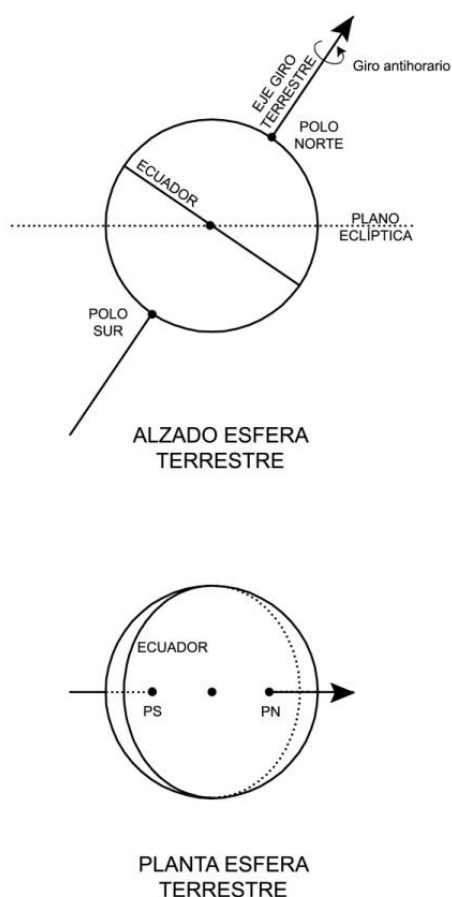


2-1. Plano de la eclíptica y plano de sombra.

¹⁹ Asumimos para todo lo que sigue, como hemos indicado anteriormente, que la órbita es plana.

2.1. PLANO DE SOMBRA. GENERALIDADES

A diferencia del plano de sombra, que siempre es perpendicular al plano de la eclíptica, el eje de rotación de la Tierra no lo es. El plano de sombra va variando su orientación durante el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del sol; sin embargo, el eje de rotación terrestre se mantiene sensiblemente en la misma dirección²⁰. Esto provoca que, en función de la situación relativa del plano de sombra respecto del eje de rotación, se produzcan a lo largo del año diferencias sensibles en la duración de los días en diferentes puntos de la esfera terrestre. A lo largo de este capítulo analizaremos y cuantificaremos estas variaciones.

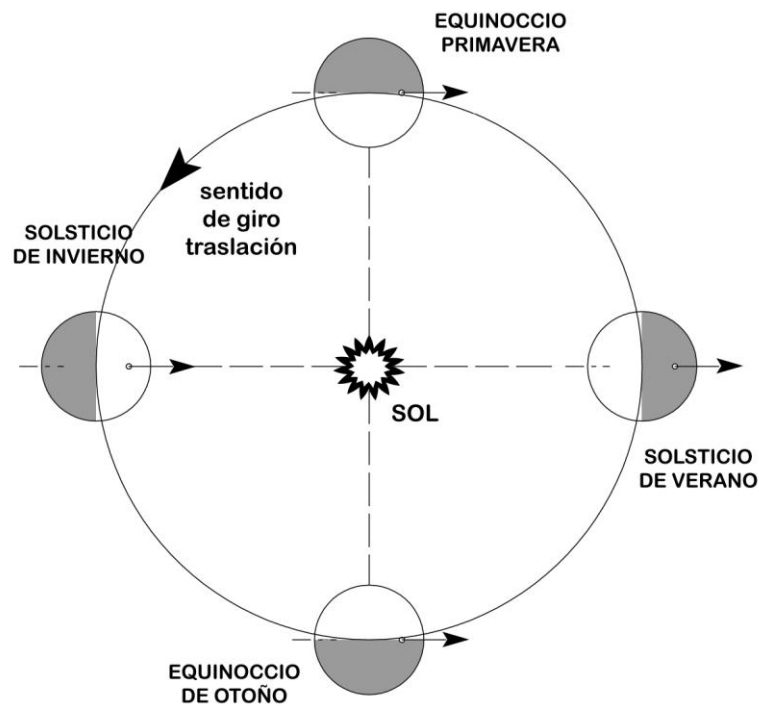


2-2. Eje terrestre en planta y alzado.

²⁰ En una primera aproximación, estamos despreciando la precesión definida en el cap.1. Más adelante veremos cómo el método se adecua perfectamente a esta variación en la dirección del eje de rotación.

La fig. 2-2 nos muestra la planta y el alzado de la Tierra, en los que marcamos la orientación de su eje, que permanece constante²¹ a lo largo de toda la traslación, por lo que sus proyecciones diédricas también se mantendrán constantes.

La figura 1-1 que vimos en el punto 1.1 puede esquematizarse, por tanto, según la fig. 2-3, en la que puede apreciarse la proyección diédrica del eje de giro terrestre. En ella aparece también el giro antihorario de traslación, y quedan también caracterizadas las posiciones de solsticios y equinoccios.



2-3. Traslación terrestre esquematizada.

Es fácil observar la sombra producida en nuestro planeta, que constituye lo que conocemos como noche, por oposición al Sol. Para el análisis de las variaciones del ángulo de sombra a lo largo del año, debemos tomar un origen temporal como referencia. Lo más sencillo es asignar este origen a uno de los dos equinoccios, instantes que verifican la propiedad geométrica, según se ve en la fig. 2-3, de que en ellos el plano de sombra contiene al eje de rotación terrestre y, por tanto, la duración del día es igual a la de la noche.

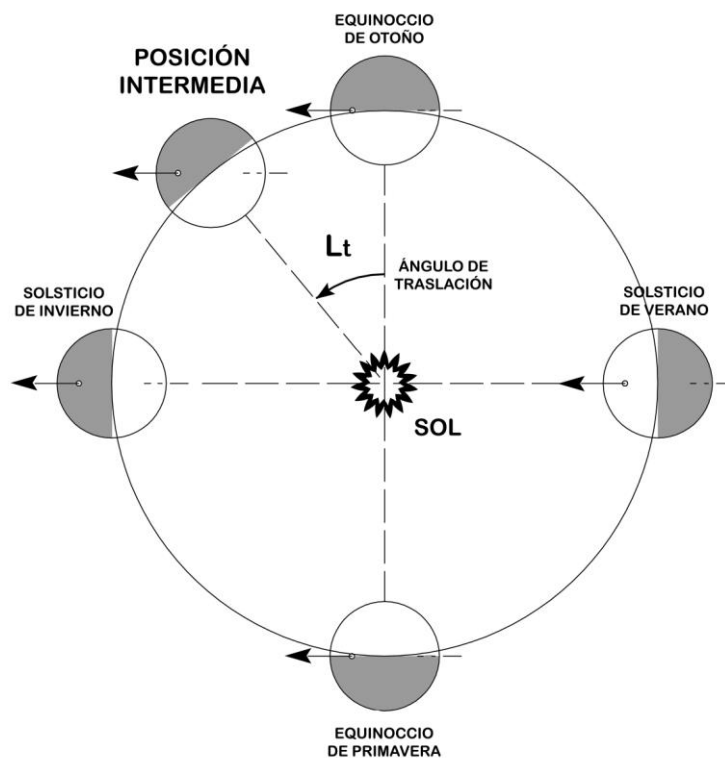
Nosotros elegiremos como origen de tiempos el equinoccio de otoño. Por esta razón, visualmente será más cómodo girar la fig. 2-3 anterior y representar la traslación

²¹ *Sensiblemente constante, como hemos visto en el punto correspondiente a la precesión.*

terrestre de acuerdo con la figura equivalente 2-4, en la que aparece el equinoccio de otoño en la zona superior de la misma.

Sobre ella marcamos ahora el origen de tiempos y el ángulo recorrido hasta un instante determinado por la Tierra debido a su movimiento de traslación alrededor del Sol, que denominaremos L_t .

En ese instante, el plano de sombra habrá girado exactamente el mismo ángulo L_t .

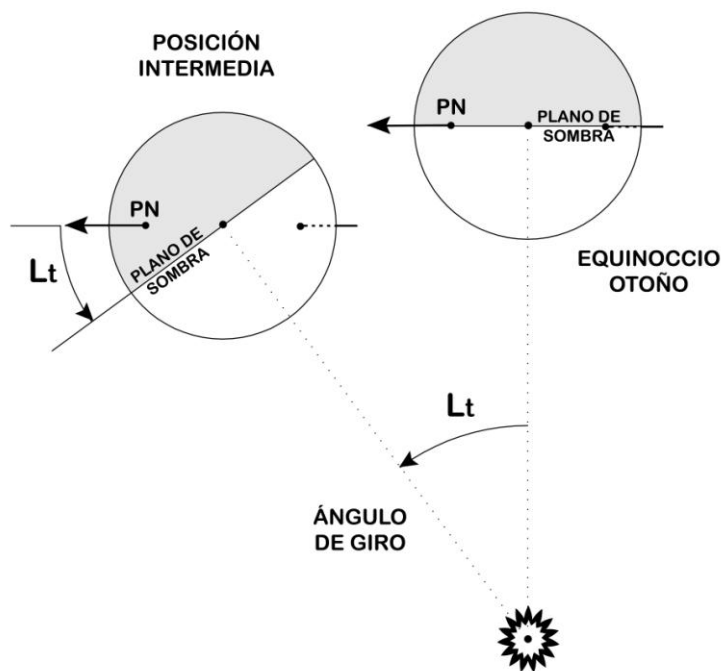


2-4. Definición de L_t respecto al equinoccio de otoño.

Una visión a mayor escala de la fig. 2-4 nos permite observar (fig. 2-5) la evolución de la posición relativa del plano de sombra en relación con la propia esfera terrestre.

Así, podemos comparar la posición para un instante cualquiera del plano de sombra y la correspondiente al equinoccio, obteniendo su representación en planta. Para cualquier cálculo sobre horas de Sol, instantes de amanecer y ocaso, trayectoria aparente del sol, etc., nos basaremos siempre en el ángulo del plano de sombra con otras referencias que tomaremos en la esfera terrestre.

Una simplificación gráfica consiste en representar solo la Tierra, con la posición de su eje fija, y con el plano de sombra girado en función de t . Esta consideración simplifica el problema geométrico, que se reduce a la determinación con carácter general de la intersección del plano de sombra con la superficie esférica en relación con el plano del ecuador terrestre y de su eje de giro, perpendicular a aquel. Este método será el que desarrollaremos más adelante para el cálculo de horas de Sol en cualquier instante y latitud.

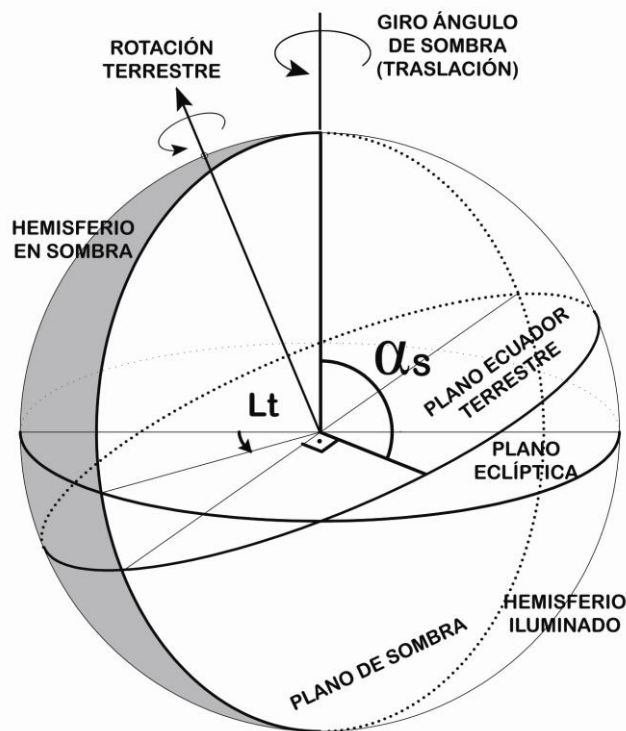


2-5. Plano de sombra y su variación en el tiempo.

2.2. DEFINICIÓN DEL ÁNGULO DIEDRO α_S ENTRE EL PLANO DE SOMBRA Y EL PLANO DEL ECUADOR TERRESTRE

Como ya hemos dicho, para una mayor simplicidad prescindiremos de la representación completa de la traslación, centrándonos en la esfera terrestre.

Si observamos la fig. 2-6, veremos las referencias más habituales sobre la esfera terrestre, utilizadas para caracterizar el plano de sombra y para definir su posición angular.



2-6. Plano de sombra en relación con los planos ecuatorial y de la eclíptica.

En primer lugar, el plano de la eclíptica tiene la particularidad geométrica de que, como hemos indicado anteriormente, el plano de sombra es perpendicular a él.

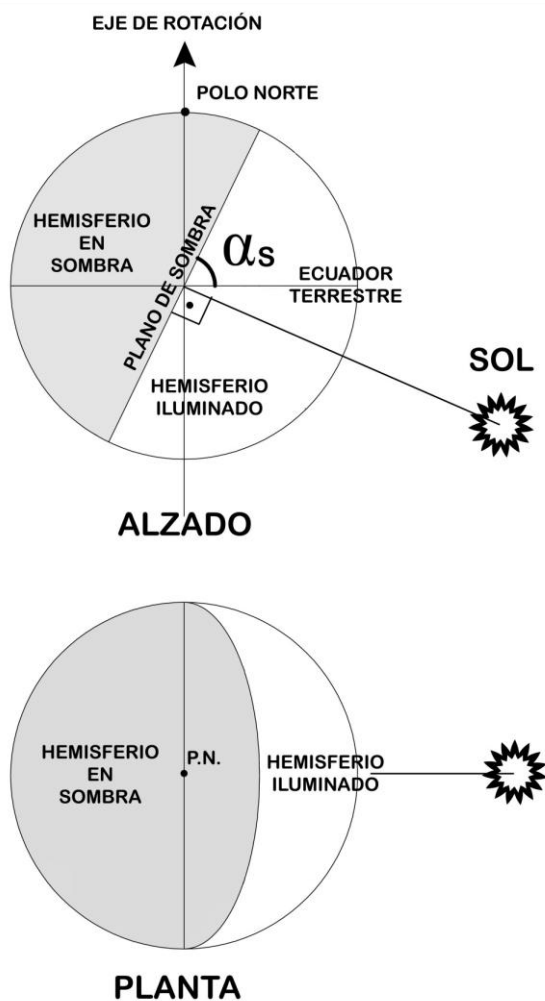
Nuestra segunda referencia fundamental es el plano que contiene al ecuador terrestre, y que forma con el plano de la eclíptica un ángulo ε .

Entonces podemos definir el ángulo α_s , o *ángulo del plano de sombra*, como el ángulo diedro entre el plano del ecuador terrestre y el plano de sombra.

En sucesivas deducciones utilizaremos secciones basadas en la figura anterior, orientando la esfera, situando en posición horizontal bien el plano del ecuador terrestre, bien el plano de la eclíptica, según nuestra conveniencia.

A este segundo caso correspondería una representación diédrica en planta y alzado indicando la posición del Sol, que nos será de utilidad para diferentes deducciones (ver fig. 2-7).

Es fácil intuir cómo variará α_s a lo largo del año. Para ello nos serviremos de la fig 2-8 en la que, para mayor simplicidad, hemos eliminado la representación de la esfera terrestre, dejando reducido el esquema a nuestros tres planos de referencia: planos del ecuador, de la eclíptica y de sombra.

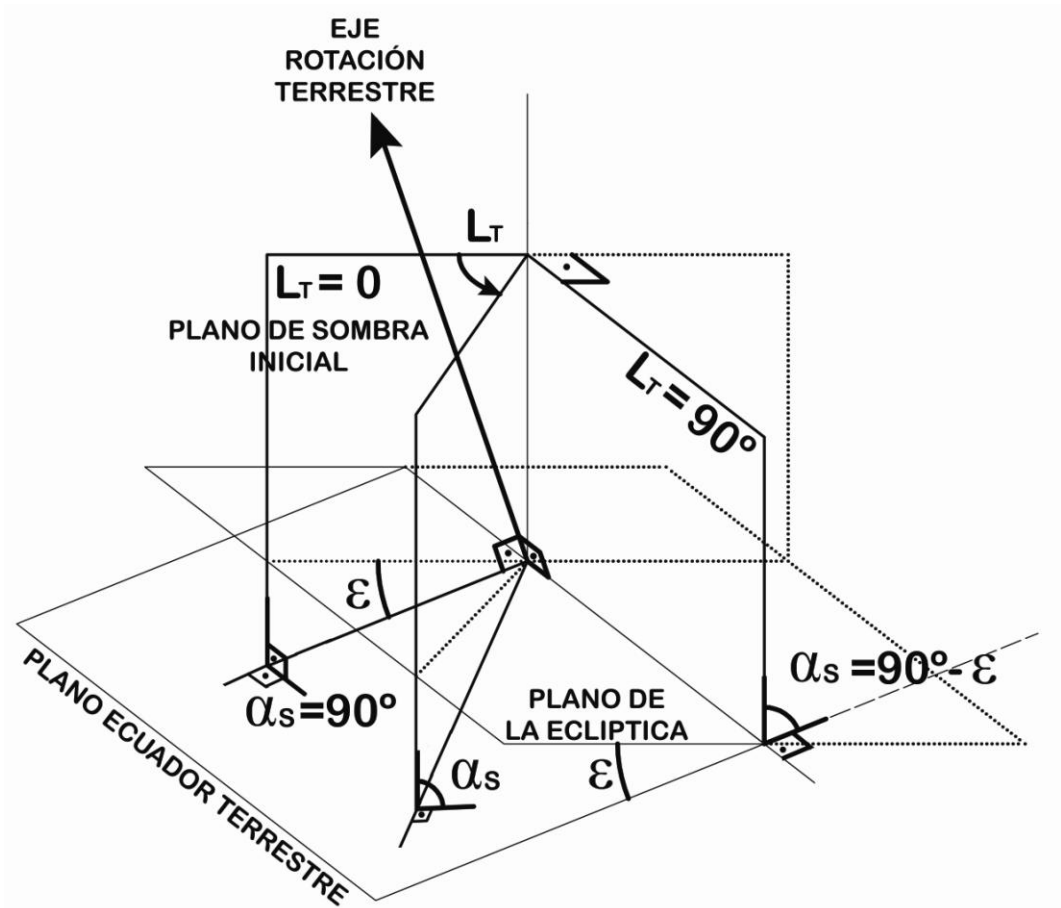


2-7. Planta y alzado del plano de sombra en relación con la esfera terrestre.

En el equinoccio de otoño, que tomaremos como instante inicial, con $L_t = 0^\circ$, el plano de sombra contiene, como hemos afirmado anteriormente, al eje de giro de la Tierra.

En este instante, el plano del ecuador terrestre y el de sombra forman un ángulo $\alpha_S = 90^\circ$, ya que el plano de sombra es perpendicular a la intersección entre el plano del ecuador terrestre y el plano de la eclíptica, por ser perpendicular a este último. A medida que L_t va aumentando, α_S disminuye hasta alcanzar su valor mínimo en el solsticio de invierno ($L_t = 90^\circ$). En ese momento, como puede verse en la fig. 2-8, $\alpha_S = 90^\circ - \varepsilon$. A partir de ese instante, α_S aumentará, hasta hacerse nuevamente $\alpha_S = 90^\circ$ en el equinoccio de primavera ($L_t = 180^\circ$). El valor de α_S seguirá creciendo hasta llegar a un valor máximo en el solsticio verano ($L_t = 270^\circ$), con un valor $\alpha_S = 90^\circ + \varepsilon$. Y a partir de ese instante, decrecerá hasta volver a alcanzar los 90° en el equinoccio de otoño

siguiente ($L_t = 360^\circ$ o, lo que es lo mismo, $L_t = 0^\circ$). Sobre estos extremos incidiremos más adelante.



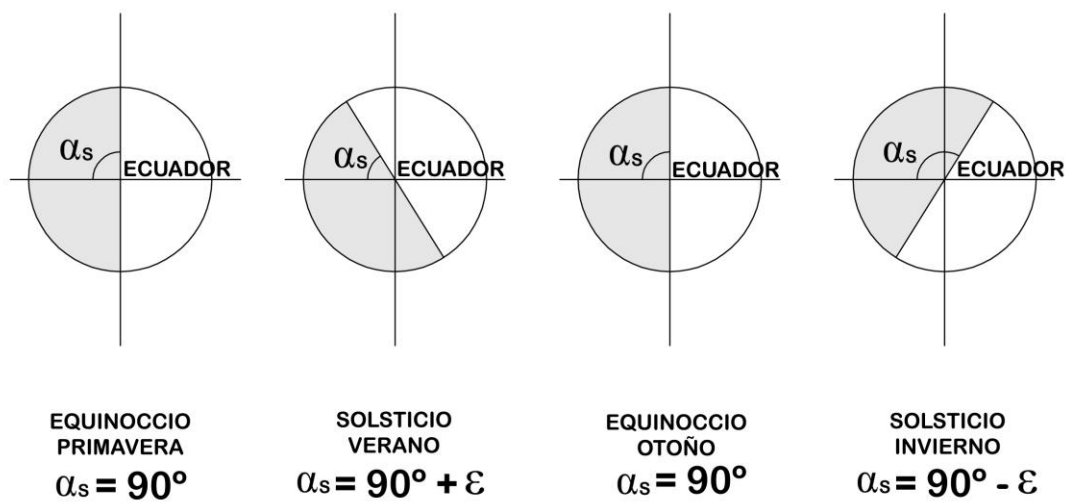
2-8. Efecto del giro del plano de sombra sobre el ángulo diedro α_S .

Las deducciones posteriores nos permitirán calcular el valor de ese ángulo α_S a lo largo del año.

Sin embargo, la observación de la figura 2-8 nos permite representar en alzado los valores de α_S en los cuatro puntos singulares de la órbita (fig. 2-9).

El ángulo α_S que, para cualquier instante y, por tanto, para cualquier L_t , forman el plano del ecuador y el plano de sombra, nos permitirá realizar multitud de cálculos predictivos, como por ejemplo, el número de horas de Sol en una fecha y latitud determinadas, horas de salida y puesta del Sol, etc.

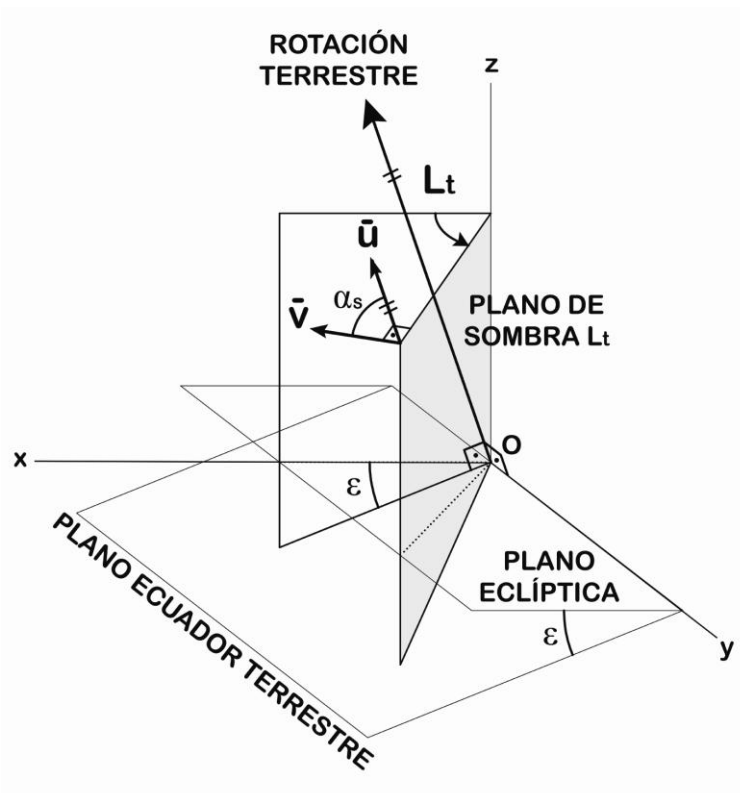
Definición del ángulo diedro α_S entre el plano de sombra y el plano del ecuador terrestre



2-9. Valores de α_s en solsticios y equinoccios.

2.3. CÁLCULO GRÁFICO DIRECTO DE α_S EN DIÉDRICA Y DEDUCCIÓN DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA A PARTIR DE LOS ABATIMIENTOS OBTENIDOS

Para el cálculo de α_S nos basaremos en la fig. 2-10. En ella representamos de forma simplificada la situación del plano de sombra y del ecuador terrestre cuando nuestro planeta ha recorrido a lo largo de su órbita un ángulo L_t desde el equinoccio de otoño.

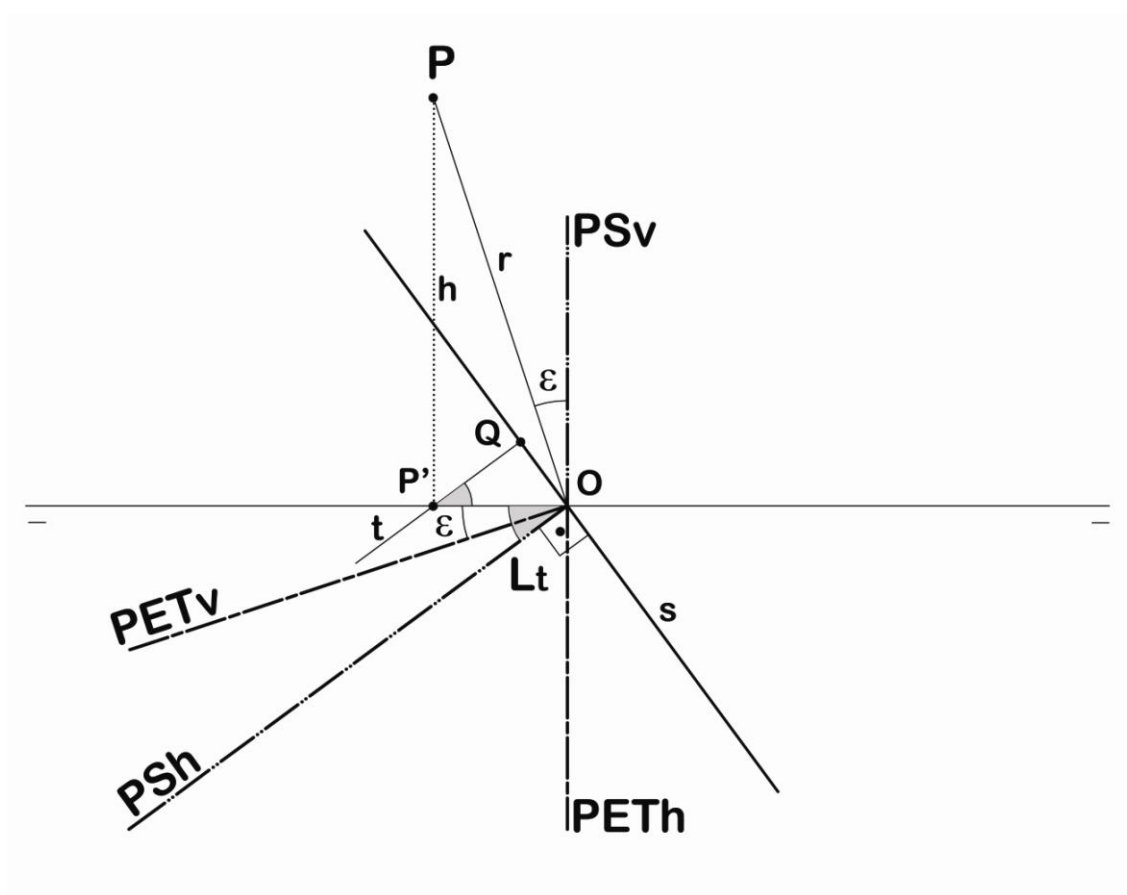


2-10. Definición de los vectores directores de los planos de sombra y del ecuador terrestre para su tratamiento en diédrica.

El ángulo α_S , o ángulo diedro entre los planos del ecuador terrestre y el de sombra será igualmente el formado por dos rectas perpendiculares a dichos planos en un punto común a los mismos. En la fig. 2-10 dichas rectas vendrían definidas por los vectores \vec{u} y \vec{v} . Sin embargo, en nuestro caso, el punto más adecuado en diédrica para situar dichas rectas es el origen O. El eje de rotación terrestre es perpendicular, lógicamente, al plano del ecuador y pasa por O.

Si representamos los elementos fundamentales de la fig. 2-10 en sistema diédrico, tendremos a su vez la fig. 2-11.

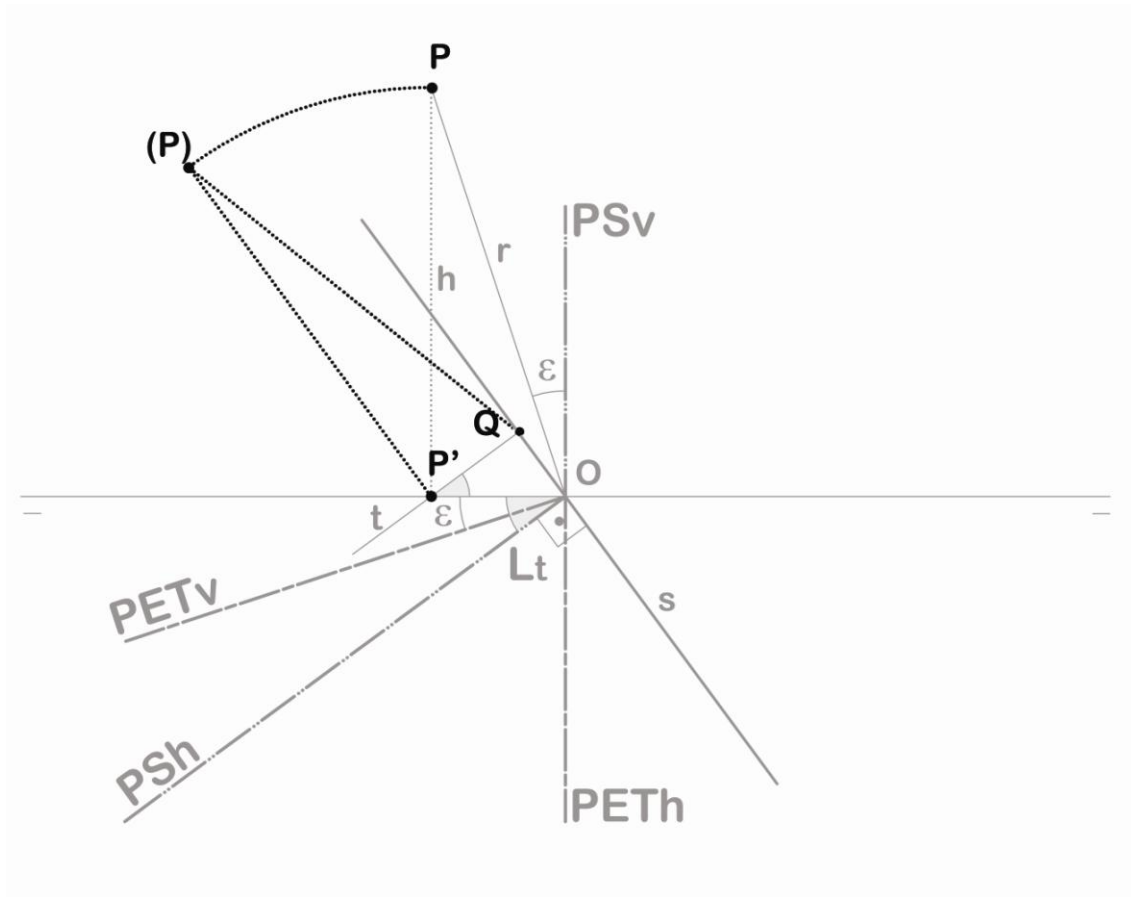
En ella, el eje de rotación terrestre está situado sobre la recta r , y están referenciados el plano del ecuador terrestre (trazas $PETH$ y $PETV$) y el plano de sombra (trazas PSH y PSV). Por otra parte, definir una perpendicular al plano de sombra desde O es muy sencillo. Dicha perpendicular, s , está contenida en el plano horizontal, que representa el plano de la eclíptica.



2-11. Representación diédrica de los elementos fundamentales de la fig 2-10.

Dado que nuestro problema consiste en determinar el ángulo α_S entre r y s en verdadera magnitud, nos interesa abatir r hasta el plano horizontal tomando s como eje. Para ello, tomaremos sobre r un punto arbitrario P , cuya cota será h y cuya proyección sobre el plano horizontal será P' . Por P' , trazaremos una recta t perpendicular a s , que cortará a dicha recta en Q .

Si realizamos un abatimiento auxiliar de r en torno a t (fig. 2-12), P pasará a ocupar (P) sobre el plano horizontal. El segmento que une Q y (P) nos da la longitud real de QP , que es el segmento que deseamos abatir sobre el plano horizontal en torno a s .



2-12. Abatimiento auxiliar de r en torno a t .

Para realizar este abatimiento (ver fig. 2-13), basta con tomar desde Q , y sobre t , la distancia $Q(P)$, con lo que obtendremos V . El segmento OV junto con la recta s son los que nos van a definir el ángulo α_S .

De esta construcción gráfica, habiendo representado ε y ω correctamente sobre el papel, podríamos obtener el valor de α_S con una razonable aproximación midiendo directamente con un transportador de ángulos. Sin embargo, es más conveniente deducir una expresión analítica para obtener el valor numérico de α_S lo más exacto posible.

Para dicho cálculo nos basaremos también en la fig. 2-13.

$$Q(P) = QV = \sqrt{QP'^2 + h^2} = OP \sqrt{\sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 L_t + \cos^2 \varepsilon}$$

Por lo que:

$$\tan \alpha_S = \frac{QV}{OQ} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 L_t + \cos^2 \varepsilon}}{\sin \varepsilon \cdot \sin L_t} \quad (\text{Ec. 2.1})$$

Expresión que podemos transformar de forma más sencilla y más cómoda para su uso teniendo en cuenta la conocida igualdad trigonométrica:

$$\cos \alpha_S = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha_S + 1}}$$

Así, sustituyendo (Ec. 2.1) en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_S &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 L_t + \cos^2 \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon \cdot \sin^2 L_t}}} = \\ &= \frac{\sin \varepsilon \cdot \sin L_t}{\sqrt{\sin^2 \varepsilon \cdot \sin^2 L_t + \sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 L_t + \cos^2 \varepsilon}} = \\ &= \frac{\sin L_t \cdot \tan \varepsilon}{\sqrt{\sin^2 \varepsilon \cdot (1 - \cos^2 L_t) + \sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 L_t + \cos^2 \varepsilon}} = \sin L_t \cdot \sin \varepsilon \end{aligned}$$

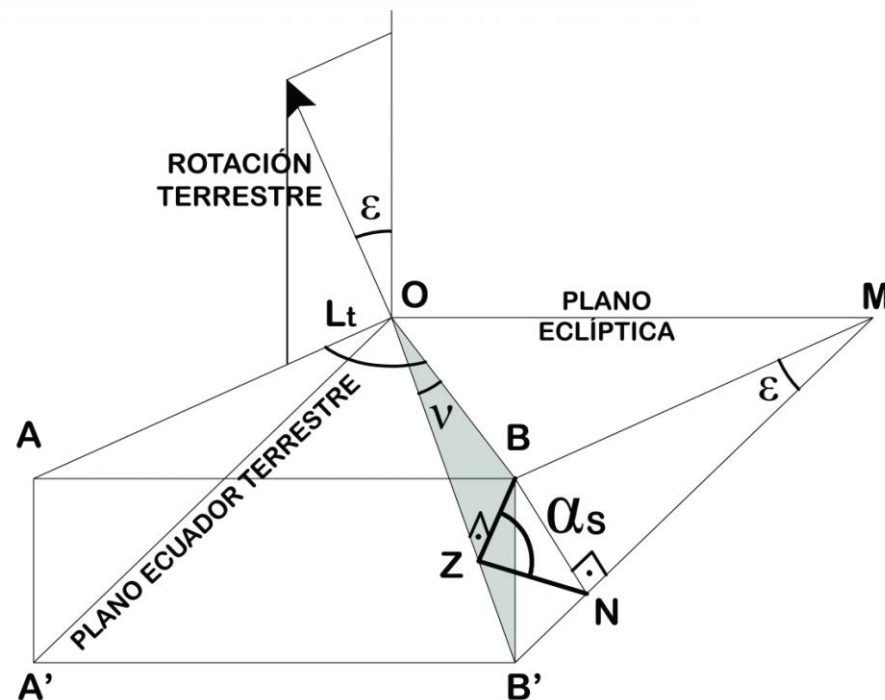
Es decir:

$$\cos \alpha_S = \sin L_t \cdot \sin \varepsilon$$

Que es la expresión buscada, y que relaciona el ángulo del plano de sombra con el giro en traslación desde el equinoccio de primavera y con la inclinación del eje de rotación con respecto a la normal al plano de la eclíptica.

2.4. DEDUCCIÓN ALTERNATIVA DE α_S MEDIANTE GEOMETRÍA PLANA Y PLANOS AUXILIARES

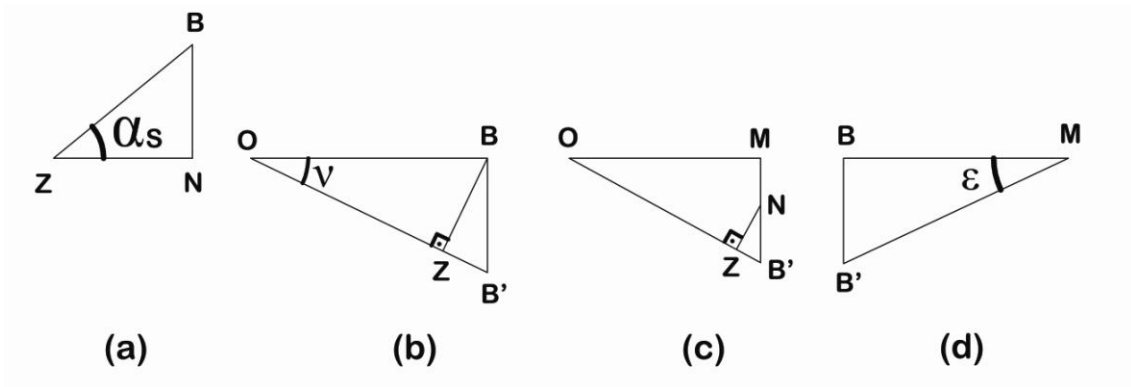
Una deducción analítica alternativa de α_S es la basada directamente en el esquema espacial que representa los elementos fundamentales de la situación relativa de los planos del ecuador y de sombra (fig. 2-14) y en la aplicación de diferentes cortes mediante planos auxiliares.



2-14. Giro L_t del plano de sombra respecto al ecuador y eclíptica.

Para ello, según vemos en dicha figura, tomaremos el ángulo auxiliar v entre la intersección del plano de sombra con el ecuador terrestre y la intersección de aquel con el de la eclíptica cuando el plano de sombra ha girado un ángulo L_t desde el equinoccio de otoño (posición inicial OA). A continuación, vamos a obtener las relaciones entre L_t , ϵ y α_s . El ángulo α_s queda definido por BZN, donde ZN es perpendicular a B'O, recta intersección del ángulo de sombra con el plano del ecuador, ya que BZ, por tratarse de un ángulo diedro, es la recta de máxima pendiente del plano de sombra visto este desde el plano del ecuador. Por esta misma razón, BN será perpendicular a B'M, siendo N la proyección ortogonal de B sobre el plano del ecuador terrestre.

De este esquema geométrico vamos a extraer los diferentes triángulos que utilizaremos para, mediante relaciones trigonométricas sencillas y criterios de semejanza, obtener de un modo sencillo el ángulo α_S entre el plano de sombra y el plano del ecuador terrestre. Ver fig. 2-15.



2-15. Triángulos auxiliares de corte para el cálculo de α_S .

De la fig. 2-15 (a) tenemos que:

$$\cos \alpha_S = \frac{NZ}{BZ} \quad (\text{Ec. 2.2})$$

De la fig. 2-15 (b),

$$BZ = OB \cdot \sin \nu$$

Pero

$$\frac{OM}{OB} = \sin L_t$$

por lo que,

$$BZ = \frac{OM}{\sin L_t} \cdot \sin \nu$$

De donde, sustituyendo en (Ec. 2.2)

$$\cos \alpha_S = \frac{NZ \cdot \sin L_t}{OM \cdot \sin \nu} \quad (\text{Ec. 2.3})$$

Ahora, de 2-15 (c) tenemos, por semejanza de triángulos, que

$$\frac{NZ}{OM} = \frac{B'Z}{B'M} \quad (\text{Ec. 2.4})$$

Pero de 2-15(b) obtenemos

$$\frac{B'Z}{BZ} = \frac{BB'}{OB} \Rightarrow B'Z = \frac{BZ \cdot BB'}{OB}$$

De esta forma, entrando en (Ec. 2.4) y sustituyendo finalmente de acuerdo con las secciones 2-15 (b) y 2-15 (d).

$$\frac{NZ}{OM} = \frac{BZ \cdot BB'}{OB \cdot BM} = \sin \nu \cdot \sin \varepsilon$$

Y así, de (Ec. 2.3) obtenemos:

$$\cos \alpha_S = \frac{NZ \cdot \sin L_t}{OM \cdot \sin \nu} = \sin L_t \cdot \sin \varepsilon$$

Es decir, finalmente,

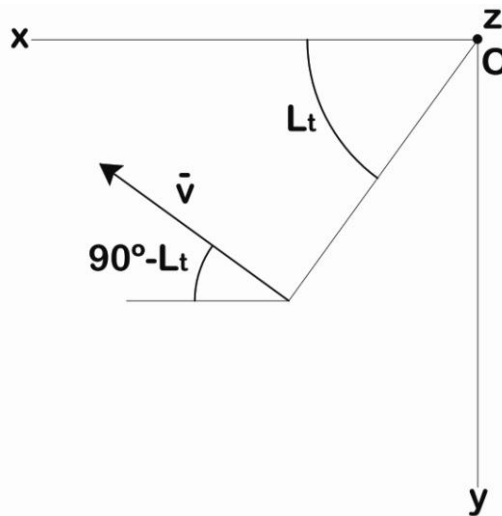
$$\cos \alpha_S = \sin L_t \cdot \sin \varepsilon$$

2.5. PROCESO ALTERNATIVO DE CÁLCULO DE α_S MEDIANTE EL ANÁLISIS VECTORIAL

Para quienes estén mínimamente familiarizados con el análisis vectorial, estos cálculos puede simplificarse notablemente una vez que conocemos las variables del movimiento terrestre y las hemos localizado conceptualmente en esquemas bi- y tridimensionales sencillos.

En efecto, según podemos ver en la fig. 2-10 del apartado 2.3., si \vec{u} es el vector unitario director del plano del ecuador, y por tanto, paralelo al eje de rotación terrestre, y \vec{v} el vector unitario director del plano de sombra genérico, y por tanto perpendicular a dicho plano, para calcular el ángulo que forman dichos planos bastará con determinar el ángulo que forman dichos vectores.

Para hallar las componentes de \vec{u} y \vec{v} , además de la fig. 2-10, podemos servirnos de la fig. 2-16, donde se puede ver en planta el detalle de \vec{v} como vector director del plano de sombra.



2-16. Planta en diédrica del plano de sombra y su vector director \vec{v} .

por lo que tendremos:

$$\begin{cases} \vec{v} = \cos(90^\circ - Lt) \cdot \vec{i} - \sin(90^\circ - Lt) \cdot \vec{j} = \sin Lt \cdot \vec{i} - \cos Lt \cdot \vec{j} \\ \vec{u} = \sin \varepsilon \cdot \vec{i} + \cos \varepsilon \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son los vectores directores de los ejes x, y, z respectivamente. Como fácilmente puede comprobarse, \vec{u} y \vec{v} son vectores unitarios.

Por ello, aplicando la definición de producto escalar a los vectores \vec{u} y \vec{v} , tenemos que:

$$\cos \alpha_S = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \sin L_t \cdot \sin \varepsilon$$

Que coincide con la expresión deducida en 2.3 .y 2.4.

2.6. LOS ÁNGULOS α_S Y L_T Y SUS EQUIVALENTES EN ASTRONOMÍA CLÁSICA

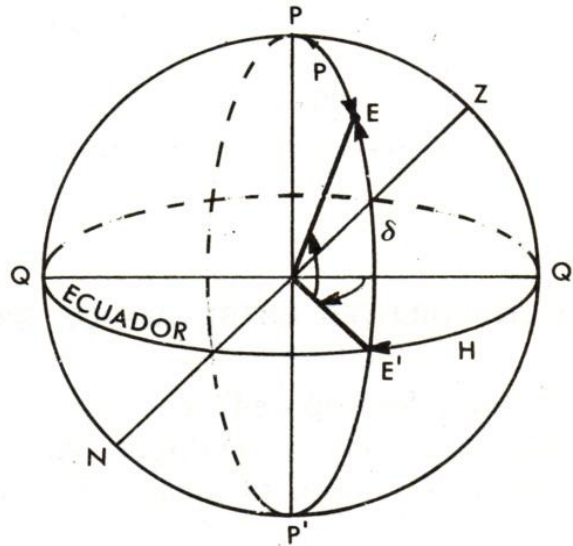
Los ángulos α_S y L_t obtenidos anteriormente nos resultarán muy útiles en posteriores deducciones debido a su sencilla visualización. No obstante, para el estudioso es interesante observar el paralelismo entre las magnitudes angulares que se vayan deduciendo y las que pueda encontrar en manuales, anuarios y almanaques, y que a lo largo de los años se han ido decantando hacia una nomenclatura normalizada. Por ello, analizamos a continuación estos paralelismos.

2.6.1. EL ÁNGULO α_S Y LA DECLINACIÓN SOLAR δ

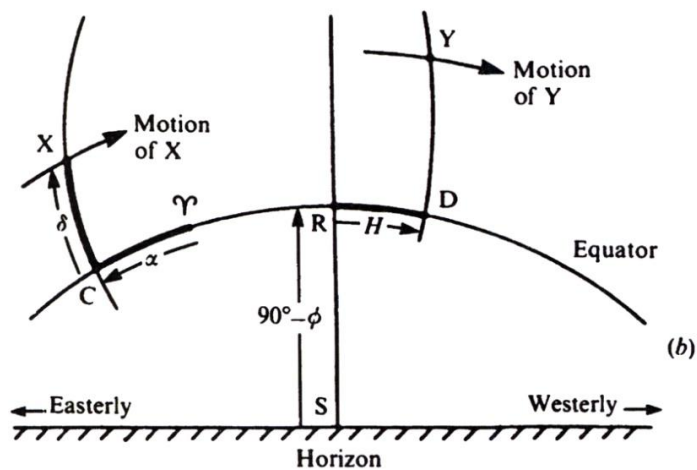
Uno de los conceptos a los que nos referimos es el de la *declinación solar*, simbolizada por δ , presente en todos los estudios y procesos de cálculo astronómico. Un inconveniente para quien se adentra en el estudio del movimiento aparente del Sol puede ser, precisamente, su definición, pues habitualmente se introduce este concepto en el contexto del análisis del movimiento aparente de los astros en general y, a partir de aquí, debe particularizarse para el Sol. Tomamos como ejemplo la definición que presenta F. Martín Asín [5]: “*es el arco meridiano en grados EE’ desde el ecuador a la estrella*” (fig. 2-17). Se define en su obra citada dentro del capítulo dedicado a las coordenadas ecuatoriales horarias.

Análogamente, aunque con una representación gráfica menos intuitiva, Peter Duffett Smith [10] lo define como²² “*el arco XC, o ángulo COX, que nos indica la distancia desde el ecuador en dirección Norte, [de la estrella]*” (fig. 2-18), cuestión que plantea el autor en el transcurso de su capítulo sobre sistemas de coordenadas, y en concreto sobre las coordenadas ecuatoriales.

²² Es traducción libre

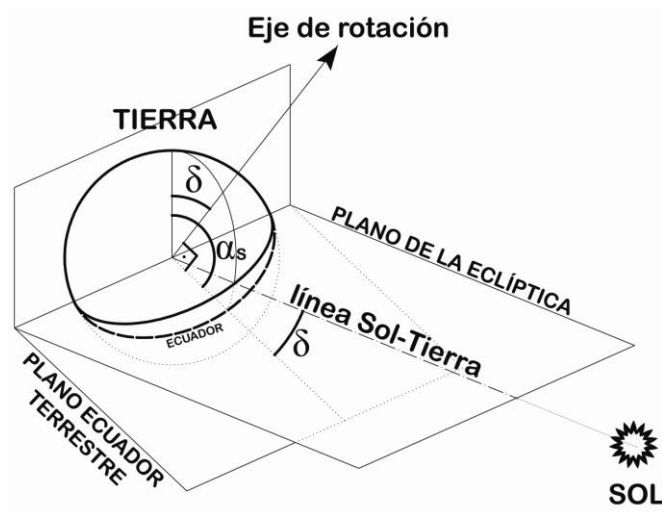


2-17. Definición de la declinación .F. Martín Asín. "Astronomía".
© Ed. Paraninfo,1982 [5].



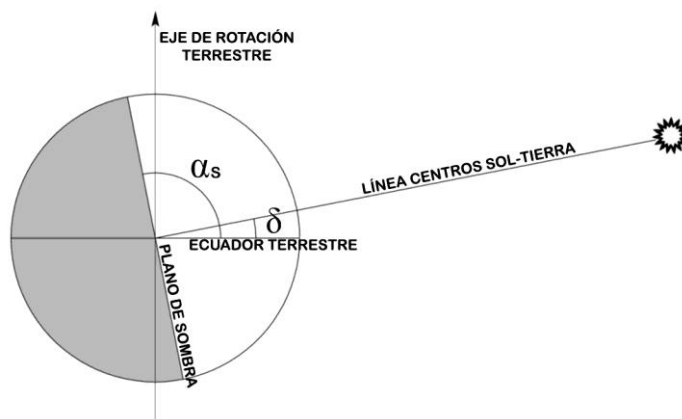
2-18. Definición de la declinación.P. Duffett-Smith. "Practical Astronomy with your
Calculator". © Cambridge University Press,1980. [10].

Dado que nuestro objetivo es simplificar al máximo el proceso de aprendizaje que nos ocupa, bastará con que definamos la declinación solar como *el ángulo que forma línea Tierra-Sol con su proyección sobre el plano del ecuador terrestre* (fig. 2-19):



2-19. Declinación solar.

Que podemos representar en alzado, con el eje de rotación en la vertical (fig. 2-20):



2-20. Declinación solar en diédrica. Alzado.

Cuando la línea Tierra-Sol se sitúa por encima del ecuador terrestre, $\delta > 0$. Es negativo en caso contrario.

Es fácil observar que la línea Tierra-Sol es perpendicular al plano de sombra, por lo que podemos escribir:

$$\alpha_s = \delta + 90^\circ \quad (\text{Ec. 2.5})$$

Por tanto, el paso de las relaciones trigonométricas de α_s a δ será:

$$\sin \alpha_S = \cos \delta$$

$$\cos \alpha_S = -\sin \delta$$

$$\tan \alpha_S = -\frac{1}{\tan \delta}$$

Expresión a la que aludiremos frecuentemente en lo sucesivo, siempre que, después de utilizar α_S por sencillez de procedimiento, queramos homogeneizar expresiones con las habituales en Astronomía clásica.

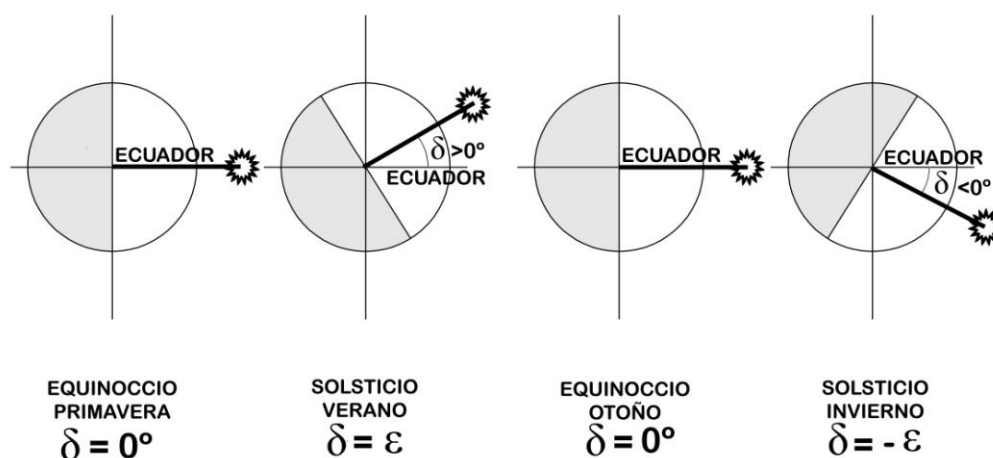
En concreto, la expresión

$$\cos \alpha_S = \sin L_t \cdot \sin \varepsilon$$

Se puede reescribir como:

$$\sin \delta = -\sin L_t \cdot \sin \varepsilon$$

Fórmula, por otra parte, presente en todos los tratados de Astronomía²³. Estableciendo una similitud con la fig. 2-9, podemos representar los valores de la declinación en los puntos singulares de la órbita, esto es, solsticios y equinoccios (fig. 2-21).



2-21. La declinación en solsticios y equinoccios.

²³ Tengamos en cuenta dos cuestiones: en primer lugar, en nuestro sistema hemos considerado como origen de ángulos el equinoccio de otoño. Por ello no debe extrañarnos ver el signo cambiado con respecto a los habituales modelos geocéntricos presentes en los tratados de Astronomía y páginas web de divulgación, como veremos a continuación. En ellos se sitúa el origen de L en el equinoccio de primavera.

En segundo lugar, podemos encontrar expresiones más complejas para δ , en las que se incluye otra nueva variable. Se trata de la generalización de la declinación para órbitas alabeadas, cuya expresión deduciremos en los últimos capítulos de esta obra.

En nuestro caso, como queda indicado en la fig. 2-21, se tiene

$\delta = 0^\circ$	en los equinoccios.
$\delta > 0^\circ$	entre el equinoccio de primavera y el solsticio de verano.
$\delta = \varepsilon$	en el solsticio de verano.
$\delta > 0^\circ$	entre el equinoccio de primavera y el solsticio de verano.
$\delta = 0^\circ$	en el equinoccio de otoño.
$\delta < 0^\circ$	entre el equinoccio de otoño y el solsticio de invierno.
$\delta = -\varepsilon$	en el solsticio de invierno.
$\delta < 0^\circ$	entre el solsticio de invierno y el equinoccio de primavera.

2.6.2. EL ÁNGULO L_T . SISTEMA HELIOCÉNTRICO VS. SISTEMA GEOCÉNTRICO

La Astronomía clásica utiliza también los equinoccios como origen de ángulos. El ángulo girado por la Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol desde el origen se conoce en Astronomía como *longitud* y se denomina L . Hemos adoptado una nomenclatura similar por razones prácticas, dado que en otras partes de esta tesis estudiaremos los procedimientos para el cálculo de dicho ángulo a partir de los métodos más utilizados en la actualidad. Sin embargo, nuestro ángulo L_t no coincide exactamente con L . En esta fase del estudio, podemos afirmar que nuestro L_t es el resultado de aplicar unas correcciones que se analizarán más adelante al valor astronómico L . Como ejemplo de una de estas correcciones podemos citar la aberración de la luz: cuando los rayos salen del Sol estando la Tierra situada en una cierta posición L_1 , llegan a esta cuando se encuentra ya en una posición orbital correspondiente a L_2 . Los datos obtenidos para el instante determinado mediante los correspondientes algoritmos de cálculo nos indicarán que la Tierra está en L_2 , pero, a efectos de percepción del Sol, con todas las implicaciones de tipo angular que ello conlleva, consideraremos que la situación de la Tierra viene dada por el valor corregido L_1 . Esta cuestión, unida al fenómeno de la nutación, o variación oscilatoria de ε , se analizará, como se ha dicho anteriormente, en capítulos posteriores.

Hasta aquí, no hay ninguna discrepancia conceptual con nuestro sistema. Sin embargo, hay que hacer constar que existen diferentes criterios a la hora de elegir el equinoccio de primavera o el de otoño como origen de ángulos. Vamos a analizarlos a continuación.

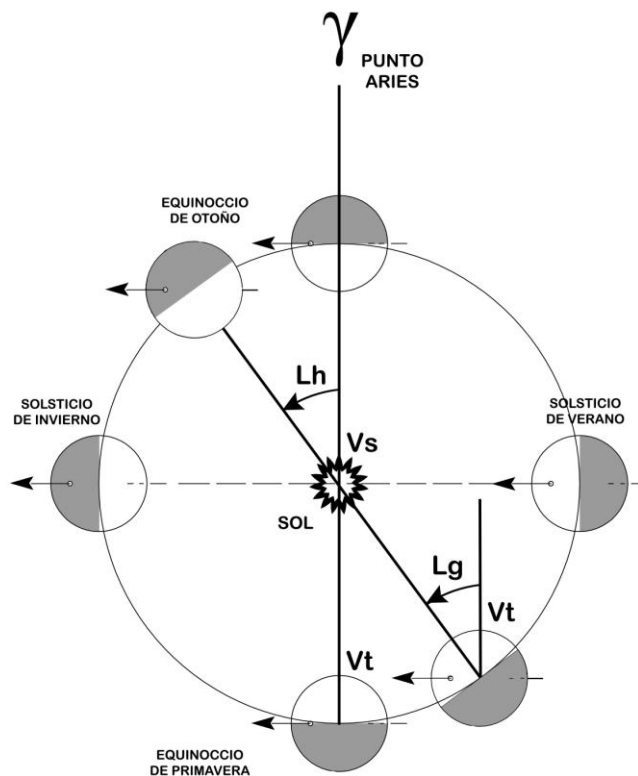
2.6.3. EL PUNTO ARIES

El comienzo de la primavera es conocido habitualmente como el paso del Sol por el punto Aries, denominado abreviadamente γ . Este “punto” del universo recibe diferentes denominaciones en Astronomía. Para empezar, debemos aclarar que se trata de una dirección convencional, cambiante a lo largo del tiempo, debido al fenómeno de la *precesión de los equinoccios*. Por tanto, no se trata de un punto fijo, sino giratorio. Una definición clásica es la de F.Martín[5]: “*el punto Aries, o punto vernal, o equinoccio de Primavera es la posición que ocupa el centro del Sol cuando atraviesa el Ecuador,*

siendo su declinación $\delta = 0$, pasando en él de negativa a positiva”. Siendo así, aparentemente deberíamos haber tomado como origen de L el equinoccio de primavera. Sin embargo, no hay contradicción ninguna tomando el origen en el equinoccio de otoño. Para ello nos fijaremos en la fig. 2-22.

Si suponemos un observador situado sobre la Tierra, en el instante del equinoccio de primavera verá el Sol cruzar el ecuador y, por tanto, de acuerdo con la definición anterior, alineado con el punto Aries. En un instante posterior t de su traslación, el Sol habrá girado, aparentemente, un ángulo L_g con respecto a la primitiva dirección Aries. En el equinoccio de otoño, el giro acumulado será de 180° .

Supongamos ahora un observador situado en el Sol (*modelo heliocéntrico*). En el instante del equinoccio de otoño, el observador verá el mismo “punto” convencional Aries, pero alineado con la posición teórica que tendría la Tierra en el equinoccio de otoño. El origen de ángulos será $L_h = 0$. Transcurrido el mismo t desde dicho instante, la Tierra se vería bajo un ángulo L_h . Los ángulos L_g y L_h relativos son idénticos, como puede verse en la figura. Sin embargo, sus orígenes distan 180° , pues para el observador situado sobre el Sol, cuando la Tierra esté en el punto de la órbita correspondiente al equinoccio de primavera²⁴, $L_h = 180^\circ$.



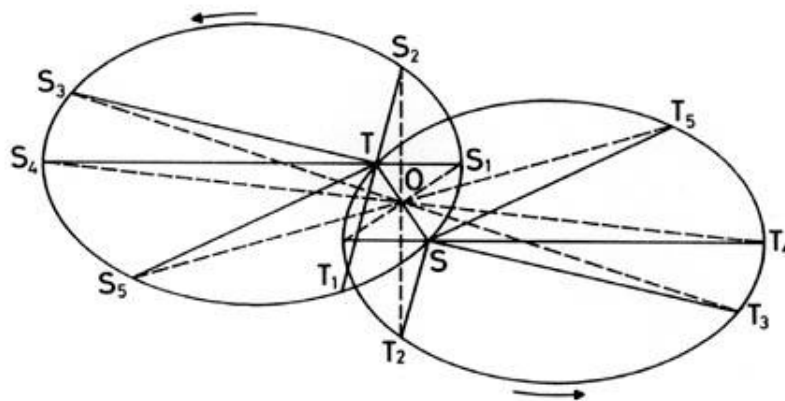
2-22. Orígenes de ángulos en los sistemas heliocéntrico y geocéntrico. Ángulos de referencia.

²⁴ Ello explica las diferencias de signo aludidas anteriormente.

En nuestro caso, con el origen de ángulos adoptado, es decir, el equinoccio de otoño, estamos utilizando un L heliocéntrico: nuestro modelo es, por tanto, heliocéntrico, con el Sol inmóvil y la Tierra girando a su alrededor. En el caso contrario, estamos ante un modelo geocéntrico, que presupone, para mayor simplicidad, la Tierra inmóvil y el Sol girando a lo largo del año sobre la bóveda celeste alrededor de la Tierra.

El siguiente párrafo, de Orús & alt., extraído de [6], nos resulta, junto con la fig. 2-23 de la misma obra, en la que se comparan la órbita real heliocéntrica con la aparente geocéntrica, suficientemente aclaratorio:

“La órbita aparente del Sol es, pues, una elipse simétrica de la de la Tierra alrededor del Sol, con respecto al punto O medio del segmento TS . En el plano de la eclíptica, común a ambas órbitas, cuando la Tierra se encuentra en el perihelio T_1 o en el afelio T_4 (extremos del semieje mayor de la elipse o línea de los ápsides), el Sol se proyecta sobre el perigeo S_1 o apogeo S_4 de su órbita aparente, respectivamente. Asimismo, al entrar la Tierra en cada uno de los signos del zodiaco decimos que el Sol entra en el situado a 180° de cada uno de ellos (por ejemplo, el Sol entra en Aries cuando la Tierra lo hace en Libra, etc.”.



2-23. Relación entre la órbita elíptica terrestre real (T) y la solar aparente (S). Orús Navarro & alt. “Astronomía esférica y mecánica celeste”. © Ediciones de la Universidad de Barcelona, 2007. [6]

2.6.4. PRECISIONES SOBRE LOS EQUINOCCIOS: POSICIÓN APARENTE DEL SOL

El concepto de equinoccio es, aparentemente, muy sencillo, como hemos comprobado anteriormente. Sin embargo, hay algunas precisiones de importancia que deben ser puestas de manifiesto.

De acuerdo con lo indicado en 2.6.2., una cuestión importante, como veíamos, es la velocidad de la luz, cuyo valor es finito ($c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$) [17]. Es decir,

aproximadamente, 300.000 km/s. La distancia media de la Tierra al Sol es de 149.598.000 km[17]. Por lo tanto, la luz tarda en llegar a la Tierra desde el Sol aproximadamente 499 segundos. Dado que la Tierra tarda un año en completar su traslación (360°) en aproximadamente 365,25 días, tendremos que cuando el Sol parece estar en una posición determinada visto desde la Tierra, realmente esta ha avanzado ya $\sim 0,057^\circ$ en su órbita. Así pues, una aproximación más correcta del concepto de solsticio y equinoccio es, por ejemplo, la que presenta Jean Meeus [9]:

“...the times of the equinoxes and solstices are the instants when the apparent geocentric longitude of the Sun (that is, calculated by including the effects of aberration and nutation) is an integer multiple of 90 degrees”.

En nuestro sistema, L_t es la longitud heliocéntrica, pero, tal y como la hemos definido, conviene tener en cuenta que sería la *longitud aparente de la Tierra*. En efecto, hemos establecido que, en los equinoccios, el radio Tierra-Sol es perpendicular al plano de sombra, pero, lógicamente, nos referimos a la posición aparente de la Tierra respecto al Sol. Por tanto, tenemos que definir claramente cómo se mide el ángulo L_t y cómo interpretar los datos de L en los anuarios y manuales.

Lo que encontramos en los manuales como L , (longitud heliocéntrica en este caso; suele ser frecuente que sea geocéntrica), nos indica la posición real de la Tierra sin correcciones. Un poco más complicado puede resultar definir el origen de referencia de este ángulo. Para ello, observemos la fig. 2-24

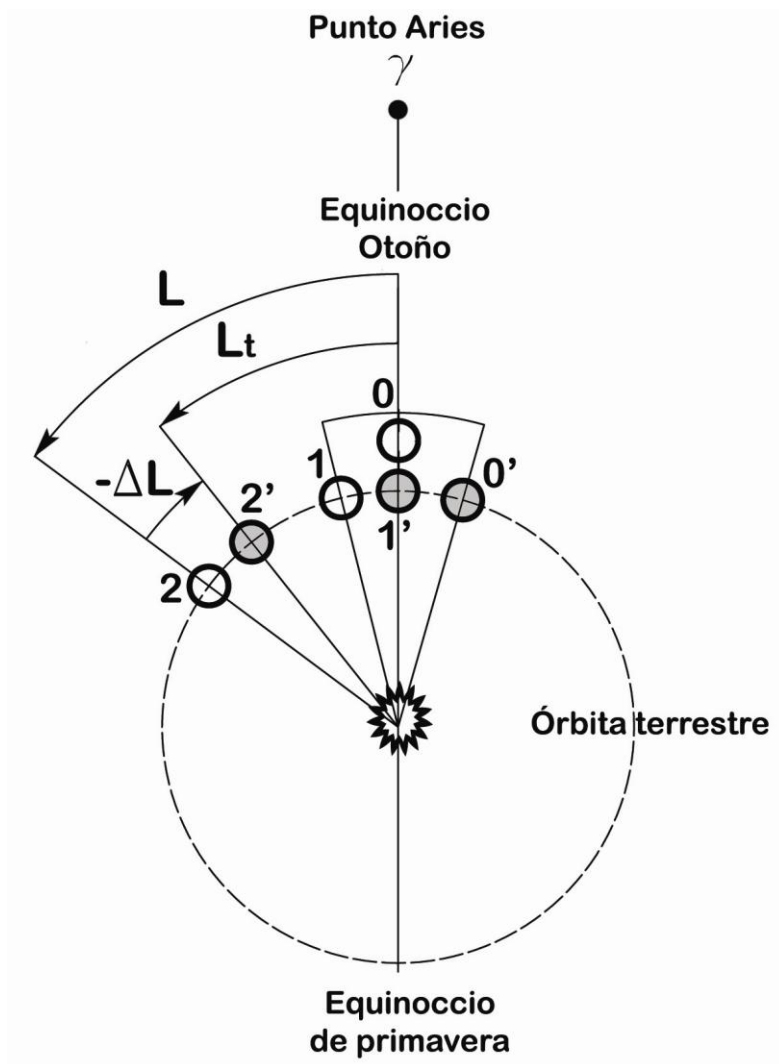
El equinoccio de otoño se produce cuando la Tierra, vista desde el Sol, está aparentemente en 1' (vistas aparentes, sombreadas). Realmente se situaría en 1. Luego el origen de ángulos para la posición real de la Tierra, L , será 0, que coincidirá con 1'.

No tiene ninguna trascendencia que cuando la Tierra real está en 0 se perciba desde el Sol como 0'.

Cuando la Tierra real se sitúe en 2, será percibida desde el Sol como 2'. Por ello, el ángulo que nos interesa de cara a nuestros cálculos es $L_t = L - \Delta L$.

Esta corrección, como se indicó en el apartado 2.6.2., se conoce también como *corrección por aberración* (de la luz), y nos volveremos a referir a ella en otro capítulo posterior, pues su valor, que depende de la distancia Tierra-Sol, puede obtenerse a partir de una constante.

Otro asunto que debe tenerse en cuenta, como ya se adelantó, es el de la nutación, que afecta a la orientación del eje terrestre, al igual que otros factores, y cuya descripción dejamos íntegramente para capítulos posteriores.



2-24. Equinoccio otoñal: la posición aparente del Sol como origen de ángulos.

2.6.5. LA LONGITUD L_T SEGÚN DIFERENTES FUENTES

Tanto si queremos utilizar valores de L tomados de fuentes exteriores directamente, como si deseamos comparar mediante las mismas nuestros propios cálculos, nos encontraremos con el problema de que diferentes autores o almanaques nos ofrecen diferentes valores de L para las mismas fechas. Ello se debe a la cuestión mencionada anteriormente de que el sistema de coordenadas elegido por el autor sea heliocéntrico o geocéntrico. Distinguir ante qué caso nos encontramos es tan sencillo como comprobar los valores presentados para L en los equinoccios, o en los meses de marzo o septiembre.

Si en el equinoccio de primavera $L = 180^\circ$, nos encontramos ante un sistema heliocéntrico, compatible con nuestras expresiones angulares. Si en la misma circunstancia tenemos $L = 0^\circ$, estaremos ante un sistema geocéntrico. En este último caso, para utilizar los valores de L en nuestras fórmulas, bastará con añadir 180° a los del almanaque considerado. Es conveniente utilizar en estos casos la función *módulo*, de tal forma que, para un ángulo resultante mayor de 360° , nos devuelva el ángulo equivalente de menor módulo. Por ejemplo, $\text{mod}_{360}(400^\circ) = 40^\circ$.

Otra cuestión de importancia: puede llevarnos a confusión encontrarnos con diferentes valores de L en tablas que aparentemente son equivalentes. Por ejemplo, si observamos las diferencias para los meses de marzo y septiembre de 2017 según el MICA (Multiyear Interactive Computer Almanac) [33] (sistema heliocéntrico) o la aplicación informática simplificada de la NOAA [20] (sistema geocéntrico), en la Tabla 2-1 y la Tabla 2-2 observaremos discrepancias aparentes de gran importancia. En ellas hemos sombreado los valores de las fechas de transición más próximas al equinoccio. Aparte de la diferencia de 180° , nos encontramos con un error próximo a $0,24^\circ$, que para cualquier cálculo astronómico es inadmisibles. La explicación se encuentra en el propio enunciado de las tablas.

En el caso del MICA se establece que los valores heliocéntricos tienen origen en el equinoccio 2000.0, mientras que en el de la NOAA los datos se refieren (aunque no se indique explícitamente) al valor teórico del equinoccio en la fecha considerada.

Tabla 2-1. Valores de L obtenidos del MICA [20] para marzo 2017.
 Referencia heliocéntrica referida al equinoccio en J2000,0.

Earth. Heliocentric Ecliptic positions. Mean Ecliptic and Equinox of J2000.0

	Date		Time	Longitude	Latitude	Distance
2017	Mar	1	0:00:00	160,35728	-0,00035	0,990842838
2017	Mar	2	0:00:00	161,36117	-0,00029	0,991082027
2017	Mar	3	0:00:00	162,36451	-0,00023	0,991322755
2017	Mar	4	0:00:00	163,36727	-0,00018	0,991565213
2017	Mar	5	0:00:00	164,36944	-0,00014	0,99180964
2017	Mar	6	0:00:00	165,37101	-0,00011	0,992056301
2017	Mar	7	0:00:00	166,37198	-0,00009	0,992305462
2017	Mar	8	0:00:00	167,37235	-0,00008	0,99255737
2017	Mar	9	0:00:00	168,37213	-0,00007	0,992812238
2017	Mar	10	0:00:00	169,37132	-0,00006	0,993070222
2017	Mar	11	0:00:00	170,36994	-0,00006	0,993331419
2017	Mar	12	0:00:00	171,368	-0,00006	0,993595854
2017	Mar	13	0:00:00	172,36551	-0,00006	0,993863488
2017	Mar	14	0:00:00	173,36248	-0,00005	0,994134213
2017	Mar	15	0:00:00	174,35894	-0,00004	0,99440787
2017	Mar	16	0:00:00	175,35489	-0,00002	0,994684252
2017	Mar	17	0:00:00	176,35033	0,00000	0,99496312
2017	Mar	18	0:00:00	177,34528	0,00003	0,995244208
2017	Mar	19	0:00:00	178,33975	0,00007	0,995527233
2017	Mar	20	0:00:00	179,33372	0,00012	0,995811896
2017	Mar	21	0:00:00	180,32722	0,00017	0,996097887
2017	Mar	22	0:00:00	181,32022	0,00024	0,996384884
2017	Mar	23	0:00:00	182,31274	0,00030	0,996672557
2017	Mar	24	0:00:00	183,30477	0,00038	0,996960567
2017	Mar	25	0:00:00	184,2963	0,00045	0,997248577
2017	Mar	26	0:00:00	185,28732	0,00053	0,99753626
2017	Mar	27	0:00:00	186,27781	0,00060	0,997823319
2017	Mar	28	0:00:00	187,26776	0,00068	0,998109509
2017	Mar	29	0:00:00	188,25715	0,00074	0,998394658
2017	Mar	30	0:00:00	189,24595	0,00080	0,998678689
2017	Mar	31	0:00:00	190,23415	0,00086	0,998961624

Tabla 2-2. Valores de L obtenidos de la aplicación informática NOAA [20] simplificada para marzo 2017. Sistema geocéntrico, referido al equinoccio de la fecha.

Date	Time	Sun True Long (deg)
01/03/2017	0:00:00	340,5977704
02/03/2017	0:00:00	341,6014259
03/03/2017	0:00:00	342,6045861
04/03/2017	0:00:00	343,6072459
05/03/2017	0:00:00	344,6094008
06/03/2017	0:00:00	345,6110461
07/03/2017	0:00:00	346,6121774
08/03/2017	0:00:00	347,6127905
09/03/2017	0:00:00	348,6128814
10/03/2017	0:00:00	349,6124462
11/03/2017	0:00:00	350,6114812
12/03/2017	0:00:00	351,6099828
13/03/2017	0:00:00	352,6079478
14/03/2017	0:00:00	353,6053728
15/03/2017	0:00:00	354,6022549
16/03/2017	0:00:00	355,5985913
17/03/2017	0:00:00	356,5943793
18/03/2017	0:00:00	357,5896164
19/03/2017	0:00:00	358,5843002
20/03/2017	0:00:00	359,5784287
21/03/2017	0:00:00	360,5719999
22/03/2017	0:00:00	361,5650120
23/03/2017	0:00:00	2,5574633
24/03/2017	0:00:00	3,5493525
25/03/2017	0:00:00	4,5406782
26/03/2017	0:00:00	5,5314394
27/03/2017	0:00:00	6,5216351
28/03/2017	0:00:00	7,5112647
29/03/2017	0:00:00	8,5003274
30/03/2017	0:00:00	9,4888229
31/03/2017	0:00:00	10,4767510

La diferencia aproximada es muy sencilla de calcular.

Entre la fecha 2000.0 (más adelante se verá el significado de las épocas) y el equinoccio de primavera de 2017 han transcurrido aproximadamente 17,25 años. En este tiempo, el punto Aries ha recorrido, según veíamos en 1.3.:

$$50''{,}29 \times 17{,}25 / 3600 = 0{,}24^\circ$$

Que es, *grosso modo*, la diferencia que buscamos.

Si analizamos ahora dos apartados diferentes de las mismas fuentes, observaremos la coincidencia.

Vamos a considerar el mismo mes de marzo de 2017 según MICA [33] y la aplicación aproximada NOAA [20] (Tabla 2-3 y Tabla 2-4). En MICA tomamos los valores de “*posiciones geocéntricas aparentes del Sol, equinoccio correspondiente a la fecha considerada*”²⁵ (el almanaque no proporciona valores reales heliocéntricos de L para la Tierra referidos al equinoccio de la fecha considerada).

En NOAA, tomamos la longitud aparente del Sol, con las debidas correcciones.

Obsérvese que, en este caso, tendríamos L_t directamente, sin más que añadir a los valores de las tablas (geocéntricas) 180° . Las diferencias se deben ahora exclusivamente a una menor precisión en las tablas obtenidas de NOAA. Por ejemplo, para el 20/03/2017 a las 0:00 Greenwich,

$$359{,}56621 - 359{,}578429 = - 0{,}012^\circ$$

Diferencia mucho más acorde con el uso de una aplicación aproximada.

Los valores de ambas tablas, geocéntricos aparentes, nos darían los valores heliocéntricos de L_t sin más que añadirles 180° . Así, para la fecha y hora anteriores, según MICA

$$L_t = 179{,}56621^\circ$$

(tras haber calculado su mód. 360°).

²⁵ En la literatura anglosajona, el término para denominar al equinoccio teórico en la fecha considerada, es decir, el punto Aries considerado como referencia de ángulos del instante dado, se define de una forma más sintética e intuitiva como “*equinox of date*”. Esto significa que, al ser cambiante la posición espacial del punto de Aries de acuerdo con la precesión de los equinoccios, el mismo es móvil, y al tomar el “*equinox of date*” estamos considerando una referencia “*actualizada*” de aquel al instante elegido en lugar de referir L a un punto Aries pretérito (el de la “*época considerada*”, comúnmente J2000).

Dado que son valores aparentes, no es necesaria ninguna corrección (tampoco las debidas a nutación que analizaremos más adelante).

Tabla 2-3. Posiciones geocéntricas aparentes del Sol para marzo 2017 en relación con el equinoccio de la fecha. Valores obtenidos del MICA [33].

Sun

Apparent Geocentric Positions
True Equinox and Ecliptic of Date

Date	Time	Longitude	Latitude	Distance
(UT1)	h m s	°	°	AU
2017 Mar 01	00:00:00.0	340.58932	- 0.00021	0.990842838
2017 Mar 02	00:00:00.0	341.59321	- 0.00023	0.991082027
2017 Mar 03	00:00:00.0	342.59656	- 0.00025	0.991322755
2017 Mar 04	00:00:00.0	343.59935	- 0.00026	0.991565213
2017 Mar 05	00:00:00.0	344.60156	- 0.00027	0.991809640
2017 Mar 06	00:00:00.0	345.60318	- 0.00026	0.992056301
2017 Mar 07	00:00:00.0	346.60421	- 0.00024	0.992305462
2017 Mar 08	00:00:00.0	347.60463	- 0.00022	0.992557370
2017 Mar 09	00:00:00.0	348.60445	- 0.00019	0.992812238
2017 Mar 10	00:00:00.0	349.60367	- 0.00015	0.993070222
2017 Mar 11	00:00:00.0	350.60231	- 0.00011	0.993331419
2017 Mar 12	00:00:00.0	351.60037	- 0.00007	0.993595854
2017 Mar 13	00:00:00.0	352.59789	- 0.00004	0.993863488
2017 Mar 14	00:00:00.0	353.59486	- 0.00000	0.994134213
2017 Mar 15	00:00:00.0	354.59132	+ 0.00002	0.994407870
2017 Mar 16	00:00:00.0	355.58727	+ 0.00005	0.994684252
2017 Mar 17	00:00:00.0	356.58273	+ 0.00006	0.994963120
2017 Mar 18	00:00:00.0	357.57771	+ 0.00007	0.995244208
2017 Mar 19	00:00:00.0	358.57220	+ 0.00007	0.995527233
2017 Mar 20	00:00:00.0	359.56621	+ 0.00006	0.995811896
2017 Mar 21	00:00:00.0	0.55975	+ 0.00004	0.996097887
2017 Mar 22	00:00:00.0	1.55280	+ 0.00002	0.996384884
2017 Mar 23	00:00:00.0	2.54536	- 0.00001	0.996672557
2017 Mar 24	00:00:00.0	3.53742	- 0.00004	0.996960567
2017 Mar 25	00:00:00.0	4.52897	- 0.00008	0.997248577
2017 Mar 26	00:00:00.0	5.52000	- 0.00012	0.997536260
2017 Mar 27	00:00:00.0	6.51050	- 0.00016	0.997823319
2017 Mar 28	00:00:00.0	7.50045	- 0.00019	0.998109509
2017 Mar 29	00:00:00.0	8.48983	- 0.00022	0.998394658
2017 Mar 30	00:00:00.0	9.47864	- 0.00024	0.998678689
2017 Mar 31	00:00:00.0	10.46686	- 0.00026	0.998961624

Tabla 2-4. Posiciones geocéntricas aparentes del Sol para marzo 2017 en relación con el equinoccio de la fecha. Valores obtenidos de la aplicación informática simplificada de la NOAA [20].

Y	Date	Time	Sun True Long (deg)	Sun App Long (deg)
2017	Mar	1 00:00,0	340,59777	340,5899177
2017	Mar	2 00:00,0	341,601426	341,5935693
2017	Mar	3 00:00,0	342,604586	342,5967255
2017	Mar	4 00:00,0	343,607246	343,5993814
2017	Mar	5 00:00,0	344,609401	344,6015324
2017	Mar	6 00:00,0	345,611046	345,6031737
2017	Mar	7 00:00,0	346,612177	346,6043011
2017	Mar	8 00:00,0	347,612791	347,6049103
2017	Mar	9 00:00,0	348,612881	348,6049973
2017	Mar	10 00:00,0	349,612446	349,6045582
2017	Mar	11 00:00,0	350,611481	350,6035892
2017	Mar	12 00:00,0	351,609983	351,6020869
2017	Mar	13 00:00,0	352,607948	352,6000479
2017	Mar	14 00:00,0	353,605373	353,5974691
2017	Mar	15 00:00,0	354,602255	354,5943473
2017	Mar	16 00:00,0	355,598591	355,5906797
2017	Mar	17 00:00,0	356,594379	356,5864638
2017	Mar	18 00:00,0	357,589616	357,581697
2017	Mar	19 00:00,0	358,5843	358,5763769
2017	Mar	20 00:00,0	359,578429	359,5705015
2017	Mar	21 00:00,0	360,572	360,5640688
2017	Mar	22 00:00,0	361,565012	361,557077
2017	Mar	23 00:00,0	2,55746332	2,549524413
2017	Mar	24 00:00,0	3,54935249	3,541409686
2017	Mar	25 00:00,0	4,54067822	4,532731518
2017	Mar	26 00:00,0	5,53143941	5,523488815
2017	Mar	27 00:00,0	6,52163514	6,513680653
2017	Mar	28 00:00,0	7,51126465	7,503306282
2017	Mar	29 00:00,0	8,50032738	8,492365124
2017	Mar	30 00:00,0	9,48882292	9,480856773
2017	Mar	31 00:00,0	10,476751	10,46878099

2.6.6. LONGITUD, PRECESIÓN Y ÁNGULO DE SOMBRA

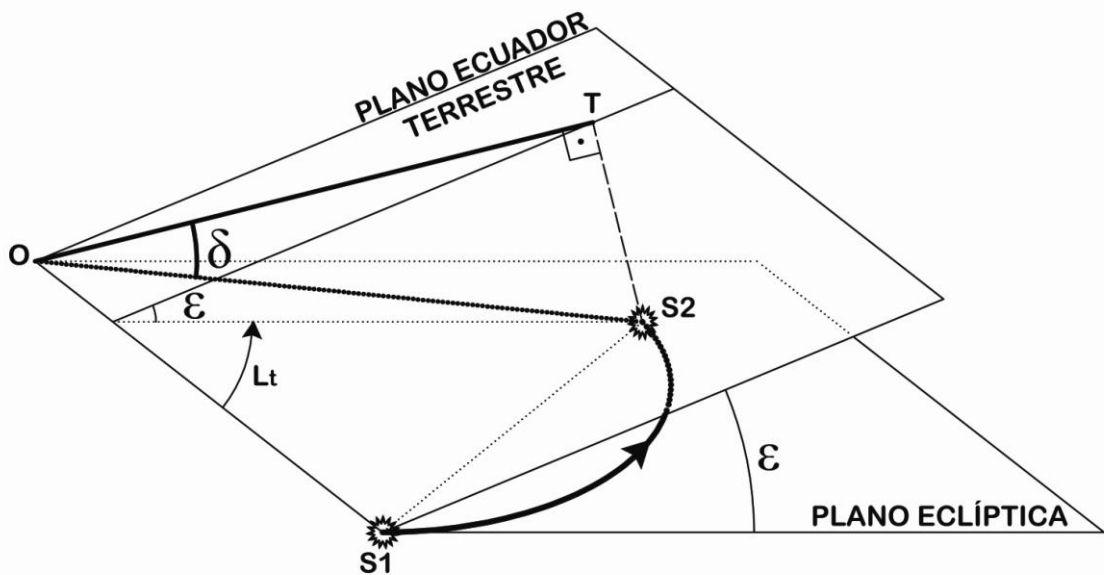
Una cuestión que puede resultarnos conceptualmente compleja es cómo considerar en nuestros cálculos la precesión, toda vez que el eje terrestre va cambiando de orientación en el espacio. La respuesta es muy simple, y va íntimamente unida al concepto intrínseco de plano de sombra. En efecto, una modificación infinitesimal de la orientación del eje terrestre tiene como resultado una “aceleración” en L , debido a que el año trópico es más corto que el sidéreo. Es decir, como dicha “aceleración” es constante, el efecto de la precesión queda subsumido en los propios cálculos de la longitud aparente L_t . Es así de sencillo.

En efecto, al final del año trópico, nuestro planeta vuelve a tener el eje contenido en el plano de sombra, a pesar de que no se haya completado el giro completo con respecto a una estrella lejana de referencia (año sidéreo).

2.7. CÁLCULO GEOMÉTRICO DIRECTO DE δ .

La relación entre α_s y δ nos sugiere un método de cálculo geométrico directo de esta última de una forma elemental desde los puntos de vista conceptual y geométrico. Para ello no será necesario recurrir al sistema diédrico, dada la sencillez del problema considerado.

Si analizamos la trayectoria del vector Sol-Tierra sobre el plano de la eclíptica a lo largo del año, bastará calcular el ángulo de dicho vector con el plano ecuatorial terrestre para conocer δ .



2-25. Deducción geométrica directa de δ .

De acuerdo con las figuras fig.2-10 y fig.2-14, tendremos que cuando el plano de sombra se encuentra en el equinoccio otoñal, su vector director, es decir, el radio Sol-Tierra, se encuentra en la posición indicada con S1 en la fig.2-25 y estará contenido tanto en el plano de la eclíptica como en el plano del ecuador terrestre. Transcurrido un cierto tiempo, dicho vector habrá girado aparentemente un ángulo L_t sobre la eclíptica, situándose su extremo en S2. Hay que hacer constar que los puntos S1 y S2 son los que representarían la posición aparente del Sol visto desde el centro de la Tierra, indicado aquí con O.

Un espectador situado en O, observará que, en el segundo instante, al lanzar una visual al Sol, lo verá bajo un ángulo δ con respecto al plano del ecuador terrestre: es lo que hemos denominado anteriormente declinación solar. En el caso representado en fig. 2-25, δ corresponde a una situación intermedia entre el equinoccio otoñal y el solsticio de invierno, por lo que su signo, como puede verse, se considera, por convenio, negativo. Su deducción es sencilla.

Tendremos simultáneamente que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \delta = -\frac{S_2T}{OS_2} \\ S_2T = OS_2 \cdot \sin L_t \cdot \sin \varepsilon \end{array} \right.$$

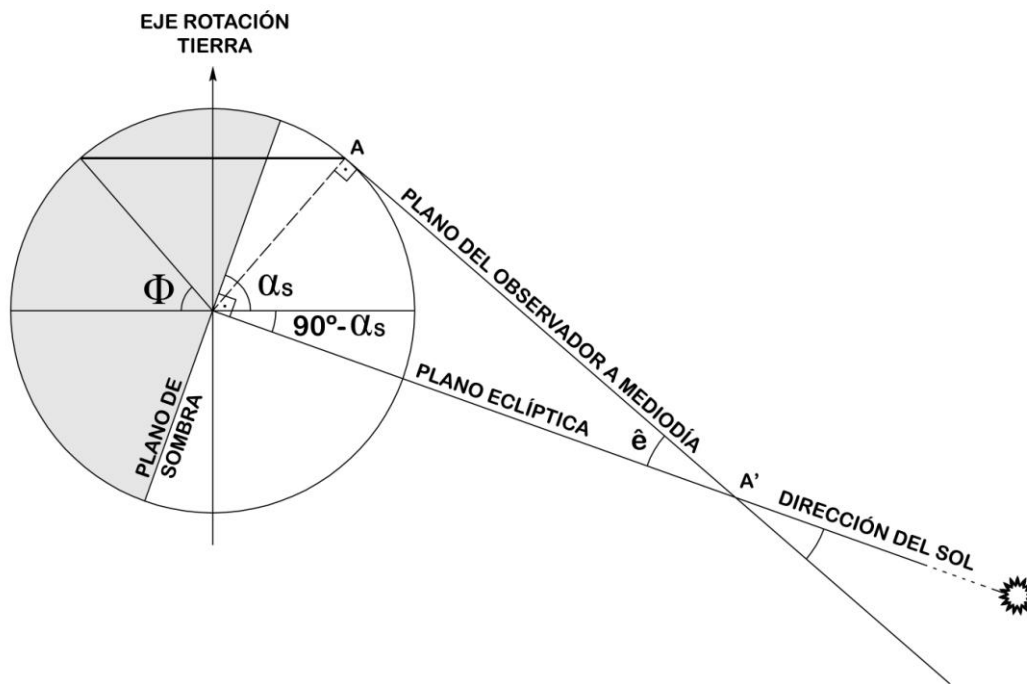
Por lo que, sustituyendo convenientemente:

$$\sin \delta = -\sin L_t \cdot \sin \varepsilon$$

Expresión que coincide con la calculada en los puntos anteriores.

2.8. DEDUCCIÓN DIRECTA DE LA ALTURA DEL SOL AL MEDIODÍA

Conociendo α_s o bien δ (este último valor está presente en todos los anuarios o almanaques), el cálculo de la altura del Sol sobre el horizonte a mediodía y para la latitud Φ es inmediato. La altura del Sol sobre el horizonte del observador será máxima en ese instante y, en nuestro caso, el observador se encontrará situado en el plano perpendicular al plano de sombra.



2-26. Representación de la altura del Sol a mediodía.

Como se observa en la fig. 2-26, el plano de la eclíptica es perpendicular al plano de sombra, por la propia definición de este. Antes de seguir, conviene destacar que dada la magnitud de la distancia Tierra-Sol en comparación con el radio terrestre, en el gráfico anterior y a efectos de cálculo, consideramos que el punto A y A' se confunden, toda vez que la esfera terrestre, a esta escala, queda reducida a un punto. Así, la altura del Sol sobre el horizonte para el observador situado en A y que mira directamente al Sol será el ángulo \hat{e} .

Según la figura anterior:

$$\hat{e} = \alpha_s - \Phi$$

$$\hat{e}_M = -\delta - 90^\circ - \Phi$$

Volveremos más adelante sobre esta cuestión en el apartado correspondiente a la órbita aparente del Sol desde el punto del observador.

2.9. VALORES DE α_S Y δ A LO LARGO DEL AÑO EN CUALQUIER FECHA

Para analizar la variación de α_S y, consecuentemente, de δ , a lo largo del año, mediante la expresión

$$\sin \delta = -\sin L_t \cdot \sin \varepsilon$$

necesitaríamos conocer el valor de L_t . Más adelante expondremos los procedimientos más usuales existentes para la determinación de dicho ángulo, aunque por el momento podemos utilizar los valores de L_{aparente} obtenidos a través del MICA [33] para el año 2017, para las 0:00 UT1 (Greenwich). Estos valores L_{aparente} son los que hemos trasladado a las primeras columnas de las tablas 2-6 y 2-7 tras haberles sustraído 180° , por presentarlos la aplicación como valores orbitales geocéntricos²⁶. No es necesario hacer ninguna corrección, por tratarse de valores corregidos por aberración, etc. (aparentes). Hay que hacer constar que, a lo largo de los años, las declinaciones solares varían ligeramente para una fecha dada (años bisiestos, precesión de equinoccios, rotación del eje de ápsides, etc.). No obstante, las conclusiones y gráficas que se presentan a continuación son perfectamente válidas a nivel general. El valor aproximado de ε que tomaremos para la elaboración de dicha tabla será $\varepsilon = 23^\circ,437$. Señalemos que, igualmente, ε experimenta una lentísima variación a lo largo de los años, cuya cuantificación será analizada más adelante.

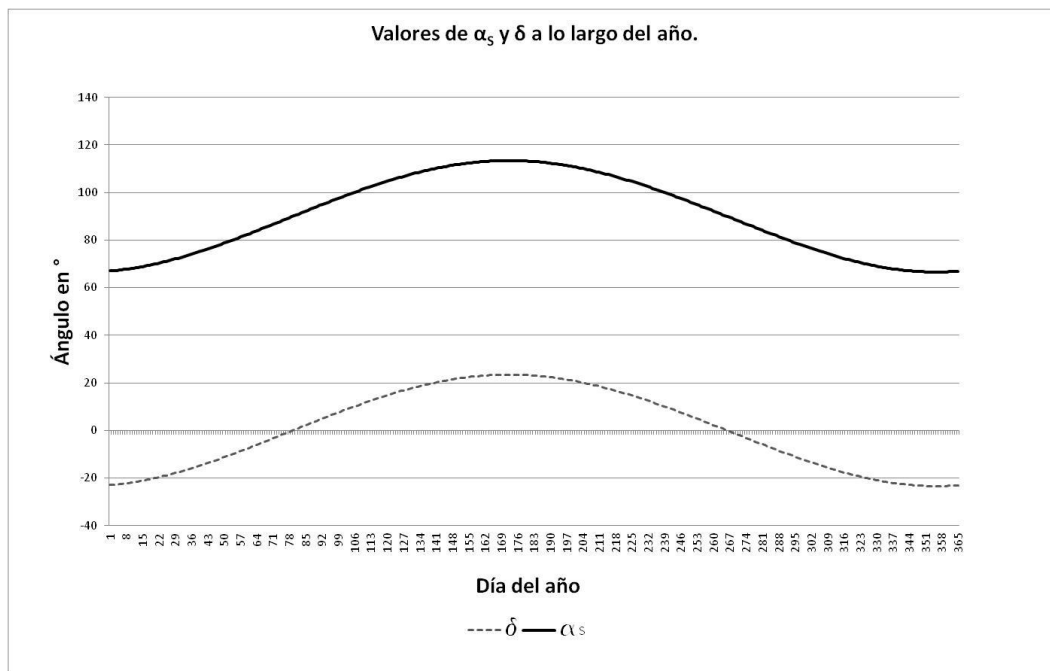
Para cálculos que no requieren unas elevadas precisiones, y considerando el intervalo de un año, este valor suele tomarse constante. Y también hay que hacer mención al hecho de que diversas obras de divulgación suelen presentar distintos valores constantes de ε , con diferentes aproximaciones según el número de decimales. En la fig. 2-28 podemos observar gráficamente la distribución de α_S y δ a lo largo del año. Se trata de dos curvas paralelas, como cabía esperar a la vista de la igualdad $\alpha_S = \delta + 90^\circ$. Es interesante volver a indicar que, mientras que α_S solamente presenta valores positivos, tal y como hemos

²⁶ La rutina de obtención a través del MICA es la siguiente:

Calculate > positions > Sun > Apparent Geocentric Ecliptic of Date

Las posiciones heliocéntricas del MICA van referidas a la época 2000.0, por lo que para nuestros cálculos elegiremos siempre referencias para la fecha analizada, dado que consideramos el punto Aries como origen de nuestros ángulos, y no nos resulta útil fijar la posición del mismo en una fecha determinada, sino que preferimos dejarlo "flotante". En este sentido, el MICA solo nos proporciona valores referidos al equinoccio de la fecha en la rutina de cálculos geocéntricos.

definido el plano de sombra, por el contrario δ puede ser positivo (primavera-verano) o negativo (otoño-invierno). En los equinoccios, como se vio en 2.6.1., tenemos $\delta = 0$. En los solsticios, los valores serán: máximo en el de verano y mínimo en el de invierno.



2-28. Evolución de α y δ a lo largo del año.

En 2017, los solsticios y equinoccios se producen en las fechas e instantes indicados a continuación (Tabla 2-5) obtenida del MICA [33] ²⁷:

Tabla 2-5. Solsticios y equinoccios 2017 (obtenida a través del MICA [33]).

SOLSTICES AND EQUINOXES								
Equinox			Solstice		Equinox		Solstice	
Year	Date (UT)	Time	Date (UT)	Time	Date (UT)	Time	Date (UT)	Time
	d h m		d h m		d h m		d h m	
2017	Mar 20	10:29	Jun 21	4:24	Sep 22	20:02	Dec 21	16:28

Que concuerdan con los máximos, mínimos y cambios de signo de las fechas recogidas en la Tabla 2-6 y en la Tabla 2-7. En los solsticios, $|\delta|_{max} = 23,44^\circ$, que coincide con el valor adoptado para ϵ .

²⁷ Rutina de obtención: Calculate > phenomena > solstices/equinoces

Tabla 2-6. Valores declinación δ meses enero-junio 2017 obtenidos aplicando a los valores de L de MICA [33] para las 0:00:00 TU de cada fecha las expresiones de α y δ .

	enero		febrero		marzo		abril		mayo		junio	
	L	α_s	L	α_s	L	α_s	L	α_s	L	α_s	L	α_s
1	100,76	67,00	132,31	72,89	160,59	82,40	191,45	94,53	220,82	105,07	250,71	112,05
2	101,77	67,08	133,33	73,18	161,59	82,79	192,44	94,92	221,79	105,37	251,66	112,18
3	102,79	67,18	134,34	73,47	162,60	83,17	193,43	95,30	222,76	105,67	252,62	112,31
4	103,81	67,28	135,36	73,77	163,60	83,55	194,41	95,68	223,73	105,96	253,58	112,43
5	104,83	67,39	136,37	74,07	164,60	83,94	195,40	96,06	224,70	106,25	254,54	112,54
6	105,85	67,50	137,38	74,38	165,60	84,32	196,38	96,44	225,67	106,53	255,49	112,65
7	106,87	67,63	138,40	74,69	166,60	84,71	197,37	96,82	226,63	106,81	256,45	112,75
8	107,89	67,76	139,41	75,00	167,60	85,10	198,35	97,19	227,60	107,08	257,41	112,84
9	108,91	67,90	140,42	75,32	168,60	85,49	199,33	97,57	228,57	107,35	258,36	112,93
10	109,93	68,04	141,43	75,64	169,60	85,88	200,31	97,94	229,53	107,61	259,32	113,01
11	110,95	68,19	142,45	75,97	170,60	86,28	201,30	98,31	230,50	107,87	260,28	113,08
12	111,97	68,35	143,46	76,30	171,60	86,67	202,28	98,67	231,47	108,13	261,23	113,15
13	112,98	68,52	144,47	76,63	172,60	87,06	203,26	99,04	232,43	108,38	262,19	113,21
14	114,00	68,69	145,48	76,97	173,59	87,46	204,24	99,40	233,40	108,62	263,14	113,26
15	115,02	68,87	146,49	77,31	174,59	87,85	205,22	99,76	234,36	108,86	264,10	113,31
16	116,04	69,06	147,50	77,66	175,59	88,25	206,19	100,11	235,32	109,09	265,05	113,34
17	117,06	69,25	148,51	78,01	176,58	88,64	207,17	100,46	236,29	109,32	266,01	113,38
18	118,07	69,46	149,52	78,36	177,58	89,04	208,15	100,82	237,25	109,54	266,96	113,40
19	119,09	69,66	150,52	78,71	178,57	89,43	209,13	101,16	238,21	109,76	267,92	113,42
20	120,11	69,88	151,53	79,07	179,57	89,83	210,10	101,51	239,18	109,97	268,87	113,43
21	121,13	70,09	152,54	79,43	180,56	90,22	211,08	101,85	240,14	110,18	269,82	113,44
22	122,15	70,32	153,55	79,79	181,55	90,62	212,06	102,19	241,10	110,38	270,78	113,43
23	123,16	70,55	154,56	80,16	182,55	91,01	213,03	102,52	242,06	110,57	271,73	113,43
24	124,18	70,79	155,56	80,53	183,54	91,41	214,01	102,85	243,03	110,76	272,69	113,41
25	125,20	71,03	156,57	80,90	184,53	91,80	214,98	103,18	243,99	110,94	273,64	113,39
26	126,22	71,28	157,57	81,27	185,52	92,19	215,95	103,51	244,95	111,12	274,60	113,36
27	127,23	71,54	158,58	81,65	186,51	92,58	216,93	103,83	245,91	111,29	275,55	113,32
28	128,25	71,80	159,58	82,03	187,50	92,98	217,90	104,14	246,87	111,45	276,51	113,28
29	129,26	72,06			188,49	93,37	218,87	104,46	247,83	111,61	277,46	113,23
30	130,28	72,34			189,48	93,76	219,85	104,76	248,79	111,76	278,41	113,17
31	131,30	72,61			190,47	94,14			249,75	111,91		

Tabla 2-7. Valores declinación δ meses julio-diciembre 2017 obtenidos aplicando a los valores de L de MICA [33] para las 0:00:00 TU de cada fecha las expresiones de α y δ .

	julio		agosto		septiembre		octubre		noviembre		diciembre	
	L	α_S	L	α_S	L	α_S	L	α_S	L	α_S	L	α_S
1	279,37	113,11	308,95	108,02	338,76	98,29	8,01	86,82	38,76	75,58	68,98	68,21
2	280,32	113,04	309,91	107,76	339,73	97,92	8,99	86,44	39,76	75,26	69,99	68,05
3	281,27	112,96	310,86	107,51	340,69	97,56	9,98	86,05	40,76	74,95	71,00	67,91
4	282,23	112,87	311,82	107,24	341,66	97,19	10,96	85,66	41,76	74,64	72,02	67,77
5	283,18	112,78	312,78	106,97	342,63	96,82	11,95	85,28	42,76	74,33	73,03	67,64
6	284,13	112,69	313,74	106,70	343,60	96,45	12,93	84,89	43,76	74,03	74,05	67,52
7	285,09	112,58	314,69	106,42	344,57	96,07	13,92	84,51	44,76	73,73	75,06	67,40
8	286,04	112,47	315,65	106,14	345,54	95,70	14,90	84,13	45,77	73,44	76,08	67,29
9	286,99	112,36	316,61	105,86	346,51	95,32	15,89	83,75	46,77	73,15	77,09	67,19
10	287,95	112,23	317,57	105,57	347,48	94,95	16,88	83,37	47,78	72,87	78,11	67,09
11	288,90	112,10	318,53	105,27	348,45	94,57	17,87	82,99	48,78	72,59	79,12	67,01
12	289,85	111,97	319,49	104,97	349,43	94,19	18,85	82,61	49,79	72,32	80,14	66,93
13	290,80	111,83	320,45	104,67	350,40	93,80	19,84	82,24	50,79	72,05	81,16	66,86
14	291,76	111,68	321,41	104,37	351,37	93,42	20,83	81,87	51,80	71,79	82,17	66,79
15	292,71	111,52	322,37	104,06	352,35	93,04	21,83	81,50	52,81	71,53	83,19	66,74
16	293,67	111,36	323,33	103,74	353,32	92,65	22,82	81,13	53,81	71,28	84,21	66,69
17	294,62	111,20	324,29	103,42	354,30	92,26	23,81	80,76	54,82	71,03	85,23	66,65
18	295,57	111,02	325,25	103,10	355,27	91,88	24,80	80,40	55,83	70,79	86,25	66,62
19	296,53	110,85	326,21	102,78	356,25	91,49	25,80	80,03	56,84	70,55	87,26	66,59
20	297,48	110,66	327,18	102,45	357,23	91,10	26,79	79,67	57,85	70,32	88,28	66,57
21	298,44	110,47	328,14	102,12	358,21	90,71	27,78	79,32	58,86	70,10	89,30	66,56
22	299,39	110,28	329,10	101,78	359,18	90,32	28,78	78,96	59,87	69,88	90,32	66,56
23	300,35	110,07	330,07	101,45	360,16	89,94	29,77	78,61	60,88	69,67	91,34	66,57
24	301,30	109,87	331,03	101,11	361,14	89,55	30,77	78,26	61,89	69,46	92,36	66,58
25	302,26	109,65	332,00	100,76	362,12	89,16	31,77	77,91	62,90	69,26	93,38	66,61
26	303,21	109,44	332,96	100,42	363,10	88,77	32,76	77,57	63,91	69,07	94,39	66,64
27	304,17	109,21	333,93	100,07	364,08	88,38	33,76	77,23	64,93	68,88	95,41	66,67
28	305,13	108,98	334,89	99,72	365,06	87,99	34,76	76,89	65,94	68,70	96,43	66,72
29	306,08	108,75	335,86	99,36	366,04	87,60	35,76	76,56	66,95	68,53	97,45	66,77
30	307,04	108,51	336,82	99,01	367,03	87,21	36,76	76,23	67,96	68,37	98,47	66,83
31	307,99	108,27	337,79	98,65	368,02	86,85	37,76	75,90	68,97	68,21	99,49	66,90

2.10. APROXIMACIONES SENCILLAS AL CÁLCULO DE L_T Y δ .

Llegados a este punto, podemos intuir algunos procedimientos simplificados de cálculo de L_t , y, consecuentemente, δ , cuya sencillez está reñida con un grado de precisión aceptable en lo que respecta a aplicaciones de ingeniería que requieran una exactitud elevada.

Dado que, como hemos indicado, la órbita terrestre se aproxima bastante a una circunferencia debido a su baja excentricidad, no es descabellado sustituir los cálculos elípticos de L_t por una aproximación circular. Además, podríamos tomar como constante el valor de ε , cuya variación en el tiempo es, como se verá más adelante, muy pequeña (multitud de textos de divulgación dan valores constantes para ε ; bien es cierto que esta constante difiere de unos autores a otros).

Tomando como origen de ángulos el equinoccio de otoño, podemos considerar que cada día transcurrido L_t se incrementa $360^\circ/365$ aproximadamente. Si llamamos N al número de días transcurridos desde dicha fecha, y considerando un valor constante para $\varepsilon = 23^\circ,45$, tendremos que:

$$\sin \delta = -\sin L_t \cdot \sin \varepsilon = -\sin\left(\frac{360}{365} N\right) \cdot \sin 23.45 \cong -0,398 \cdot \sin\left(\frac{360}{365} N\right)$$

Se trata de una aproximación que, además, presupone constante el valor de la declinación para cada día. Si queremos referir el valor N al número de días transcurrido desde el 1 de enero, procedimiento muy habitual en este tipo de fórmulas, bastará con hacer

$$N = n - 265$$

Teniendo en cuenta que tomamos 265 como el número de días transcurridos entre el 1 de enero y el 22 de septiembre (fecha arbitraria para el equinoccio de otoño, que suele variar ligeramente entre unos años y otros, siendo las fechas más frecuentes 22 y 23 de septiembre).

Por lo que, aproximadamente,

$$\sin \delta = -0,4 \cdot \sin\left[\frac{360}{365}(n - 265)\right]$$

Si quisiéramos referir el ángulo L_t al instante del solsticio de primavera, teniendo en cuenta que entre ambos solsticios hay una diferencia de 180° en L_t , bastaría con adoptar el nuevo n y cambiar el signo de la expresión, ya que:

$$\sin \alpha = -\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin(a - 180^\circ)$$

Así pues,

$$\sin \delta = 0,4 \cdot \sin\left[\frac{360}{365}(n - 82)\right]$$

O, lo que es lo mismo;

$$\delta = \arcsin\left[0,4 \cdot \sin\left[\frac{360}{365}(n - 82)\right]\right]$$

expresión que se conoce usualmente como “ecuación de Perrin de Brichambaut”[25].

Nótese que $265-82 = 183$, número de días correspondientes, aproximadamente, a medio año.

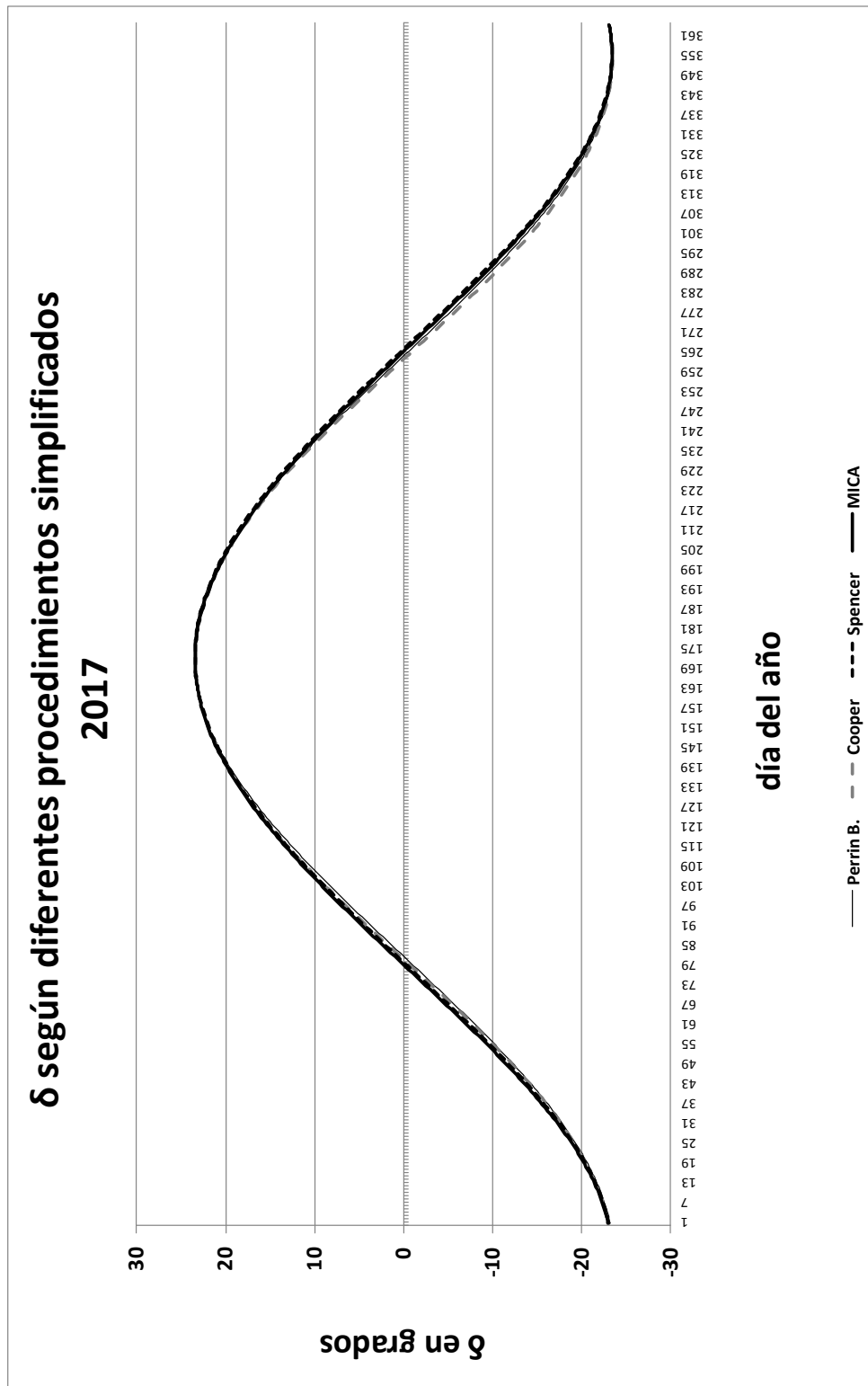
Esta fórmula, citada a menudo en diversas fuentes, presenta una inexactitud en la determinación de L_t de hasta $1^\circ,1$ en el período 1950-2050, según hemos podido comprobar cotejando los valores calculados con los obtenidos del MICA [33] para dicho período. Aunque se trata de una expresión intuitiva al alcance de cualquier aficionado, como hemos podido deducir más arriba, se atribuye su popularización desde 1975 al mencionado tecnólogo solar, en una época en la que los ordenadores personales aún no habían hecho su aparición masiva, aunque comenzaban a comercializarse las primeras calculadoras programables.

En la misma línea, esta vez sin demostración, podemos mostrar la fórmula aproximada de Cooper [26]:

$$\delta = 23.45 \cdot \sin\left[\frac{360}{365}(n - 248)\right]$$

La aproximación de Cooper, (1969), supone una simplificación con respecto a la expresión de Perrin de Brichambault, toda vez que prescinde de la función trigonométrica recíproca para su resolución. Está basada en el carácter senoidal de aquella, que se aproxima multiplicando el valor de la inclinación de la eclíptica por otra expresión también senoidal. En el caso de esta aproximación, hemos constatado, con la misma fuente de comparación y similar período, unos errores de hasta casi $1^\circ,6$. Por ello, estas expresiones simplificadas deben evitarse en la medida de lo posible, y restringirlas al ámbito de las aproximaciones en gnomónica elemental o para la representación inmediata de las funciones L_t y δ en el ámbito docente, ya que su morfología es difícil de distinguir de las correspondientes a expresiones más complejas (ver fig. 2-29) cuando se trabaja con gráficos a pequeña escala.

Como complemento final para este apartado, merece la pena citar la expresión de Spencer [27], que en su momento supuso un hito al abordar el problema aproximativo mediante desarrollos en series de Fourier.



2-29. Valores de δ según diferentes procedimientos (Perrin, Cooper, Spencer, MICA) para 2017.

Como en los casos anteriores, δ se obtiene en grados sexagesimales.

$$\delta = (0.006918 - 0.399912 \cdot \cos n + 0.070257 \cdot \sin n - 0.006758 \cdot \cos 2n + \\ 0.000907 \cdot \sin 2n - 0.002697 \cdot \cos 3n + 0.00148 \cdot \sin 3n) \cdot \left(\frac{180}{\pi} \right)$$

El valor de n en este caso es diferente de el utilizado en las fórmulas anteriores, toda vez que la expresión de Spencer operaba el ángulo recorrido en radianes y daba el valor 0 para el 1 de enero:

$$n = \frac{2\pi \cdot (\text{día del año} - 1)}{365}$$

Esta expresión, más engorrosa en la época (año 1971), significaba un incremento notable en la precisión, a pesar de depender de factores tan poco exactos como el cómputo del día del año.

Hemos podido constatar, en comparación con el MICA [33], unas desviaciones máximas para δ en el mismo período indicado anteriormente, de $0^{\circ},52$.

En este caso, las desviaciones son mayores cuanto más nos acercamos en el tiempo al año 2015. Ello es habitual en aproximaciones ligadas a las variables astronómicas: es frecuente observar a menudo la aparición de nuevas expresiones de gran precisión, pero constreñidas a un intervalo temporal muy pequeño (a lo sumo, varias décadas).

En la fig.2-29 podemos observar la similitud en forma de función y valores para δ para todos los procedimientos anteriormente descritos y los obtenidos directamente de la NOAA para todos los días del año 2017 (UT 00:00:00). Sin embargo, desviaciones que a la vista pueden parecer casi inapreciables, no serían válidas en el caso de altas precisiones: orientación de reflectores solares, por ejemplo. Podemos constatar una mayor similitud en los valores en la proximidad de solsticios y equinoccios.

Podemos concluir que la utilización de una variable discontinua procedente del conteo de días naturales tomando como origen el primer día del año no aporta una precisión elevada: tengamos en cuenta la duración real del año, más cercana a los 365,25 días, y la corrección por bisiestos, cuya aparición plantea siempre dudas razonables a todos los aficionados que utilizan estos métodos. También debe tenerse en cuenta, por motivos similares, la variación en las fechas de los equinoccios.

Con todo ello, sorprendentemente, las fórmulas anteriores siguen gozando de una enorme popularidad en la red, y aparecen con mucha más frecuencia de lo deseable a la hora de realizar cualquier consulta bibliográfica relativa a la declinación, cálculo de horas de Sol, etc.

Mayor inexactitud si cabe presentan las tablas de declinación, igualmente frecuentes en la red. En ninguna de ellas se indica el período de vigencia ni el error máximo esperable.

Dejamos, tal y como se indicó en el apartado anterior, para capítulos posteriores, la exposición de sistemas más eficientes y actualizados que permiten unas precisiones mayores, más acordes con el hardware disponible hoy en día. Y todos ellos ligados a la sucesión de días como un continuo definido a partir de una fecha suficientemente lejana. La contrapartida es un proceso más engorroso de cálculo que, sin embargo, se ha facilitado enormemente con la generalización de las hojas de cálculo tipo Excel y similares.

2.11. CÁLCULO DE LAS HORAS DE SOL A PARTIR DE α_S

Una aplicación directa de α_S resulta ser el cálculo de las horas de Sol en una fecha determinada, en la que la Tierra habrá recorrido un ángulo L_t desde el equinoccio de primavera.

2.11.1. HIPÓTESIS DE PARTIDA

- Aunque el ángulo α_S varía de forma continua, es habitual en este tipo de cálculos aproximados suponer un valor constante para el día completo de la fecha en cuestión.
- Se considera inexistente, a efectos de refracción solar, la atmósfera terrestre.

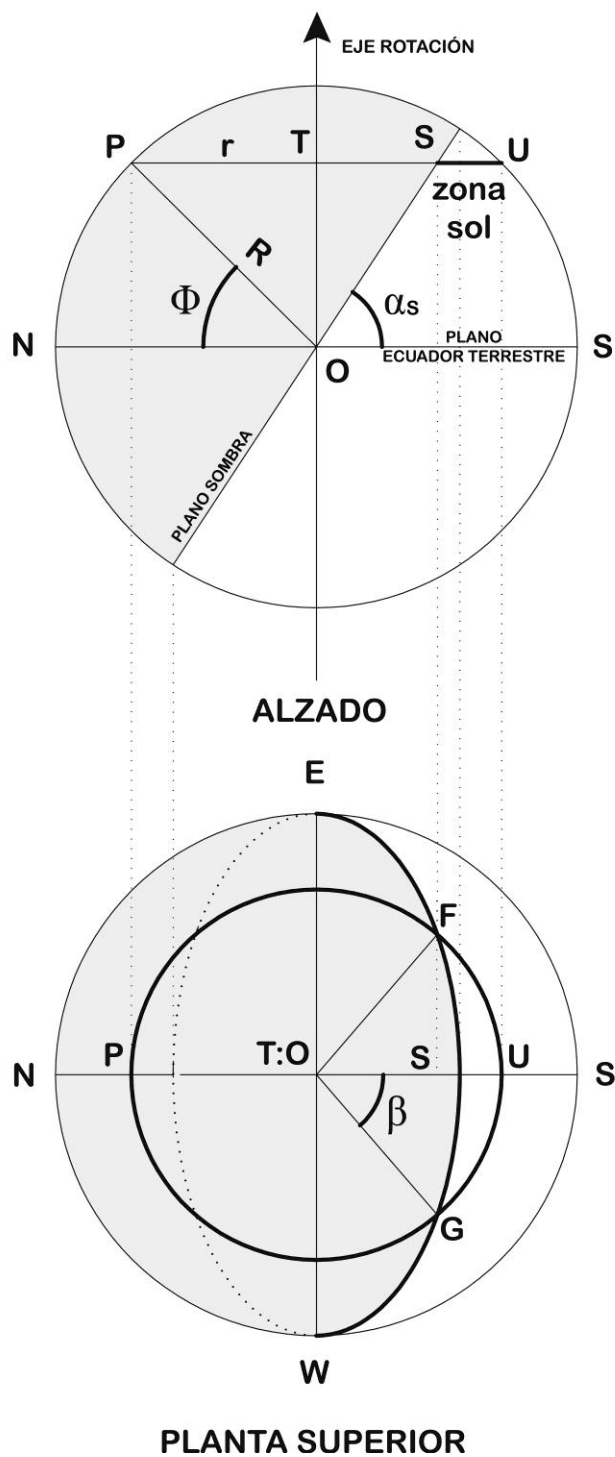
En este supuesto se asume que la salida o la puesta del Sol se producen cuando el centro del disco solar se sitúa sobre la línea del horizonte (estudiaremos más a fondo esta cuestión en lo sucesivo).

2.11.2. PROCESO DE CÁLCULO

Si estudiamos el corte producido por el plano de sombra sobre la superficie terrestre una vez conocido α_S para cualquier instante, podremos obtener fácilmente el número de horas de Sol en la fecha dada y en cualquier latitud Φ .

Para ello nos basaremos en las proyecciones diédricas de la fig. 2-30.

En ella podemos observar que la zona iluminada está abarcada por el ángulo 2β , es decir, el ángulo que limita el arco FUG. Hallaremos el número de horas de Sol por proporcionalidad entre dicho ángulo y 360° . Utilizaremos en lo que sigue el grado sexagesimal como unidad.



2-30. Planta y alzado del plano de sombra y su relación con Φ y con el ángulo auxiliar β .

Tenemos, en la figura indicada:

$$\cos \beta = \frac{TS}{r} = \frac{TS}{R \cdot \cos \Phi}$$

Del alzado podemos deducir:

$$TS = \frac{R \cdot \sin \Phi}{\tan \alpha_S}$$

Por lo que:

$$\cos \beta = \frac{R \cdot \sin \Phi}{\tan \alpha_S} \cdot \frac{1}{R \cdot \cos \Phi} = \frac{\tan \Phi}{\tan \alpha_S}$$

Las horas de sol, por proporción angular, vendrán dadas por:

$$H_s = \frac{2\beta}{360} \cdot 24 = \frac{2\beta}{15} = \frac{2}{15} \cdot \arccos\left(\frac{\tan \Phi}{\tan \alpha_S}\right)$$

Expresión que podemos escribir en función de la declinación δ , según la relación expresada en puntos anteriores:

$$H_s = \frac{2}{15} \cdot \arccos(-\tan \Phi \cdot \tan \delta)$$

Por lo que, por las propiedades de la función recíproca del coseno, podríamos escribir también como

$$H_s = \frac{2}{15} \cdot (180^\circ - \arccos(\tan \Phi \cdot \tan \delta)) = 24 - \frac{2}{15} \cdot \arccos(\tan \Phi \cdot \tan \delta) \quad (\text{Ec. 2.6})$$

O bien:

$$H_s = \frac{2}{15} \cdot \arccos(-\tan \Phi \cdot \tan(\arcsin(-\sin L \cdot \sin \varepsilon)))$$

O su expresión equivalente:

$$H_s = 24 - \frac{2}{15} \cdot \arccos(\tan \Phi \cdot \tan(\arcsin(-\sin L \cdot \sin \varepsilon)))$$

Esta fórmula tiene una aproximación suficiente para cálculos de precisión media sin incluir fenómenos como la refracción. En la (Ec. 2.6) podemos observar que los valores

$$\tan \Phi \cdot \tan \delta > 1 \quad \text{o} \quad \tan \Phi \cdot \tan \delta < -1$$

no están dentro del campo de validez de la misma.

Su significado es sencillo, y debemos tenerlo en cuenta a la hora de realizar cálculos programados.

Si $\tan \Phi \cdot \tan \delta < 1$ para una Φ determinada, tendremos 24 horas de noche continua.

Si $\tan \Phi \cdot \tan \delta > 1$ para una Φ determinada, tendremos 24 horas de día continuo.

Esto se produce en latitudes circumpolares, y según la estación. Se prescinde, por tanto, de consideraciones relativas a refracción, fenómenos crepusculares o Sol de medianoche, etc.

2.12. DIFERENCIA EN LA DURACIÓN DE LOS DÍAS EN LAS DIFERENTES LATITUDES A LO LARGO DEL AÑO

Partiendo de la (Ec. 2.6) y de los valores de L hallados para la obtención de la Tabla 2-6 y Tabla 2-7, podemos fácilmente calcular la duración aproximada de los días para diferentes latitudes a lo largo del año considerado, en nuestro caso el año 2017. A efectos gráficos, la variación en las curvas entre un año y otro son muy pequeñas. Consideraremos, como en casos anteriores, la simplificación de que la duración del día corresponde al lapso de tiempo entre dos pasos del centro solar por el horizonte del observador. Para diferentes valores de Φ obtendríamos diferentes curvas de duración del Sol a lo largo del año.

En la Tabla 2-8 pueden observarse los valores obtenidos para los meses de enero y febrero de 2017. Se omite el resto de los meses por cuestiones prácticas de espacio. Gráficamente, los valores completos para 2017 y para diferentes latitudes (0° , 10° , 20° , 30° , 40° , 50° , 60° , 70° , 80° y 90°) son los que se recogen en la fig. 2-31. Se han representado solamente latitudes correspondientes al hemisferio boreal (para el hemisferio austral, la casuística sería similar y se obtendría una figura simétrica).

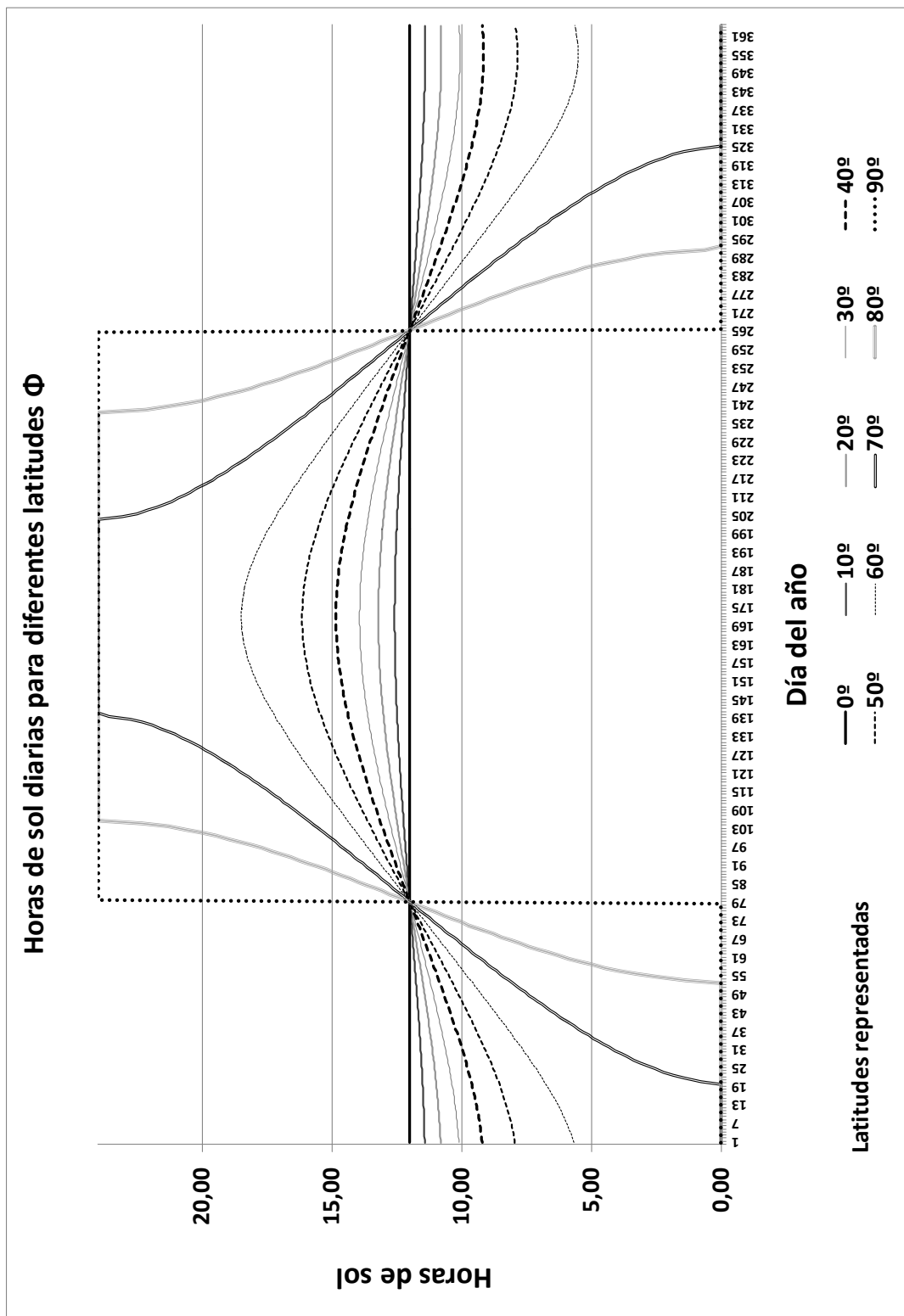
En la fig. 2-31 existen algunos puntos singulares que interesa tener en cuenta.

Por ejemplo, todas las curvas adoptan un valor teórico de 12 horas de duración del Sol en ambos equinoccios.

En las latitudes mayores de $90^\circ - \epsilon$ se produce una discontinuidad aparente en las curvas.

Tabla 2-8. Valores de δ y de las horas de Sol para diferentes latitudes a partir de las L a las 00:00:00 de cada fecha obtenidas del MICA [33]. Meses de enero y febrero 2017.

		Longitude	δ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Jan	1	100,76	-23,00	12,00	11,43	10,81	10,11	9,22	7,95	5,69	0,00	0,00	0,00
Jan	2	101,77	-22,92	12,00	11,43	10,82	10,12	9,23	7,97	5,72	0,00	0,00	0,00
Jan	3	102,79	-22,82	12,00	11,43	10,83	10,13	9,24	7,99	5,76	0,00	0,00	0,00
Jan	4	103,81	-22,72	12,00	11,44	10,83	10,13	9,26	8,01	5,80	0,00	0,00	0,00
Jan	5	104,83	-22,61	12,00	11,44	10,84	10,14	9,27	8,03	5,84	0,00	0,00	0,00
Jan	6	105,85	-22,50	12,00	11,44	10,84	10,16	9,29	8,06	5,89	0,00	0,00	0,00
Jan	7	106,87	-22,37	12,00	11,45	10,85	10,17	9,31	8,08	5,94	0,00	0,00	0,00
Jan	8	107,89	-22,24	12,00	11,45	10,86	10,18	9,32	8,11	5,99	0,00	0,00	0,00
Jan	9	108,91	-22,10	12,00	11,45	10,87	10,19	9,34	8,14	6,04	0,00	0,00	0,00
Jan	10	109,93	-21,96	12,00	11,46	10,87	10,21	9,36	8,17	6,09	0,00	0,00	0,00
Jan	11	110,95	-21,81	12,00	11,46	10,88	10,22	9,38	8,20	6,15	0,00	0,00	0,00
Jan	12	111,97	-21,65	12,00	11,46	10,89	10,23	9,41	8,24	6,21	0,00	0,00	0,00
Jan	13	112,98	-21,48	12,00	11,47	10,90	10,25	9,43	8,27	6,27	0,00	0,00	0,00
Jan	14	114,00	-21,31	12,00	11,47	10,91	10,26	9,45	8,31	6,33	0,00	0,00	0,00
Jan	15	115,02	-21,13	12,00	11,48	10,92	10,28	9,48	8,34	6,40	0,00	0,00	0,00
Jan	16	116,04	-20,94	12,00	11,48	10,93	10,30	9,50	8,38	6,47	0,00	0,00	0,00
Jan	17	117,06	-20,75	12,00	11,49	10,94	10,32	9,53	8,42	6,53	0,00	0,00	0,00
Jan	18	118,07	-20,54	12,00	11,49	10,95	10,33	9,56	8,46	6,60	0,00	0,00	0,00
Jan	19	119,09	-20,34	12,00	11,50	10,97	10,35	9,58	8,50	6,67	0,00	0,00	0,00
Jan	20	120,11	-20,12	12,00	11,51	10,98	10,37	9,61	8,55	6,75	0,00	0,00	0,00
Jan	21	121,13	-19,91	12,00	11,51	10,99	10,39	9,64	8,59	6,82	0,77	0,00	0,00
Jan	22	122,15	-19,68	12,00	11,52	11,00	10,41	9,67	8,64	6,90	1,43	0,00	0,00
Jan	23	123,16	-19,45	12,00	11,52	11,02	10,43	9,70	8,68	6,97	1,87	0,00	0,00
Jan	24	124,18	-19,21	12,00	11,53	11,03	10,45	9,73	8,73	7,05	2,24	0,00	0,00
Jan	25	125,20	-18,97	12,00	11,54	11,04	10,47	9,77	8,78	7,13	2,56	0,00	0,00
Jan	26	126,22	-18,72	12,00	11,54	11,06	10,50	9,80	8,82	7,21	2,86	0,00	0,00
Jan	27	127,23	-18,46	12,00	11,55	11,07	10,52	9,83	8,87	7,29	3,13	0,00	0,00
Jan	28	128,25	-18,20	12,00	11,56	11,08	10,54	9,86	8,92	7,37	3,39	0,00	0,00
Jan	29	129,26	-17,94	12,00	11,56	11,10	10,56	9,90	8,97	7,45	3,63	0,00	0,00
Jan	30	130,28	-17,66	12,00	11,57	11,11	10,59	9,93	9,03	7,54	3,86	0,00	0,00
Jan	31	131,30	-17,39	12,00	11,58	11,13	10,61	9,97	9,08	7,62	4,09	0,00	0,00
Feb	1	132,31	-17,11	12,00	11,59	11,14	10,64	10,00	9,13	7,71	4,30	0,00	0,00
Feb	2	133,33	-16,82	12,00	11,59	11,16	10,66	10,04	9,18	7,79	4,51	0,00	0,00
Feb	3	134,34	-16,53	12,00	11,60	11,17	10,68	10,08	9,24	7,88	4,72	0,00	0,00
Feb	4	135,36	-16,23	12,00	11,61	11,19	10,71	10,11	9,29	7,96	4,92	0,00	0,00
Feb	5	136,37	-15,93	12,00	11,62	11,21	10,74	10,15	9,35	8,05	5,11	0,00	0,00
Feb	6	137,38	-15,62	12,00	11,62	11,22	10,76	10,19	9,40	8,14	5,31	0,00	0,00
Feb	7	138,40	-15,31	12,00	11,63	11,24	10,79	10,23	9,46	8,23	5,49	0,00	0,00
Feb	8	139,41	-15,00	12,00	11,64	11,25	10,81	10,27	9,52	8,31	5,68	0,00	0,00
Feb	9	140,42	-14,68	12,00	11,65	11,27	10,84	10,31	9,57	8,40	5,86	0,00	0,00
Feb	10	141,43	-14,36	12,00	11,66	11,29	10,87	10,35	9,63	8,49	6,04	0,00	0,00
Feb	11	142,45	-14,03	12,00	11,66	11,30	10,89	10,39	9,69	8,58	6,22	0,00	0,00
Feb	12	143,46	-13,70	12,00	11,67	11,32	10,92	10,43	9,75	8,67	6,39	0,00	0,00
Feb	13	144,47	-13,37	12,00	11,68	11,34	10,95	10,47	9,81	8,76	6,57	0,00	0,00
Feb	14	145,48	-13,03	12,00	11,69	11,36	10,98	10,51	9,87	8,85	6,74	0,00	0,00
Feb	15	146,49	-12,69	12,00	11,70	11,37	11,00	10,55	9,93	8,94	6,91	0,00	0,00
Feb	16	147,50	-12,34	12,00	11,71	11,39	11,03	10,59	9,98	9,03	7,07	0,00	0,00
Feb	17	148,51	-11,99	12,00	11,71	11,41	11,06	10,63	10,04	9,12	7,24	0,00	0,00
Feb	18	149,52	-11,64	12,00	11,72	11,43	11,09	10,67	10,11	9,21	7,40	0,00	0,00
Feb	19	150,52	-11,29	12,00	11,73	11,44	11,12	10,71	10,17	9,30	7,57	0,00	0,00
Feb	20	151,53	-10,93	12,00	11,74	11,46	11,15	10,76	10,23	9,39	7,73	0,00	0,00
Feb	21	152,54	-10,57	12,00	11,75	11,48	11,18	10,80	10,29	9,49	7,89	0,00	0,00
Feb	22	153,55	-10,21	12,00	11,76	11,50	11,20	10,84	10,35	9,58	8,05	0,00	0,00
Feb	23	154,56	-9,84	12,00	11,77	11,52	11,23	10,88	10,41	9,67	8,21	1,39	0,00
Feb	24	155,56	-9,47	12,00	11,78	11,54	11,26	10,93	10,47	9,76	8,36	2,52	0,00
Feb	25	156,57	-9,10	12,00	11,78	11,55	11,29	10,97	10,53	9,85	8,52	3,30	0,00
Feb	26	157,57	-8,73	12,00	11,79	11,57	11,32	11,01	10,59	9,94	8,67	3,93	0,00
Feb	27	158,58	-8,35	12,00	11,80	11,59	11,35	11,06	10,66	10,04	8,83	4,48	0,00



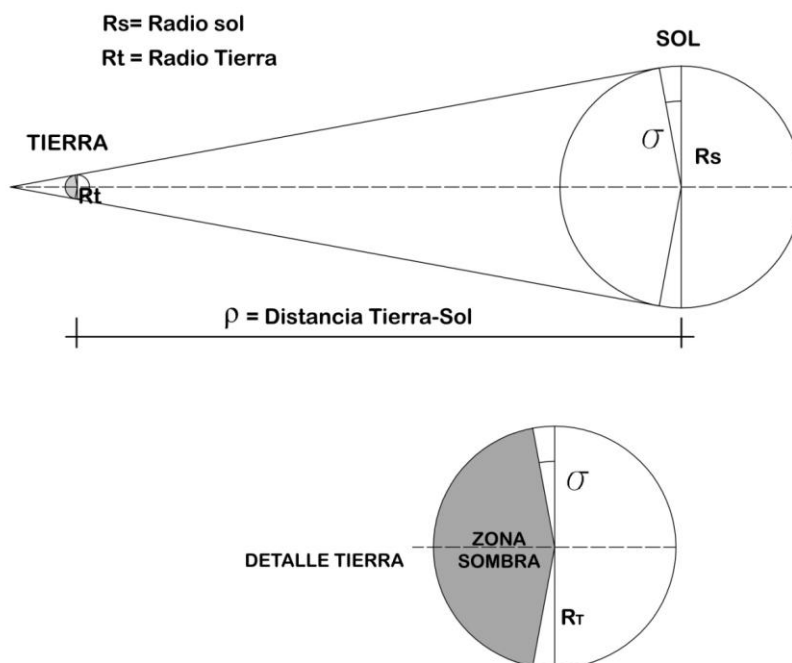
2-31. Horas de Sol en diferentes latitudes a lo largo del año.

En nuestro caso, habiendo adoptado $\epsilon = 23^{\circ},437$, este hecho se verificaría en latitudes $> 66,563^{\circ}$ (círculo polar ártico). La aparente discontinuidad se debe al hecho de que se producen más allá de determinadas fechas días completos de Sol o de oscuridad para esas latitudes.

También recoge la fig. 2-31 el hecho conocido de los máximos y mínimos en las fechas de los solsticios de verano e invierno.

2.13. CORRECCIÓN POR RELACIÓN DE RADIOS SOL/TIERRA. COMPLEMENTO ANGULAR

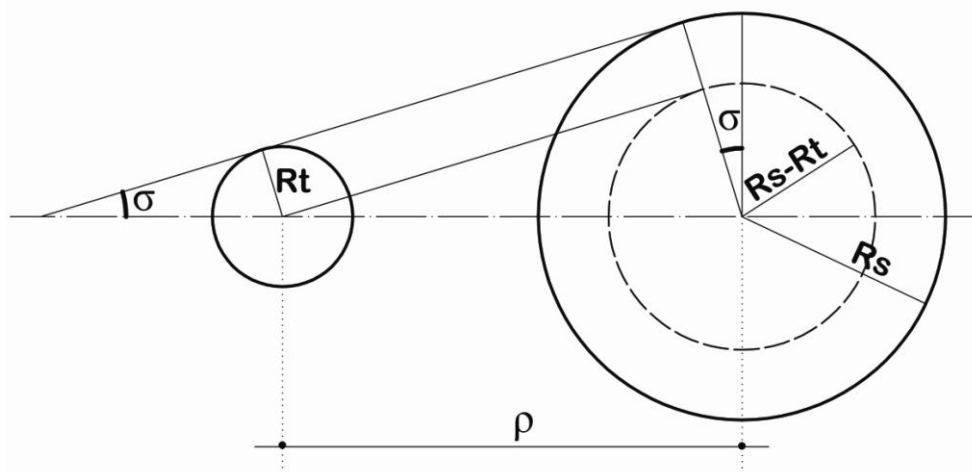
Como podemos observar en el siguiente gráfico, la relación entre los radios del Sol y la Tierra hace que el plano de sombra no sea una referencia geométrica absoluta para ciertos cálculos de precisión, pues realmente el número de horas de Sol en cualquier punto de nuestro planeta se ve mayorado en una cantidad proporcional a un ángulo a determinar en cálculos posteriores. Dicho ángulo es σ (fig. 2-32)²⁸, (y su determinación es inmediata conocidos los valores R_s , R_t y ρ).



2-32. Complemento angular σ a la zona iluminada de la Tierra por diferencia de radios.

²⁸ La denominación auxiliar σ es arbitraria; no debe buscarse ninguna equivalencia en Astronomía clásica.

Con la siguiente fig. auxiliar resolvemos el cálculo de σ :



2-33. Cálculo clásico de σ .

$$\sin \sigma = \frac{R_s - R_t}{\rho}$$

Si queremos calcular un orden de magnitud para esta σ , podemos tomar los datos que suministra el anuario astronómico [17]. En cualquier caso, son los indicados anteriormente en 1.1.

$\rho_M =$	149.598.000	km (Distancia media)
$R_s =$	696.000	km
$R_t =$	6.378,13	km (radio ecuatorial)

Por lo que:

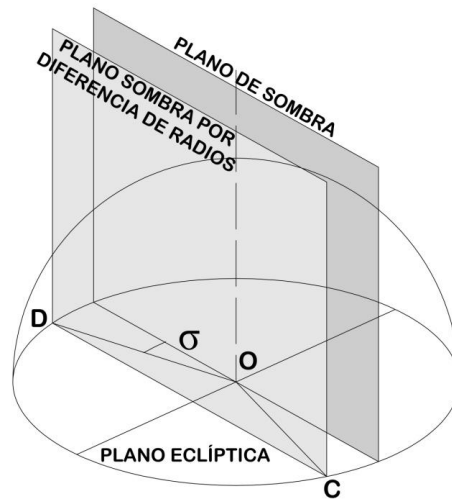
$$\sin \sigma = 4,6524 \cdot 10^{-3} ,$$

o sea: $\sigma \sim 0,26657^\circ$ para ρ media (año 2013).

El valor total de los grados suplementarios de iluminación en el plano de la eclíptica sería igual a la expresión anterior multiplicada por 2.

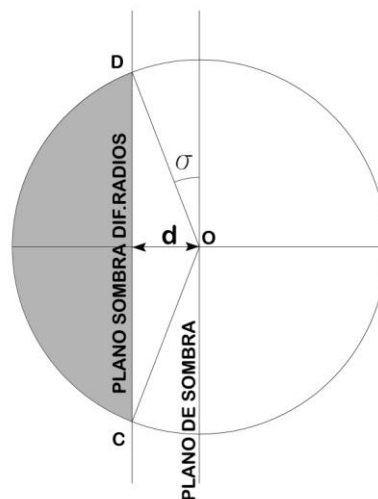
Si analizamos en detalle el gráfico de la zona iluminada de la Tierra teniendo en cuenta la diferencia de radios mencionada, definiremos un nuevo plano auxiliar perpendicular al plano ecuatorial, y paralelo al hasta ahora denominado *plano de sombra*, que estará

situado a una distancia d de este, y al que podemos denominar *plano de sombra por diferencia de radios*. Los puntos límite de la intersección de este plano con el círculo máximo, obtenido a su vez por intersección del plano de la eclíptica con la esfera terrestre, se representan como C y D en la fig. 2-34.



2-34. Plano de sombra y su paralelo por diferencia de radios.

En la fig. 2-35 podemos ver la misma gráfica anterior, pero en diédrica (planta).

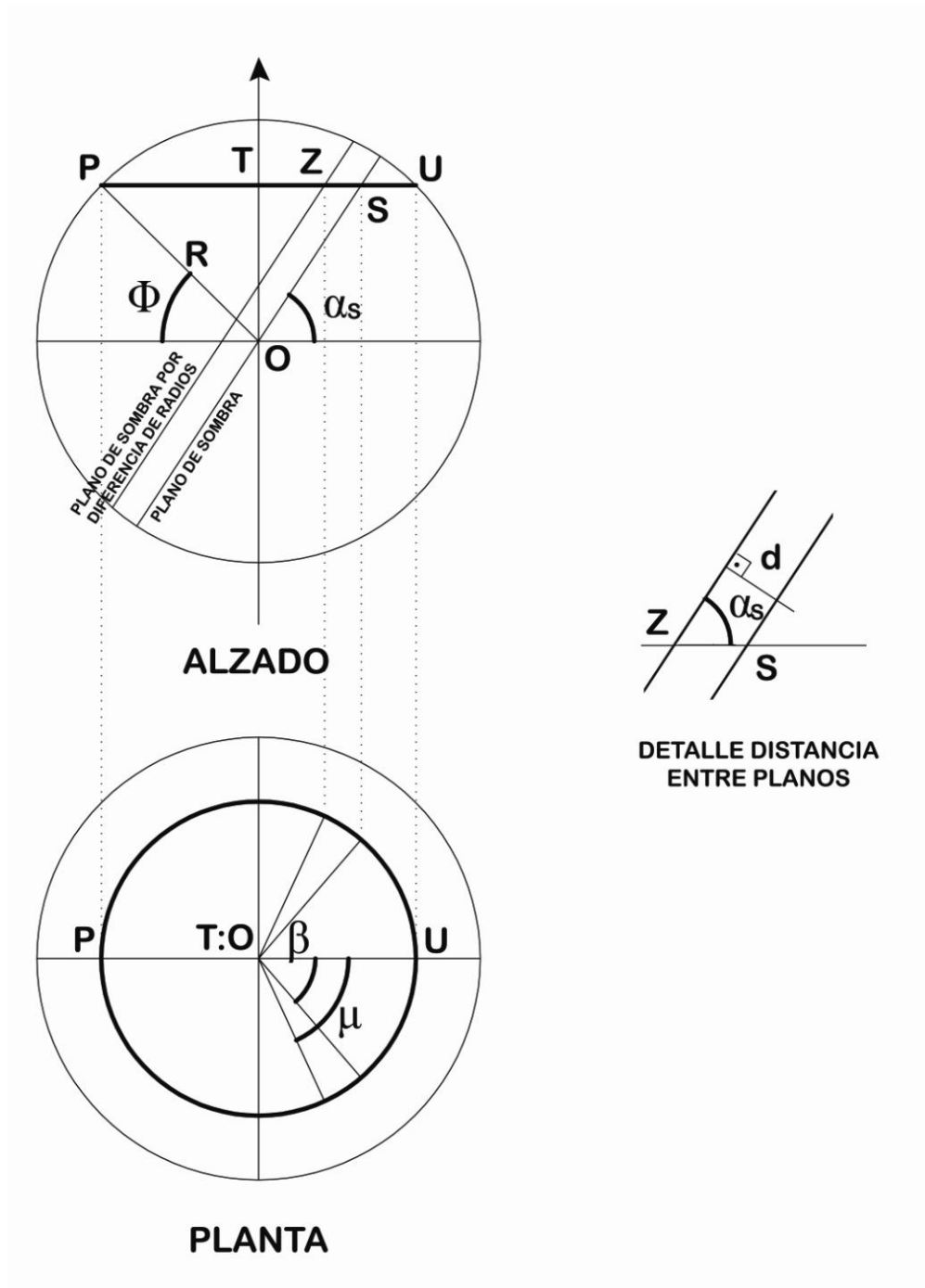


2-35. Planta de la figura 2-34.

Ahora bien, cualquier punto periférico que gire alrededor del eje de la Tierra no verá incrementarse las horas de Sol en esta proporción, sino en función de la resultante

proyectada sobre el plano del ecuador. No olvidemos, además, que el plano de sombra forma con el ecuador terrestre, para cada momento del año, un ángulo α_S .

El cálculo de la proyección mencionada se analiza en la fig. 2-36:



2-36. Relaciones angulares para el cálculo de μ , definitorio de la posición del plano por diferencia de radios.

De los gráficos anteriores obtenemos ²⁹:

$$\frac{d}{SZ} = \sin \alpha_S \Rightarrow SZ = \frac{d}{\sin \alpha_S} = \frac{R \cdot \sin \sigma}{\sin \alpha_S}$$

Además, en la fig. 2-36:

$$r = R \cdot \cos \Phi$$

$$r \cdot \cos \mu = TZ$$

$$\cos \mu = \frac{TZ}{r} = \frac{TS - SZ}{r} = \cos \beta - \frac{R \cdot \sin \sigma}{\sin \alpha_S \cdot R \cdot \cos \Phi} = \cos \beta - \frac{\sin \sigma}{\sin \alpha_S \cdot \cos \Phi} ,$$

o lo que es lo mismo:

$$\mu = \arccos\left(\cos \beta - \frac{\sin \sigma}{\sin \alpha_S \cdot \cos \Phi}\right) = \arccos\left(\frac{\tan \Phi}{\tan \alpha} - \frac{\sin \sigma}{\sin \alpha_S \cdot \cos \Phi}\right) =$$

En función de δ , de acuerdo con (Ec. 2.5) del punto 2.6.1,

$$\mu = \arccos\left(-\tan \delta \cdot \tan \Phi - \frac{\sin \sigma}{\cos \delta \cdot \cos \Phi}\right) = 180^\circ - \arccos\left(\tan \delta \cdot \tan \Phi + \frac{\sin \sigma}{\cos \delta \cdot \cos \Phi}\right)$$

Expresado en horas:

$$Hs_\mu = 24 - \frac{2}{15} \arccos\left(\tan \delta \cdot \tan \Phi + \frac{\sin \sigma}{\cos \delta \cdot \cos \Phi}\right) \quad (\text{Ec. 2.7})$$

Sustituyendo $\sin \sigma$ por su valor aproximado en función de los radios de la Tierra y el Sol, y la distancia entre ellos:

$$Hs_\mu = 24 - \frac{2}{15} \arccos\left(\tan \delta \cdot \tan \Phi + \frac{(R_S - R_T)}{\rho \cdot \cos \delta \cdot \cos \Phi}\right)$$

²⁹ La variable μ se utiliza solamente con carácter auxiliar, sin tener un significado astronómico convencional.

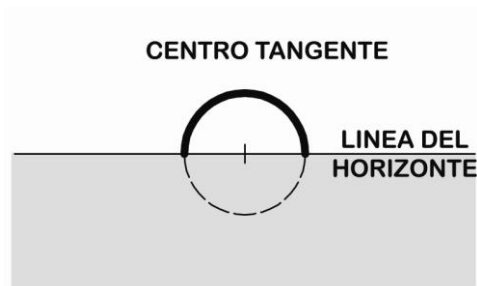
Como indicábamos al principio del capítulo, $R_T \lll R_S$, por lo que cabría la simplificación

$$Hs_{\mu} = 24 - \frac{2}{15} \arccos\left(\tan \delta \cdot \tan \Phi + \frac{R_S}{\rho \cdot \cos \delta \cdot \cos \Phi}\right)$$

2.13.1. HORAS DE SOL CON Y SIN CORRECCIÓN ANGULAR: SIGNIFICADO PARA EL OBSERVADOR TERRESTRE

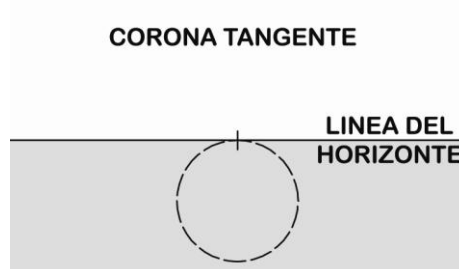
La percepción de la ocultación del Sol por el observador en los casos analizados con y sin corrección tiene una correlación muy sencilla con la situación aparente del mismo en el amanecer y en el ocaso en relación con la línea del horizonte.

En efecto, en el primer caso, esto es, sin corrección, lo que veríamos es la superposición del centro solar con la línea del horizonte: (fig. 2-37)



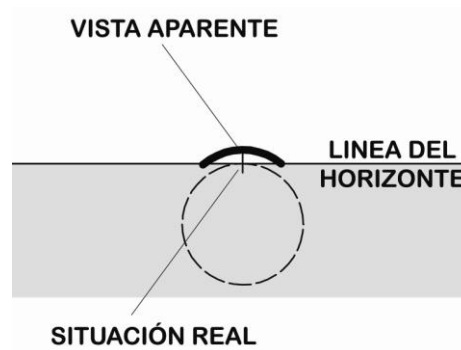
2-37. Centro solar sobre el horizonte.

En el segundo caso, tendríamos la zona superior de la corona solar tangente a la línea del horizonte. Esta situación se produce más temprano al amanecer y más tarde al atardecer (fig. 2-38):



2-38. Corona solar tangente al horizonte.

Hay que tener en cuenta también que, como veremos más adelante, la existencia de atmósfera en nuestro planeta provoca una modificación en la dirección de los rayos solares, lo que adelanta la aparición de la corona solar con respecto al momento teórico de su avistamiento en el amanecer y retrasa la misma en el ocaso (fig. 2-39).



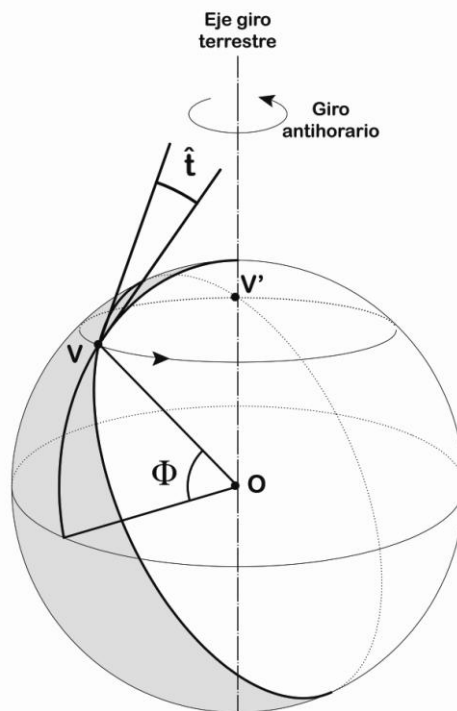
2-39. Vista aparente de la corona solar sobre el horizonte.

El cálculo de ρ presupone el conocimiento de los procedimientos de cálculo de L_b , así como conceptos básicos de astronomía, que quedan pendientes de ulteriores desarrollos.

2.14. RELACIÓN GEOMÉTRICA ENTRE EL TERMINADOR Y EL MERIDIANO DEL OBSERVADOR.

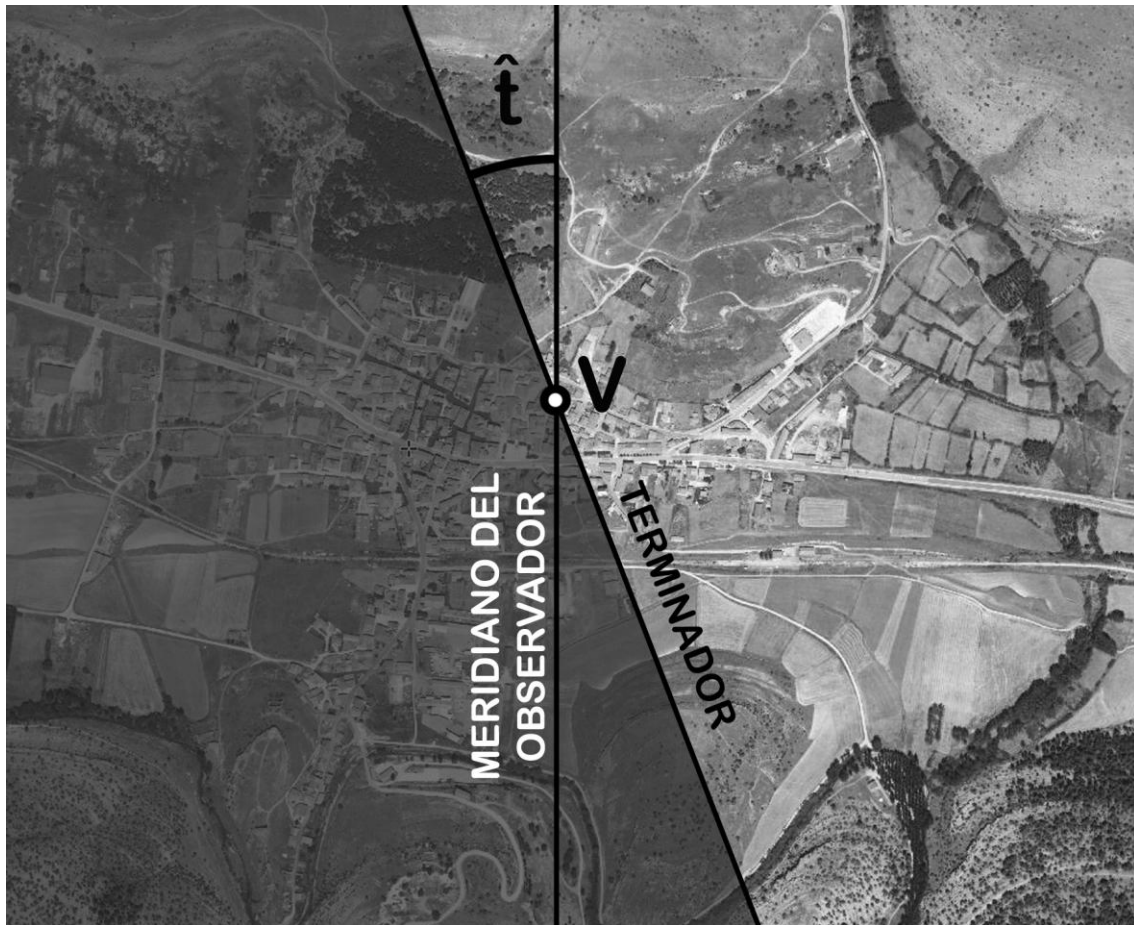
Como hemos indicado anteriormente, la separación entre el hemisferio terrestre iluminado y el hemisferio en la oscuridad se denomina *terminador*, identificándose con la intersección entre el plano de sombra y la superficie terrestre. Resulta sorprendente la escasa atención que se dispensa al terminador en los libros de astronomía clásica, siendo citado tangencialmente en obras como la clásica [43], pero ausente de obras como [9], [11], [7], etc. Más aún en lo relativo a su estudio analítico.

El cálculo del ángulo \hat{t} ³⁰ entre el meridiano y el terminador, puede realizarse fácilmente sin más herramientas que la geometría plana y resulta interesante para ciertas aplicaciones gráficas que analizaremos. Su determinación parte del esquema gráfico indicado en la fig. 2-40, y sirve, entre otras aplicaciones, para explicar la diferencia de orientación a lo largo del año de la línea de separación entre luz y oscuridad percibida teóricamente por el observador situado en V, representado en la fig. 2-41 sobre una imagen terrestre a gran escala (extraída de [44]).



2-40. Relación angular entre el terminador y el meridiano en V.

³⁰ Esta denominación, \hat{t} , para el ángulo buscado, es arbitraria, no estando recogida como tal en los manuales de Astronomía.



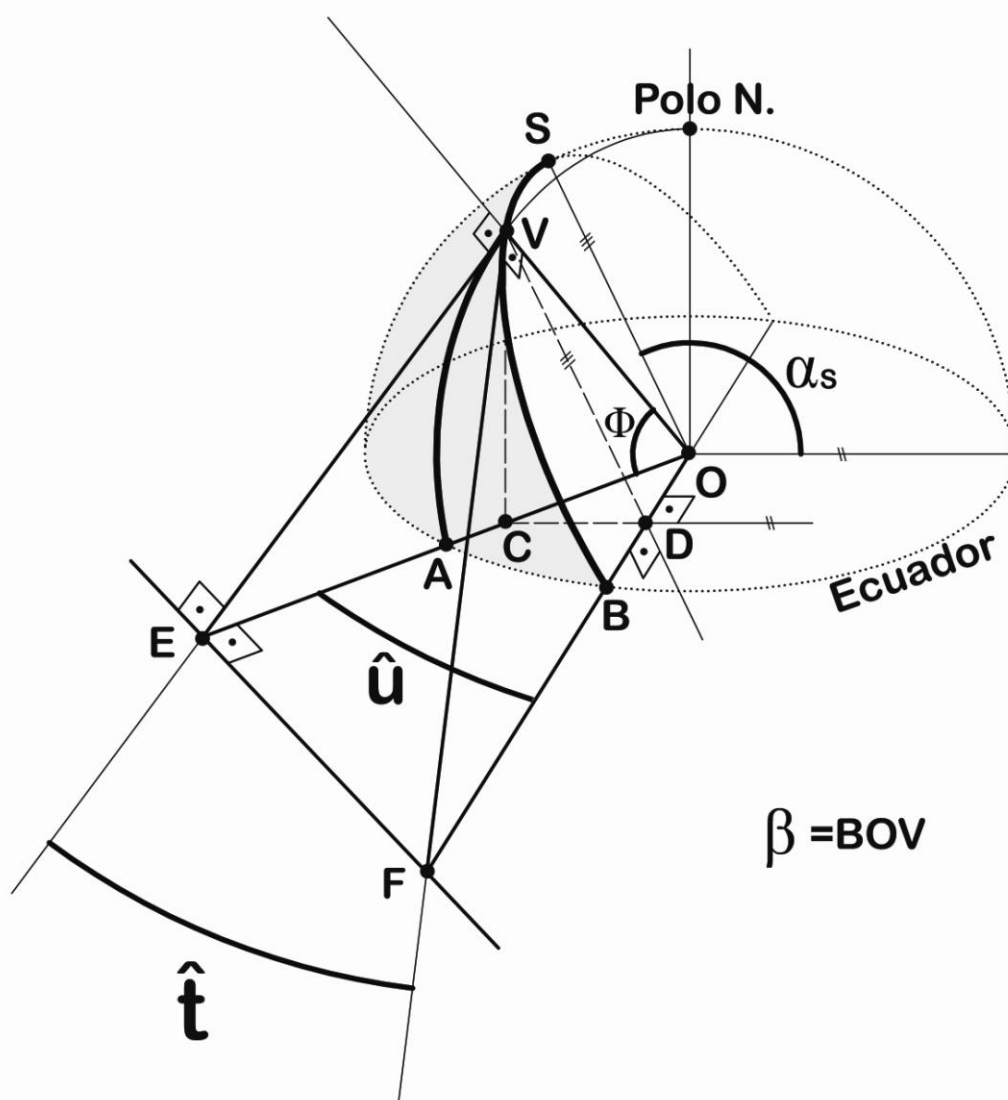
2-41. Ejemplo de la relación entre el terminador y el meridiano sobre la superficie terrestre.
Elaboración propia superpuesta sobre imagen extraída de SIGPAC (Gobierno de España. MAPAMA)
[http://www.mapama.gob.es/es/agricultura/temas/sistema-de-informacion-geografica-de-parcelas-agricolas-sigpac-/](http://www.mapama.gob.es/es/agricultura/temas/sistema-de-informacion-geografica-de-parcelas-agricolas-sigpac/) [44].

En sentido estricto, el terminador presenta una gradación lumínica en el borde debido a la refracción de la atmósfera terrestre, pero a efectos de nuestros cálculos consideraremos que no existe transición, por lo que el terminador vendrá representado por un círculo máximo cuya inclinación con respecto al plano ecuatorial terrestre dependerá en último término de α_s , o, lo que es lo mismo, de la declinación solar δ .

En cada fecha, y dependiendo de la latitud Φ del lugar, en el amanecer y en el ocaso el terminador forma un ángulo \hat{t} con la línea N-S o meridiano en dicho lugar en el amanecer. Es inmediato, a la vista de la fig 2-40, deducir que en el ocaso dicho ángulo tomará un valor $-\hat{t}$.

En efecto, el punto V, que en la figura 2-40 se encuentra en el amanecer, lo largo del giro diario de la Tierra pasaría a situarse en la posición V', formando entonces su meridiano un ángulo con el terminador igual que \hat{t} , pero de signo contrario.

El plano de sombra, que ha sido analizado en anteriores capítulos, será el punto de partida de los cálculos siguientes. En la fig. 2-42, que será el punto de partida de nuestro proceso deductivo, sería el plano definido por los puntos O, B y S. Hay que hacer constar que la utilización de este plano y su ángulo asociado α_S en lugar de la declinación δ correspondiente a la declinación solar en la fecha es mucho más cómoda visualmente. Más adelante se realizará la oportuna sustitución de δ por α_S de acuerdo con lo establecido en capítulos anteriores. Nuestro problema consistirá en encontrar, para un punto V situado en una latitud Φ , el ángulo definido de acuerdo con lo representado en la fig. 2-42.



2-42. Relaciones angulares para el cálculo de \hat{t}

Los ángulos OVE y OVF son rectos, ya que tanto EV como FV son tangentes a círculos máximos en P cuyo radio es OP. Los segmentos EV y FV, por otra parte, determinan el plano tangente a la esfera terrestre, por lo que el radio de esta, OV, es perpendicular, como hemos dicho, a ambos segmentos.

Este plano tangente a la esfera cortará al plano ecuatorial terrestre según la línea recta EF, que a su vez será perpendicular al segmento EV, que es su línea de máxima pendiente desde el plano ecuatorial.

La proyección de V sobre el plano del ecuador terrestre es C. Si desde C trazamos una perpendicular a FO, que cortará a dicho segmento en D, tendremos determinada la línea de máxima pendiente del plano FOV, que será precisamente DV. Esta línea tiene la propiedad de ser también perpendicular a FO.

Por tanto,

$$VC = OV \sin \Phi$$

y también, llamando para mayor comodidad β al ángulo BOV, tal y como se especifica en la fig. 2-42:

$$VC = OV \sin \beta \sin(180^\circ - \alpha_S) = OV \sin \beta \sin \alpha_S ,$$

por lo que:

$$\sin \beta = \frac{\sin \Phi}{\sin \alpha_S} \quad (\text{Ec. 2.8})$$

Para obtener \hat{u} , teniendo en cuenta la ecuación anterior (Ec. 2.8):

$$CD = OV \sin \beta \cos(180^\circ - \alpha_S) = -OV \frac{\sin \Phi}{\tan \alpha_S}$$

Pero también $CD = OV \cos \Phi \sin \hat{u}$

por lo que:

$$\sin \hat{u} = -\frac{\tan \Phi}{\tan \alpha_S} \quad (\text{Ec. 2.9})$$

Por otra parte, se verifica simultáneamente:

$$EF = FO \sin \hat{u} \quad (\text{Ec. 2.10})$$

$$FV = FO \sin \beta \quad (\text{Ec. 2.11})$$

$$EF = FV \sin \hat{t} \quad (\text{Ec. 2.12})$$

Así pues, teniendo en cuenta las ecuaciones (Ec. 2.9), (Ec. 2.10), (Ec. 2.11) y (Ec. 2.12),

$$\sin \hat{t} = -\frac{\cos \alpha_S}{\cos \Phi} \quad (\text{Ec. 2.13})$$

Y, finalmente, teniendo en cuenta la conocida relación entre α_s y δ (declinación solar), que vimos en el apartado 2.6.1, sustituyendo en (Eq. 2.13), llegaremos a:

$$\sin \hat{t} = \frac{\sin \delta}{\cos \Phi} \quad (\text{Ec. 2.14})$$

O, lo que es lo mismo,

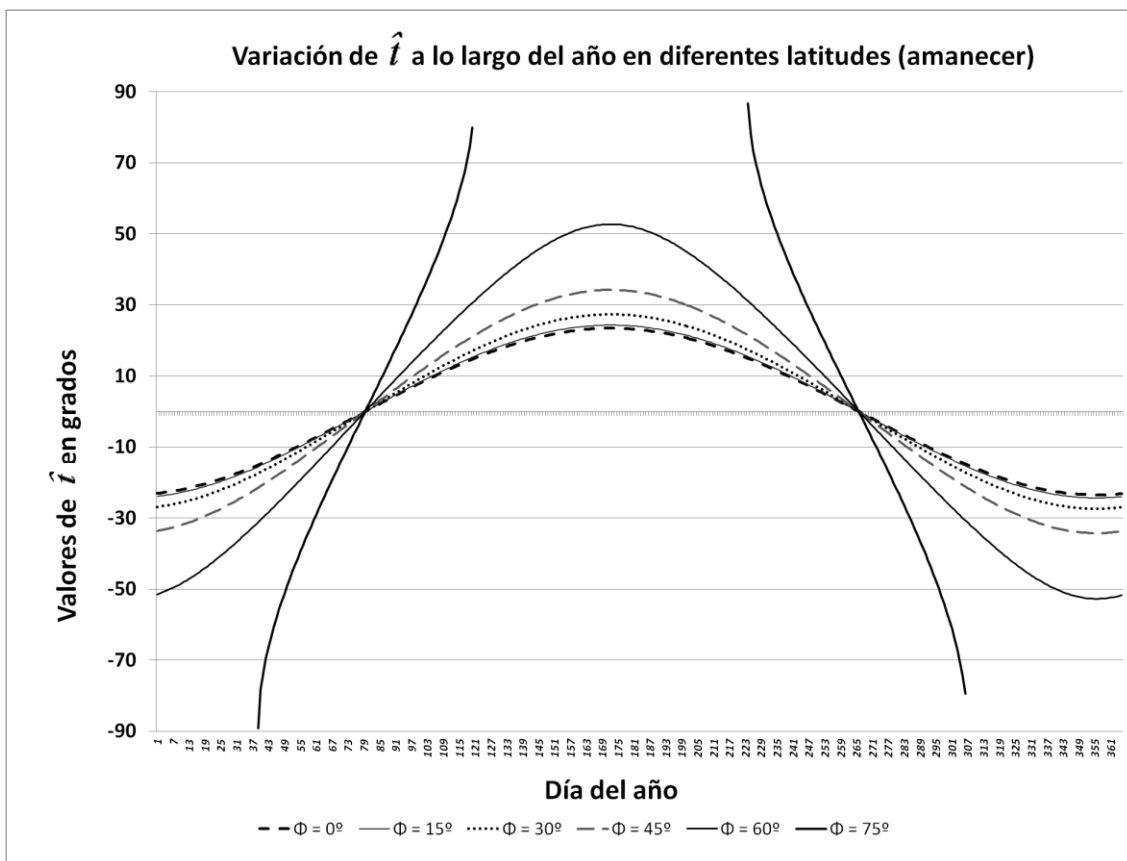
$$\hat{t} = \arcsin\left(\frac{\sin \delta}{\cos \Phi}\right)$$

Elegiremos la solución de menor módulo. Como hemos indicado anteriormente, este ángulo sería el correspondiente al amanecer; en el ocaso sería igual y de signo contrario.

2.14.1. ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN DE \hat{t} EN EL TIEMPO PARA DIFERENTES LATITUDES.

El ángulo \hat{t} es diferente para distintas latitudes y para las declinaciones solares a lo largo del año. En cada fecha, a la que podemos asignar aproximadamente una δ , y para cada Φ , obtendremos una curva diferente. Si tenemos en cuenta valores aproximados de δ para cada fecha del año, como por ejemplo, los de la Tabla 2-6 y la Tabla 2-7. Ello nos permite representar una familia de curvas con la fecha en abscisas y el ángulo \hat{t} en ordenadas (fig. 2-43). Estas curvas corresponden a valores de \hat{t} en el amanecer. Para el ocaso, bastaría considerar una gráfica igual, pero simétrica con respecto a un eje horizontal.

Puede observarse la discontinuidad de las curvas en la latitud 75° . Realmente, este comportamiento anómalo se produce en todas las latitudes por encima del círculo polar ártico (en el hemisferio Norte), es decir, sobre los $65,55^\circ$ aproximadamente. Ello se debe al hecho de que estas regiones se encuentran en determinadas fechas iluminadas las 24 horas o en total oscuridad, dependiendo de la estación. Por ello no se puede encontrar solución matemática en esas fechas para el ángulo \hat{t} .



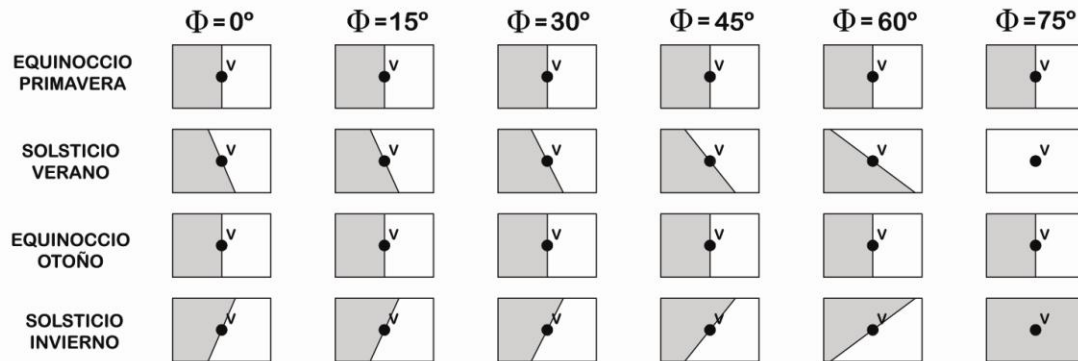
2-43. Valores para \hat{t} en el orto (amanecer) a lo largo del año correspondientes a distintas latitudes.

Para el resto de regiones no circumpolares, observamos que los máximos valores de \hat{t} positivos se producen en el solsticio de verano, y los mínimos negativos en el solsticio de invierno. En los equinoccios, el terminador se superpone con el meridiano. Este fenómeno se puede analizar de una forma sencilla gráficamente en la fig. 2-44.

En ella se representa la secuencia de variación del terminador a lo largo del año para las latitudes consideradas en la fig. 2-43. Los rectángulos son una representación esquemática de una región terrestre reducida para la que la aproximación del terminador a una recta sea suficientemente aproximada. El observador se sitúa en el centro de las cuadrículas y se simboliza, como en todos los desarrollos anteriores, con V. La orientación de las áreas es la natural, con el norte hacia la zona superior del papel.

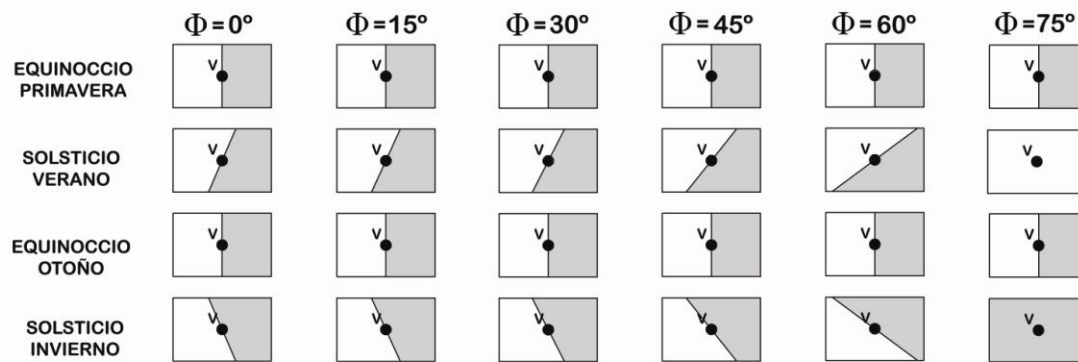
AVANCES DE LAS ZONAS DE LUZ Y SOMBRA. (Observador en V)

AMANECER (Avance zona luz)



Dirección avance zona de sol

OCASO (Avance zona sombra)



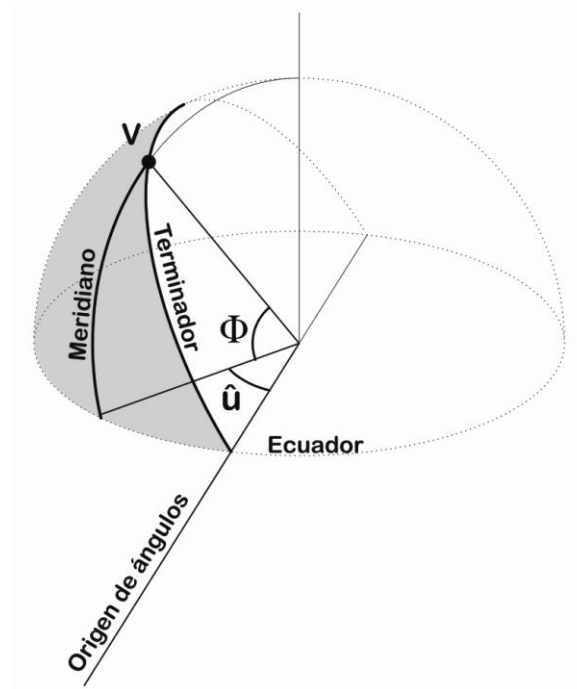
Dirección avance zona sombra

2-44. Evolución de \hat{t} a lo largo el año en el orto y ocaso para diferentes latitudes.

2.14.2. TERMINADOR Y MAPAS DAY-NIGHT.

Una interesante aplicación del método deductivo que hemos utilizado para el cálculo de \hat{i} es la elaboración de mapas de luz y sombra basados en planisferios terrestres. Estos planos, denominados más frecuentemente como *daylight map* o, *day-night maps*, suelen confeccionarse con programas gráficos específicos basados en algoritmos extraídos de la astronomía clásica. Sin embargo, el método desarrollado mediante geometría plana en el punto anterior para el cálculo de \hat{i} será suficiente para una representación aproximada y sin zonas lumínicas de transición, como hemos indicado anteriormente. En concreto, la base para la representación de las áreas de luz y oscuridad será el ángulo auxiliar \hat{u} que obteníamos en el desarrollo anterior.

En efecto, y de acuerdo con la fig. 2-45, para la determinación de un punto cualquiera del terminador, basta con conocer su latitud Φ y el ángulo \hat{u} . Aquí debemos resaltar que \hat{u} crece en sentido horario tal y como se ha definido en la fig. 2-42, siendo el origen de ángulos el punto de corte del terminador con el ecuador terrestre. Dado que hay dos puntos de corte, elegimos arbitrariamente el correspondiente al amanecer, es decir, aquél en el que el observador en el ecuador ve la zona iluminada al este.



2-45. Definición del punto V del terminador mediante \hat{u} y Φ .

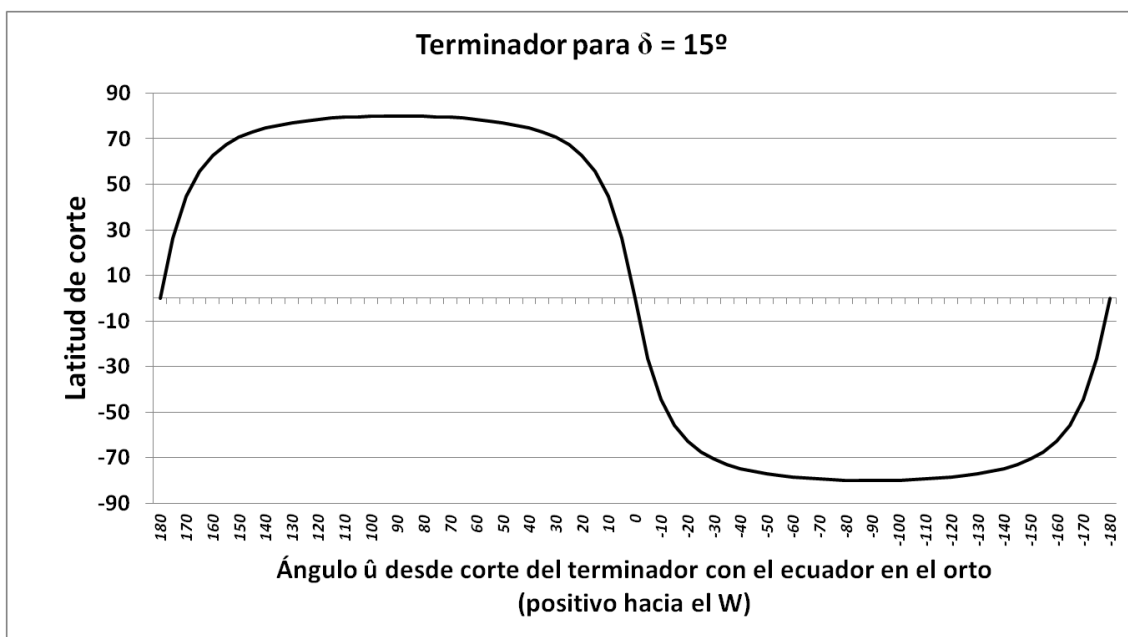
Por lo tanto, es suficiente conocer la expresión que relaciona \hat{u} y Φ con la declinación solar δ para poder representar la curva correspondiente a un instante cuya declinación sea, precisamente, δ . Esta relación la obtenemos de la (Ec. 2.9):

$$\sin \hat{u} = -\frac{\tan \Phi}{\tan \alpha_S}$$

donde teniendo en cuenta la conocida relación entre α_S y δ y despejando podemos escribir

$$\Phi = \arctan\left(\frac{\sin \hat{u}}{\tan \delta}\right) \quad (\text{Ec. 2.15})$$

Así, para una determinada declinación δ (que se producirá en una fecha determinada), podemos representar una función que representará el terminador sobre un planisferio. Por ejemplo, en la fig. 2-46 podemos observar la correspondiente a una declinación de 15° . Tal y como hemos indicado anteriormente, podemos observar la distribución creciente del ángulo \hat{u} hacia la izquierda de la gráfica, lo que se correspondería con la zona oeste de un planisferio sobre el que superpusiéramos la función.



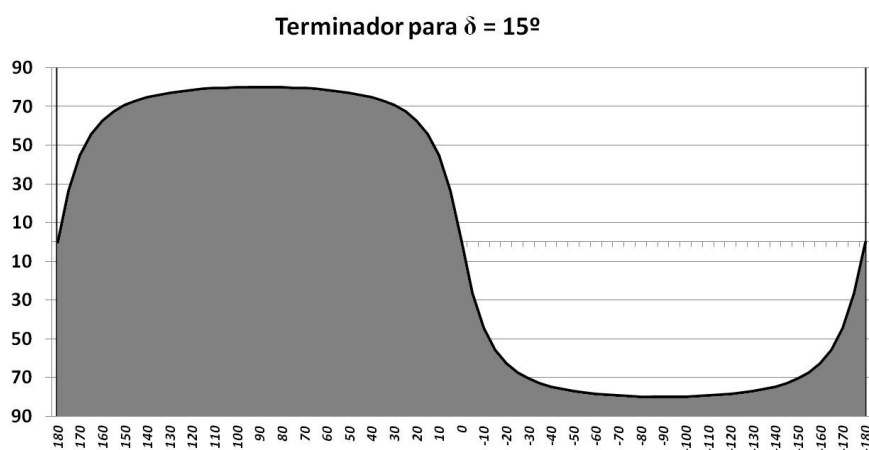
2-46. Representación desarrollada sobre plano del terminador para $\delta = 15^\circ$.

Debemos indicar que la graduación 0° corresponde al instante del amanecer en el ecuador. Por esta razón, si situamos ese punto sobre el meridiano de Greenwich, tendremos una imagen correspondiente a las 6:00 hora solar local o *local solar time* (LST) Greenwich. Si comparamos con la hora media UT, las diferencias pueden variar desde -14m15s a +16m25s debido a la *ecuación del tiempo*, concepto que analizaremos

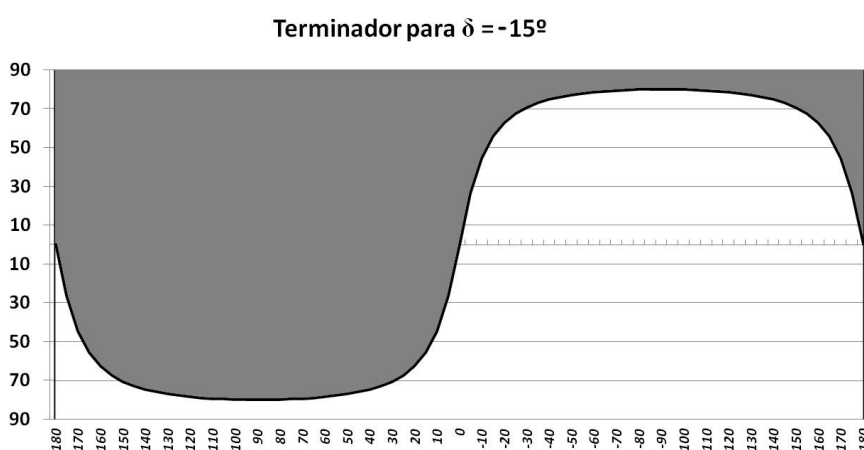
en el capítulo 11 de esta tesis. No obstante, la diferencia a efectos gráficos no es muy significativa.

Si deseamos sombrear la zona correspondiente al área de oscuridad, la norma es muy simple: para declinaciones positivas, esto es, para fechas comprendidas entre el equinoccio de primavera y el equinoccio de otoño, sombrearemos la superficie bajo la línea del terminador. Para el resto de fechas, se procederá a sombrear la superficie sobre la línea del terminador.

En las figs. 2-47 y 2-48 se ejemplifica esta cuestión para declinaciones $\delta = 15^\circ$ (días 16/04 y 27/08; valores correspondientes a 2017) y $\delta = -15^\circ$ (días 8/02 y 19/10; íd. para 2017).

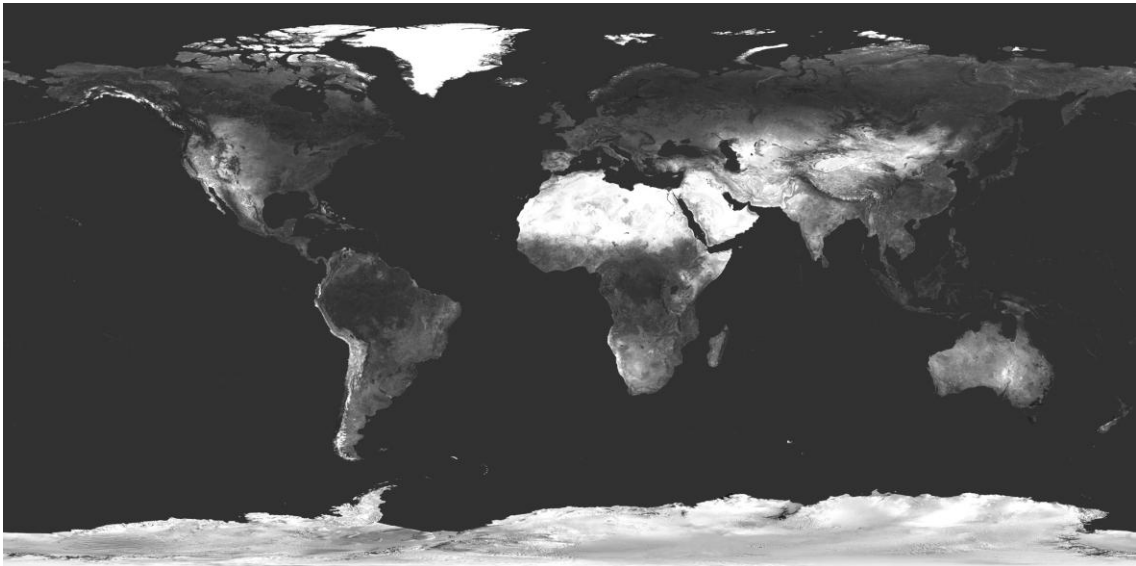


2-47. Representación de la zona sombreada bajo el terminador para declinaciones positivas.

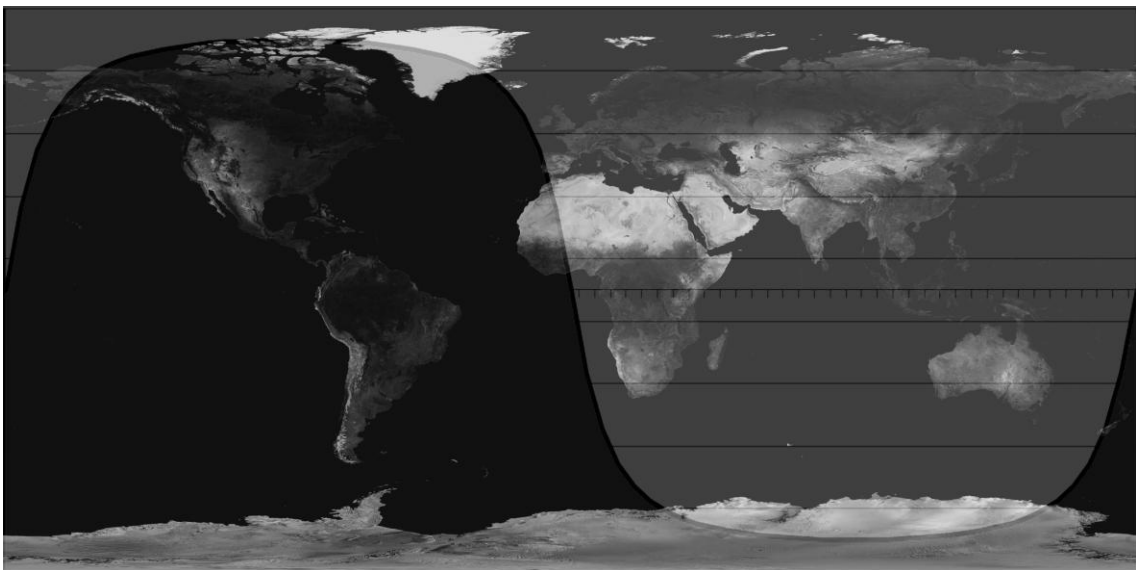


2-48. Representación de la zona sombreada sobre el terminador para declinaciones negativas.

Otra cuestión que debe tenerse en cuenta es que si deseamos superponer este gráfico sobre un planisferio deberemos ajustar las escalas horizontal y verticalmente. El ajuste horizontal no entraña ninguna dificultad, pero el vertical es más complejo cuando la proyección elegida no mantiene equidistantes las latitudes. En estos últimos casos, deberá procederse a varios ajustes verticales consecutivos. Ello puede simplificarse si se utiliza como partida un planisferio como el de la fig. 2-49, obtenido de la NASA [45], y que tiene la particularidad de conservar la equidistancia entre latitudes. En la fig. 2-50 podemos observar la zona de sombra resultante sobre el planisferio una vez ajustada.

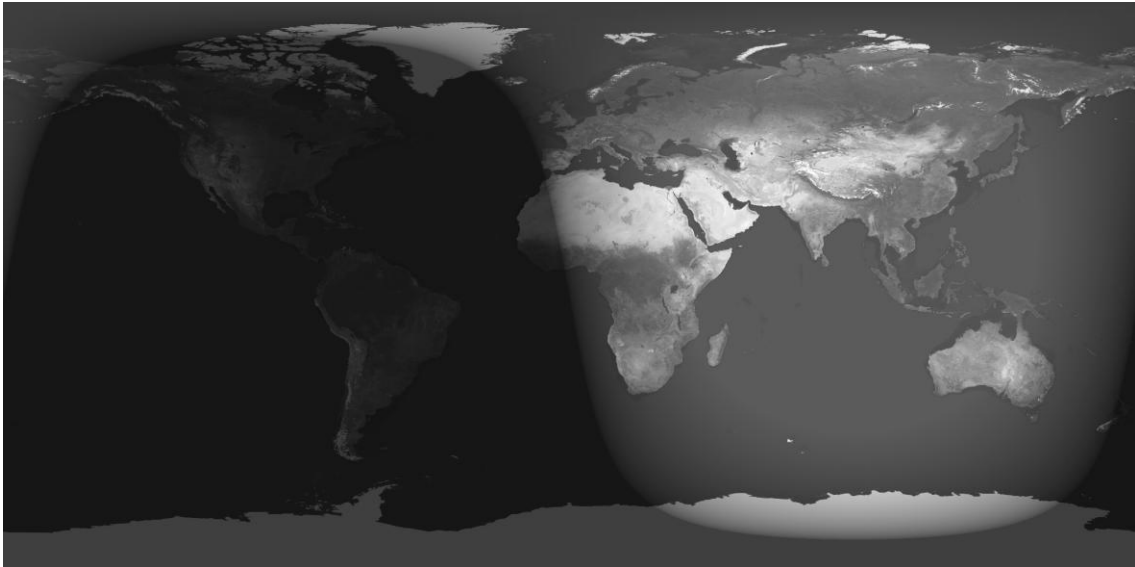


2-49. Planisferio terrestre obtenido de la NASA ("Visible Earth")
<https://visibleearth.nasa.gov/view.php?id=57752> [45]



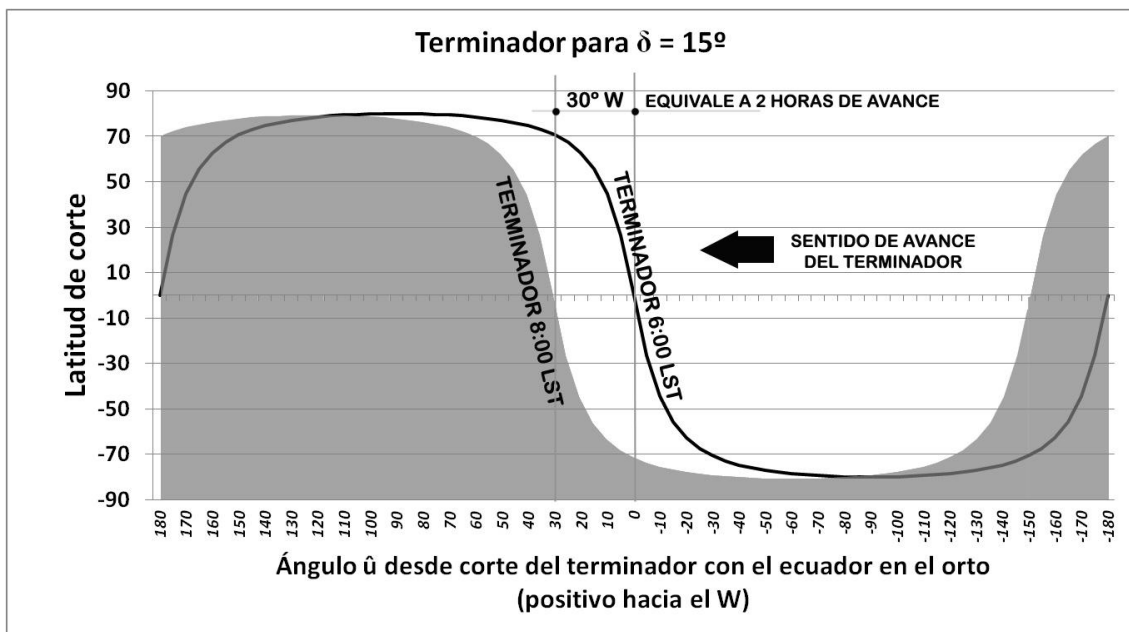
2-50. Ajuste de la imagen 2-47 superpuesta sobre el planisferio extraído de la NASA ("Visible Earth")
<https://visibleearth.nasa.gov/view.php?id=57752> [45].

La fig. 2-51 muestra un gráfico obtenido de la aplicación on-line de la USNO (The United States Naval Observatory) [46], a través de su aplicación “*Day and Night Across the Earth*” para las 6:00 Greenwich del día 16/04/2017, el cual presenta una declinación aproximada de 15° . Obsérvese la correspondencia con la fig. 2-50, salvo en lo relativo a las zonas de transición.



2-51. Imagen de la USNO (“*Day and night across the Earth*”).

<http://aa.usno.navy.mil/imagery/earth/map?year=2017&month=4&day=16&hour=06&minute=00> [46]
para el 16 de abril a las 6:00 U.T. para el año 2017



2-52. Ejemplo de desplazamiento aparente del terminador como consecuencia de la rotación terrestre.

Si deseamos obtener el *day-night map* para otra hora diferente, bastará desplazar el patrón de sombra correspondiente a la fecha dada a la izquierda, teniendo en cuenta que desde el punto de latitud = 0° y longitud = 0° una distancia angular de 15° equivale a una hora, tal y como se muestra en la fig. 2-52.

Ejemplo práctico.

Un interesante gráfico con la evolución horaria de la línea del terminador sobre la península ibérica es el que realiza R. Soler [4] para los solsticios de verano e invierno, que reproducimos en la fig. 2-53 por ser suficientemente ilustrativo y servir como resumen gráfico de las deducciones realizadas en este último punto. Vamos a realizar un breve análisis del mismo como comprobación geométrica.

En el gráfico se indican las horas de salida y puesta del Sol en diferentes puntos de la península. Obsérvese que la inclinación de las líneas en los instantes considerados debe estar en consonancia con el ángulo \hat{i} hallado mediante la expresión obtenida a partir de la (Ec. 2.14):

$$\hat{i} = \arcsin\left(\frac{\sin \delta}{\cos \Phi}\right)$$

Dado que en los solsticios tenemos:

- Solsticio de verano: $\delta = 23,44^\circ$
- Solsticio de invierno: $\delta = -23,44^\circ$

Y considerando como latitud la correspondiente al centro peninsular de forma aproximada, por ejemplo, la de Madrid:

$$\Phi = 40,49^\circ$$

Los valores correspondientes de \hat{i} serán:

- Orto (amanecer) solsticio de verano: $\hat{i} = 31,53^\circ$
- Ocaso solsticio de verano: $\hat{i} = -31,53^\circ$
- Orto (amanecer) solsticio de invierno: $\hat{i} = -31,53^\circ$
- Ocaso solsticio de invierno: $\hat{i} = 31,53^\circ$

Si verificamos gráficamente la inclinación de las líneas, obtenemos aproximadamente estos mismos valores.

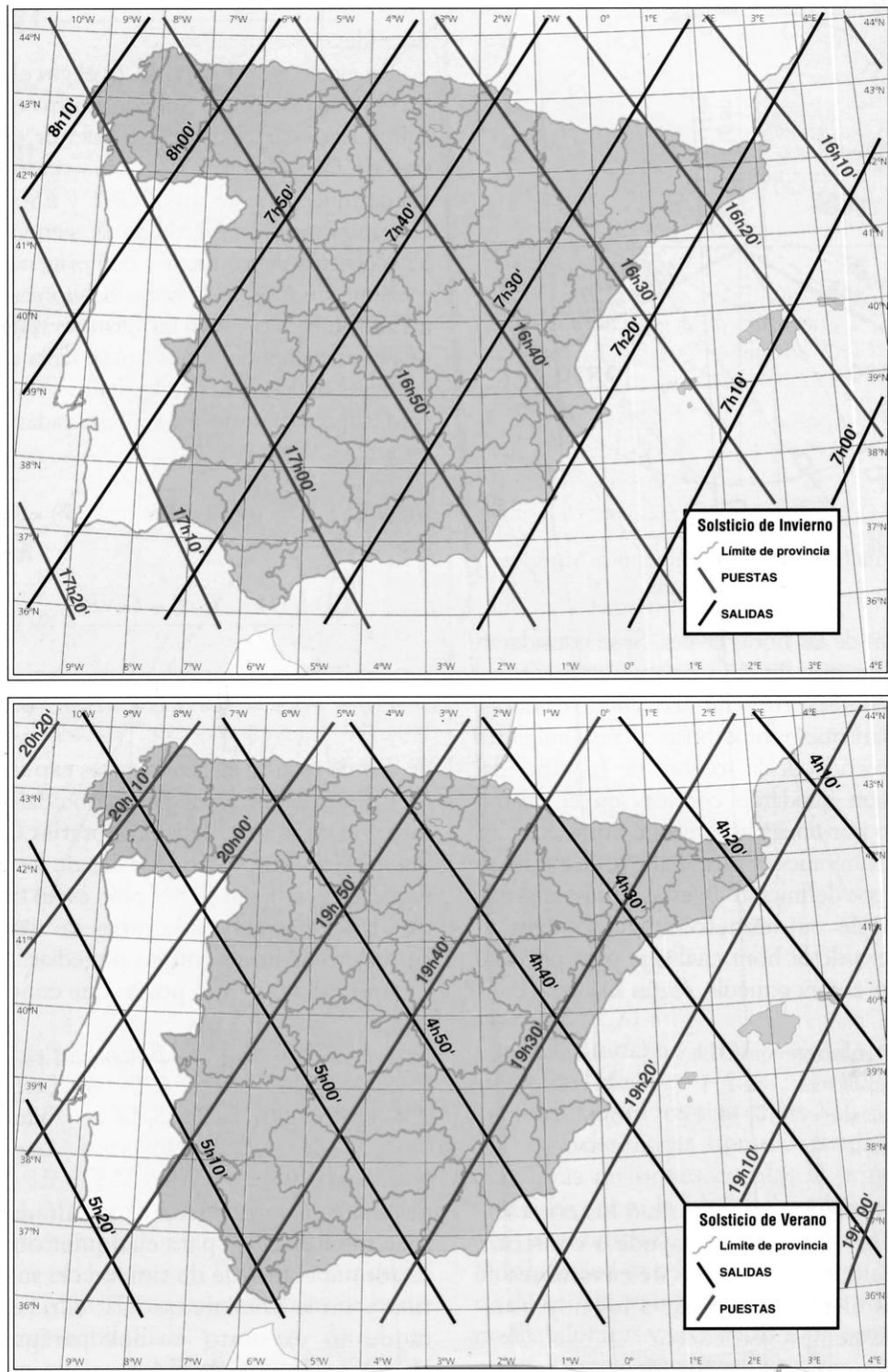


Figura IX.7.-Hora en T.U. de salidas y puestas de Sol en los solsticios.

2-53. Horas de salida y puesta del Sol en los solsticios. Evolución del terminador. R. Soler.
"Diseño y construcción de relojes de Sol y de Luna". ©Rafael Soler, © Colegio de Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos [4].

Del gráfico también deducimos que se ha realizado la simplificación de considerar rectas todas las líneas, cuando realmente serían líneas de tipo sinusoidal. Las diferencias de latitud en la península se mantienen en un intervalo aproximado de 8° , con lo que los errores tomando la latitud de Madrid serían los correspondientes a una diferencia de $\pm 4^\circ$ aproximadamente. Analicémoslo.

Si calculamos la inclinación del terminador en los extremos y en las fechas anteriores, tendremos, aproximadamente las siguientes latitudes de partida:

$$\Phi = 44,50^\circ \text{ y } \Phi = 36,50^\circ$$

Ello nos arroja unos ángulos, en el orto del solsticio de verano, de:

$$\hat{i} = 33,9^\circ \text{ para } \Phi = 44,50^\circ \quad \text{y} \quad \hat{i} = 29,7^\circ \text{ para } \Phi = 36,50^\circ$$

Diferencias en absoluto desdeñables. Por tanto, la simplificación geométrica en este caso es aproximada y obedece a cuestiones meramente didácticas, al haberse tomado las inclinaciones correspondientes a Madrid. *Sensu stricto*, la comprobación que hemos realizado tampoco es rigurosamente exacta debido a la proyección de la península utilizada como base : véase que a su vez las líneas de valores fraccionarios de paralelos no son rectas, lo que añadiría mayor complejidad al análisis.

En cuanto a las diferentes líneas paralelas para cada hora, sus cortes con los paralelos están separados $2,5^\circ$, lo que está en perfecta consonancia con las diferencias temporales de 10 minutos entre ellas: como indicábamos en puntos anteriores, el desplazamiento del terminador es de 15° / hora. Sobre su paralelismo se puede indicar lo mismo que en el párrafo anterior en cuanto a la representación curva de los paralelos.

2.14.3. TERMINADOR Y CREPÚSCULOS

Los crepúsculos se definen como *la claridad variable que precede la salida del Sol o sigue su puesta* [17]. Se debe a la refracción de la luz solar en la atmósfera. Este factor, que no ha sido tenido en cuenta en los puntos anteriores, y su resultado es la percepción de la claridad indicada una vez que el Sol se ha ocultado bajo el horizonte o antes de su salida. Es habitual en Astronomía definir tres crepúsculos o instantes en relación con este fenómeno. Tomamos las definiciones igualmente de [17]:

- Crepúsculo civil: la elevación aparente del Sol es de 6° bajo el horizonte. Son visibles algunos planetas y estrellas de primera magnitud.

- Crepúsculo náutico. Elevación del Sol de 12° bajo el horizonte. Se perciben el horizonte y las estrellas más brillantes de las constelaciones.
- Crepúsculo astronómico. Noche cerrada. Se perciben estrellas de hasta sexta magnitud.

La duración de los crepúsculos depende de la latitud del observador y de la declinación. Es máxima en los polos (noches blancas) y mínima en el ecuador. Su integración en los mapas día-noche vendría representada por bandas paralelas al propio terminador, cuestión que no analizaremos en la presente tesis.

3. ACIMUT Y ELEVACIÓN SOLARES

Motum solis adaequat

El proceso deductivo de las expresiones geométricas de la elevación del Sol desde el plano del observador y del acimut del mismo, que conforman los dos elementos de la trayectoria aparente del Sol para el observador, puede materializarse fácilmente mediante las mismas herramientas básicas utilizadas hasta ahora, esto es, la geometría plana y el sistema diédrico. A continuación se desarrollan dichos procesos.

3.1. PROCESO DEDUCTIVO

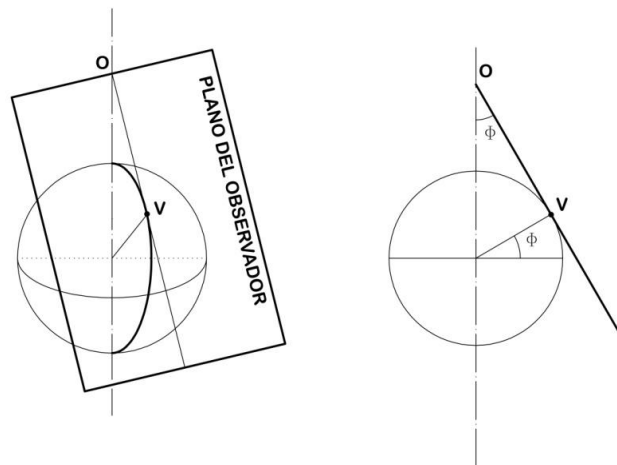
3.1.1. EL PLANO DESLIZANTE

En un instante determinado, el Sol tendrá una declinación δ . Este valor nos da el ángulo que forma la línea que une los centros del Sol y la Tierra con el plano ecuatorial terrestre. Como ha quedado establecido en capítulos anteriores,

$$\alpha_s = \delta + 90^\circ$$

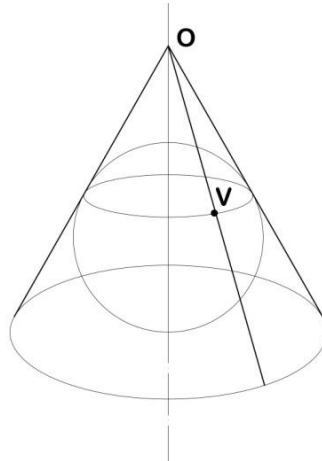
A continuación, vamos a analizar el movimiento de un observador situado sobre un punto V de la Tierra a una latitud Φ a lo largo del día debido a la rotación terrestre.

Según la fig. 3-1, el observador se encontrará situado en un punto del plano que constituye su referencia visual, al que denominaremos *plano del observador*, y que será tangente a la esfera terrestre en V. Este plano cortará al eje de giro de la Tierra en el punto O.



3-1. Definición geométrica del plano del observador.

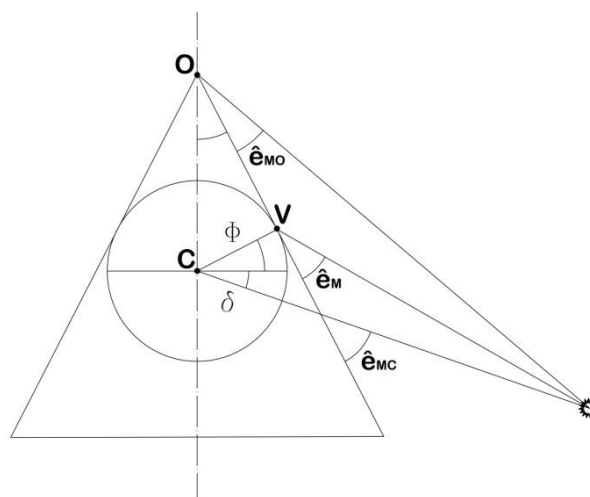
A lo largo del día, el plano del observador girará en torno al eje de rotación terrestre, y la línea OV contenida en él ³¹ formará un cono de revolución de semiángulo cónico Φ (fig. 3-2). Es decir, el plano del observador girará deslizándose sobre la superficie cónica generada por OV (*plano deslizante*).



3-2. Cono de revolución de generatriz OV

3.1.2. REDUCCIÓN AL CENTRO DE LA ESFERA TERRESTRE

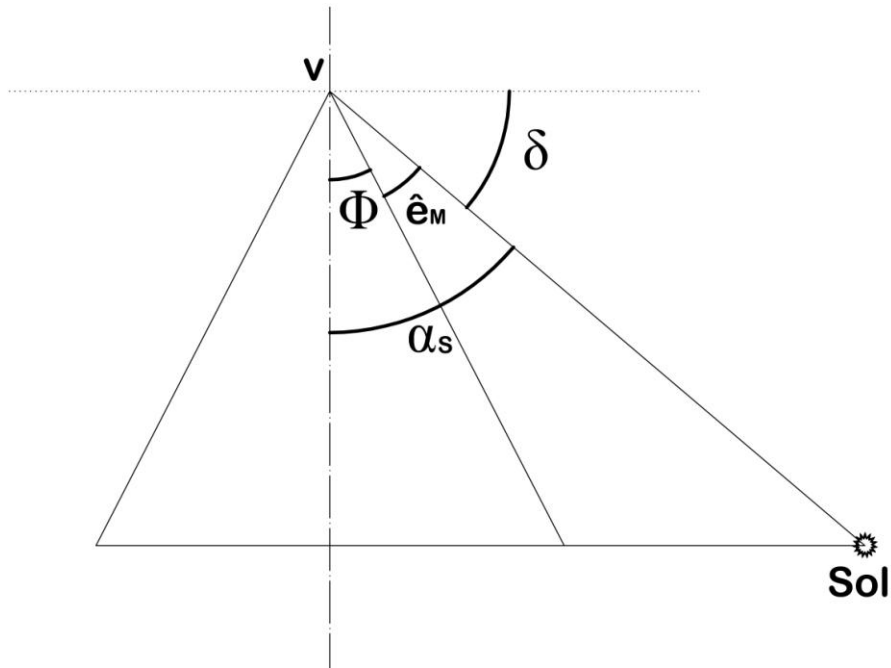
Ahora supongamos que en el instante del mediodía solar, desde V se observa el Sol bajo un ángulo \hat{e}_M . Al mediodía, por definición, el Sol estará situado sobre el plano que contiene a OV y que es perpendicular al plano del observador, es decir, sobre el meridiano terrestre que pasa por V . El Sol se verá bajo un ángulo \hat{e}_{MO} desde O (fig. 3-3) y desde el centro de la Tierra, bajo un ángulo \hat{e}_{MC} .



3-3. Visuales al Sol.

³¹ Línea N-S en el hemisferio norte. En el hemisferio sur, esta línea será la S-N.

Ahora bien, si consideramos que la distancia Tierra-Sol es 23.454,8 veces superior al radio terrestre, podemos asumir que $\hat{e}_M = \hat{e}_{MO} = \hat{e}_{MC}$. Y además, en comparación con la distancia Tierra-Sol, la Tierra y el segmento OV quedan reducidos a un punto, confundándose con V. De forma simplificada, tenemos la fig. 3-4, en la que hemos representado también el ángulo α_s definido anteriormente, y cuya utilización para lo que sigue nos resultará más cómoda que la de δ .



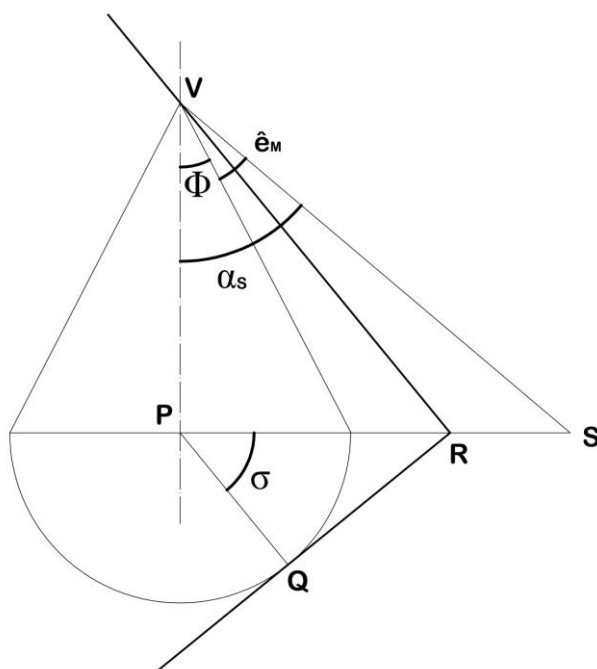
3-4. Reducción a V por distancia al Sol.

Nótese que, en el caso representado, $\delta < 0$, por lo que $\alpha < 90^\circ$, sin que por ello pierda generalidad el método.

En la fig. 3-4, se ha representado la línea Tierra-Sol completa, de forma que tanto la Tierra como el observador quedan, a nivel astronómico, y como ya se ha dicho, reducidos a V.

3.1.3. SOLUCIÓN GRÁFICA DEL PROBLEMA

Si representamos ahora en diédrica el cono de revolución formado por el giro diario de la línea OV prolongada (la visual del observador mirando hacia el sur), la línea Tierra-Sol y el plano del observador en un momento determinado, tendremos la fig. 3-5.



3-5. Representación diédrica del cono de revolución y posición del Sol en S.

En la misma, el Sol se encuentra en S, y se sitúa sobre el plano horizontal para mayor sencillez. El observador, en V, sobre el plano vertical. El plano tangente al cono de revolución cuando la Tierra ha girado con respecto al mediodía un ángulo σ ³² no es otro que el plano QRV, del cual observamos sus trazas QR sobre el plano horizontal y RV sobre el vertical. Dado el sentido de giro de la Tierra, antihorario, el ángulo σ representado correspondería a una hora anterior al mediodía. Más adelante se analizará esta cuestión.

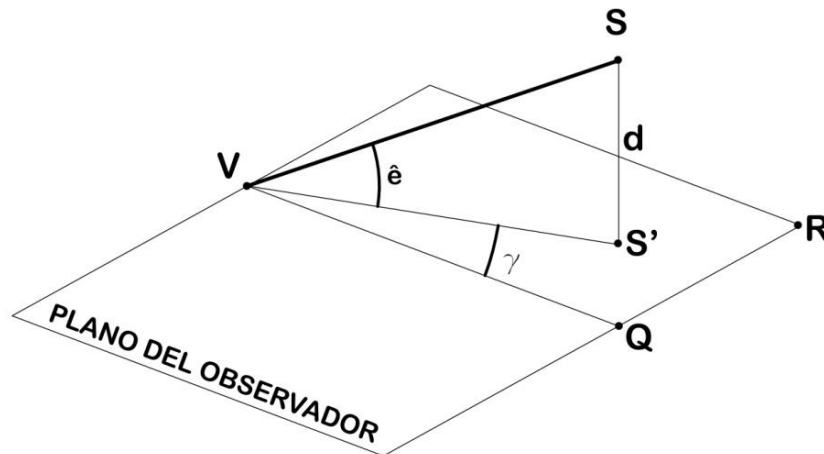
Basándonos en las figs. 3-5 y 3-6, es fácil comprender que nuestro procedimiento consistirá en lo siguiente: para una hora del día en la que la Tierra haya girado un ángulo σ , y dado que el Sol a lo largo del día ocupa la posición S constantemente, debemos obtener la proyección S' del punto S sobre el plano QRV y su altura d sobre el mismo.

De la proyección obtendremos el ángulo $S'VQ = \gamma$. Dado que se trata del ángulo que forma S'V medido desde VQ, coincide con el *acimut medido desde el sur*, pero en *sentido creciente antihorario*, lo cual no es el criterio más frecuente en Astronomía e ingeniería, pero nos facilitará la representación gráfica para el análisis del problema.

³² Esta denominación del ángulo σ girado en el sentido considerado es meramente auxiliar para este subcapítulo y siguiente, y no se corresponde con ningún término astronómico estándar.

Más adelante haremos las conversiones correspondientes para otros criterios de medida de acimut (desde el norte, creciente en sentido horario, que llamaremos γ_N , y desde el sur, creciente en sentido horario, que se denominará γ_S).

Igualmente, el ángulo de elevación será \hat{e} , definido por $S'V$ y por d . Es decir (fig 3-6):

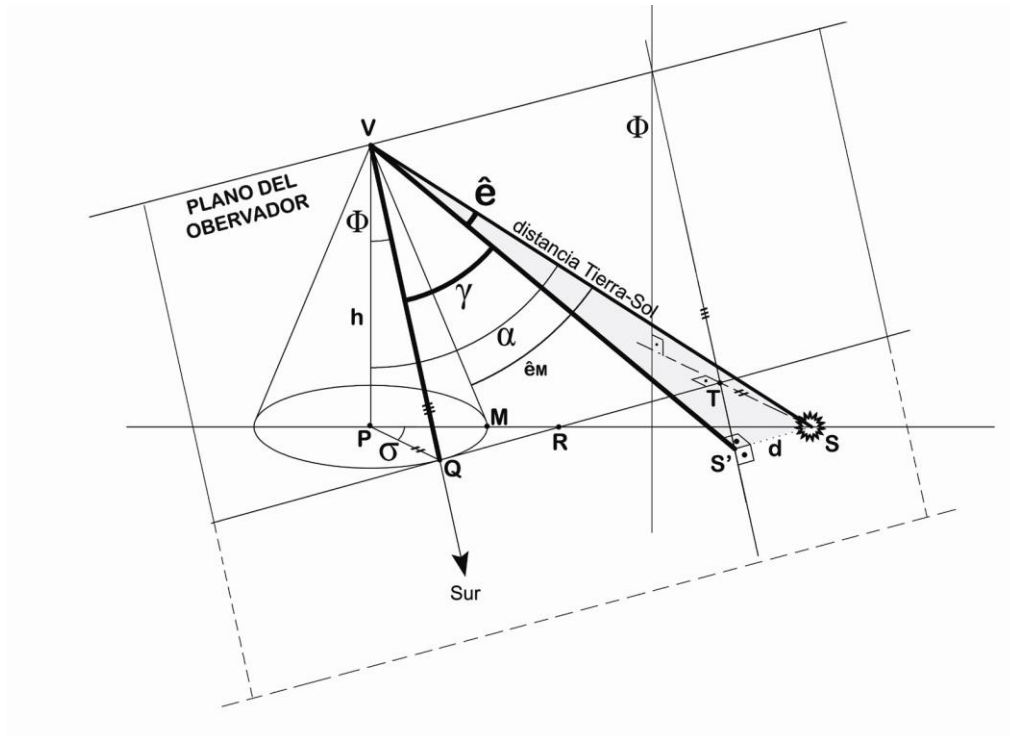


3-6. Referencias de γ y \hat{e} sobre el plano del observador.

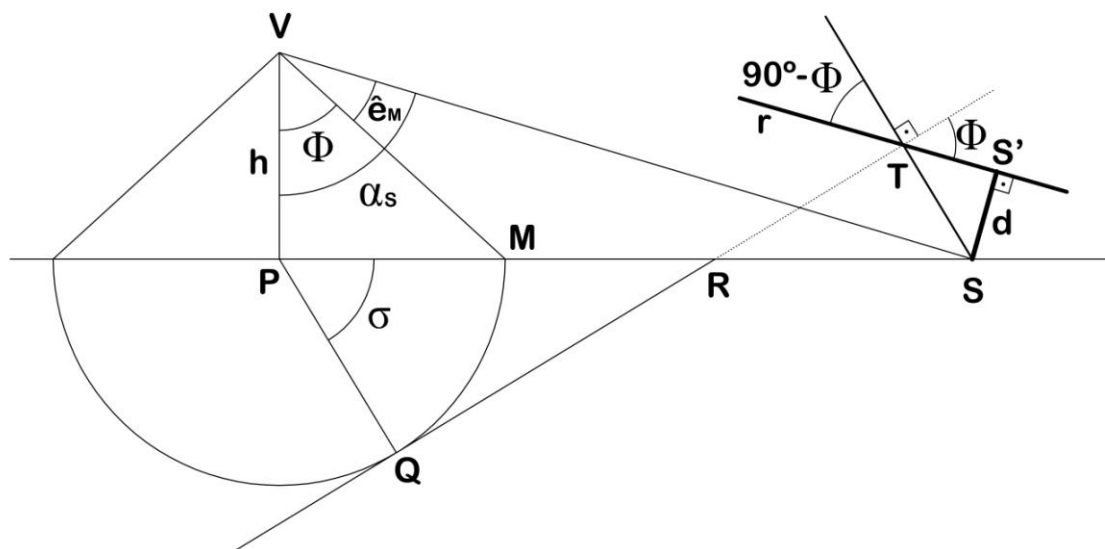
Antes de pasar a las operaciones geométricas que desarrollaremos basándonos en el sistema diédrico, resumiremos todo lo anterior en la representación tridimensional de la fig. 3-7.

En ella quedan indicados todos los ángulos sobre los que vamos a trabajar y las proyecciones que realizaremos, y cuyos ángulos en verdadera magnitud obtendremos a través de los pertinentes abatimientos.

La resolución del problema en diédrica es muy sencilla. En la fig. 3-8, en la que omitimos la traza vertical de QRV para mayor claridad, cortamos la traza horizontal del plano del observador por el plano perpendicular a la misma conteniendo a S. Dicho plano cortará a la traza en T y tendrá la misma pendiente máxima que la generatriz del cono, es decir, $90^\circ - \Phi$. Si abatimos el plano así definido sobre el plano horizontal en torno a TS, tendremos que la recta r es la de máxima pendiente del plano del observador por S, luego podemos proyectar S sobre ella y encontraremos S'. Por tanto, $d = SS'$, que tenemos así en verdadera magnitud.



3-7. Esquema tridimensional del problema del acimut y la elevación en diédrica.



3-8. Primer abatimiento auxiliar del plano paralelo al plano VPQ por S sobre el plano horizontal.

Por tanto, el plano del observador contiene a V, Q y S', como habíamos establecido anteriormente. Así, si abatimos dicho plano en torno a la traza QR, V girará hasta V' y S' hasta S'' (fig. 3-9).

por lo que

$$RT = QT - QR = h \cdot (\tan \alpha_s \cdot \sin \sigma - \tan \Phi \cdot \tan \sigma) \quad .$$

Pero, además,

$$TS = \frac{RT}{\tan \sigma}$$

así que,

$$TS = h \cdot \left(\frac{\tan \alpha_s \cdot \sin \sigma - \tan \Phi \cdot \tan \sigma}{\tan \sigma} \right) = h \cdot (\tan \alpha_s \cdot \cos \sigma - \tan \Phi) \quad (\text{Ec. 3.1})$$

teniendo entonces:

$$d = TS \cdot \cos \Phi = h \cdot (\tan \alpha_s \cdot \cos \sigma \cdot \cos \Phi - \sin \Phi) \quad (\text{Ec. 3.2})$$

Observemos ahora la fig. 3-6. Vemos que:

$$\sin \hat{e} = \frac{d}{VS} \quad ,$$

pero teníamos que

$$VS = \frac{h}{\cos \alpha_s} \quad . \quad (\text{Ec. 3.3})$$

Por lo tanto,

$$\sin \hat{e} = h \cdot (\tan \alpha_s \cdot \cos \sigma \cdot \cos \Phi - \sin \Phi) \cdot \frac{\cos \alpha_s}{h} \quad .$$

Así que, finalmente, tendremos que:

$$\sin \hat{e} = \sin \alpha_s \cdot \cos \Phi \cdot \cos \sigma - \cos \alpha_s \cdot \sin \Phi \quad . \quad (\text{Ec. 3.4})$$

Para el cálculo del acimut, definido creciente en sentido antihorario desde el sur, γ , tendremos (figs. 3-8 y 3-9):

$$\sin \gamma = \frac{QT}{V'S''} = \frac{PS \cdot \sin \sigma}{V'S''} = \frac{h \cdot \tan \alpha_s \cdot \sin \sigma}{V'S''} \quad . \quad (\text{Ec. 3.5})$$

Pero

$$VS' = V'S''$$

por ser $V'S''$ el abatimiento de VS' , y como (fig.3-6)

$$\cos \hat{e} = \frac{VS'}{VS} \quad ,$$

podemos escribir:

$$\cos \hat{e} = \frac{V'S''}{VS} \Rightarrow V'S'' = VS \cdot \cos \hat{e} \quad .$$

Sustituyendo en (Ec. 3.5),

$$\sin \gamma = \frac{h \cdot \tan \alpha_s \cdot \sin \sigma}{VS \cdot \cos \hat{e}} \quad .$$

Finalmente, sustituyendo el valor de VS reflejado en (Ec. 3.3),

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha_s \cdot \sin \sigma}{\cos \hat{e}} \quad \text{(Ec. 3.6)}$$

En (Ec. 3.4) y (Ec. 3.6) debemos tener en cuenta el signo de σ . Tal y como se ha definido, por razones de simplicidad de los gráficos, σ está medido desde el sur en sentido horario. Sin embargo, el valor del *ángulo horario*, similar conceptualmente a σ , que habitualmente se conoce como ω , se mide desde el mediodía y crece hacia el ocaso, al contrario que σ en sentido antihorario. Es interesante tener en cuenta ω , ya que la expresión que liga la hora solar local H_s con ω es la siguiente:

$$\omega = (H_s - 12) \cdot 15^\circ \quad ,$$

de uso habitual en cálculos relativos a la trayectoria aparente del sol, Gnomónica, etc.

Por lo tanto, tendremos que $\sigma = -\omega$, con lo que:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \sigma = -\sin \omega \\ \cos \sigma = \cos \omega \end{array} \right\} \quad \text{(Ecs. 3.6b)}$$

quedando (Ec. 3.4) y (Ec. 3.6), respectivamente, como sigue:

$$\sin \hat{e} = \sin \alpha_s \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega - \cos \alpha_s \cdot \sin \Phi \quad (\text{Ec. 3.7})$$

$$\sin \gamma = -\frac{\sin \alpha_s \cdot \sin \omega}{\cos \hat{e}} \quad (\text{Ec. 3.8})$$

Si queremos poner (Ec. 3.7) y (Ec. 3.8) en función de δ , basta recordar que $\alpha = 90^\circ + \delta$, con lo que tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha_s = \cos \delta \\ \cos \alpha_s = -\sin \delta \end{array} \right\}$$

por lo que :

$$\sin \hat{e} = \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega + \sin \Phi \cdot \sin \delta \quad (\text{Ec. 3.9})$$

$$\sin \gamma = -\frac{\cos \delta \cdot \sin \omega}{\cos \hat{e}} \quad (\text{Ec. 3.10})$$

Es útil obtener, igualmente, las expresiones de γ como coseno y tangente. Para el caso de la tangente, en lugar de desarrollar la solución a partir de la igualdad fundamental trigonométrica, puede obtenerse directamente de las figs. 3-8 o 3-9.

$$\tan \gamma_s = \frac{QT}{V'Q + TS''}$$

Teniéndose , como ya vimos, que

$$QT = h \cdot \tan \alpha_s \cdot \sin \sigma$$

y que

$$V'Q = VM = \frac{h}{\cos \Phi} \quad .$$

Y además, por proceder del abatimiento,

$$TS'' = TS' = d \cdot \tan \Phi \quad .$$

Pero, en (Ec. 3.2) teníamos que

$$d = h \cdot (\tan \alpha_s \cdot \cos \sigma \cdot \cos \Phi - \sin \Phi) .$$

Así pues, sustituyendo y simplificando,

$$\tan \gamma = \frac{\sin \sigma \cdot \tan \alpha_s}{\cos \Phi + \sin \Phi \cdot \cos \sigma \cdot \tan \alpha_s} ,$$

que, sustituyendo nuevamente α_s y σ por sus equivalentes en δ y ω , nos daría:

$$\tan \gamma = \frac{\sin \omega}{\tan \delta \cdot \cos \Phi - \sin \Phi \cdot \cos \omega} . \quad (\text{Ec. 3.11})$$

Obtener el acimut como coseno es trivial, partiendo de las expresiones anteriores. En efecto, partiendo de (Ec. 3.10) y (Ec. 3.11) y teniendo en cuenta que

$$\cos \gamma = \frac{\sin \gamma_s}{\tan \gamma_s} ,$$

llegamos directamente a:

$$\cos \gamma = \frac{\cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \omega - \sin \delta \cdot \cos \Phi}{\cos \hat{e}} \quad (\text{Ec. 3.12})$$

Esta expresión también puede transformarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \omega - \sin \delta \cdot \cos \Phi}{\cos \hat{e}} = \\ &= \frac{\cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega - \sin \delta \cdot \cos^2 \Phi}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} = \\ &= \frac{\cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega - \sin \delta \cdot \cos^2 \Phi}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} = \\ &= \frac{\sin \varphi \cdot (\cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega + \sin \delta \cdot \sin \Phi) - \sin \delta}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} \end{aligned}$$

que, de acuerdo con (Ec. 3.9), nos queda como:

$$\cos \gamma = \frac{\sin \Phi \cdot \sin \hat{e} - \sin \delta}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} . \quad (\text{Ec. 3.13})$$

3.2. EXPRESIONES DEL ACIMUT Y ELEVACIÓN SEGÚN LOS CONVENIOS MÁS HABITUALES EN INGENIERÍA Y ASTRONOMÍA

Así como la fórmula (Ec. 3.9) tiene validez general y se utiliza por todos los autores de estudios relacionados con la trayectoria solar, las expresiones (Ec. 3.10) , (Ec. 3.11) y (Ec. 3.12) están referidas en nuestros desarrollos anteriores a un acimut medido desde el sur y creciente en sentido antihorario, es decir, hacia el este. Este criterio se ha adoptado en el capítulo anterior de forma arbitraria, por razones de facilitar la representación gráfica, pero en la práctica es habitual que los criterios sean diferentes y, por definir mejor el problema, cambiantes. En el caso de autores de estudios astronómicos se suele definir el acimut medido desde el sur y creciente hacia el oeste en sentido horario. Por el contrario, en ingeniería es habitual tomar como origen del acimut el norte, creciente también en sentido horario.

Las transformaciones son inmediatas, y denominaremos γ_N al acimut desde el Norte y γ_S al acimut desde el sur, ambos en sentido horario. Tendremos, entonces, dado que $\gamma_N = 180^\circ - \gamma$:

$$\sin \gamma_N = -\frac{\cos \delta \cdot \sin \omega}{\cos \hat{e}} \quad (\text{Ec. 3.14})$$

$$\cos \gamma_N = \frac{\sin \delta \cdot \cos \Phi - \cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \omega}{\cos \hat{e}} \quad (\text{Ec. 3.15})$$

Expresión que podemos transformar convenientemente como sigue:

$$\begin{aligned} \cos \gamma_N &= \frac{\sin \delta \cdot \cos^2 \Phi - \cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} = \\ &= \frac{\sin \delta \cdot (1 - \sin^2 \Phi) - \cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} = \\ &= \frac{\sin \delta - \sin \Phi \cdot (\sin \delta \cdot \sin \Phi + \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega)}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta (7), sustituyendo por \hat{e} :

$$\cos \gamma_N = \frac{\sin \delta - \sin \Phi \cdot \sin \hat{e}}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} \quad (\text{Ec. 3.15b})$$

Para la tangente:

$$\tan \gamma_N = \frac{\sin \omega}{\sin \Phi \cdot \cos \omega - \tan \delta \cdot \cos \Phi} \quad (\text{Ec. 3.15})$$

E igualmente, para $\gamma_s = 360^\circ - \gamma$ tendremos el grupo de fórmulas:

$$\sin \gamma_s = \frac{\cos \delta \cdot \sin \omega}{\cos \hat{e}} \quad (\text{Ec. 3.16})$$

$$\cos \gamma_s = \frac{\cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \omega - \sin \delta \cdot \cos \Phi}{\cos \hat{e}} \quad (\text{Ec. 3.17})$$

De donde:

$$\cos \gamma_s = \frac{\sin \Phi \cdot \sin \hat{e} - \sin \delta}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} \quad (\text{Ec. 3.18})$$

$$\tan \gamma_s = \frac{\sin \omega}{\sin \Phi \cdot \cos \omega - \tan \delta \cdot \cos \Phi} \quad (\text{Ec. 3.19})$$

Recordamos nuevamente la expresión de la elevación solar, (Ec.3.9), independientemente del criterio para el acimut, con el fin de que quede completa la relación de ecuaciones en este apartado:

$$\sin \hat{e} = \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega + \sin \Phi \cdot \sin \delta$$

Las fórmulas (Ec. 3.14) a (Ec. 3.19) son utilizadas universalmente, y su preferencia depende de las fuentes. Así, Alistair Sproul [14], en su deducción vectorial de las mismas, se decanta por las primeras. Este autor realiza, además, un interesante análisis acerca de las ventajas e inconvenientes de las diferentes expresiones (Ec. 3.14), (Ec. 3.15) y (Ec. 3.16) en el que compara las mismas en tanto generadoras de funciones recíprocas, y, por tanto, asociadas a resultados múltiples, considerando más conveniente la (Ec. 3.13) en su primera forma. En artículos o tratados de Gnomónica, autores como G. Roth [22] utilizan la expresión (Ec. 3.15).

Dentro del campo de la Astronomía aplicada, Jean Meeus [9] presenta la expresión (Ec. 3.19) en el contexto de la transformación de coordenadas ecuatoriales a horizontales mediante trigonometría esférica.

Esta dicotomía en la preferencia de fórmulas referidas a γ_N o a γ_s es interpretada por I. Reda & A. Andreas [37] al dividir los usuarios de las expresiones anteriores en dos grupos: γ_N para navegación y especialistas en radiación solar y γ_s para astrónomos. Sin embargo, Peter Duffett-Smith [10] utiliza la (Ec. 3.15b), midiendo el acimut desde el norte, en el contexto del análisis astronómico clásico adaptado al uso de calculadoras.

Y, por ejemplo, Manuel Blanco-Muriel [23] y otros reputados expertos en energía solar y Astronomía, en la revisión de algoritmos para el cálculo aproximado de la posición solar previa a la presentación del método PSA, utilizan la expresión (Ec. 3.19). En este caso, además, prefieren definir la elevación solar como altura cenital θ , o ángulo desde el cénit hasta el radio vector, para lo que la fórmula (Ec. 3.9) queda como:

$$\cos \theta = \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega + \sin \Phi \cdot \sin \delta \quad ,$$

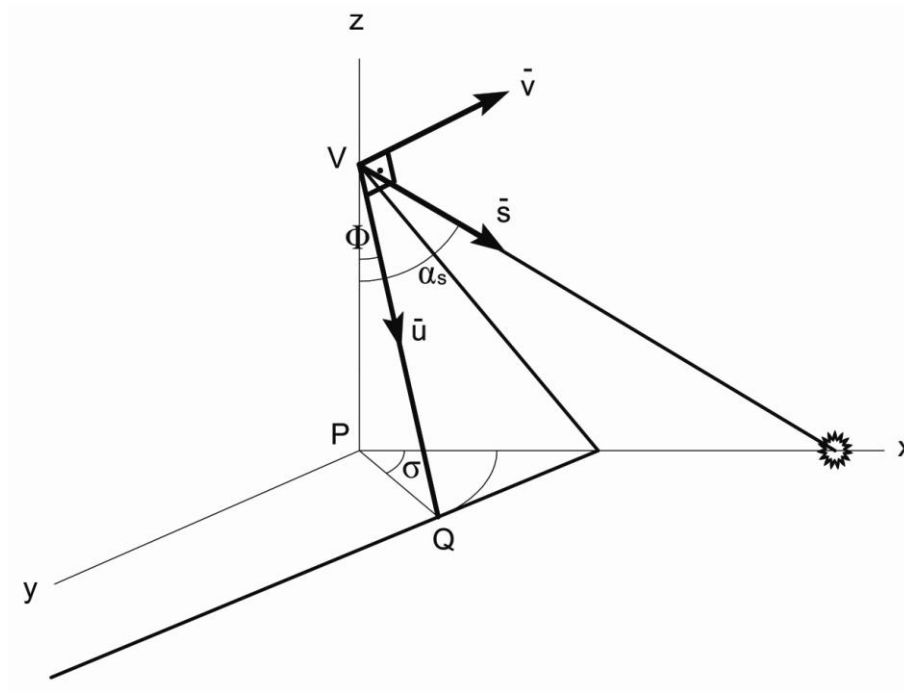
al ser θ y \hat{e} complementarios.

No existe, pues, unanimidad ni en las formas ni en los criterios a la hora de elegir entre las diferentes expresiones obtenidas y sus transformadas. En cualquier caso, deben tenerse en cuenta los posibles errores en la utilización de las mismas por indeterminación en sus recíprocas; para ello remitimos al lector al estudio más arriba mencionado de A. Sproul [14].

Es interesante apuntar que, aunque en un principio, para una mayor simplicidad descriptiva, habíamos considerado δ constante a lo largo del día, las fórmulas deducidas son válidas para δ variable en cálculos de precisión.

3.3. CÁLCULO ALTERNATIVO DE ACIMUT Y ELEVACIÓN SOLARES MEDIANTE ANÁLISIS VECTORIAL

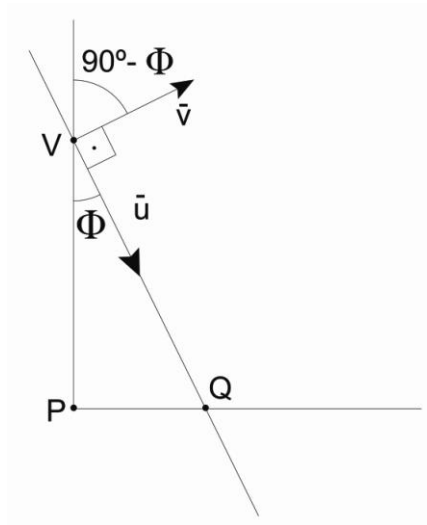
Para el cálculo vectorial de los ángulos de elevación, \hat{e} , y acimut, γ , partiremos del gráfico simplificado de la fig. 3-10 obtenido directamente de la fig. 3-5:



3-10. Simplificación de la representación del cono de revolución y plano del observador para la resolución vectorial.

En dicha figura se observan los ángulos vectores unitarios \vec{s} , \vec{v} y \vec{u} que utilizaremos para nuestros cálculos angulares. \vec{s} es el vector unitario que caracteriza el segmento Tierra-Sol. El vector \vec{u} , situado sobre el plano del observador, parte de este y se dirige hacia el sur. Por su parte, el vector \vec{v} es el vector perpendicular al plano del observador, esto es, su vector director.

Podemos, para mayor comodidad a la hora de realizar las diferentes proyecciones de los vectores en x, y, z, hacer uso de la sección indicada en la fig. 3-11, que se corresponde con el corte por el plano perpendicular a xy que pasa por V.



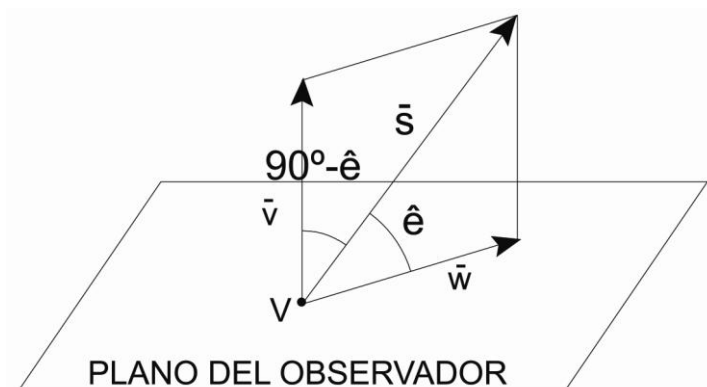
3-11. Sección por plano vertical conteniendo a PQV.

De las figuras 3-10 y 3-11 obtenemos directamente las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$\begin{cases} \vec{v} = \cos \Phi \cdot \cos \sigma \cdot \vec{i} + \cos \Phi \cdot \sin \sigma \cdot \vec{j} + \sin \Phi \cdot \vec{k} \\ \vec{s} = \sin \alpha_s \cdot \vec{i} - \cos \alpha_s \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Tanto \vec{s} como \vec{v} son vectores unitarios: $|\vec{s}| = |\vec{v}| = 1$

El ángulo entre \vec{s} y el plano del observador se puede obtener directamente mediante el producto escalar de ambos vectores, teniendo en cuenta la fig.3-12:



3-12. El vector \vec{s} en relación con el plano del observador.

Según la misma, y considerando el vector \vec{w} , unitario en la dirección de la proyección de \vec{s} sobre el plano del observador, con $|\vec{w}| = 1$, entonces:

$$\cos \hat{e} = \vec{s} \cdot \vec{w}$$

Pero el vector conocido para nosotros es \vec{v} en lugar de \vec{w} .

$$\cos(90^\circ - \hat{e}) = \vec{s} \cdot \vec{v} = \sin \hat{e}$$

Por lo tanto,

$$\sin \hat{e} = \sin \alpha_s \cdot \cos \Phi \cdot \cos \sigma - \cos \alpha_s \cdot \sin \Phi$$

Si tenemos en cuenta la conocida igualdad $\alpha_s = 90^\circ + \delta$ y que, según vimos en (Ec. 3.6b):

$$\cos \sigma = \cos \omega \quad ,$$

tendremos que:

$$\sin \hat{e} = \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega + \sin \delta \cdot \sin \Phi \quad ,$$

expresión que coincide con la ya obtenida en (Ec. 3.10), con lo que queda comprobada la igualdad en el resultado para la fórmula de la elevación con respecto a la demostración mediante diédrica.

Para el cálculo del acimut mediante análisis vectorial, nos valdremos de análogas herramientas.

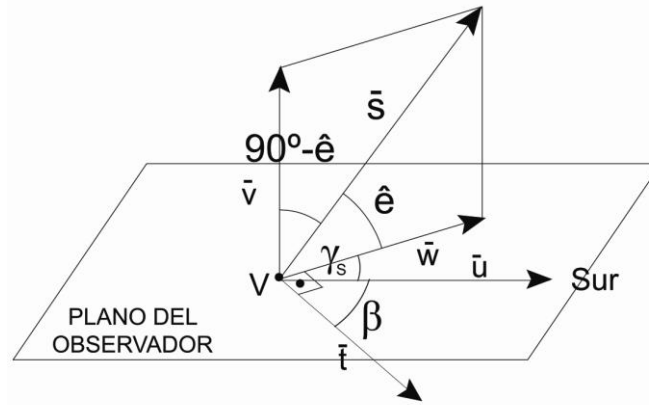
Consideremos ahora los vectores \vec{u} y \vec{w} (figs. 3-10 y 3-11).

El vector \vec{u} sera

$$\vec{u} = \sin \Phi \cdot \cos \sigma \cdot \vec{i} + \sin \Phi \cdot \sin \sigma \cdot \vec{j} - \cos \Phi \cdot \vec{k}$$

Se trata de un vector unitario, con $|\vec{u}| = 1$.

El acimut medido desde el sur será el ángulo formado por \vec{u} y \vec{w} . Sin embargo, en lugar de utilizar el vector \vec{w} , vamos a basar nuestros cálculos en \vec{t} , más sencillo de obtener (fig. 3-13):



3-13. Elevación y acimut respecto al plano del observador. Vectores directores.

Es fácil ver, de acuerdo con la misma, que:

$$\vec{t} \cdot \vec{u} = |\vec{t}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \beta = |\vec{t}| \cdot |\vec{u}| \cdot \sin \gamma_s ,$$

luego

$$\sin \gamma_s = \frac{\vec{t} \cdot \vec{u}}{|\vec{t}| \cdot |\vec{u}|} .$$

Como podemos observar igualmente en dicha figura, \vec{s} y \vec{v} nos definen un plano perpendicular al del observador, puesto que el vector \vec{v} lo es. Por ello, el vector \vec{t} podemos obtenerlo como producto vectorial de los vectores \vec{s} y \vec{v} :

$$\vec{t} = \vec{s} \times \vec{v} .$$

Pero, además, \vec{u} es unitario, por lo que:

$$\sin \gamma_s = \frac{\vec{t} \cdot \vec{u}}{|\vec{t}|} = \frac{(\vec{s} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}}{|\vec{t}|} .$$

Calculamos ahora $\vec{t} = \vec{s} \times \vec{v}$ partiendo de los valores de \vec{s} y \vec{v} ya conocidos:

$$\vec{t} = \vec{s} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin \alpha_s & 0 & -\cos \alpha_s \\ \cos \Phi \cdot \cos \sigma & \cos \Phi \cdot \sin \sigma & \sin \Phi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos \alpha_s \cdot \cos \Phi \cdot \sin \sigma \cdot \vec{i} - (\sin \alpha_s \cdot \sin \Phi + \cos \alpha_s \cdot \cos \Phi \cdot \cos \sigma) \cdot \vec{j} + \sin \alpha_s \cdot \cos \Phi \cdot \sin \sigma \cdot \vec{k}$$

Procedemos a continuación a calcular $\vec{t} \cdot \vec{u}$, que, simplificando nos da:

$$\vec{t} \cdot \vec{u} = -\sin \alpha_s \cdot \sin^2 \Phi \cdot \sin \sigma - \sin \alpha_s \cdot \cos^2 \Phi \cdot \sin \sigma .$$

Y que, agrupando términos nos lleva a:

$$\vec{t} \cdot \vec{u} = -\sin \alpha_s \cdot \sin \sigma .$$

Dado que \vec{t} no es unitario, vamos a calcular su módulo $|\vec{t}|$:

$$\begin{aligned} |\vec{t}|^2 &= \cos^2 \alpha_s \cdot \cos^2 \Phi \cdot \sin^2 \sigma + \sin^2 \alpha_s \cdot \sin^2 \Phi + \cos^2 \alpha_s \cdot \cos^2 \Phi \cdot \cos^2 \sigma + \\ &+ 2 \sin \alpha_s \cdot \sin \Phi \cos \alpha_s \cdot \cos \Phi \cdot \cos \sigma + \sin^2 \alpha_s \cdot \cos^2 \Phi \cdot \sin^2 \sigma \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.20})$$

Expresión que, agrupando términos y simplificando, nos da:

$$\begin{aligned} |\vec{t}|^2 &= 1 - \sin^2 \Phi \cdot \cos^2 \alpha_s - \sin^2 \alpha_s \cdot \cos^2 \Phi \cdot \cos^2 \sigma + \\ &+ 2 \cdot \sin \alpha_s \cdot \cos \alpha_s \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi \cdot \cos \sigma \end{aligned}$$

Pero teníamos que:

$$\sin \hat{e} = \sin \alpha_s \cdot \cos \Phi \cdot \cos \sigma - \cos \alpha_s \cdot \sin \Phi \quad ,$$

por lo que:

$$\sin^2 \hat{e} = \sin^2 \alpha_s \cdot \cos^2 \Phi \cdot \cos^2 \sigma + \cos^2 \alpha_s \cdot \sin^2 \Phi - 2 \cdot \sin \alpha_s \cdot \cos \alpha_s \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi \cdot \cos \sigma$$

Así pues, teniendo en cuenta (Ec. 3.20),

$$|\vec{t}|^2 = 1 - \sin^2 \hat{e} = \cos^2 \hat{e} \quad ,$$

con lo que:

$$\sin \gamma_s = \frac{\vec{t} \cdot \vec{u}}{|\vec{t}|} = \frac{-\sin \alpha_s \cdot \sin \sigma}{\cos \hat{e}} \quad .$$

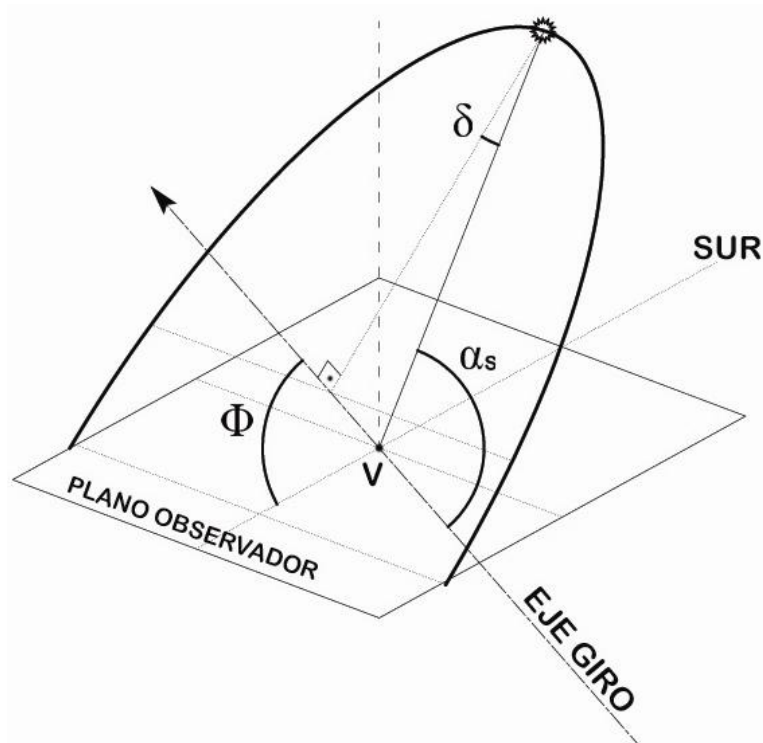
Imponiendo nuevamente $\alpha_s = 90^\circ + \delta$ y $\cos \sigma = \cos \omega$, la expresión anterior se transforma en:

$$\sin \gamma_s = \frac{\cos \delta \cdot \cos \omega}{\cos \hat{e}} \quad ,$$

expresión que es idéntica a la hallada en (Ec. 3.17). Con ello la deducción vectorial queda así completada, dado que la obtención del resto de igualdades en *cos* y *tan* para γ_s o γ_N resulta trivial, siendo de aplicación todo lo indicado en el subcapítulo 3.2.

3.4. TRAYECTORIA APARENTE DEL SOL PERCIBIDA DESDE EL OBSERVADOR

Consideremos ahora un valor sensiblemente constante de δ a lo largo de una fecha determinada (la variación diaria máxima de δ se produce en los equinoccios con un gradiente inferior a $0,4^\circ$). Sea cual fuere el instante del día considerado, el eje de rotación terrestre mantiene la misma orientación con respecto al observador situado en V. Basta con observar las figs. 3-1 y 3-2. El movimiento aparente del Sol forzosamente ha de situarse sobre una superficie esférica de centro V, ya que el ángulo que forma el vector sol-observador con el eje de giro de la Tierra es constante, y su valor es α_s (figs. 3-4 y 3-5). Por ello, la única curva que satisface simultáneamente ambas condiciones es una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje de giro terrestre sobre la superficie esférica mencionada. Es muy sencillo representarlo gráficamente (fig. 3-14).



3-14. Trayectoria aparente del Sol.

Esta figura basada en la deducción previa es muy habitual en Gnomónica y puede utilizarse como punto de partida, tras el razonamiento anterior, de otro método de cálculo diferente de \hat{e} y γ mediante la geometría plana. Hay que hacer constar nuevamente que la figura indicada se corresponde con una δ constante a lo largo del día; en realidad, no estaríamos ante una circunferencia, sino ante un paso de hélice.

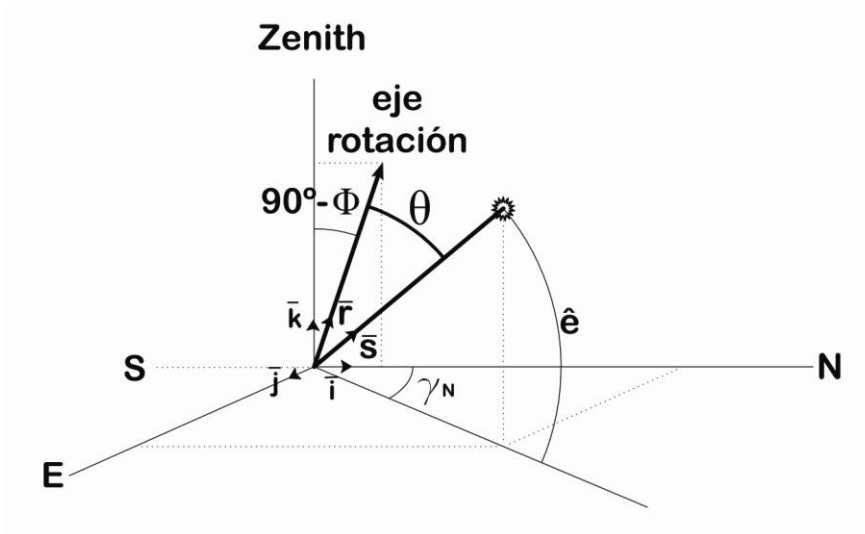
3.5. COMPROBACIÓN VECTORIAL DE LA PLANITUD Y FORMA CIRCULAR DE LA TRAYECTORIA APARENTE DEL SOL

El principio deducido anteriormente acerca de la forma circular de la trayectoria aparente del Sol desde el observador nos permite desarrollar una demostración sencilla, mediante el cálculo vectorial, a partir de las expresiones calculadas en los apartados anteriores para el acimut y el ángulo de elevación. Dicha demostración se presenta aquí como complemento al punto 3.4, a pesar de que el razonamiento en él empleado resultaría suficiente.

El procedimiento se basa en el análisis del producto escalar del vector de la rotación terrestre por el vector de posición del Sol desde el observador, definido a su vez por su acimut y elevación. De dicho producto podemos obtener el ángulo θ^{33} que forman dichos vectores. En la fig. 3-15 analizamos esquemáticamente el problema geométrico.

\vec{r} es el vector unitario asociado a la rotación del eje terrestre.

\vec{s} es el vector unitario de la dirección observador-Sol.



3-15. Relaciones angulares para la comprobación de la planitud de la trayectoria aparente solar.

Tendremos, por tanto, que, considerando para definir \vec{s} el acimut norte,

$$\vec{r} = \sin(90^\circ - \Phi) \cdot \vec{i} + \cos(90^\circ - \Phi) \cdot \vec{k} = \cos \Phi \cdot \vec{i} + \sin \Phi \cdot \vec{k} \quad (\text{Ec. 3.21})$$

$$\vec{s} = \cos \hat{\epsilon} \cdot \cos \gamma_N \cdot \vec{i} + \cos \hat{\epsilon} \cdot \sin \lambda \cdot \vec{j} + \sin \hat{\epsilon} \cdot \vec{k} \quad (\text{Ec. 3.22})$$

³³ θ se toma aquí como auxiliar, sin relación con otros ángulos denominados de igual forma en esta tesis.

Ambos vectores formarían entre sí un cierto ángulo θ , de forma que:

$$\bar{r} \cdot \bar{s} = |\bar{r}| \cdot |\bar{s}| \cdot \cos \theta = \cos \theta \quad (\text{Ec. 3.23})$$

al tratarse \bar{r} y \bar{s} de vectores unitarios.

Por ello,

$$\bar{r} \cdot \bar{s} = \cos \Phi \cdot \cos \hat{e} \cdot \cos \gamma_N + \sin \Phi \cdot \sin \hat{e}$$

Si sustituimos los valores γ_N y \hat{e} de las fórmulas (Ec. 3.7) y (Ec. 3.15) obtenidas anteriormente en la expresión $\bar{r} \cdot \bar{s}$, tendremos:

$$\begin{aligned} \bar{r} \cdot \bar{s} &= \cos \Phi \cdot \cos \hat{e} \cdot \cos \gamma_N + \sin \Phi \cdot \sin \hat{e} = \\ &= \cos \Phi \cdot \cos \hat{e} \cdot \frac{\sin \delta - \sin \Phi \cdot \sin \hat{e}}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} + \sin \Phi \cdot (\cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega + \sin \Phi \cdot \sin \delta) = \\ &= \sin \delta - \sin \Phi \cdot (\cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega + \sin \Phi \cdot \sin \delta) + \\ &\quad + \sin \Phi \cdot (\cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega + \sin \Phi \cdot \sin \delta) = \\ &= \sin \delta - \sin \Phi \cdot \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega - \sin^2 \Phi \cdot \sin \delta + \\ &\quad + \sin \Phi \cdot \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega + \sin^2 \Phi \cdot \sin \delta = \\ &= \sin \delta \end{aligned}$$

Pero de (Ec. 3.23), sustituyendo, tendremos finalmente:

$$\cos \theta = \sin \delta \quad ,$$

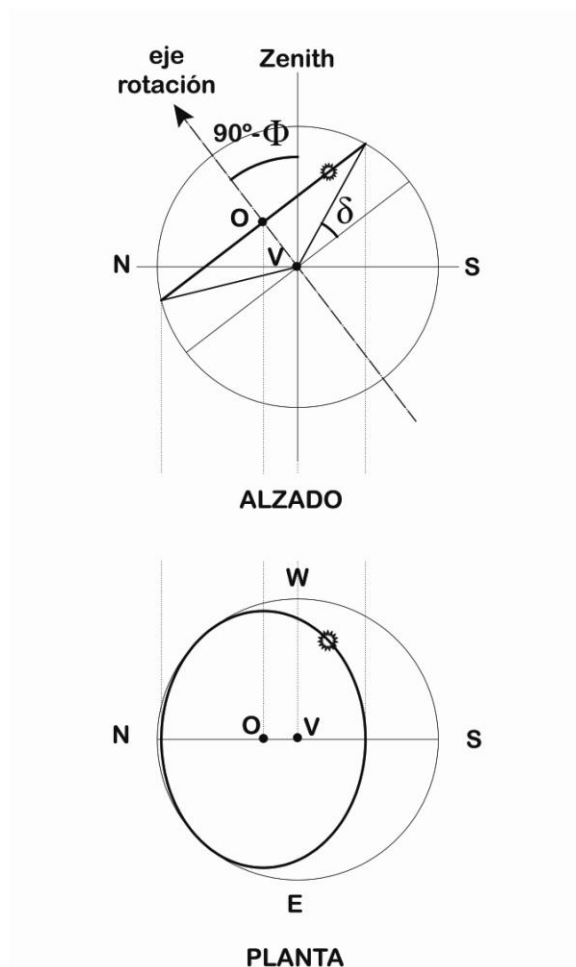
o sea:

$$\cos \theta = \cos(90^\circ - \delta) \quad ,$$

por lo que, considerando una declinación δ constante para una determinada fecha, el movimiento aparente del Sol será la base de un cono de revolución de generatriz el segmento observador-Sol, con un semiángulo cónico de valor $90^\circ - \delta$, es decir, una circunferencia de centro en el eje de giro de nuestro planeta. La distancia desde el observador a dicha circunferencia vendrá determinada entonces por:

$$r \cdot \cos \theta = r \cdot \sin \delta \quad ,$$

siendo r la distancia del observador al Sol. Esta expresión nos resultará útil para posteriores desarrollos gráficos. Representándolo en planta y alzado tendremos la fig. 3-16. Esta figura es muy conveniente para establecer relaciones entre los diferentes ángulos relativos a la trayectoria aparente del Sol en distintos instantes del año y para el cálculo de elementos singulares en la misma. Tengamos en cuenta que resulta muy útil para determinados cálculos considerar que el Sol gira en torno al observador sobre una esfera que tiene por radio la distancia entre el observador y el Sol, que a efectos cósmicos puede considerarse igual a la distancia Tierra-Sol.



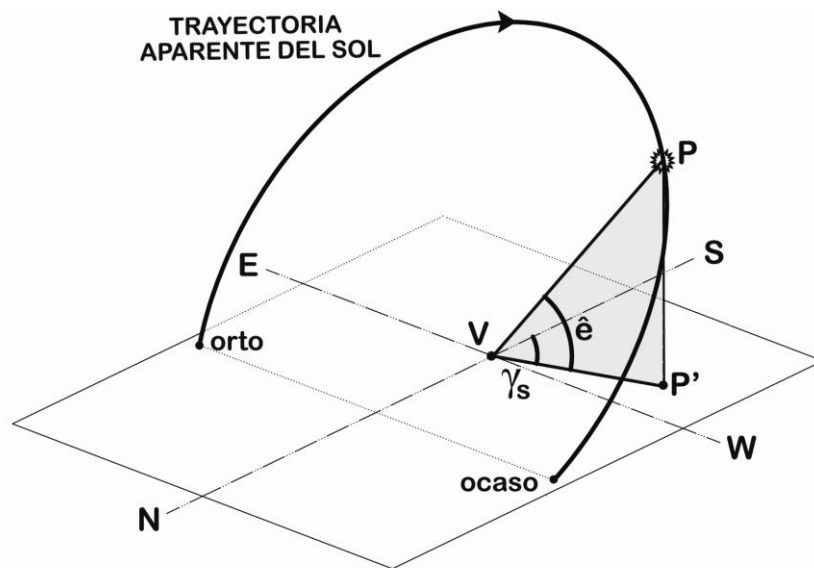
3-16. Representación en planta y alzado de la trayectoria aparente del Sol.

Igualmente, a partir de ella, desarrollaremos en el capítulo siguiente un proceso alternativo de cálculo para las expresiones (Ec. 3.7) y (Ec. 3.14) a (Ec. 3.19) mediante geometría plana.

3.6. ACIMUT Y ELEVACIÓN SOLARES EN GEOMETRÍA PLANA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE UN OBSERVADOR FIJO

Una vez obtenidos los ángulos de acimut y elevación solares mediante un procedimiento heliocéntrico, acorde con la realidad, es interesante conocer detalles y propiedades de la órbita aparente que describe el Sol. Para ello resultan particularmente útiles las construcciones geométricas sencillas basadas en las propiedades de la circunferencia y el abatimiento de planos de referencia. Al llevar implícita la aceptación de la simplificación geocéntrica, este método propuesto no es aparentemente objeto de esta tesis, pero dada su utilidad práctica, en este punto deduciremos las fórmulas de \hat{e} y γ “hacia atrás”, partiendo de los principios desarrollados anteriormente.

Recordemos los conceptos de acimut y elevación solares mediante la siguiente fig. 3-17. En ella definimos, por comodidad, el acimut sur creciente en el sentido de las agujas del reloj.

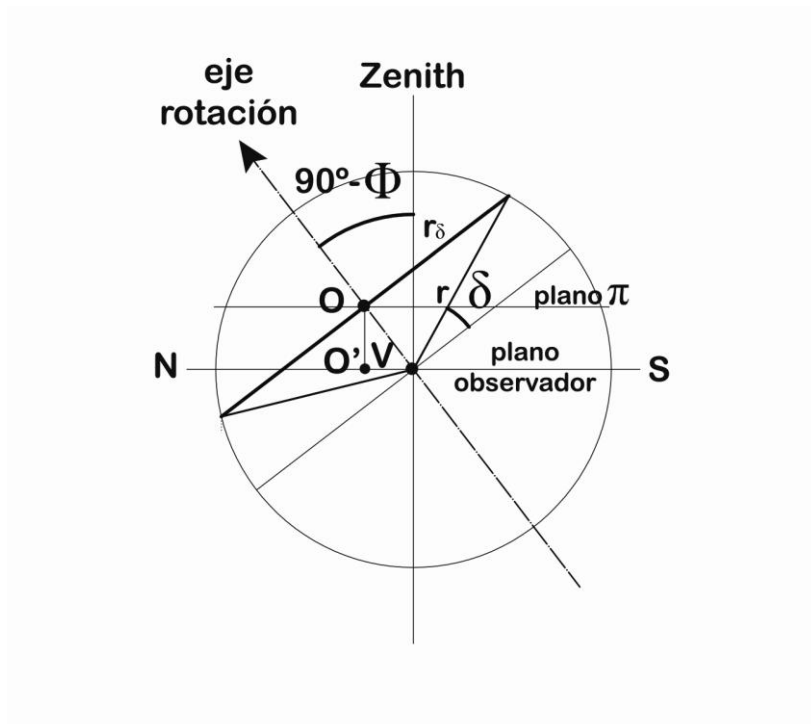


3-17. Acimut y elevación respecto a la trayectoria aparente del Sol

En lo sucesivo, dentro de este capítulo, por comodidad, haremos uso del valor de la declinación solar δ en lugar del ángulo α_s , ya que, como se ha establecido en el capítulo anterior, la altura del centro del círculo del movimiento aparente del Sol respecto al eje de rotación de la Tierra queda perfectamente definida con este ángulo.

A lo largo del día, y en una hipótesis inicial de $\delta = \text{cte.}$ para la fecha elegida, el Sol gira aparentemente alrededor del eje de rotación con un movimiento circular uniforme, y es

habitual denominar ángulo horario ω al ángulo girado aparentemente por el Sol alrededor del eje de giro terrestre desde el mediodía (punto más alto de la trayectoria solar), medido en sentido creciente hacia el W. Si a partir de la fig. 3-16 resaltamos los elementos auxiliares O (centro de la circunferencia aparente descrita por el Sol), O' (su proyección sobre el plano del observador), y el plano π paralelo a este, y que pasa por O, tendremos la representación esquemática de la fig. 3-18:



3-18. Trayectoria aparente del Sol en alzado.
Relación con declinación y latitud terrestre.

Sea δ la declinación solar en la fecha determinada. Según lo representado en la fig. 3-18 se tiene

$$OV = r \cdot \sin \delta ,$$

y, además:

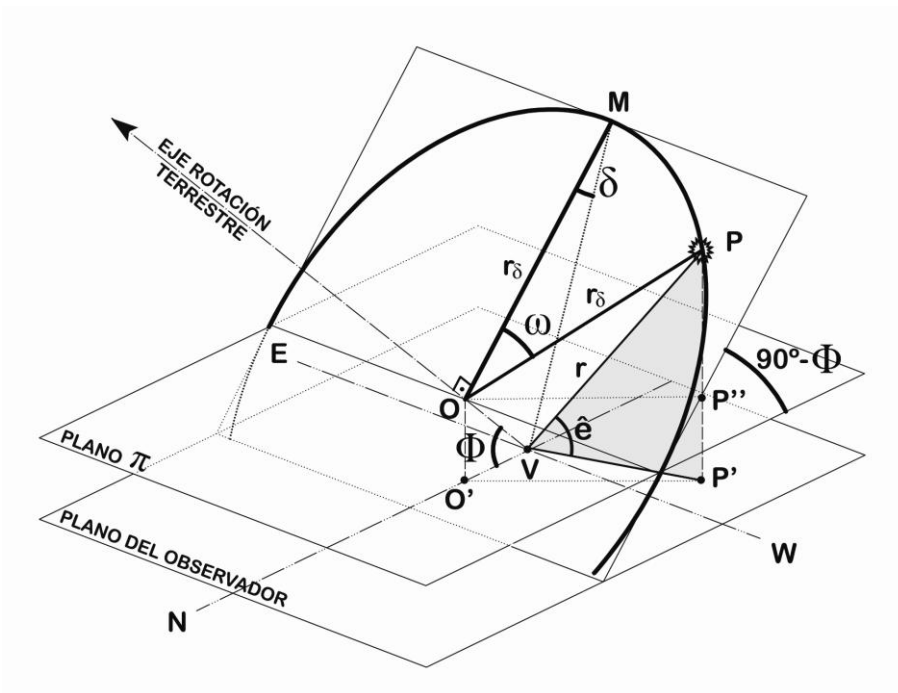
$$r_\delta = r \cdot \cos \delta$$

La distancia entre los planos del observador y π (paralelo al anterior pasando por el centro de la circunferencia aparente descrita por el Sol) es OO' . Y según la misma figura,

$$OO' = OV \cdot \sin \Phi = r \cdot \sin \delta \cdot \sin \Phi$$

Veamos ahora la fig. 3-19. En ella, aparte de otros elementos auxiliares, podemos

observar el ángulo ω definido anteriormente, de acuerdo con la trayectoria aparentemente del Sol en ella representada.



3-19. Representación del plano π paralelo al del observador por el centro de la trayectoria aparente del Sol.

La cota del punto P sobre el plano π será (fig. 3-19):

$$PP'' = r_\delta \cdot \cos \omega \cdot \sin(90^\circ - \Phi) = r \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega \cdot \cos \Phi$$

Luego la cota del punto P sobre el plano del observador será:

$$PP' = PP'' + OO' = r \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega \cdot \cos \Phi + OO' = r \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega \cdot \cos \Phi + r \cdot \sin \delta \cdot \sin \Phi$$

Pero, según las figs.3-17 y 3-19, en la que representamos en detalle el ángulo de elevación \hat{e} de la fig. 3-19:

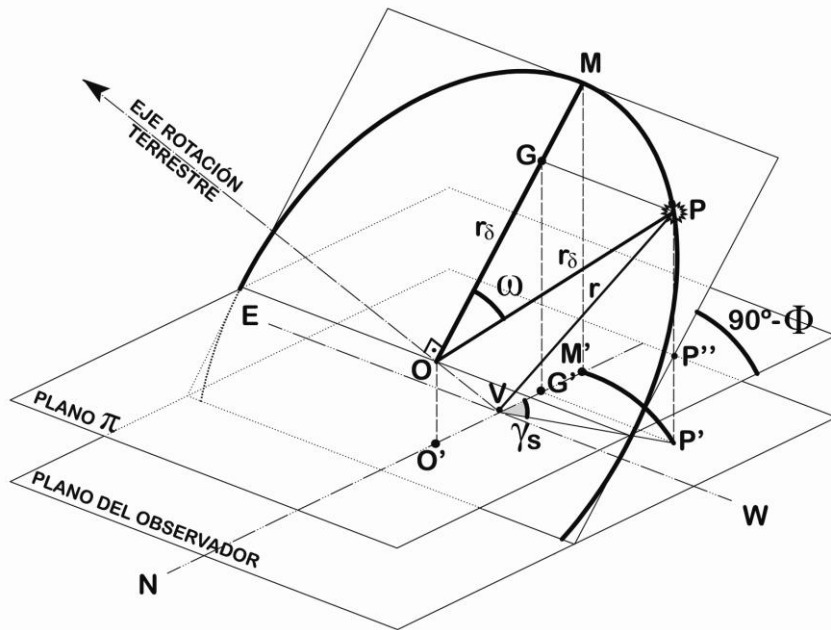
$$r \cdot \sin \hat{e} = PP'$$

por lo que

$$\sin \hat{e} = \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega + \sin \Phi \cdot \sin \delta$$

Ecuación de la elevación que es idéntica a la que obtuvimos en el capítulo anterior.

Análogamente, podemos utilizar este procedimiento para calcular el acimut sur γ_s . Si el ángulo horario ω aumenta desde el mediodía en sentido horario, y r_δ es el valor definido en la fig. 3-18, podemos representar la fig. 3-20:



3-20. Situación relativa del acimut sur γ_s y el ángulo horario ω .

De ella, y teniendo en cuenta nuevamente la fig. 3-18 obtenemos que:

$$\sin \gamma_s = \frac{G'P'}{VP'} = \frac{GP}{VP'} = \frac{r_\delta \cdot \sin \omega}{r \cdot \cos \hat{e}} = \frac{r \cdot \cos \delta \cdot \sin \omega}{r \cdot \cos \hat{e}} = \frac{\cos \delta \cdot \sin \omega}{\cos \hat{e}}$$

O sea:

$$\sin \gamma_s = \frac{\cos \delta \cdot \sin \omega}{\cos \hat{e}}$$

Expresión que es también idéntica a la obtenida en el capítulo anterior, por lo que lo serán también el resto de las fórmulas equivalentes del grupo que ya se dedujeron: acimut desde el norte γ_s y todas sus variantes en seno, coseno y tangente.

3.7. ACIMUT EN EL AMANECER Y EN EL OCASO PARA UNA FECHA DADA EN UNA LATITUD Φ

Para el cálculo del acimut de los puntos de salida y puesta del Sol partiremos del dato de la declinación δ en la fecha considerada y de la latitud Φ del observador.

Como simplificaciones a efectos de cálculo, podemos asumir, como ya hemos hecho anteriormente, que dicha declinación permanece constante a lo largo del día, que la salida o puesta de Sol se producen cuando el centro de la esfera solar corta el plano del horizonte del observador, y prescindiremos de cualquier consideración acerca de la refracción atmosférica.

Con las expresiones calculadas anteriormente para el acimut solar, la resolución del problema es inmediata, ya que consiste en conocer qué valores del acimut γ corresponden a una elevación $\hat{e} = 0$.

En este caso, consideraremos el acimut medido desde el norte en sentido horario, γ_N .

Tendremos que:

$$\cos \gamma_N = \frac{\sin \delta - \sin \Phi \cdot \sin \hat{e}}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}}$$

Pero, como decíamos, $\hat{e} = 0$, por lo que de forma inmediata obtenemos:

$$\cos \gamma_N = \frac{\sin \delta}{\cos \Phi}$$

Pero, como decíamos en apartados anteriores, esta ecuación tiene varias soluciones; nos interesan las dos de menor valor absoluto.

Si observamos la fig. 3-21, veremos que, si denominamos γ_{N1} a la solución de menor valor absoluto, tendremos igualmente una nueva solución γ_{N2} que verificará:

$$\gamma_{N2} = 360^\circ - \gamma_{N1}$$

Valor que podemos asignar a la puesta de sol. Vemos que los valores máximos de γ_{N1} se alcanzan para todas las latitudes en los equinoccios, con $\delta = 0^\circ$ ($\gamma_{N1} = 90^\circ$), siendo los mínimos los correspondientes a los solsticios. En este último caso, el valor resultante de γ_{N1} dependerá de la latitud del observador. Para la latitud de Madrid, por ejemplo ($\Phi = 40,42^\circ$), tendremos que, en los solsticios de invierno y verano ($\delta = -23^\circ,45$ y $\delta = 23^\circ,45$), los valores de γ_{N1} serán, respectivamente,

$$\gamma_{N\text{invierno}} = 121^\circ.51$$

$$\gamma_{N1\text{verano}} = 58^{\circ},49$$

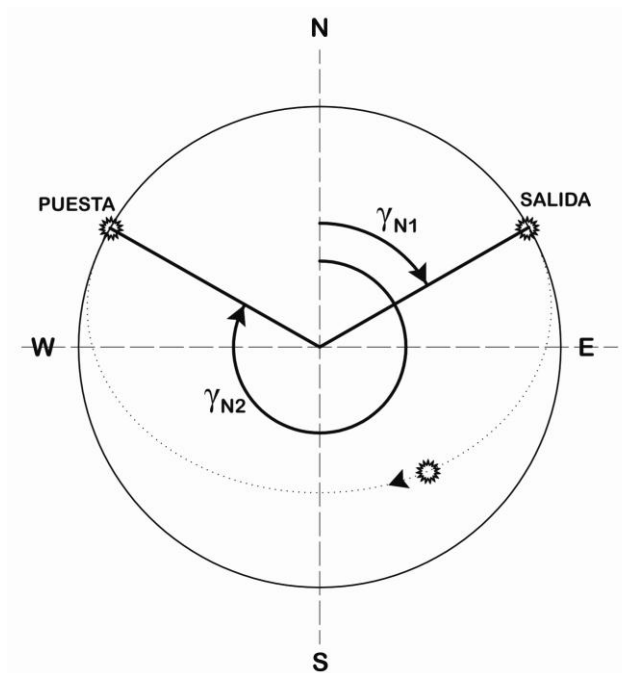
Es decir, la variación máxima del acimut solar en el amanecer, entre invierno y verano, para la latitud de Madrid es de:

$$121^{\circ},51 - 58^{\circ},49 = 63,02^{\circ}$$

Intervalo que puede parecer sorprendente, por cuanto supone unas desviaciones máximas del acimut de salida respecto a la línea Norte-Sur de

$$63^{\circ},02 / 2 = 31^{\circ},51$$

En latitudes más septentrionales, la variación sería más extrema (análogamente se procedería para el hemisferio Sur).



3-21. Representación en planta de la trayectoria diurna solar.

3.8. CÁLCULO DE LAS HORAS DE SOL PARTIENDO DE LAS FÓRMULAS DE ACIMUT Y ELEVACIÓN

Una alternativa al cálculo de las horas de Sol, cuya expresión obtuvimos en el subcap. 2.11., puede obtenerse directamente del grupo de ecuaciones de acimut y elevación que ya conocemos.

En particular, las expresiones (Ec. 3.15) y (Ec. 3.18) de 3.2.

Si tomamos la (Ec. 3.18), tendremos la igualdad ya conocida:

$$\cos \gamma_s = \frac{\cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \omega - \sin \delta \cdot \cos \Phi}{\cos \hat{e}} = \frac{\sin \Phi \cdot \sin \hat{e} - \sin \delta}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}} .$$

En el amanecer y en el ocaso, $\hat{e} = 0$.

Por ello,

$$\cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \omega - \sin \delta \cdot \cos \Phi = \frac{-\sin \delta}{\cos \Phi} .$$

Nos interesa el valor ω , que nos dará el ángulo horario del Sol en el amanecer ($\omega < 0$) o en el ocaso ($\omega > 0$).

Por tanto,

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{\sin \delta \cdot \cos \Phi}{\cos \delta \cdot \sin \Phi} - \frac{\sin \delta}{\cos \Phi \cdot \cos \delta \cdot \sin \Phi} = \frac{\sin \delta \cdot \cos^2 \Phi - \sin \delta}{\cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi} = \\ &= \frac{\tan \delta (\cos^2 \Phi - 1)}{\sin \Phi \cdot \cos \Phi} = -\frac{\tan \delta \cdot \sin^2 \Phi}{\sin \Phi \cdot \cos \Phi} = -\tan \delta \cdot \tan \Phi \end{aligned}$$

Además,

$$H_s = \frac{2\omega}{360} \cdot 24 = \frac{2}{15} \cdot \omega = \frac{2}{15} \cdot \arccos(-\tan \delta \cdot \tan \Phi)$$

por lo que, como veíamos en (Ec. 2.6), en el pto. 2.11.2,

$$H_s = 24 - \frac{2}{15} \cdot \arccos(\tan \delta \cdot \tan \Phi)$$

Expresión que ya habíamos deducido anteriormente en el mismo punto.

3.9. DETERMINACIÓN DEL ÁNGULO FORMADO POR EL TERMINADOR CON EL MERIDIANO MEDIANTE LAS FÓRMULAS DEL ACIMUT SOLAR

Este método, que vamos a comparar con el analizado en 2.14, se basa en el conocimiento previo de algunas de las fórmulas que relacionan el acimut y la elevación aparentes del Sol con los ángulos conocidos δ y Φ (declinación y latitud) para un punto V determinado. Para nuestros cálculos, nosotros tomaremos aquellas expresiones que miden el acimut *desde el norte del observador* en sentido horario.

Nos basaremos en la fig. 3-22, basada a su vez en la ya analizada fig. 2-40 del subcapítulo 2.14. El observador se sitúa en V.

En el subcapítulo 3.7 hemos calculado, a partir de las fórmulas de acimut y elevación solares, el acimut del sol en amanecer y ocaso. En cada latitud Φ , dicho acimut en dichos instantes está ligado a observadores situados sobre el terminador, por la propia definición del mismo. Por lo tanto, tomamos el valor obtenido en dicho subcapítulo para $\hat{e} = 0$, es decir:

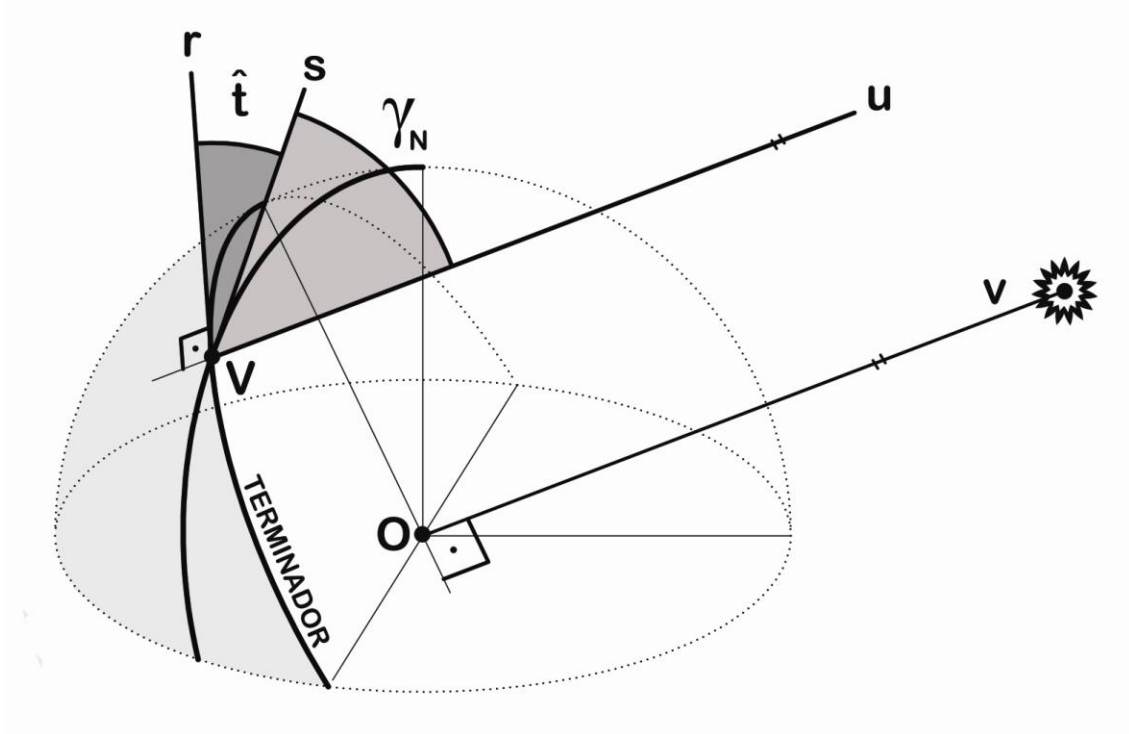
$$\cos \gamma_N = \frac{\sin \delta}{\cos \Phi}$$

con las mismas consideraciones para amanecer y ocaso que ya vimos anteriormente.

Por otra parte, dada la enorme distancia entre la Tierra y el Sol en comparación con el radio de esta, podemos considerar que las líneas que unen cualquier punto del terminador con el centro solar son paralelas a la línea Tierra-Sol, simbolizada por la recta v en la fig. 3-22.

Así, tenemos que la recta r es tangente al terminador y, por lo tanto, perpendicular a u y a v .

La recta u es paralela al plano del observador, pues cuando este está situado sobre el terminador, la elevación es $\hat{e} = 0$. Y a su vez, el plano del observador contiene a todas las rectas tangentes a la esfera por V, entre ellas r y s . Por todo ello, los ángulos \hat{t} y γ_N están situados sobre el mismo plano, y su suma es igual a 90° .



3-22. Relación entre Ψ y γ_N .

En cuanto a los signos, en la figura indicada, \hat{t} es positivo, medido hacia el oeste. Por su parte, γ_N es positivo, medido hacia el este. Por lo tanto, podemos establecer la igualdad:

$$\hat{t} + \gamma_N = 90^\circ$$

Así pues, tenemos que:

$$\cos \gamma_N = \sin \hat{t}$$

Por lo que, finalmente:

$$\sin \hat{t} = \frac{\sin \delta}{\cos \Phi} \quad .$$

O bien:

$$\hat{t} = \arcsin\left(\frac{\sin \delta}{\cos \Phi}\right) .$$

Expresión que coincide con la deducida anteriormente mediante geometría plana en 2.14.

4. NOCIONES BÁSICAS SOBRE EL TIEMPO

Tempora computantur

El número de definiciones físicas y astronómicas para el tiempo y su medida es tan extenso que en el presente capítulo solamente vamos a exponer aquellas que resultan estrictamente necesarias para la resolución práctica del cálculo de la posición aparente del Sol, aplicando las expresiones deducidas hasta ahora y mediante los procedimientos que se expondrán en capítulos posteriores.

4.1. EL TIEMPO UNIVERSAL

La medida del tiempo de uso más habitual guarda una estrecha relación con la rotación terrestre. Así, desde los orígenes de la Humanidad, el día solar fue la referencia temporal universalmente utilizada. Este concepto está en relación directa con el de *tiempo solar verdadero*, que fija el mediodía en la culminación del Sol sobre el meridiano del lugar: es el mediodía que marcan los relojes de sol. Dado que la duración de los días así definidos no es uniforme (como se expondrá en 11.3), surge el concepto de *tiempo medio*. El tiempo medio “*es el que corresponde a un sol medio ficticio definido de modo que, visto desde la Tierra, recorra uniformemente el ecuador celeste en 365,2421 días al año, y que es el utilizado en la vida práctica, dividiéndolo en 24 horas*” [4]. Este tiempo medio, definido, como se ve, desde un esquema geocéntrico, es el que sirve como base para el ajuste de nuestros relojes en la vida real. De este concepto surgió a su vez la búsqueda de la definición de *segundo*, como 1/86400 de día, abandonada en 1960[17] a favor de la relativa al patrón atómico: actualmente, “*the second is the duration of 9.192.631.770 periods of the radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of the ground state of the caesium 133 atom*”[47]. Tiene, por tanto, una definición absoluta, independiente del movimiento aparente del Sol, y es la base del *TAI (tiempo atómico universal)* desde 1972 [17]. En 1.979 se acepta la denominación *TD (terrestrial dynamical time)* para denominar al tiempo basado en las mediciones atómicas *TAI* [48].

Como referencia convencional para la definición del origen de los días, se toma sobre la superficie terrestre el meridiano de Greenwich. Los ángulos horarios ω analizados en capítulos anteriores se referirían al tiempo solar verdadero, estrictamente hablando.

El *tiempo universal TU* (también, *UT* en inglés) es el que se rige por el *tiempo medio* referido a Greenwich. Este tiempo, debido además a la paulatina ralentización de la rotación terrestre, acumula a lo largo de los años un error de varios segundos en relación con el tiempo atómico. A su vez, *UT1*, muy utilizado en Astronomía, hace referencia a *UT* una vez corregidos los mínimos movimientos de los polos. *UTC, tiempo universal coordinado*, sería *UT1* compensado con la parte entera de la diferencia entre *UT1* y *TAI*

(despreciando las fracciones de segundo). Las señales horarias emitidas por radiofrecuencia se corresponden con UTC. Los ajustes entre UT1 y UTC se realizan en los meses de junio y diciembre. La ralentización de la rotación terrestre se sitúa actualmente en un orden de magnitud aproximado de 1 s/año [17].

Podríamos extendernos con un número no pequeño de definiciones relativas a los diferentes estándares de tiempo, pero es innecesario desde un punto de vista práctico para el problema que nos ocupa.

4.2. LA NECESIDAD DE FIJAR UN ORIGEN DE TIEMPOS ESTÁNDAR: LA FECHA JULIANA O JD

La utilización de los días del año como unidad de tiempo para la determinación de L y, por tanto, de todas las variables necesarias para el análisis del movimiento aparente del Sol, acarrea graves inconvenientes.

Es cierto que existen, por ejemplo, fórmulas simplificadas para el cálculo de la declinación aproximada en una fecha dada basadas en el cómputo de días desde el 1º de enero del año considerado, con la correspondiente corrección para que L se anule en la fecha del equinoccio de primavera³⁴. Pero todos sabemos que el número de días civiles varía de unos años a otros (años bisiestos), que el perihelio se desplazan lentamente a lo largo del calendario a través de los años, que el eje de rotación de la Tierra modifica de forma lenta pero continua su inclinación con respecto al plano de la eclíptica, etc...

Por ello, y para evitar los inconvenientes mencionados a la hora de contar intervalos temporales desde orígenes arbitrarios y cambiantes, existe un procedimiento muy utilizado en Astronomía que por su sencillez vamos a referir a continuación, y que nos permite considerar el transcurso de los días como una sucesión continua cuyo origen se sitúa bastante alejado de nosotros en el tiempo.

Se trata de la *fecha juliana, día juliano o JD*, cuyo origen de tiempos, es decir, $JD=0$, se sitúa a las 12:00 h Greenwich del 1 de enero del año 4713 a. C. Para los astrónomos, el año 4713 a. C. es el -4712 . Cuestión exclusivamente de nomenclatura: el año 1 a.C. es denominado año 0 en Astronomía, debido a que hasta el siglo VI de nuestra era no se utilizaba en Occidente el concepto matemático del cero.

Sobre la elección de una fecha tan concreta para $JD=0$ no vamos a extendernos, limitándonos a citar como primitivo autor de este cómputo a Joseph Justus Scaliger, en 1582, y aclarando que se trata de una fecha totalmente arbitraria basada en criterios que actualmente nos resultarían sorprendentes.

Lógicamente, en esa época no estaba fijado Greenwich como origen de meridianos ni, por tanto, como referencia temporal a efectos de contabilizar el Tiempo Universal; este convenio es muy posterior.

³⁴ Este criterio es el más habitual. En nuestro sistema se ha tomado el equinoccio de otoño como origen de ángulos.

Cada instante del día viene dado como una fecha y su correspondiente fracción. La fecha juliana se basa siempre en días naturales y tiempo medio.

Por ejemplo, el 1 de enero de 2000 a las 12:00, (hora Greenwich) sería el $JD = 2.451.545,0$.

Ese mismo día, a las 0:00 tendríamos $JD = 2.451.544,5$.

4.3. LAS FRACCIONES DE DÍA. UNA CURIOSA PARTICULARIDAD ASTRONÓMICA

Para lo que sigue, y con el fin de normalizar nuestras expresiones de fechas en lo que respecta a fracciones de día, debemos tener en cuenta una cuestión cuando menos chocante, habitual en Astronomía: el primero de enero a las 0:00 se considera en Astronomía el día 1,0 del año. El mediodía solar en esa fecha es el día 1,5 y la medianoche del 1 al 2 de enero es en Astronomía el día 2,0. Hasta aquí todo transcurre de acuerdo con nuestra lógica habitual. Sin embargo, si el 01/01/1975 a las 0:00 es el día 1,0, ¿qué fecha es el 31/12 del año anterior a las 12:00? Realmente, será una fecha de valor $< 1,0$, por lo que, habiendo transcurrido 0,5 días hacia atrás, tendremos que la fecha correspondiente a ese instante es el 0,5 del nuevo año 1975. Otros ejemplos ilustrativos:

El 31 de diciembre de 1974 a las 0:00 será el 0,0 de enero de 1975. (JD 2442412,5)

El 30 de dic. de 1974 a las 12:00 será el 30,5 de diciembre de 1974. (JD 2442411,5)

El 1 de enero de 1975 a las 12:00 será el 1,5 de enero de 1975. (JD 2442414,0)

Un poco complicado a simple vista, pero bastante práctico a la hora de utilizar fechas según una línea temporal sin solución de continuidad. Se trata de que todo el primer día del año tenga como valor significativo la cifra 1.

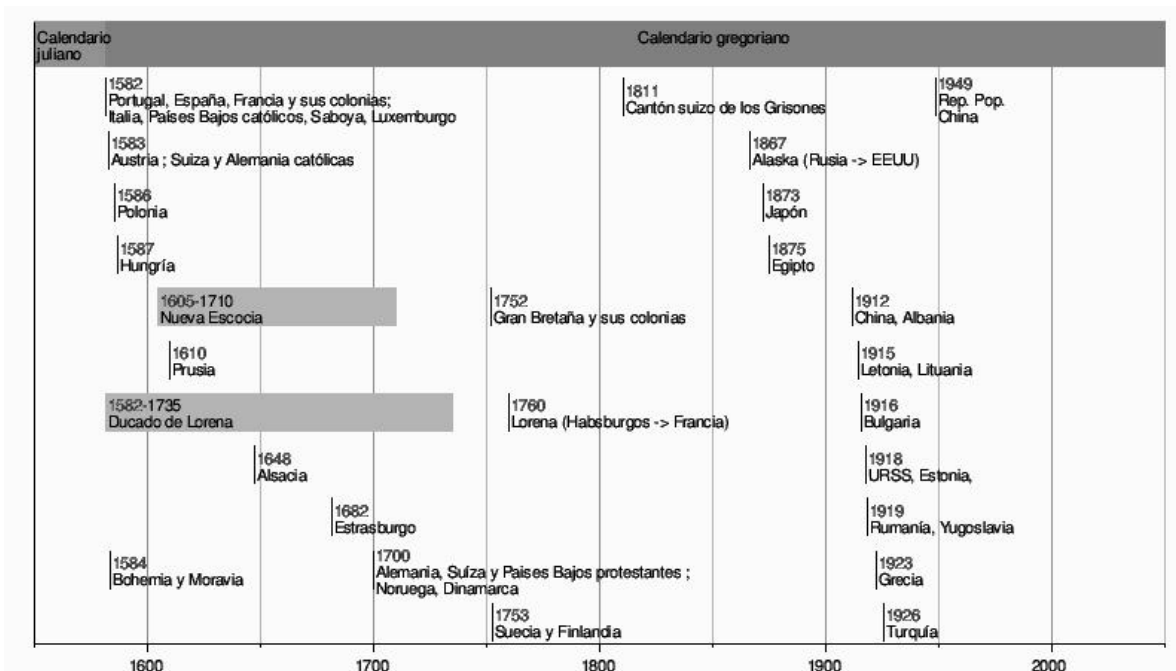
4.4. FECHA JULIANA Y DÍAS NATURALES

Es importante recalcar que la fecha juliana JD se refiere a días naturales y, por tanto, las fracciones de día tienen en cuenta que el punto medio de la fecha dada (valor decimal = 0,0) es el instante del mediodía Greenwich, es decir, el momento en que el Sol se sitúa sobre dicho meridiano. Por tanto, siempre existirán diferencias con respecto a la hora media local o al tiempo universal coordinado.

4.5. CALENDARIO JULIANO, CALENDARIO GREGORIANO Y FECHA JULIANA: CONFUSIONES HABITUALES

La denominación “fecha juliana”, que procede del propio Scaliger, en memoria de su padre, Julius Caesar Scaliger, no puede ser más desafortunada, ya que es motivo de confusión con el propio calendario juliano, introducido por Julio César en el año 46 a. C., y que computaba por primera vez en Occidente los años bisiestos con el fin de adaptar el calendario civil al año trópico (el transcurrido entre dos equinoccios de primavera consecutivos). Este calendario juliano fue sustituido progresivamente en los diferentes Estados entre los siglos XVI al XIX por el calendario gregoriano, promulgado por el Papa Gregorio XIII en 1582, y que eliminaba la consideración de bisiestos para todos los años primeros de cada siglo, salvo aquéllos que fuesen múltiplos de 400. El calendario gregoriano es mucho más preciso que el juliano en cuanto su adaptación a la verdadera duración del año trópico (ver cap. 1.5).

Sea como fuere, la confusión no procede solamente de la denominación, sino del hecho de que en Astronomía no es infrecuente el uso tanto del calendario gregoriano como del juliano a efectos del análisis de fenómenos astronómicos remotos en el tiempo. A ello debe unirse otro problema como es el de la diferencia en las fechas de implantación del calendario gregoriano según los diferentes países, por lo que resulta prácticamente imposible establecer un único algoritmo que sin salvedades relacione calendarios juliano y gregoriano con fechas julianas. Por ello, para fechas pretéritas debe estudiarse cada caso concreto.



4-1. Años de implantación del calendario gregoriano en diferentes Estados. Wikipedia.
 "Cambio al calendario gregoriano". https://es.wikipedia.org/wiki/Cambio_al_calendario_gregoriano [49].

A este respecto y a modo de ejemplo, reproducimos en la fig. 4-1 un conocido esquema temporal de adopción del calendario gregoriano en diferentes Estados tomado de la web [49] , sin comprobación por parte del autor de la presente tesis de los años en él recogidos. En el mismo no se indican fechas exactas ni aparece la relación completa de países, pero nos ilustra perfectamente acerca del problema expuesto. No obstante, en caso de considerarlo necesario para algún cálculo concreto, existen multitud de fuentes que nos proporcionan las fechas de implantación para cada Estado.

4.6. ALGORITMOS DE CONVERSIÓN ENTRE FECHA DE CALENDARIO GREGORIANO Y JD

Con las salvedades anteriores, existen multitud de algoritmos de uso general para la conversión de fecha del calendario gregoriano (el actualmente reconocido en todos los Estados³⁵) y la JD. Obviamos cualquier disquisición relativa a fechas anteriores a sus diferentes adopciones. Podemos citar como autores de los algoritmos sencillos más conocidos, que son la base de multitud de programas para uso en ordenadores o calculadoras programables, a Van Flandern y Pulkkinen [28], Peter Duffett-Smith [11]... Algunos están vertidos en la web por organismos oficiales y traducidos a lenguajes de programación concretos, como el del United States Naval Observatory (USNO) [30].

4.6.1. CONVERSIÓN DE FECHA GREGORIANA A DÍA JULIANO

De entre todos, citamos a continuación el algoritmo recomendado por Jean Meeus [9] . Este algoritmo es válido incluso para fechas anteriores a la implantación más temprana del calendario gregoriano, en 1582, aunque de acuerdo con el punto anterior, para fechas tan antiguas deberían tomarse las oportunas reservas.

Las variables de entrada son:

$Y = \text{año}$

$M = \text{mes}$

$D = \text{día del mes}$, con sus correspondientes decimales, teniendo en cuenta que los días naturales en el calendario gregoriano, a diferencia de los correspondientes a JD, dan comienzo a las 0:00, por lo que, por ejemplo, las 6:00 del día 8 se indicarán en la entrada de datos como $D = 8,25$.

El diagrama de flujo del método sería el que se recoge en la fig. 4-2.

La expresión INT no es otra que la parte entera de la cifra en cuestión.

³⁵ Los países musulmanes siguen utilizando el "calendario musulmán", aunque convive con el gregoriano por cuestiones prácticas en aquellos. No resulta de interés su análisis en esta tesis ni tampoco el establecimiento de equivalencias entre ambos calendarios.

Este algoritmo permite también calcular JD partiendo del calendario juliano sin más que imponer $B=0$. Esto sería especialmente útil para fechas anteriores a 1582³⁶. En general, para nuestros cálculos utilizaremos habitualmente el calendario gregoriano.

Este algoritmo ha sido chequeado para la realización de esta tesis entre los años 1900 y 9999, en bloques de 1000 años, siendo los resultados obtenidos satisfactorios. La base de comparación ha sido la del continuo de fechas Excel desde 01/03/1900 con la corrección correspondiente de 2415018,5 días (diferencia entre JD para cualquier fecha y el valor numérico correspondiente a la fecha Excel). Ver subcapítulo 4.7.

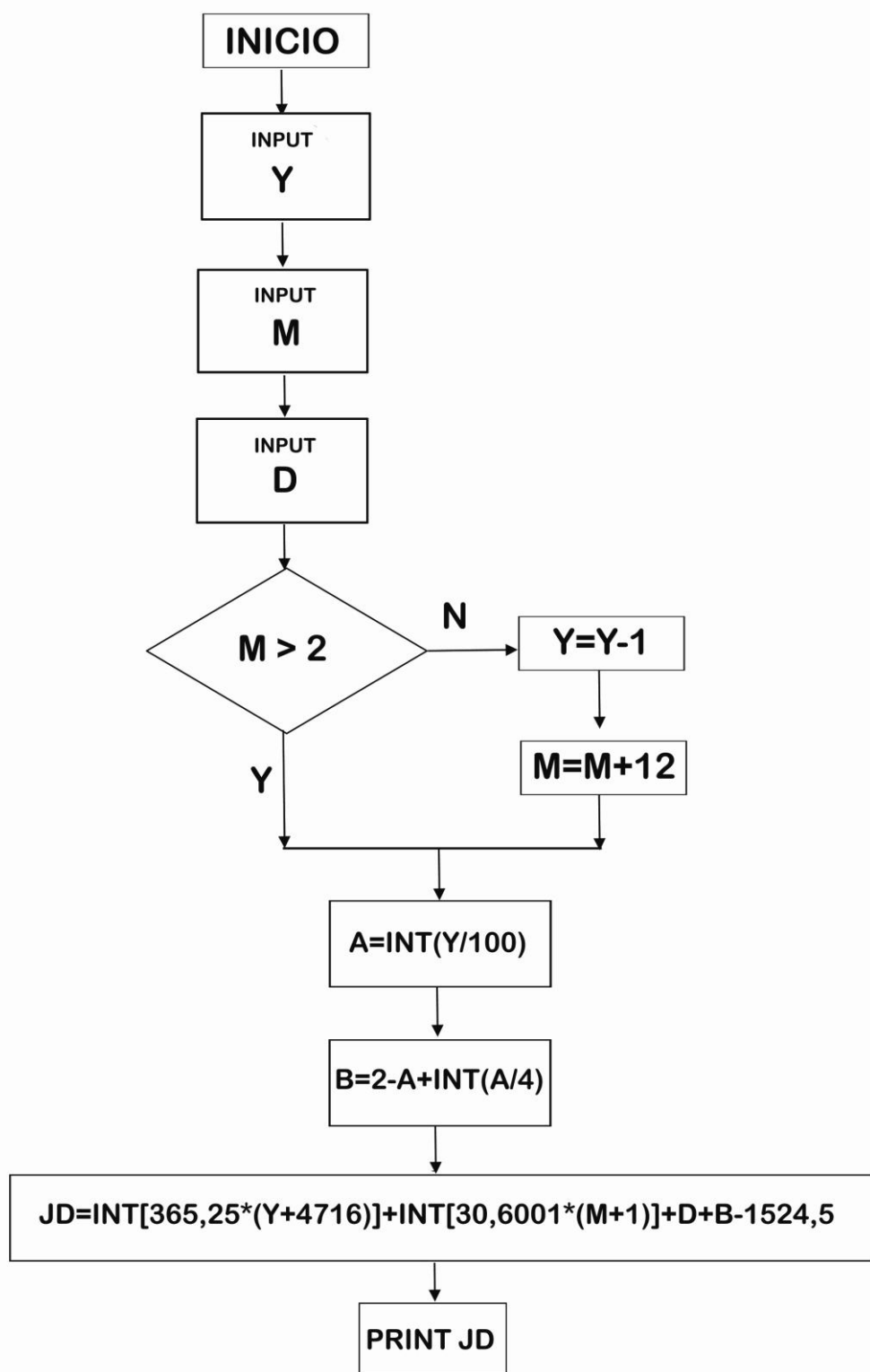
4.6.2. CONVERSIÓN DE FECHA JULIANA A FECHA GREGORIANA

La conversión de JD a calendario gregoriano se puede realizar a través del algoritmo recogido en la obra [9] del mismo autor. Se representa en la fig. 4-3.

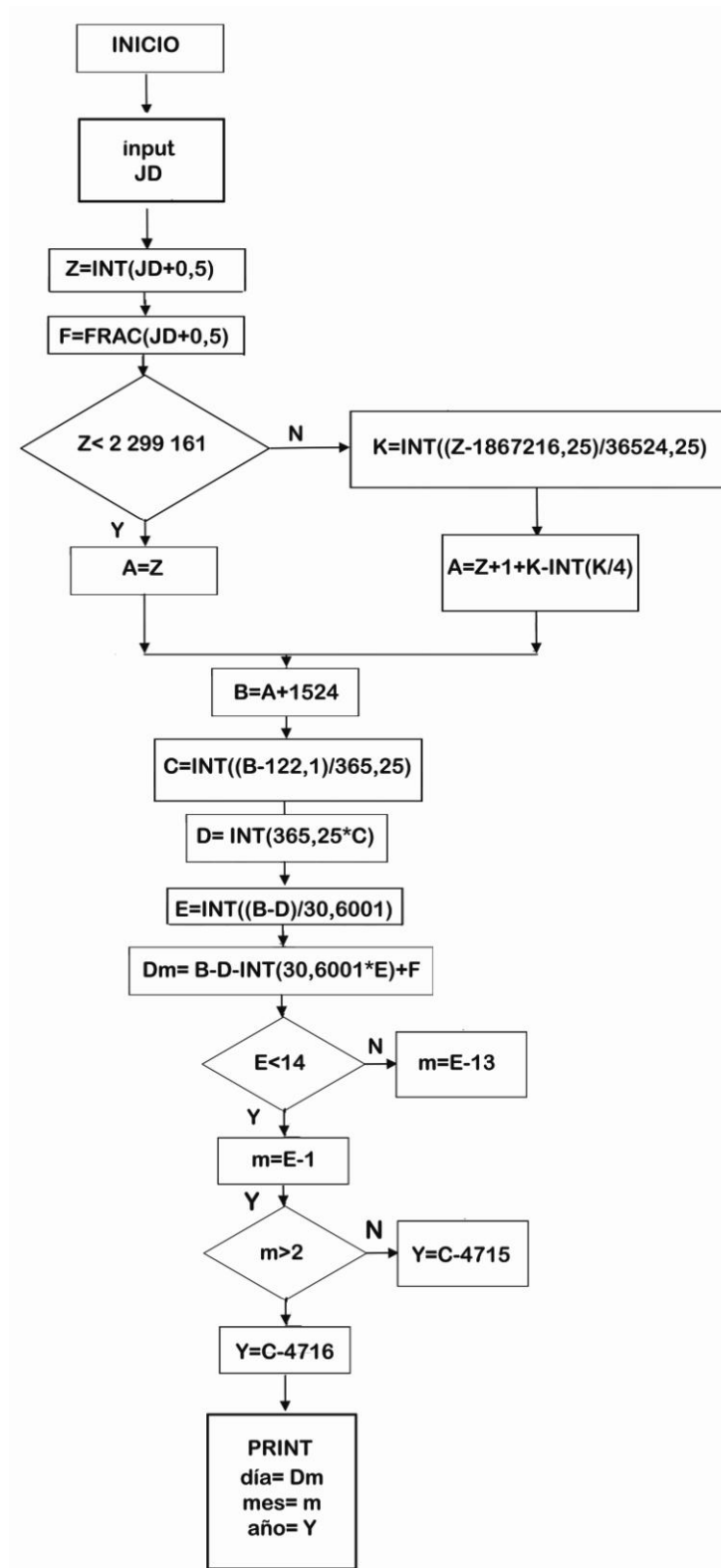
No es válido para JD negativos.

Este algoritmo ha sido chequeado para la realización de esta tesis entre los años 1900 y 9999, en bloques de 1000 años siendo los resultados obtenidos satisfactorios. La base de comparación ha sido el continuo de fechas julianas obtenido por el procedimiento directo de cálculo indicado en el subcapítulo 4.6.1. Ver también subcapítulo 4.7.

³⁶ *Este año es el más antiguo del proceso de sustitución del calendario juliano. Como se ha indicado, conviene consultar la fecha exacta de implantación del calendario gregoriano en el Estado en el que se analice el cálculo.*



4-2. Algoritmo general para el cálculo del día juliano en función de la fecha gregoriana.



4-3. Conversión de día juliano a fecha gregoriana.

4.6.3. OTROS ALGORITMOS

Existen otros muchos algoritmos con mayor o menor complejidad en función de las limitaciones de fecha adoptadas, relación con instantes dados, etc. A modo de ejemplo, recogemos por su sencillez un algoritmo citado por multitud de autores, como J.D. Fernie [31], para la transformación de fecha del calendario gregoriano a JD. El mismo fue propuesto por J.D. de Van Flandern y Pulkkinen [28] en 1979, en su variante simplificada para fechas posteriores a marzo de 1900.

$$JD = 367 * Y - 7 * [Y + (M + 9) / 12] / 4 + (275 * M / 9) + D + 1701014$$

(JD, Y, M, D tienen los mismos significados que en los algoritmos anteriores).

La fecha juliana, con este algoritmo, presupone que a una entrada de D como número entero le corresponde un resultado JD al mediodía.

Este conocido procedimiento, enunciado de una forma tan compacta, fue formulado en principio como un algoritmo de una sola línea de programación, en concreto para el lenguaje Fortran. Por esta razón, es importante tener en cuenta que dicho lenguaje de programación truncaba automáticamente las divisiones por enteros a su parte entera. Observemos que se trata de un algoritmo desarrollado durante los años 70 del pasado siglo. Su utilización directa en otros lenguajes de programación, calculadoras programables, etc. puede llevar a errores si no se corrige esa particularidad. Por ejemplo, sería más adecuada esta expresión, recordando las limitaciones temporales indicadas más arriba:

$$JD = 367 * Y - INT \left[\frac{7 * \left[Y + INT \left[\frac{M + 9}{12} \right] \right]}{4} \right] + INT \left(275 * \frac{M}{9} \right) + D + 1721013,5$$

Esta expresión admite valores no enteros de D homogéneos con origen horario a las 00:00 h, cuestión accesoria que contempla J. D. Fernie [31] en el desarrollo de su expresión matemática.

Este algoritmo, a pesar de su simplicidad, pierde su potencial de simplificación de operaciones cuando se trabaja con hojas de cálculo Excel, por los motivos que se analizarán en el punto 4.7., y que están en relación con la restricción de no admitir fechas anteriores al 1 de marzo de 1900.

Por otra parte, en el chequeo realizado durante la confección de esta tesis, ha sido comprobada la existencia de errores en este algoritmo a partir del 28 de febrero de 2100, toda vez que el mismo, a tenor de los resultados, considera bisiestos todos los años múltiplos de 100. Por ello, el límite superior de validez del algoritmo sería precisamente

el 28/02/2100. De este extremo no se ha encontrado ninguna confirmación escrita en la literatura científica consultada.

Existe otra versión para cualquier otra fecha expuesta por el mismo autor, aunque con una complejidad mayor. La presentamos a continuación en formato matemático, obviando su definición para lenguaje Fortran:

$$\begin{aligned}
 JD = & 367 * Y - INT \left[\frac{7 * \left[Y + INT \left[\frac{M+9}{12} \right] \right]}{4} \right] + INT \left[\frac{3 * \left[INT \left[\frac{Y + INT \left[\frac{M-9}{7} \right]}{100} \right] + 1 \right]}{4} \right] + \\
 & + INT \left(\frac{275 * M}{9} \right) + D + 1721028,5
 \end{aligned}$$

El algoritmo está adaptado para los valores de salida de JD de la misma forma que en la versión reducida anterior.

Su ventaja radica, como indica su autor, en ser un algoritmo “de una sola línea de programación”, sin filtros de valores en el proceso de cálculo.

Este algoritmo ha sido chequeado para la realización de esta tesis entre 1900 y 9999, en bloques de 1000 años, siendo los resultados obtenidos satisfactorios.

Por otro lado, J.D. Fernie [31] no presenta en su trabajo ninguna propuesta para el cálculo inverso, esto es, el cálculo de la fecha gregoriana a partir de JD.

4.7. LA FECHA JULIANA Y LA INFORMÁTICA DE USO GENERAL. UN GRAVE ERROR EN EXCEL

Los algoritmos anteriormente expuestos o mencionados han sido desarrollados a medida que las calculadoras programables y los ordenadores iban evolucionando desde la década de los 70 del siglo XX. Hoy en día, la utilización de ordenadores personales asequibles, mucho más potentes que los utilizados por astrónomos y profesionales en los albores de la era espacial, está generalizada para el gran público. Igualmente, se ha impuesto un tipo de *software*, de uso universal, que permite la realización de cálculos masivos. Se trata de las hojas de cálculo.

Todo el que haya utilizado una hoja Excel en entorno Windows sabe que a una fecha en formato dd/mm/aaaa le corresponde un valor matemático en formato-número. Así, el 19/09/1977 se transforma en 28387 sin más que variar el formato de celda. De esta forma, es muy sencillo obtener el número de días transcurridos entre dos fechas dadas. El principio es el mismo que el de la fecha juliana, con las únicas diferencias de que en Excel el origen de tiempos es el 01/01/1900, abarcando su campo de validez hasta el 31/12/9999 A.D. (limitaciones comprobadas en la versión Excel Microsoft Office 2007), y que en dicha hoja no se opera con fracciones de día.

Sin embargo, Excel presenta un grave error en el cómputo continuo de las fechas: supone bisiestro el año 1900, cuando realmente no lo fue.

El 01/01/1900 a las 00:00 es $JD = 2415020,5$. El valor numérico para la fecha dada en Excel es $D_{\text{excel}} = 1$, por lo que entonces deducimos que $JD = D_{\text{excel}} + 2415019,5$. Pero retrocediendo desde el 01/03/1900, cuyo valor numérico asignado por Excel sería 61, eliminando el falso 29/02/1900 llegaríamos a que el valor correcto del continuo Excel para el 01/01/1900 debería ser entonces $D_{\text{excel}} = 2$ y no $D_{\text{excel}} = 1$, como indica el programa. Por esa razón, la fórmula de paso correcta debe ser:

$$JD = D_{\text{excel}} + 2415018,5$$

para todas las fechas desde el 01/03/1900.

Por ello, algunas aplicaciones que utilizan Excel como base, por ejemplo, la de la NOAA [20], especifican que sus tablas de año completo son válidas a partir de 1901.

En cualquier caso, la expresión anterior nos permite, con la salvedad expuesta, obviar los algoritmos anteriores para predicciones futuras en fechas posteriores a 29/02/1900 y hasta el 31/12/9999.

4.8. FENÓMENOS SECULARES

La fecha juliana no es útil solamente para fijar un continuo en la sucesión de días naturales. Algunos fenómenos astronómicos, fundamentales para nuestros cálculos, experimentan variaciones anuales tan pequeñas que sus valores se analizan en función de los siglos o milenios transcurridos desde un instante determinado. Hoy en día es frecuente la evaluación numérica aproximada de estos fenómenos mediante expresiones matemáticas en forma de series polinómicas, e invariablemente se suele utilizar la JD o cifras derivadas de la misma para la cuantificación de su evolución temporal.

El inconveniente es que diferentes aproximaciones suelen utilizar orígenes de tiempos distintos en función de la fecha en que ha sido lanzado el modelo o de otras consideraciones, como la de tener en cuenta múltiplos de JD para fenómenos con variaciones infinitesimales. Pongamos un ejemplo:

- La expresión de la excentricidad de la órbita terrestre, e , recogida de [11], cap. 45: “Calculating the position of the Sun”, es:

$$e = 0,01675104 - 0,0000418T - 0,000000126 T^2,$$

donde T es el número de *siglos julianos* transcurridos desde el 0,5 de enero de 1900 (31 de diciembre de 1899 a las 12:00 del mediodía), es decir, desde las $JD = 2415020,0$, entendiéndose como siglo juliano un período de 36525 días naturales.

O sea:

$$T = \frac{JD - 2415020,0}{36525}$$

Sin embargo, de acuerdo con Jean Meeus [9], pág. 163, tenemos que:

$$e = 0,016708634 - 0,000042037 T - 0,0000001267 T^2$$

Siendo T los siglos julianos transcurridos desde el 1 de enero de 2000 a las 12:00 del mediodía, instante que se denomina por convenio J2000. El instante en cuestión tiene una $JD = 2451545,0$, por lo que, en este caso:

$$T = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$$

El ejemplo anterior nos sirve para ilustrar la necesidad de que con cada expresión numérica para elementos orbitales que dependa directa o indirectamente de la fecha juliana, es imprescindible indicar de forma clara el origen de tiempos. Este criterio se ha seguido en todos los apartados de la presente tesis, aun a costa de resultar a veces reiterativos.

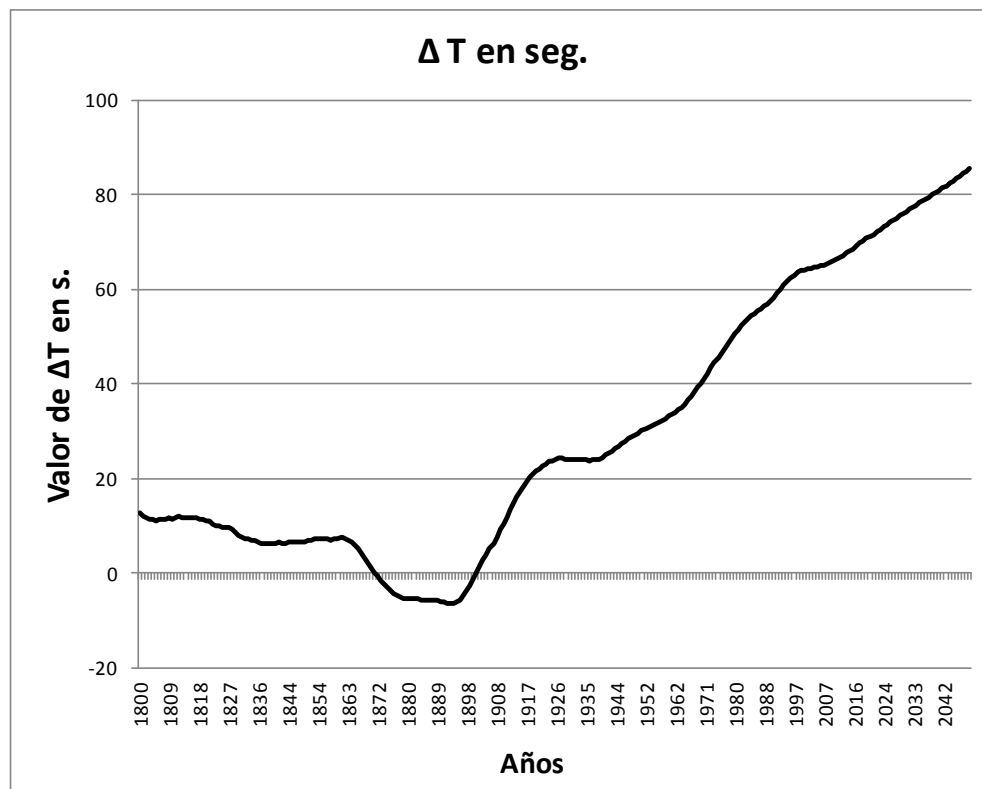
4.9. EFEMÉRIDES Y ΔT

Ciertos algoritmos para el cálculo de posiciones de planetas o astros están desarrollados para ser utilizados con JDE (Julian Ephemeris Day) en lugar de JD. JDE es similar a JD, pero corrige, como veíamos, el desfase entre el tiempo universal y el tiempo medido por procedimientos atómicos, un continuo que evita los errores introducidos por las variaciones en la velocidad de rotación de la Tierra debidas a multitud de factores como la paulatina disminución, casi imperceptible, de la velocidad angular de rotación o las aceleraciones y deceleraciones debidas a la evolución de la capa de hielo en los polos. La diferencia entre ambos valores JDE y JD se conoce como ΔT .

La determinación de ΔT es problemática, pues la forma correcta de hacerlo es por observación directa, ya que la variación de la velocidad de rotación terrestre no está aparentemente sujeta a ley alguna.

En la Tabla 4-1, extraída de [9], se indican los valores de ΔT entre los años 1620 A.D. y 1998 A.D. asignados por Meeus. Los valores históricos son estimados. Nótese que va referida a la diferencia entre UT y TD, definidas anteriormente.

En la fig. 4-4 se han representado los valores obtenidos del MICA [33] entre los años 1800 y 2050, con valores cada 365 días. Igualmente, los valores históricos y futuros son también estimados, y no coinciden en ocasiones con los anteriores.



4-4. Valores para ΔT obtenidos de la aplicación MICA entre 1800 y 2050.

Tengamos en cuenta que el MICA, para fechas anteriores a 1972, se apoya en Mc Carthy & Babcock [50], con predicciones hasta 2050, basadas, según aquél, en *Johnson*³⁷, con cálculos de 2004, procediendo las estimaciones de Meeus de diferentes fuentes, algunas de ellas propias, en el seno de investigaciones basadas en instantes de producción de eclipses.

Tabla 4-1. Diferencias, en segundos., entre tiempo universal UT y tiempo atómico TD. J. Meeus. "Astronomical Algorithms" © Willmann-Bell, Inc. 1998. [9].

$\Delta T = TD - UT$ (in seconds) for the beginning of some years

year	ΔT	year	ΔT	year	ΔT	year	ΔT	year	ΔT
1620	+121	1700	+ 7	1780	+16	1860	+ 7.7	1940	+24.3
1622	112	1702	7	1782	16	1862	7.3	1942	25.3
1624	103	1704	8	1784	16	1864	6.2	1944	26.2
1626	95	1706	8	1786	16	1866	5.2	1946	27.3
1628	88	1708	9	1788	16	1868	2.7	1948	28.2
1630	+82	1710	+ 9	1790	+16	1870	+ 1.4	1950	+29.1
1632	77	1712	9	1792	15	1872	- 1.2	1952	30.0
1634	72	1714	9	1794	15	1874	- 2.8	1954	30.7
1636	68	1716	9	1796	14	1876	- 3.8	1956	31.4
1638	63	1718	10	1798	13	1878	- 4.8	1958	32.2
1640	+60	1720	+10	1800	+13.1	1880	- 5.5	1960	+33.1
1642	56	1722	10	1802	12.5	1882	- 5.3	1962	34.0
1644	53	1724	10	1804	12.2	1884	- 5.6	1964	35.0
1646	51	1726	10	1806	12.0	1886	- 5.7	1966	36.5
1648	48	1728	10	1808	12.0	1888	- 5.9	1968	38.3
1650	+46	1730	+10	1810	+12.0	1890	- 6.0	1970	+40.2
1652	44	1732	10	1812	12.0	1892	- 6.3	1972	42.2
1654	42	1734	11	1814	12.0	1894	- 6.5	1974	44.5
1656	40	1736	11	1816	12.0	1896	- 6.2	1976	46.5
1658	38	1738	11	1818	11.9	1898	- 4.7	1978	48.5
1660	+35	1740	+11	1820	+11.6	1900	- 2.8	1980	+50.5
1662	33	1742	11	1822	11.0	1902	- 0.1	1982	52.2
1664	31	1744	12	1824	10.2	1904	+ 2.6	1984	53.8
1666	29	1746	12	1826	9.2	1906	5.3	1986	54.9
1668	26	1748	12	1828	8.2	1908	7.7	1988	55.8
1670	+24	1750	+12	1830	+ 7.1	1910	+10.4	1990	+56.9
1672	22	1752	13	1832	6.2	1912	13.3	1992	58.3
1674	20	1754	13	1834	5.6	1914	16.0	1994	60.0
1676	18	1756	13	1836	5.4	1916	18.2	1996	61.6
1678	16	1758	14	1838	5.3	1918	20.2	1998	63.0
1680	+14	1760	+14	1840	+ 5.4	1920	+21.1		
1682	12	1762	14	1842	5.6	1922	22.4		
1684	11	1764	14	1844	5.9	1924	23.5		
1686	10	1766	15	1846	6.2	1926	23.8		
1688	9	1768	15	1848	6.5	1928	24.3		
1690	+ 8	1770	+15	1850	+ 6.8	1930	+24.0		
1692	7	1772	15	1852	7.1	1932	23.9		
1694	7	1774	15	1854	7.3	1934	23.9		
1696	7	1776	16	1856	7.5	1936	23.7		
1698	7	1778	16	1858	7.6	1938	24.0		

³⁷ Esta escueta referencia en el MICA parece referirse de forma coloquial, al Johnson Space Center, organismo dependiente de la NASA.

Para épocas intermedias, puede interpolarse entre los valores próximos. Ahora bien, Espenak y Meeus [32] proponen, en el contexto del cálculo histórico y predictivo de eclipses, un cálculo polinómico de ΔT . Precisamente, su trabajo se basa, en parte, en observaciones históricas registradas de estos fenómenos, y sus propuestas abarcan el período [-1999 , 3000]. Reproducimos a continuación las series incluidas en la referencia citada por su interés de cara al desarrollo de procesos programados. Los valores de ΔT se obtienen en segundos. (Ver también Tabla 4-2).

Definimos: $m = n^\circ$. de mes $y = n^\circ$. de año + $(m - 0,5)/12$

- *Años anteriores a -500:*

$$\Delta T = -20 + 32 \cdot u^2 \qquad u = (y - 1820) / 100$$

- *Años en el intervalo [-500 , +500]:*

Se tomarán los valores de la Tabla 4-2, excepto para el año 500, en el que el valor pasa a ser $\Delta T = 17203,7$ en lugar de 17190. Dicha tabla recoge los valores obtenidos, con error < 4 segundos, de la expresión polinómica siguiente, más útil para cálculos programados:

$$\begin{aligned} \Delta T = 10583,6 - 1014,41 u + 33,78311 u^2 - 5,952053 u^3 - 0,1798452 u^4 + \\ + 0,022174192 u^5 + 0,0090316521 u^6 \\ \text{Con } u = y/100 \end{aligned}$$

- *Años en el intervalo [+500 , +1600].*

Estamos aún en el dominio de la Tabla 4-2, pero bajo la expresión polinómica:

$$\begin{aligned} \Delta T = 1574,2 - 556,01 u + 71,23472 u^2 + 0,319781 u^3 - 0,8503463 u^4 - \\ - 0,005050998 u^5 + 0,0083572073 u^6 \\ \text{Con } u = (y - 1000) / 100 \end{aligned}$$

- *Años en el intervalo [+1600 , +1700]:*

$$\begin{aligned} \Delta T = 120 - 0,9808 t - 0,01532 t^2 + t^3 / 7129 \\ \text{Con } t = y - 1600 \end{aligned}$$

- **Años en el intervalo [+1700 , +1800]:**

$$\Delta T = 8,83 + 0,1603 t - 0,0059285 t^2 + 0,00013336 t^3 - t^4 / 1174000$$

$$\text{Con } t = y - 1700$$

- **Años en el intervalo [+1800 , +1860]:**

$$\Delta T = 13,72 - 0,332447 t + 0,0068612 t^2 + 0,0041116 t^3 - 0,00037436 t^4 + 0,0000121272 t^5 - 0,0000001699 t^6 + 0,000000000875 t^7$$

$$\text{Con } t = y - 1800$$

- **Años en el intervalo [+1860 , +1900]:**

$$\Delta T = 7,62 + 0,5737 t - 0,251754 t^2 + 0,01680668 t^3 - 0,0004473624 * t^4 + t^5 / 233174$$

$$\text{Con } t = y - 1860$$

- **Años en el intervalo [+1900 , +1920]:**

$$\Delta T = -2,79 + 1,494119 t - 0,0598939 t^2 + 0,0061966 t^3 - 0,000197 t^4$$

$$\text{Con } t = y - 1900$$

- **Años en el intervalo [+1920 , +1941]:**

$$\Delta T = 21,20 + 0,84493t - 0,076100 t^2 + 0,0020936 t^3$$

$$\text{Con } t = y - 1920$$

- **Años en el intervalo [+1941 , +1961]:**

$$\Delta T = 29,07 + 0,407t - t^2 / 233 + t^3 / 2547$$

$$\text{Con } t = y - 1950$$

- **Años en el intervalo [+1961 , +1986]:**

$$\Delta T = 45,45 + 1,067t - t^2 / 260 - t^3 / 718$$

$$\text{Con } t = y - 1975$$

- **Años en el intervalo [+1986 , +2005]:**

$$\Delta T = 63,86 + 0,3345 t - 0,060374 t^2 + 0,0017275 t^3 + 0,000651814 t^4 + 0,00002373599 t^5$$

Con $t = y - 2000$

- **Años en el intervalo [+2005 , +2050]:**

$$\Delta T = 62,92 + 0,32217 t + 0,005589 t^2$$

Con $t = y - 2000$

Los datos de la expresión anterior están estimados entre 2005 y 2050, habida cuenta de la fecha del informe (2006). El valor para 2010 (66.9 segundos) se basó , según indican los autores, en la extrapolación lineal desde 2005 con un ratio de 0.39 segundos/año (la media entre 1995 y 2005). El valor para 2050 (93 segundos) se extrapoló linealmente , a su vez, desde 2010 (valor estimado) considerando una variación de 0.66 segundos/año (media de 1901 a 2000).

Hay que remarcar que estas hipótesis de Espenak y Meeus son estimaciones basadas en diferentes hipótesis susceptibles de ser puestas en revisión a la vista de los datos que van obteniéndose *a posteriori*, en función de las diferencias reales en la velocidad de rotación de nuestro planeta.

Por ejemplo, el MICA [33], en su almanaque para el período 1800-2050, estima para ΔT el valor de 85 segundos en 2050, en lugar de los 93 de los autores anteriores. Por ello, tanto los valores muy antiguos como los futuros deben ser tomados con las consiguientes reservas. Dicho lo cual, y siguiendo con Espenak & Meeus,

- **Años en el intervalo [+2050 , +2150]:**

$$\Delta T = -20 + 32((y-1820)/100)^2 - 0.5628 (2150 - y)$$

- **Años posteriores a 2150:**

$$\Delta T = -20 + 32.u^2$$

Con $u = (y - 1820) / 100$

Se indican en la Tabla 4-3 los valores obtenidos de ΔT por observación directa entre 1955 y 2005, citados por los autores anteriores [32], y extraídos del *Astronomical Almanac for 2006*, pág. K9 [51].

Tabla 4-2. Valores históricos estimados para ΔT .

Espenak & Meeus. "Five Millennium Canon of Solar Eclipses". NASA ECLIPSE WEBSITE.(F.M C of S.E.DELTA T)
©NASA Goddard Space Flight Center 2006 [32].

from Historical Records		
Year	ΔT	Standard Error
	(seconds)	(seconds)
-500	17190	430
-400	15530	390
-300	14080	360
-200	12790	330
-100	11640	290
0	10580	260
100	9600	240
200	8640	210
300	7680	180
400	6700	160
500	5710	140
600	4740	120
700	3810	100
800	2960	80
900	2200	70
1000	1570	55
1100	1090	40
1200	740	30
1300	490	20
1400	320	20
1500	200	20
1600	120	20
1700	9	5
1750	13	2
1800	14	1
1850	7	<1
1900	-3	<1
1950	29	<0.1

Tabla 4-3. Valores reales registrados para ΔT .

Nautical Almanac Office , United States Naval Observatory , HM Nautical Almanac Office , Rutherford Appleton Laboratory. "Astronomical Almanac for 2006". © Stationery Office Books, 2004. [51].

Year	ΔT	5-Year Change	Average
	(seconds)	(seconds)	1-Year Change (seconds)
1955.0	+31.1	-	-
1960.0	+33.2	2.1	0.42
1965.0	+35.7	2.5	0.50
1970.0	+40.2	4.5	0.90
1975.0	+45.5	5.3	1.06
1980.0	+50.5	5.0	1.00
1985.0	+54.3	3.8	0.76
1990.0	+56.9	2.6	0.52
1995.0	+60.8	3.9	0.78
2000.0	+63.8	3.0	0.60
2005.0	+64.7	0.9	0.18

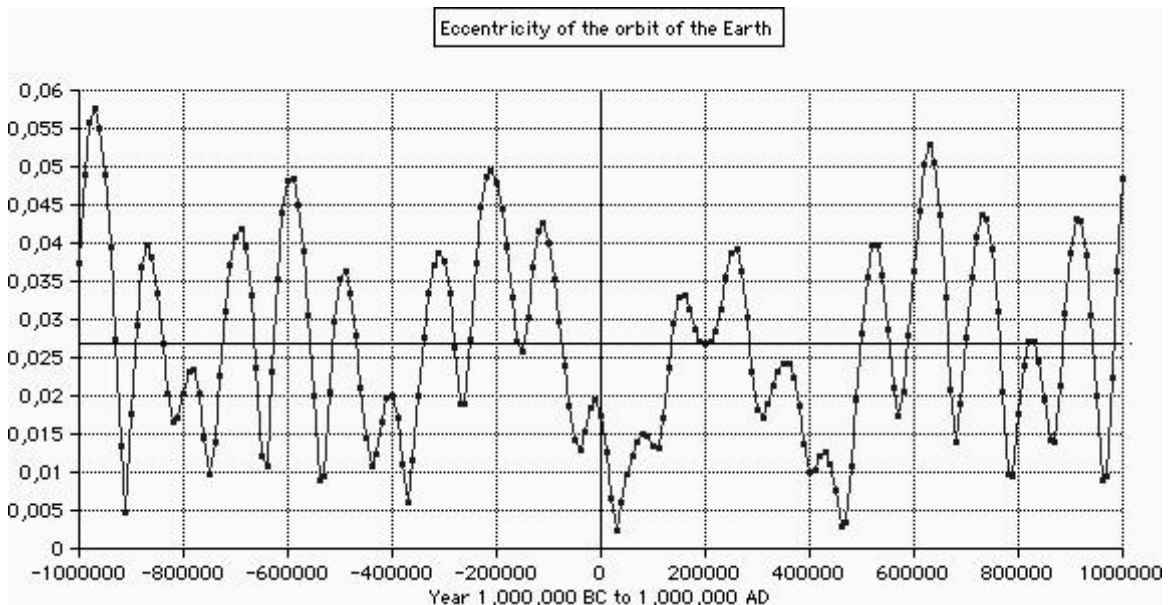
Como hemos indicado anteriormente, otras fuentes estiman diferentes valores para ΔT , y cualquier valor adoptado fuera de los períodos registrados realmente debe ser considerado bajo la óptica de la incertidumbre.

5. ELEMENTOS VARIABLES DE LA ÓRBITA: EXCENTRICIDAD e Y OBLICUIDAD MEDIA DE LA ECLÍPTICA ϵ_0

Tempora mutantur, et nos mutamur in illis

5.1. LA EXCENTRICIDAD e DE LA ÓRBITA Y SU VARIACIÓN EN EL TIEMPO.

La forma de la órbita terrestre varía a lo largo del tiempo. Su excentricidad mínima se estima en, aproximadamente, $e = 0,005$ (órbita casi circular), y la máxima en $e = 0,058$. Estas variaciones se producen a lo largo de períodos muy dilatados de tiempo. Jürgen Giesen, en su web [52], representa la variación de la excentricidad orbital para muy largos períodos de tiempo (de -1.000.000 hasta 1.000.000 años contados desde la actualidad), componiendo las figuras extraídas de [53], basadas a su vez en el algoritmo de Simon, Bretagnon et al. (coautores de los sistemas VSOP84 y VSOP87), recogido en [34].



5-1. Variación de la excentricidad de la órbita terrestre en un intervalo de 2.000.000 años. J. Giesen, "Physik und Astronomie. Applets, Programmen, Materialien", © 2006-2018 J. Giesen. <http://www.jgiesen.de/kepler/eccentricity1.html>. [52] Basada en [53], según indicaciones del propio autor.

El algoritmo mencionado es el siguiente:

$$e = 0,0167086342 - 0,0004203654t - 0,0000126734t^2 + 0,0000001444t^3 - 0,0000000002t^4 + 0,0000000003t^5,$$

donde t es el número de *milenarios julianos* desde J2000 (ver cap. 4), por lo que:

$$t = \frac{JD - 2451545,0}{365250}$$

Esta fórmula se recoge dentro de las tablas de parámetros orbitales para los diferentes planetas en la obra [9] de Meeus, en forma de listado de constantes (cubriendo hasta el correspondiente a la tercera potencia) y en el capítulo 25 (“Solar Coordinates”), donde, en el contexto del cálculo con precisiones en la órbita iguales o inferiores a $0,01^\circ$, utiliza la serie solamente hasta la segunda potencia de t . Igualmente, Meeus adapta la expresión anterior a su utilización con siglos o *centurias julianas*, es decir, T , también contadas desde J2000, truncando además la expresión anterior:

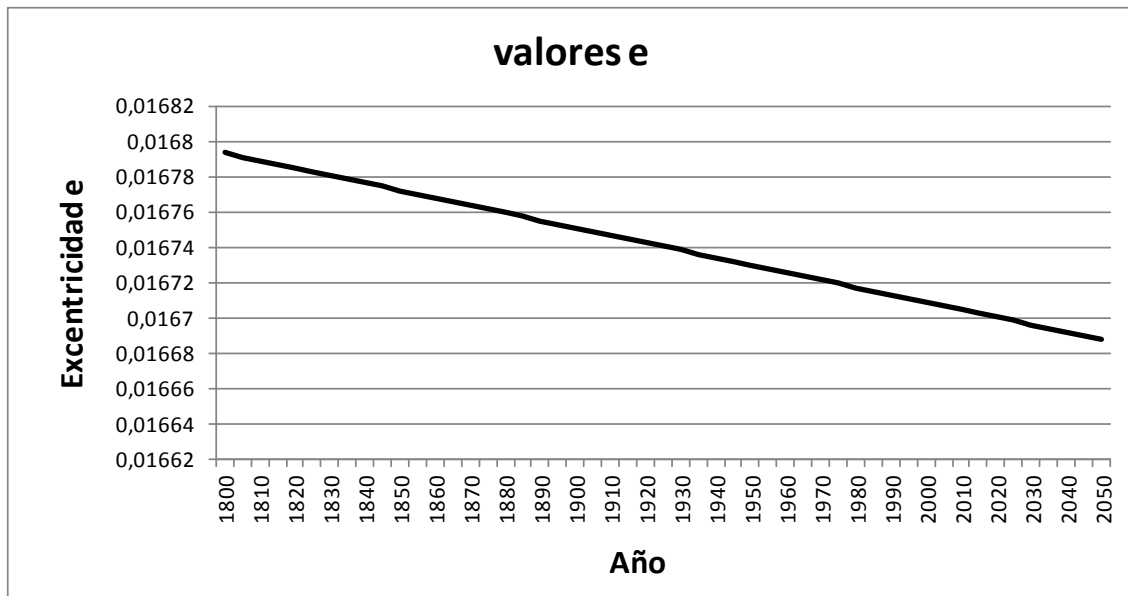
$$e = 0,0167086342 - 0,000042037T - 0,0000001267T^2,$$

con
$$T = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$$

Elegiremos una u otra expresión en función de la precisión deseada o de los decimales disponibles.

Podemos representar la variación de la excentricidad en el intervalo 1800 -2050 según la fig. 5-2. (Valores en la misma fecha cada 5 años, calculados mediante el MICA).

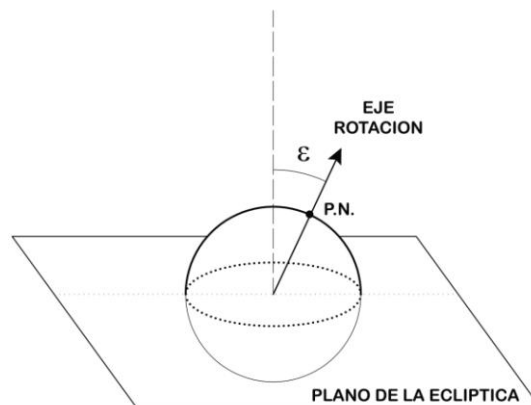
Una cuestión interesante es si la variación de la excentricidad conlleva o no una modificación de las dimensiones de ambos ejes de la elipse. Si analizamos el punto 5.8.3. de la mencionada publicación de Simon et al. [34], observaremos que para el eje mayor o distancia media al Sol en el caso de la Tierra se da el valor constante $a = 1,0000010178$. Consecuentemente, este valor no depende del tiempo, e igualmente ocurre en los casos de Mercurio y Venus. Para todos los planetas exteriores, sin embargo, el valor del eje mayor sí está en función de t .



5-2. Evolución de la excentricidad orbital con el tiempo.

5.2. OBLICUIDAD MEDIA DE LA ECLÍPTICA ϵ_0

Como sabemos, se conoce como *oblicuidad de la eclíptica*, oblicuidad del eje de la eclíptica o, simplemente, *oblicuidad*, al ángulo que forma el eje de rotación terrestre con la perpendicular al plano de la eclíptica. Se utiliza habitualmente ϵ para denominarlo. Este ángulo es variable (oscila entre un mínimo de $22^\circ,1$ y un máximo de $24^\circ,5$ en un período de unos 41.000 años), situándose actualmente próximo a $24^\circ,44$, y en disminución. El estudio de su evolución en el tiempo se realiza mediante la agregación de dos sumandos: el denominado como ϵ_0 , u *oblicuidad media*, y el conocido como $\Delta\epsilon$, o *nutación en oblicuidad*. En este apartado analizamos el primero de los términos, es decir, ϵ_0 , posponiendo la exposición del segundo término, de tipo periódico, hasta el estudio particular de la nutación en capítulos posteriores.



5-3. Oblicuidad de la eclíptica.

El valor de ϵ_0 presenta modificaciones a muy largo plazo, y de forma aproximada su variación puede modelizarse de acuerdo con la expresión:

$$\epsilon_0 = 23^{\circ}26'21,448'' - 46,8150''T - 0,00059''T^2 + 0,001813''T^3$$

referida a J2000, por lo que, como en otras expresiones anteriores, se tiene igualmente que:

$$T = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$$

Dicha expresión, utilizada por Meeus [9], fue publicada por Lieske et al.[54] en 1977 y se recoge en el informe [38] “1980 IAU Theory of nutation: the final report of the IAU”. Es utilizada por el U.S. Naval Observatory para la confección del MICA [33]³⁸. El término $23^{\circ}26'21,448''$ aparece como ϵ_{J2000} en el listado de constantes de la resolución [35] de la XVIth General Assembly de la IUA, celebrada en Grenoble (Francia) en 1.976.

La misma expresión es transformada para ser expresada en grados por J. Meeus (AA) como sigue:

$$\epsilon_0 = 23 + \frac{26}{60} + \frac{21,448'' - 46,8150''T - 0,00059''T^2 + 0,001813''T^3}{3600},$$

con el mismo valor T de la expresión anterior.

El algoritmo de cálculo de la oblicuidad media de la eclíptica adoptado por la IUA ha sido criticada por algunos autores debido a su imprecisión en períodos muy dilatados de tiempo a contar desde J2000 (antes y después de la fecha, y siempre considerando períodos de varios milenios³⁹). En este sentido, J. Laskar propuso [36] la expresión alternativa:

³⁸ El MICA [33] alude explícitamente a la expresión citada dentro del apartado Calculate/Compute Menu.

³⁹ Aunque pueda resultar sorprendente que el MICA se decante por la expresión de la oblicuidad de la Lieske en lugar de la de Laskar, debemos tener en cuenta el intervalo de validez de sus previsiones: (1800-2050), que a escala temporal cósmica es ciertamente mínimo.

$$\epsilon_0 = 23^{\circ}26'21,448'' - 4680'' + 93U - 1,55U^2 + 1999,25U^3 - 51,38U^4 - 249,67U^5 - 39,05U^6 + 7,12U^7 + 27,87U^8 + 5,79U^9 + 2,45U^{10}$$

Donde:

$$U = \frac{T}{100} = \frac{JD - 2451545,0}{3652500}$$

Todos los términos que contienen potencias de U se contabilizan en segundos de arco. Esta fórmula se utiliza hoy en día en cálculos que requieran una muy elevada precisión. Forma parte, por ejemplo, del procedimiento de la NREL, de I. Reda & alt. [37].

En la Tabla 5-1 puede observarse la comparación de coeficientes entre Laskar (1986), Lieske, (1977) y Bretagnon-Chapront (1981), presente en [36].

Tabla 5-1. Comparativa entre coeficientes de Laskar, Lieske y Bretagnon. Extraída de [36].

	NGT	L	BC
	$\epsilon_A (")$		
t	-4680.93	-4681.50	-4680.93
t^2	-1.55	-5.9	-1.5
t^3	1999.25	1813.	2001.
t^4	-51.38		
t^5	-249.67		
t^6	-39.05		
t^7	7.12		
t^8	27.87		
t^9	5.79		
t^{10}	2.45		

Siendo:

NGT: Numerical General Theory (Laskar)

L: Lieske & alt. 1977

BC: Bretagnon & Chapront 1981

6. EL ÁNGULO L : CUANTIFICACIÓN DE LA TRASLACIÓN TERRESTRE

Solem movet ac regit horas

Hasta ahora, en todas las expresiones geométricas deducidas aparece el ángulo L , que definíamos al principio como el ángulo de traslación girado por la Tierra desde el equinoccio de otoño. En lo que sigue, vamos a presentar una comparativa entre varios procedimientos para su cálculo, analizando los pros y contras de los mismos. Se trata de dotar al estudioso de una serie de procedimientos sencillos para el cálculo puntual de acimuts y elevaciones, o para la obtención de datos de forma masiva mediante la utilización de hojas de cálculo.

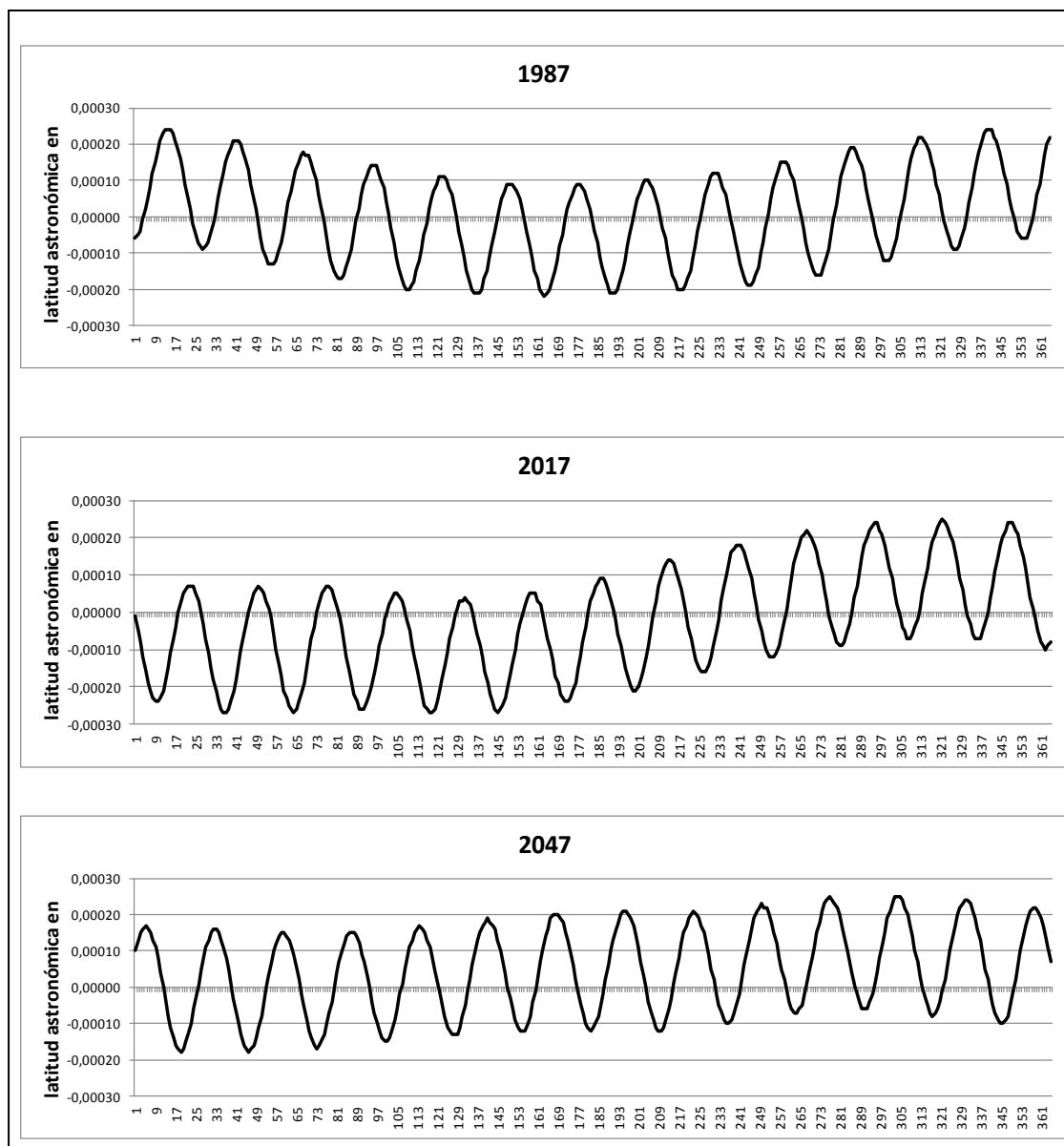
6.1. PROCEDIMIENTOS PARA EL CÁLCULO DE L . HIPÓTESIS DE ÓRBITA PLANA

Previamente a la enumeración de los procedimientos habituales de cálculo, pasaremos a describir la traslación terrestre y a proponer las simplificaciones oportunas para su tratamiento numérico. Algunos conceptos ya han sido anticipados en el cap. 1.

La órbita terrestre es casi plana. Johannes Kepler, en el s. XVII, estableció que la Tierra se movía alrededor del Sol describiendo una elipse, situándose aquel en uno de sus focos. La elipse está contenida idealmente, como sabemos, en un plano, conocido como *plano de la eclíptica*. En realidad, las perturbaciones a la trayectoria terrestre, que emanan de la atracción gravitatoria del resto de los planetas, en especial de los mayores, provocan pequeños alabeos en la elipse, haciendo que el recorrido sea realmente tridimensional. A efectos prácticos, no obstante, estas oscilaciones son tan pequeñas que salvo para cálculos de gran precisión, suelen despreciarse: J Meeus ([9], pág.164) estima que la *latitud solar* (ángulo formado por la línea que une los centros del Sol y la Tierra y su proyección sobre el plano medio de la eclíptica) es, como máximo, de 1,2 segundos de arco, es decir, $0,00033^\circ$. Al analizar, para la elaboración de la presente tesis, los valores correspondientes a la latitud eclíptica de la Tierra mediante el MICA [33] para el período 1950-2050, podemos verificar este extremo, toda vez que todos los errores en dicho período se encuentran comprendidos en el intervalo $(-0,00030, 0,00033)$ en grados sexagesimales.

En la fig. 6-1 se representan las gráficas correspondientes a las latitudes astronómicas de nuestro planeta para los años 1987, 2017 y 2047, a partir de los datos igualmente obtenidos del MICA [33].

Como queda indicado más arriba, los valores permanecen dentro del intervalo mencionado. Obsérvese el carácter variable de la función latitud en diferentes años, sin aparente periodicidad.



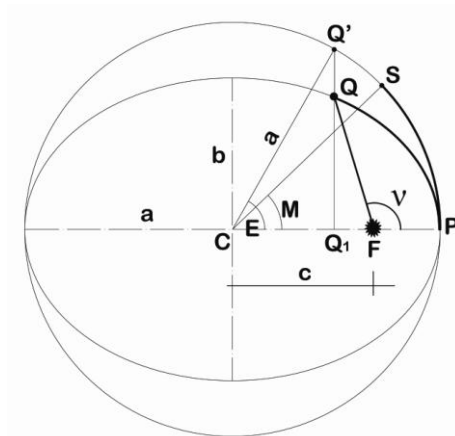
6-1. Variación de la latitud astronómica de la Tierra en los años completos 1987, 2017, 2047.

Por todo ello, en una primera aproximación consideraremos válida la presunción de órbita elíptica plana en nuestros cálculos.

6.2. EL SISTEMA CLÁSICO DE CÁLCULO MEDIANTE LA ECUACIÓN DE CENTRO

Como principal ventaja, este procedimiento permite familiarizarse con los términos angulares astronómicos básicos. Consiste en el método clásico por antonomasia para el cálculo del ángulo L , aunque actualmente, desde el punto de vista de la utilidad práctica, está totalmente superado. El paradigma de este tipo de cálculos es el presentado por Peter Duffett-Smith [10].

La consecuencia de la configuración elíptica plana de la órbita provoca que la traslación de la Tierra se verifique a diferentes velocidades en función de la distancia al Sol. Las características del movimiento elíptico plano se desarrollan en el apéndice II, así como las definiciones fundamentales para los ángulos utilizados en el proceso (anomalías) y el método clásico de obtención de los mismos. Igualmente, la ecuación de Kepler, de la que se presenta su proceso deductivo. A lo largo de este capítulo haremos continuamente alusión a estos conceptos y terminología, por lo que el apéndice mencionado será una referencia imprescindible como resumen de los conocimientos astronómicos mínimos indispensables.



6-2. Movimiento elíptico. Ángulos fundamentales

En la fig. 6-2 definimos los ángulos M , E y v , conocidos respectivamente como *anomalía media*, *anomalía excéntrica* y *anomalía verdadera*. En la literatura especializada en lengua anglosajona se sustituye a veces v por T (*true*). Estos ángulos se miden siempre desde el perihelio P , como se ve en la fig. 6-2. Las *longitudes angulares*, sin embargo, van referidas habitualmente al equinoccio vernal⁴⁰, y siempre a un instante

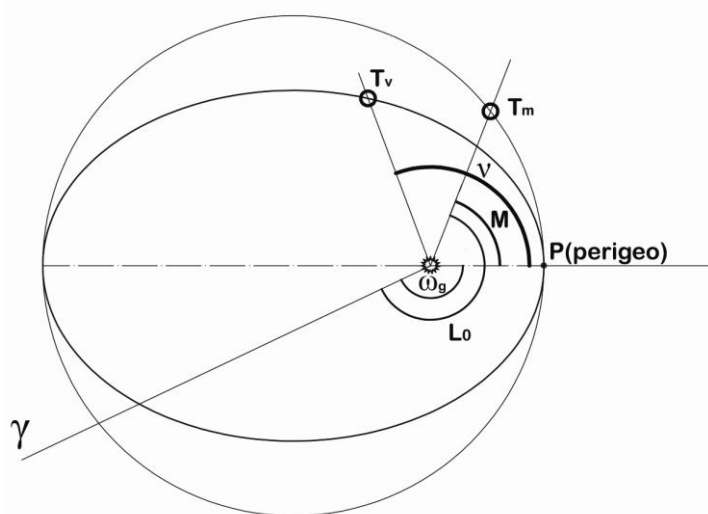
⁴⁰ Tanto en español como en inglés, la diferenciación entre magnitudes angulares es muy sencilla, aunque resulten chocantes los términos: así, las anomalías van referidas al perihelio y las longitudes al punto vernal; sin embargo, las anomalías no son tales en el sentido estricto de la palabra (son ángulos) y

determinado o *época*. En almanaques, es habitual referir estos ángulos a una fecha concreta, por ejemplo a JD2000.0; en aplicaciones informáticas, a menudo es posible obtenerlas para cada instante. Si, por ejemplo, queremos obtener los datos astronómicos para el 05/01/1977, el abundante *software* existente nos suele permitir conocer la longitud referida a la posición teórica del punto Aries en dicha fecha (equinoccio de la fecha, o *equinox of date*) o a la que tenía en JD2000.0⁴¹ (equinoccio de la época – en este caso, JD2000.0).

Cuando hablamos de magnitudes medias (anomalías o longitudes), estas van referidas siempre a la trayectoria ficticia del planeta considerado (en nuestro caso, la Tierra), girando a velocidad constante sobre la circunferencia circunscrita a la órbita elíptica, de tal forma que su período de revolución es el mismo para el movimiento real y el ficticio.

La *longitud media* L_0 de la Tierra⁴² y la *longitud del perigeo* ω_g se miden, en un instante determinado o época g , con respecto al punto Aries de la fecha considerada.

En una época determinada, la “fotografía” de la órbita en ese instante g se representaría de acuerdo con la fig. 6-3. En ella se ha representado como T_v la situación real de la Tierra en su órbita, y como T_m la situación media imaginaria de la Tierra en la órbita circular ficticia que circunscribe a la elipse orbital y que tiene el mismo período de revolución que esta.



6-3. Relación entre anomalías y longitudes.

las longitudes tampoco lo son en el sentido habitual del término (son también ángulos, como se ha indicado).

⁴¹ Recordemos la precesión de los equinoccios.

⁴² Utilizaremos L_0 para referirnos a la longitud media, aunque tradicionalmente también es habitual utilizar ε_g para este ángulo.

Como vemos, se verifica la igualdad:

$$M = L_0 - \varpi_g \quad .$$

La longitud verdadera del planeta se suele denominar L .

Por ello,

$$L = \varpi_g + v$$

Y también, como veíamos anteriormente,

$$L_0 = \varpi_g + M$$

La *ecuación de centro* se define como la diferencia angular entre la anomalía verdadera y la media, o lo que es lo mismo, la diferencia entre la longitud verdadera y la media, es decir:

$$C = v - M = L - L_0$$

Nuestro problema consistirá invariablemente en hallar la longitud real (L) del Sol con respecto al equinoccio, y el valor de v para cualquier fecha pretérita o futura.

6.2.1. PROCEDIMIENTO PROPUESTO POR DUFFETT-SMITH. ANÁLISIS CRÍTICO

Peter Duffett-Smith propone un procedimiento en diferentes ediciones de su obra más conocida ([10], [29], [11]).

Básicamente, se trata de partir de una época determinada cuyos datos conocemos, por ejemplo, a partir de un anuario, y de calcular aproximadamente el ángulo girado hasta la fecha determinada, contando el número de días transcurridos y hallando el ángulo medio girado por proporción respecto a la duración del año trópico. Por tanto, al cabo de un número de días desde la época conocida g , se tendría:

$$M = \frac{360}{365,242191} \cdot (n^\circ \text{ de días transcurridos desde la época } g) + L_0 - \varpi_g \quad (\text{Ec. 6.1})$$

A partir de aquí se calcula v , bien a partir de la *ecuación de centro* (a la que nos referiremos a continuación), de forma aproximada, o mediante métodos numéricos por aplicación directa de la ecuación de Kepler (ver apéndice II).

El método seguido por Duffett-Smith adolece de falta de precisión para instantes muy alejados de la época. Tengamos en cuenta el movimiento del eje de ápsides: en un

instante posterior a la época, el ángulo entre el punto Aries y el perigeo será diferente del correspondiente al instante de la época. Esta simplificación, además, puede llevar al estudioso a importantes errores de concepto.

Es significativo que Duffett-Smith, a partir de la publicación de [29], presenta un grupo de ecuaciones para el cálculo de L_0 , ϖ_g y e (excentricidad de la órbita) a fin de poder “crear” épocas de observación y a partir de aquí desarrolla el proceso.

Las ecuaciones son las siguientes⁴³:

$$L_0 = 279,6966778 + 36000,76892T + 0,0003025T^2$$

$$\varpi_g = 281,2208444 + 1,719175T + 0,000452778T^2$$

$$e = 0,01675104 - 0,0000418T - 0,000000126T^2$$

$$T = \frac{(JD - 2415020,0)}{36525} ,$$

siendo la fecha de partida, a diferencia de las utilizadas en otras partes de esta tesis, el 31/12/1899 a las 12:00, es decir, 1900January0.5, o sea, JD2415020.0, como queda indicado más arriba.

En este caso, y partiendo de las fórmulas anteriores, ¿por qué no utilizar como época el propio instante para el que se desea conocer la longitud? Resulta sorprendente que Duffett-Smith utilice las fórmulas solo para crear épocas arbitrarias a las que referir cálculos aproximados, cuando se pueden obtener de forma inmediata los parámetros buscados con las propias fórmulas por él presentadas. Este será el procedimiento que seguiremos en nuestros ejemplos prácticos en esta sección.

Una vez conocido M a partir de $M = L_0 - \varpi_g$, optaremos por:

- a) Utilizar la ecuación de centro C para el cálculo aproximado de v , o bien,
- b) Calcular E a partir de la ecuación de Kepler

$$M = E - e \sin E$$

por procedimientos numéricos, para después obtener v mediante (ver apéndice II):

⁴³ La ecuación para el cálculo de L_0 aparece en el cap. 4 de la obra de Oliver Montenbruck [55], donde se recoge dentro del contexto del resumen de la Theory of the solar motion, de Newcomb. En concreto, la obra de Newcomb en la que se incluye dicha teoría es [56]. L_0 se denomina en esta obra ϵ_g .

$$\nu = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) \right] ,$$

teniendo en cuenta que los resultados de esta función recíproca deben corregirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nu &= 2 \cdot \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) \right] & \text{si} & \quad \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) \right] > 0 \\ \nu &= 2 \cdot \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) \right] + 360^\circ & \text{si} & \quad \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) \right] < 0 \end{aligned}$$

Los valores de e pueden obtenerse de los capítulos anteriores, o aplicando la fórmula recogida más arriba para la época, junto a las de L_0 y ϖ_g .

Una vez obtenido ν , bastará con tener en cuenta que la longitud verdadera del Sol, L , será:

$$L = \nu + \varpi_g$$

O bien, en nuestro *sistema heliocéntrico*:

$$L = \nu + \varpi_g + 180^\circ$$

Como veíamos, la ecuación de centro, conocida como C o como E_c , es la diferencia entre la anomalía verdadera y la media⁴⁴:

$$C = \nu - M$$

Por lo que:

$$L = \nu + \varpi_g = \nu + L_0 - M = \varepsilon_g + C$$

En resumen:

$$\nu = C + M$$

$$L = C + L_0$$

⁴⁴ En su obra [57], cap.(1.7.3), M.Capderou nos recuerda el concepto de ecuación utilizada por Kepler en este sentido, como "la cantidad variable, determinada mediante cálculos, que debe ser añadida o sustraída del movimiento medio para obtener el movimiento real".

En nuestro sistema heliocéntrico, dado el desfase entre el equinoccio de primavera y el de otoño, tendremos:

$$L = C + L_0 + 180^\circ$$

El valor de la anomalía verdadera no tendrá que ser corregido, pues su ángulo se mide desde el eje de ápsides, independientemente del equinoccio tomado.

Cuando la longitud media se considera en un instante diferente a la época, se utilizaría L_0 ; como hemos indicado anteriormente, no será nuestro caso.

En cuanto a las formas que puede adoptar la ecuación de centro, son muy diversas en función de la precisión que se desee. Realmente, el concepto de ecuación de centro equivale en Astronomía a “método aproximado” de resolución.

Duffett-Smith [10] propone, por ejemplo, las siguiente fórmula, válida para planetas de baja excentricidad, entre los que se encuentra, lógicamente, la Tierra en la actualidad:

$$C = \frac{360^\circ}{\pi} \cdot e \sin M ,$$

con lo que:

$$v = M + \frac{360^\circ}{\pi} \cdot e \sin M$$

En lo que respecta a la opción del cálculo directo de E mediante métodos numéricos, que constituye el segundo procedimiento de cálculo, la ecuación

$$M = E - e \sin E$$

puede reescribirse para el cálculo iterativo como:

$$E = M + e \sin E .$$

A tal efecto, bastará con tomar como término de partida del cálculo

$$E_0 = M$$

y a continuación:

$$E_i = M + e \sin E_{i-1} \quad ,$$

hasta que la diferencia entre E_i y E_{i-1} sea menor que el valor que hayamos prefijado para la precisión deseada.

Se trata de una función que converge muy rápidamente. Para un cálculo masivo de elementos mediante hoja de cálculo, el proceso puede obtenerse dejando la celda donde esté definida E en función de si misma, habiendo previamente habilitado en la hoja el cálculo iterativo. En Excel© 2007, por ejemplo, se consigue mediante el menú:

Botón Office > Opciones de Excel > fórmulas > habilitar cálculo iterativo.

Llegados a este punto, pueden elegirse el número de iteraciones y la diferencia numérica máxima deseada entre iteraciones consecutivas.

Un programa sencillo en BASIC para el mismo fin, susceptible de ser utilizado incluso en calculadoras programables sería el siguiente:

```

10 INPUT "excentricidad"; E, "error max";K
20 INPUT "M";M. Q=M/180*PI
30 S=Q+E*SINM
40 S=Q+E*SIN(S*180/PI) : A=S*180/PI
50 S=Q+E*SIN(S*180/PI)
60 IF ABS(S*180/PI-A)>K THEN GOTO 40
70 PRINT "E="; S*180/PI
100 END

```

Se supone la calculadora operando en modo grados; recordemos que la ecuación de Kepler está formulada para operaciones en radianes. Los datos se introducirían también en grados. Igualmente, el error máximo se indicará en fracciones de grado en este programa.

Se trata de una versión muy sencilla de BASIC que, como vemos, puede adaptarse fácilmente a cualquier otro lenguaje de programación.

Ejemplo práctico:

Se desea obtener L para $JD = 2464524,25$ (fecha que corresponde al 15/07/2035 a las 18:00 Greenwich).

Partimos de:

$$L_0 = 279,6966778 + 36000,76892T + 0,0003025T^2$$

$$\varpi_g = 281,2208444 + 1,719175T + 0,000452778T^2$$

$$e = 0,01675104 - 0,0000418T - 0,000000126T^2$$

$$T = \frac{(JD - 2415020,0)}{36525} ,$$

con lo que :

$$T = 1,355352498$$

$$L_0 = 49073,42933 = 113,4293295$$

$$\varpi_g = 283,5517643 = 283,5517643$$

$$e = 0,016694155 .$$

El valor M lo obtenemos, al haber considerado fecha = época , de:

$$M = L_0 - \varpi_g = -170,122435 = 189,877565$$

a) Por aplicación de la *ecuación de centro* indicada en [10]:

$$C = \frac{360^\circ}{\pi} \cdot e \sin M = -0,328164026$$

Tendremos, operando en radianes:

$$\nu = C + M = 189,5494012$$

Y, finalmente, en *heliocéntrico*:

$$L = C + L_0 + 180^\circ = -0,328164026 + 113,4293295 + 180 = 293^\circ,10116$$

b) Por aplicación de la ecuación de Kepler:

$$E = M + e \sin E$$

Partiremos de:

$$E_0 = M = 189,877565$$

y mediante el proceso iterativo antes indicado:

e	0,01669415	RAD
E0	189,877565	3,313988689
		3,311124918
		3,311172029
		3,311171254
		3,311171267
		3,311171267
		3,311171267
E=		3,311171267 189,716139

A continuación, aplicando

$$v = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) \right] = -170,4439813$$

como el valor del arctan es < 0 , sumamos 360° , con lo que:

$$v = 189,556019$$

Y, finalmente, en *heliocéntrico*:

$$L = v_g + \varpi_g + 180^\circ = 189,556019 + 283,5517643 + 180 = 653.1077833 = 293^\circ,1077833$$

Cifras aproximadas a las anteriores, que compararemos con las obtenidas más adelante mediante diferentes procedimientos.

Por ejemplo, la aplicación simplificada de la NOAA [20]⁴⁵ nos da para el mismo instante los valores

$$v = 189,5598781 \quad L = 113,1083286$$

en hipótesis geocéntrica. En nuestro caso,

$$v = 189,5598781 \quad L = 293,1083286$$

Valores muy similares a los obtenidos con el segundo procedimiento.

6.2.2. VENTAJAS DEL SISTEMA PROPUESTO FRENTE A LA RESOLUCIÓN CLÁSICA DE DUFFETT-SMITH

Ya se ha visto lo innecesario de definir épocas diferentes de las del instante-problema al contar con las ecuaciones anteriores, y de la falta de exactitud del método inicial de Duffett-Smith a largas distancias en el tiempo desde dichas épocas. Hay otro factor que resulta llamativo en dicho método aproximado, y es el hecho de que hemos indicado que en el denominador de (Ec. 6.1) debe figurar el período del año trópico, que se toma en [10] como 365,242191 .

Ahora, fijémonos en los valores en días del año trópico según diferentes ediciones del *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid*: [15] ,[16],[17].

año	duración en días
1999	365,242190
2012	365,242189
2013	365,242189

Entre años consecutivos, la diferencia es apenas perceptible, pero en períodos de tiempo superiores a 10 años podemos ya observar una desviación, bien que mínima. Esta variación de la duración del año trópico a lo largo de los años puede ser fuente de errores cuando se realizan cálculos muy alejados en el tiempo de la época de referencia. Desde el punto de vista metodológico, no es muy plausible utilizar un valor constante para los cálculos cuando se trata de una magnitud variable, aunque su alteración temporal sea inapreciable.

⁴⁵ *La aplicación citada es solamente una aproximación, suficientemente precisa para cálculos dirigidos al gran público, pero en absoluto comparables a los obtenidos a través de almanaques.*

En otro orden de cosas, la solución aproximada a la ecuación de Kepler mediante una ecuación de centro extremadamente sencilla resultó interesante en una época en la que el uso de ordenadores personales o calculadoras programables aún no era generalizado. Esta solución ha quedado desfasada, no solamente debido la presencia universal del *hardware* citado, sino a la aparición de métodos de cálculo nuevos que incluyen la influencia de perturbaciones externas sobre la órbita terrestre.

6.2.3. EXPRESIONES APROXIMADAS PARA LA ECUACIÓN DE CENTRO

Habitualmente, cuando un método de cálculo astronómico propone el término “ecuación de centro” nos encontramos ante la sustitución de la ecuación de Kepler por una función aproximada de la misma. Como hemos visto, una posible ecuación de centro es la aproximación

$$C = \frac{360^\circ}{\pi} \cdot e \sin M$$

utilizada en el caso práctico anterior. Pero hay otras.

El propio J. Meeus [9] presenta métodos alternativos de cálculo, como el de la ecuación de centro simplificada para bajas excentricidades (es nuestro caso), en forma de desarrollos en serie de potencias de e dentro del análisis del movimiento elíptico de cuerpos celestes (cap. 33, op. cit.).

A modo orientativo, y para pequeñas excentricidades (caso de la Tierra):

$$C = \left(2e - \frac{e^3}{4} + \frac{5}{96}e^5 \right) \sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 \right) \sin 2M + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 \right) \sin 3M + \\ + \frac{103}{96}e^4 \sin 4M + \frac{1097}{960}e^5 \sin 5M + \dots$$

(Datos en radianes).

En el ejemplo práctico anterior tendríamos, para JD = 2464524,25, es decir, con $e = 0,016694155$ y $M = 189,877565$, considerando los cinco primeros términos y transformado en grados:

$$C = -0,321546558$$

El valor que obteníamos anteriormente con la ecuación simplificada era

$$C = -0,328164026$$

Al cálculo numérico por iteraciones le correspondería:

$$C = \nu - M = 189,556019 - 189,877565 = -0,321546$$

Por su parte, Orús ([6], cap. 3.7.) propone el cálculo directo de E , basado igualmente en desarrollos en serie similares a los anteriores, y que no analizamos numéricamente:

$$E = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \cdot \sin 2M + \frac{e^3}{8} (3 \sin M - \sin 3M) + \dots$$

6.3. MÉTODOS POLINÓMICOS DIRECTOS DE CÁLCULO

El método expuesto anteriormente se basaba en el clásico procedimiento de cálculo mediante la ecuación de Kepler o ecuación de centro aproximada. Sin embargo, hemos visto que, en caso de no conocer los datos de partida ω_g y L_0 de una época arbitraria, podíamos obtenerlos de unas fórmulas polinómicas aproximadas que tomábamos de [11].

Pues bien, en la práctica se utilizan métodos polinómicos para el cálculo directo de M y L , y está admitido que con ellos se obtienen mayores precisiones. Estos polinomios, cuyo conocimiento en el mundo de la Astronomía es universal, deben su popularidad al hecho de haber sido divulgados por J. Meeus a través de [9], pero tienen su origen en un método mucho más complejo y completo, concretamente el VSOP82⁴⁶ y sus diferentes actualizaciones (VSOP87, etc.)⁴⁷, sobre los que ampliaremos información más adelante. De hecho, las expresiones que veremos en este punto suponen un truncamiento de las interminables series procedentes del VSOP, para mantenerse dentro de unas precisiones de la centésima de grado en las determinaciones angulares.

La utilización de polinomios para la determinación de L en órbita plana por parte de Meeus supone una simplificación con respecto al sistema original, previsto, como veremos, para el cálculo de órbitas con componentes tridimensionales.

6.3.1. MÉTODO DE CÁLCULO POLINÓMICO MEDIANTE LA ECUACIÓN DE CENTRO

Comenzaremos por el cálculo de la longitud media L_0 y la anomalía media. Meeus [9] propone, en sistema geocéntrico:

⁴⁶ VSOP: acrónimo de Variations Séculaires des Orbites Planétaires. El hecho de haber sido desarrollado por científicos franceses plantea el curioso interrogante acerca de si existe alguna deliberada relación humorística entre el término y su homónimo VSOP referido a la calidad de los brandys franceses de reserva (entre 4,5 y 6 años), donde el acrónimo significaría "very superior old pale".

⁴⁷ Como se ha anticipado anteriormente, estos potentes sistemas de cálculo tienen en cuenta las perturbaciones orbitales debidas a la influencia gravitatoria de planetas mayores, de la propia Luna, etc.

$$L_0 = 280^\circ,46646 + 36000^\circ,76983T + 0^\circ,0003032T^2$$

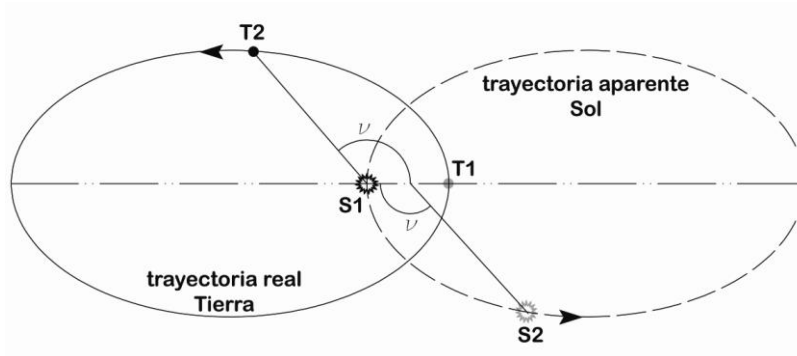
Que podemos reescribir en sistema heliocéntrico como:

$$L_0 = 100^\circ,46646 + 36000^\circ,76983T + 0^\circ,0003032T^2$$

La anomalía Media M viene igualmente dada por:

$$M = 357^\circ,52911 + 35999^\circ,05029T + 0^\circ,0001537T^2$$

La expresión anterior está referida tanto a la posición del Sol con respecto a la Tierra como a la inversa, ya que se trata del ángulo medido desde el perihelio. Así pues, no es necesario hacer corrección alguna. Se puede observar más claramente con la siguiente fig. 6-4, que se ha enunciado de forma similar anteriormente.



6-4. Desfase de 180° entre la órbita real terrestre y la aparente del Sol.

Como vemos, el ángulo ν y, consecuentemente los ángulos M y E de la fig. 6-4 son independientes de que el sistema sea geocéntrico o heliocéntrico a efectos de nuestros cálculos.

Igualmente necesitamos la excentricidad, para la que podemos utilizar asimismo la fórmula simplificada (ver cap. 5.):

$$e = 0,0167086342 - 0,000042037T - 0,0000001267T^2$$

Y la ecuación de Kepler queda sustituida por la ecuación de centro recogida por Meeus [9]:

$$C = (1,914602 - 0,004817T - 0,000014T^2) \sin M + (0,019993 - 0,00010IT) \sin 2M + 0,000289 \sin 3M$$

Siendo, como anteriormente, y denominando L_0 = longitud media de la Tierra⁴⁸,

$$L = \text{Longitud verdadera} = L_0 + C$$

$$v = \text{Anomalía verdadera} = M + C$$

(Esta última relación, escrita como $C = v - M$ será de gran utilidad en capítulos posteriores para el cálculo de la *ecuación del tiempo*).

En todos los casos anteriores, tenemos que:

$$T = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$$

Como vemos, la longitud verdadera puede ser obtenida sin necesidad del cálculo de v ; no obstante, como vemos en el apéndice II, es imprescindible para el cálculo de ρ la distancia de la Tierra al Sol o radio vector.

Por ello, este procedimiento está especialmente indicado para operaciones masivas a través de hojas de cálculo.

⁴⁸ En los casos anteriores, hemos denominado a esta magnitud ϵ_g por tratarse de una longitud media referida a una época.

Ejemplo práctico:

Como en el caso anterior, sea $JD = 2464524,25$ (fecha que corresponde al 15/07/2035 a las 18:00 Greenwich).

De acuerdo con las expresiones anteriores, directamente:

$$T = \frac{JD - 2451545,0}{36525} = 0,3553524982888430.$$

Sustituyendo JD y T en las ecuaciones anteriores, tendremos:

$$e = 0,01669368$$

$$L_0 = 12893,43 = 293,4299977$$

$$M = 13149,88159 = 189,881586$$

$$C = -0,321670349$$

Y teniendo en cuenta:

$$L = L_0 + C$$

$$v = M + C,$$

tendremos finalmente que:

$$L = 293^\circ,1083273$$

$$v = 189^\circ,5599156 .$$

6.3.2. MÉTODO DE CÁLCULO POLINÓMICO COMBINADO CON LA ECUACIÓN DE KEPLER

Desarrollamos este procedimiento a través de un ejemplo práctico y a efectos meramente comparativos, ya que la expresión polinómica del punto anterior para la ecuación de centro resulta suficientemente precisa. En este caso, vamos a utilizar directamente la ecuación de Kepler, resolviéndola por iteraciones.

Ejemplo práctico:

Como en el caso anterior, sea $JD = 2464524,25$ (fecha que corresponde al 15/07/2035 a las 18:00 Greenwich).

De acuerdo con las expresiones anteriores, directamente:

$$L_0 = 280^\circ,46646 + 36000^\circ,76983T + 0^\circ,0003032T^2,$$

que podemos reescribir en sistema heliocéntrico como:

$$\begin{aligned} L_0 &= 100^\circ,46646 + 36000^\circ,76983T + 0^\circ,0003032T^2 \\ M &= 357^\circ,52911 + 35999^\circ,05029T + 0^\circ,0001537T^2 \\ e &= 0,0167086342 - 0,000042037T - 0,0000001267T^2. \end{aligned}$$

Todo ello con:

$$T = \frac{JD - 2451545,0}{36525} = 0,3553524982888430$$

Sustituyendo $JD = 2464524,25$, tendremos:

$$\begin{aligned} e &= 0,01669368 \\ L_0 &= 12893,43 = 293,4299977 \\ M &= 13149,88159 = 189,881586 \end{aligned}$$

Ahora procedemos a resolver la ecuación de Kepler:

Por el procedimiento iterativo anterior, y tomando nuevamente $E_0 = M$, y con el valor $e = 0,01669368$, entonces:

	RAD		
13149,8816	229,5087299		
	229,5058651		
	229,5059122		
	229,5059114		
	229,5059114		
	229,5059114		
E=	229,5059114	13149,7201	189,720099

Y así, $E = 3,311240384 \text{ rad} = 189^\circ,720099$.

A continuación, aplicamos

$$v = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) \right]$$

Es decir, $v = -170,4400813$, que, al ser <0 deberán añadirsele 360° , por lo que:

$$v = 189,5599187$$

Este procedimiento adolece de haber prescindido de la ecuación de centro, por lo que el cálculo final de L debería realizarse a través de ω_g .

Para ello, deberíamos auxiliarnos de la ecuación ya conocida:

$$\omega_g = 281,2208444 + 1,719175T + 0,000452778T^2$$

$$T = \frac{(JD - 2415020,0)}{36525}$$

Que nos daría:

$$\omega_g = 283,5517643,$$

y, finalmente:

$$L = \nu + \varpi g + 180^\circ .$$

Es decir,

$$L = 653,111683 = 293,111683$$

Valores en consonancia con los anteriores, pero que se han obtenido por este procedimiento a efectos meramente teóricos, para comparar métodos de trabajo con fuentes diversas.

Tengamos en cuenta que en este supuesto hemos eliminado una ecuación polinómica, pero la hemos sustituido por otra de similar complejidad y referida a un origen temporal diferente, habiendo añadido un proceso iterativo y una función trigonométrica recíproca.

6.4. EL MÉTODO VSOP

El cálculo de la longitud angular orbital de la Tierra con precisiones elevadas⁴⁹ puede realizarse muy fácilmente mediante la aplicación de una versión resumida de las series contenidas en el método VSOP, desarrollado para analizar las órbitas de los planetas en detalle y que tiene en cuenta las perturbaciones debidas a las interacciones gravitacionales entre los mismos. Fue desarrollado inicialmente por científicos del Bureau des Longitudes de París, y es renovado continuamente. La primera publicación acerca del VSOP82, por Pierre Bretagnon [58], data de 1982. Posteriormente, apareció el VSOP87, con importantes mejoras en la precisión del método [59]. Ha habido modificaciones posteriores que suponen actualizaciones del mismo, siendo la última la VSOP2013 [60]. Sin embargo, de todas las actualizaciones, la que ha conseguido mayor popularidad por la utilización simplificada de la misma para todo tipo de aplicaciones a través de hojas de cálculo y *on-line* ha sido, con gran diferencia, la VSOP87. Este éxito se ha debido, sin duda, a haber sido adaptada por Jean Meeus en [9] para el público en general mediante su resumen en tablas con un número significativo de términos fácilmente manejables. Incluso el propio Meeus, basándose en esas tablas, propuso, en la obra citada, las expresiones polinómicas simplificadas que hemos utilizado en el punto anterior, y que desde su publicación han sido utilizadas universalmente para el desarrollo de infinidad de aplicaciones, muchas de ellas *on-line*.

De hecho, esta versión del VSOP87 es la que se va a utilizar para diferentes análisis y capítulos de esta tesis. Cualquier otra posterior que llegue a consolidarse para uso general se integraría sin problemas en este método, sin más que sustituir las tablas o añadir los términos que pudieran llegar a publicarse.

Los valores obtenidos de L en el VSOP se corresponden con un modelo heliocéntrico⁵⁰, por lo que no debemos realizar ninguna corrección a los mismos en cuanto al origen de ángulos.

Esencialmente, el procedimiento consiste en calcular directamente la longitud L orbital mediante un polinomio (coeficientes en radianes). La siguiente formulación corresponde a Reda & alt. [37], que consideramos más intuitiva que la presentación de Meeus en [9].

Con el método descrito, y con la ayuda de las tablas correspondientes, que se incluyen, tendremos, de acuerdo con Reda & alt.[37], que:

⁴⁹ Suficientes, según Reda et alt. [37], para conseguir a su vez precisiones en la determinación del acimut y la altura solares del orden de $\pm 0.0003^{\circ}$.

⁵⁰ Que, posteriormente, Meeus adapta al habitual modelo geocéntrico. Paradójicamente, nosotros volvemos a adoptar las expresiones simplificadas geocéntricas de Meeus al modelo heliocéntrico, como ya hemos visto, cuando el método VSOP nos proporciona directamente expresiones válidas para ser utilizadas en nuestro sistema.

$$L = \frac{L0 + L1 \cdot JME + L2 \cdot JME^2 + L3 \cdot JME^3 + L4 \cdot JME^4 + L5 \cdot JME^5}{10^8}$$

donde :

$$JME = \frac{JDE - 2451545,0}{365250},$$

siendo :

$$JDE = JD + \frac{\Delta T}{86400}$$

y ΔT el valor definido en el cap.4, que puede obtenerse por cualquiera de los medios propuestos⁵¹.

Los valores $L0$, $L1$, $L2$, $L3$, $L4$ y $L5$ se obtienen en radianes de acuerdo con la expresión

$$\begin{aligned} L0 &= \sum_{i=0}^n L0_i & L1 &= \sum_{i=0}^n L1_i & L2 &= \sum_{i=0}^n L2_i \\ L3 &= \sum_{i=0}^n L3_i & L4 &= \sum_{i=0}^n L4_i & L5 &= \sum_{i=0}^n L5_i \end{aligned}$$

a través de la Tabla 6-1 y continuaciones (Tabla 6-2, Tabla 6-3, Tabla 6-4) adjuntas. Las mismas se han de obtenido J. Meeus [9] y de Reda [37]. En cada caso, los valores de i varían entre 0 y el índice máximo correspondiente al término en la tabla. Por ejemplo, en el caso de $L0$, i varía entre 0 y 63, $L1$ entre 0 y 33, y así sucesivamente.

⁵¹ Como veíamos en el cap. 4, los valores de ΔT para predicciones futuras o en períodos pretéritos sin registros reales son especulativos. En ese sentido, los resultados de los cálculos predictivos masivos deben tomarse con cautela.

Tabla 6-1. Elementos periódicos de la órbita terrestre (I).
 Transcripción de Reda et al. "Solar Position Algorithm". Solar Energy © Elsevier Ltd
 2004. [37]

Términos periódicos órbita terrestre				
Término	índice	A	B	C
L0	0	175347046	0	0
	1	3341656	4,6692568	6283,07585
	2	34894	4,6261	12566,1517
	3	3497	2,7441	5753,3849
	4	3418	2,8289	3,5231
	5	3136	3,6277	77713,7715
	6	2676	4,4181	7860,4194
	7	2343	6,1352	3930,2097
	8	1324	0,7425	11506,7698
	9	1273	2,0371	529,6910
	10	1199	1,1096	1577,3435
	11	990	5,233	5884,927
	12	902	2,045	26,298
	13	857	3,508	398,149
	14	780	1,179	5223,694
	15	753	2,533	5507,553
	16	505	4,583	18849,228
	17	492	4,205	775,523
	18	357	2,920	0,067
	19	317	5,849	11790,629
	20	284	1,899	796,298
	21	271	0,315	10977,079
	22	243	0,345	5486,778
	23	206	4,806	2544,314
	24	205	1,869	5573,143
	25	202	2,458	6069,777
	26	156	0,833	213,299
	27	132	3,411	2942,463
	28	126	1,083	20,775
	29	115	0,645	0,980
	30	103	0,636	4694,003
	31	102	0,976	15720,839
	32	102	4,267	7,114
	33	99	6,21	2146,17
	34	98	0,68	155,42
	35	86	5,98	161000,69
	36	85	1,30	6275,96
	37	85	3,67	71430,70
	38	80	1,81	17260,15
	39	79	3,04	12036,46
	40	75	1,76	5088,63
	41	74	3,50	3154,69
	42	74	4,68	801,82
	43	70	0,83	9437,76
	44	62	3,98	8827,39
	45	61	1,82	7084,90
	46	57	2,78	6286,60
	47	56	4,39	14143,50
	48	56	3,47	6279,55
	49	52	0,19	12139,55
	50	52	1,33	1748,02

Tabla 6-2. Elementos periódicos de la órbita terrestre (II).
 Transcripción de Reda et al. . "Solar Position Algorithm". Solar Energy © Elsevier Ltd
 2004. [37]

Términos periódicos órbita terrestre				
Término	índice	A	B	C
	51	51	0,28	5856,48
	52	49	0,49	1194,45
	53	41	5,37	8429,24
	54	41	2,40	19651,05
	55	39	6,17	10447,39
	56	37	6,04	10213,29
	57	37	2,57	1059,38
	58	36	1,71	2352,87
	59	36	1,78	6812,77
	60	33	0,59	17789,85
	61	30	0,44	83996,85
	62	30	2,74	1349,87
	63	25	3,16	4690,48
L1	0	628331966747	0	0
	1	206059	2,678235	6283,07585
	2	4303	2,6351	12566,1517
	3	425	1,59	3,523
	4	119	5,80	26298,000
	5	109	2,97	1577,344
	6	93	2,59	18849,23
	7	72	1,14	529,69
	8	68	1,87	398,15
	9	67	4,41	5507,55
	10	59	2,89	5223,69
	11	56	2,17	155,42
	12	45	0,40	796,30
	13	36	0,47	775,52
	14	29	2,65	7,11
	15	21	5,34	0,98
	16	19	1,85	5486,78
	17	19	4,97	213,30
	18	17	2,99	6275,96
	19	16	0,03	2544,31
	20	16	1,43	2146,17
	21	15	1,21	10977,08
	22	12	2,83	1748,02
	23	12	3,26	5088,63
	24	12	5,27	1194,45
	25	12	2,08	4694,00
	26	11	0,77	553,57
	27	10	1,30	6286,60
	28	10	4,24	1349,87
	29	9	2,70	242,73
	30	9	5,64	951,72
	31	8	5,30	2352,87
	32	6	2,65	9437,76
	33	6	4,67	4690,48
L2	0	52919	0	0
	1	8720	1,0721	6283,0758
	2	309	0,867	12566,152
	3	27	0,05	3,52

Tabla 6-3. Elementos periódicos de la órbita terrestre (III).
 Transcripción de Reda et al. ."Solar Position Algorithm". Solar Energy © Elsevier Ltd
 2004. [37]

Términos periódicos órbita terrestre				
Término	índice	A	B	C
	4	16	5,19	26,30
	5	16	3,68	155,42
	6	10	0,76	18849,23
	7	9	2,06	77713,77
	8	7	0,83	775,52
	9	5	4,66	1577,34
	10	4	1,03	7,11
	11	4	3,44	5573,14
	12	3	5,14	796,30
	13	3	6,05	5507,55
	14	3	1,19	242,73
	15	3	6,12	529,69
	16	3	0,31	398,15
	17	3	2,28	553,57
	18	2	4,38	5223,69
	19	2	3,75	0,98
L3	0	289	6	6283,076
	1	35	0	0,00
	2	17	5,49	12566,15
	3	3	5,20	155,42
	4	1	4,72	3,52
	5	1	5,30	18849,23
	6	1	5,97	242,73
L4	0	114	3,14	0,00
	1	8	4,13	6283,08
	2	1	3,84	12566,15
L5	0	1	3,14	0
BO	0	280	3,20	84334,662
	1	102	5,42	5507,553
	2	80	3,88	5223,69
	3	44	3,70	2352,87
	4	32	4,00	1577,34
BI	0	9	3,90	5507,55
	1	6	1,73	5223,69
RO	0	100013989	0	0
	1	1670700	3,0984635	6283,07585
	2	13956	3,05525	12566,1517
	3	3084	5,1985	77713,7715
	4	1628	1,1739	5753,3849
	5	1576	2,8469	7860,4194
	6	925	5,453	11506,770
	7	542	4,564	3930,210
	8	472	3,661	5884,927
	9	346	0,964	5507,553
	10	329	5,900	5223,694
	11	307	0,299	5573,143
	12	243	4,273	11790,629
	13	212	5,847	1577,344
	14	186	5,022	10977,079
	15	175	3,012	18849,228
	16	110	5,055	5486,778

Tabla 6-4. Elementos periódicos de la órbita terrestre (IV).
 Transcripción de Reda et al. . "Solar Position Algorithm". Solar Energy © Elsevier Ltd
 2004. [37]

Términos periódicos órbita terrestre				
Término	índice	A	B	C
	17	98	0,89	6069,78
	18	86	5,69	15720,84
	19	86	1,27	161000,69
	20	65	0,27	17260,15
	21	63	0,92	529,69
	22	57	2,01	83996,85
	23	56	5,24	71430,70
	24	49	3,25	2544,31
	25	47	2,58	775,52
	26	45	5,54	9437,76
	27	43	6,01	6275,96
	28	39	5,36	4694,00
	29	38	2,39	8827,39
	30	37	0,83	19651,05
	31	37	4,90	12139,55
	32	36	1,67	12036,46
	33	35	1,84	2942,46
	34	33	0,24	7084,90
	35	32	0,18	5088,63
	36	32	1,78	398,15
	37	28	1,21	6286,60
	38	28	1,90	6279,55
	39	26	4,59	10447,39
R1	0	103019	1,10749	6283,07585
	1	1721	1,0644	12566,1517
	2	702	3,14	0
	3	32	1,02	18849,23
	4	31	2,84	5507,55
	5	25	1,32	5223,69
	6	18	1,42	1577,34
	7	10	5,91	10977,08
	8	9	1,42	6275,96
	9	9	0,27	5486,78
R2	0	4359	5,7846	6283,0758
	1	124	5,58	12566,152
	2	12	3,14	0
	3	9	3,63	77713,77
	4	6	1,87	5573,14
	5	3	5,47	18849,23
R3	0	145	4,27	6283,076
	1	7	3,92	12566,15
R4	0	4	2,56	6283,08

La tabla anterior nos permite también obtener otros valores que se consiguen mediante el mismo procedimiento. Se trata de los valores R (correspondiente al radio vector) y B (latitud astronómica), ambas heliocéntricas.

El radio vector, como sabemos, es la distancia entre el centro de la Tierra y el centro del Sol, valor que ya se ha tratado en capítulos anteriores, y que, generalmente, se expresa en UA (unidades astronómicas).

Con respecto a la *latitud astronómica*, en capítulos posteriores la analizaremos más a fondo, al generalizar las expresiones del ángulo de sombra y de la declinación solar para alteraciones tridimensionales de la órbita; no obstante, en el punto 6.5 de este capítulo se enuncia y representa mediante una ilustración aclaratoria.

Por el momento, baste indicar que la obtención del radio solar para un instante determinado, dado por su JME, se realiza como en el caso de L , mediante la expresión (Reada & alt. [37]):

$$R = \frac{R0 + R1 \cdot JME + R2 \cdot JME^2 + R3 \cdot JME^3 + R4 \cdot JME^4}{10^8}$$

Siendo:

$$R0 = \sum_{i=0}^n R0_i \quad R1 = \sum_{i=0}^n R1_i \quad R2 = \sum_{i=0}^n R2_i \quad R3 = \sum_{i=0}^n R3_i \quad R4 = \sum_{i=0}^n R4_i$$

Con la misma ley de variación de los índices i . Por ejemplo, para $R1$, i varía entre 0 y 9, y así sucesivamente.

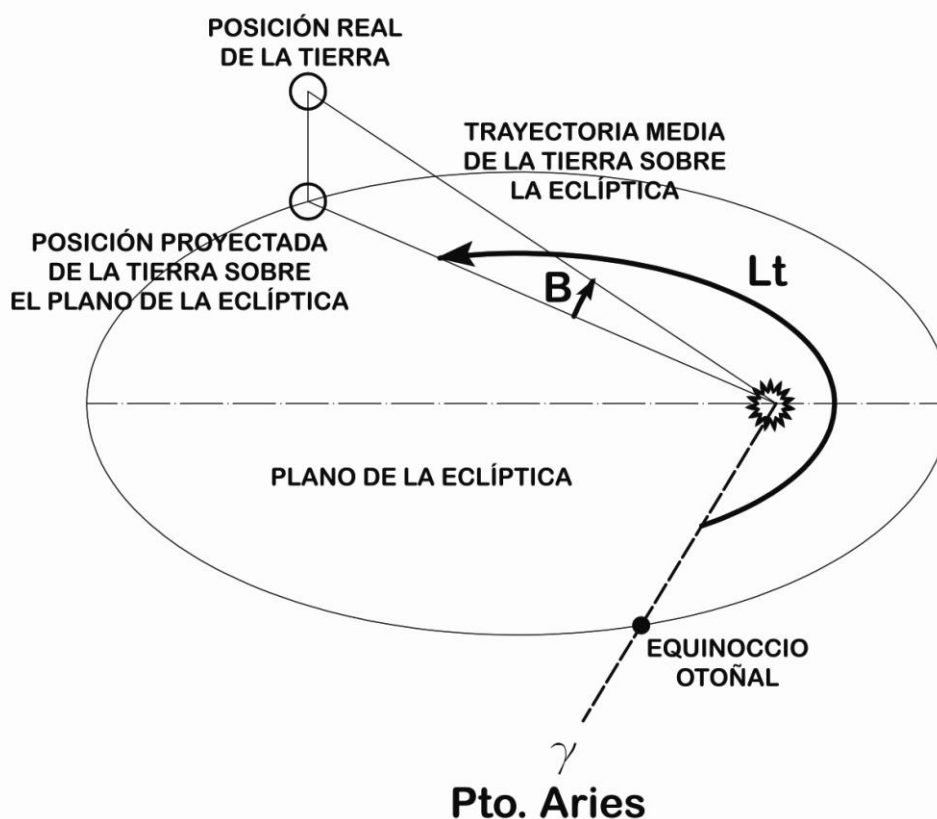
La ventaja de la aplicación de este método, además de su sencillez, es el hecho de integrar en un solo procedimiento el cálculo directo de L , sin necesidad de realizar cálculos previos de longitud media o ecuación de centro, como vimos en los procedimientos anteriores de cálculo de L .

El elevado número de términos (hasta 64 en el caso de $L0$), con sus correspondientes decimales, no es un obstáculo para el desarrollo de una aplicación mediante hoja de cálculo. Se ha comprobado que Excel 2007 puede integrar dichos términos de $L0$ utilizando para ello solamente dos celdas contiguas en la misma tabla, que se sumarían en la misma línea para obtener el resultado buscado. Ello sin necesidad de introducir macros a cálculo matricial ninguno como rutina.

6.5. LATITUD ORBITAL

En la tabla anterior, observamos unos términos B_0 y B_1 que aparentemente no son necesarios para nuestros cálculos. Ellos nos permiten obtener en cada instante la *latitud orbital* B^{52} .

Este nuevo concepto de latitud eclíptica B queda suficientemente claro en la figura 6-5, representada esta vez en perspectiva libre.



6-5. Representación del concepto de latitud orbital B .

⁵² Asumir el concepto de latitud orbital puede resultar complicado si nos atenemos exclusivamente al radio Sol-Tierra como referencia. Ello procede de definir como plano de la eclíptica al que contiene la órbita de la Tierra. Pero si esta es alabeada, la intuición deja de servirnos. Preferimos definir, por tanto, el plano de la eclíptica como el plano que pasa por el Sol, y cuyo vector director es el eje del cono imaginario formado por el eje de rotación terrestre debido a la precesión. Esta definición, simple sobremanera, no se encuentra en ninguno de los tratados de Astronomía consultados. Resulta, sin embargo, suficientemente visual y efectiva de cara al análisis geométrico del problema.

Para el cálculo de B procederemos, siempre según Reda & alt.[37] de la siguiente forma:

$$B = \frac{BO + BI \cdot JME}{10^8}$$

Siendo:

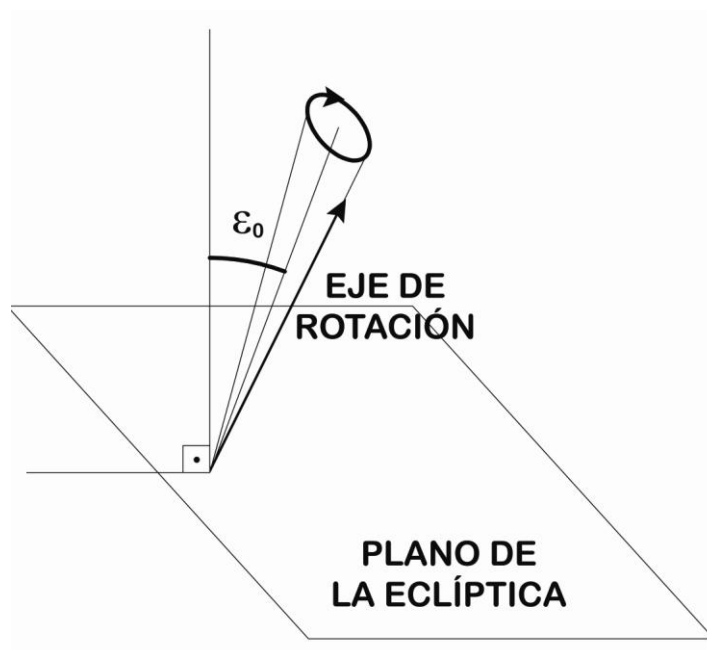
$$BO = \sum_{i=0}^n BO_i \quad BI = \sum_{i=0}^n BI_i$$

Aunque posponemos hasta capítulos posteriores la justificación de la conveniencia de calcular la latitud orbital, adelantamos que es muy útil la obtención directa de este dato cuando se trata de la obtención de valores para precisiones elevadas en la determinación del acimut y la elevación del Sol, como se verá más adelante.

7. NUTACIÓN

Sic volvitur orbis

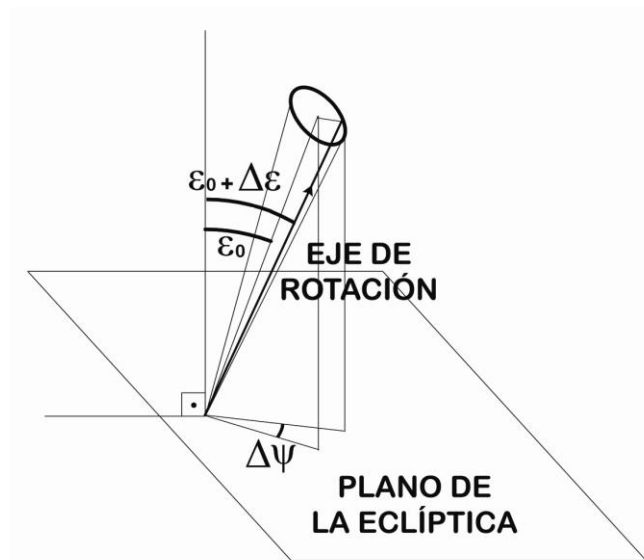
El fenómeno de la nutación consiste en un movimiento giratorio del eje de rotación terrestre formando un cono de directriz elíptica con respecto a una “posición media” ideal del mismo, o sea, alrededor del eje definido por ϵ_0 (fig. 7-1).



7-1. Concepto de la nutación terrestre.

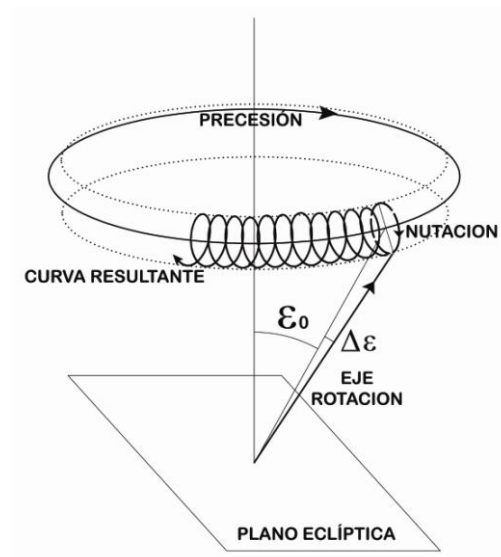
7.1. COMPONENTES GEOMÉTRICOS DE LA NUTACIÓN

Desde el punto de vista geométrico, el giro constituido por la nutación puede descomponerse en una componente perpendicular al eje de rotación, denominada *nutación en oblicuidad* y simbolizada por $\Delta\epsilon$, y en otra componente perpendicular al radio vector de nuestro planeta y contenida en el plano de la eclíptica, denominada *nutación en longitud*, y simbolizada por $\Delta\psi$ (fig. 7-2). Como vemos, $\Delta\epsilon$ aumenta o disminuye el valor de ϵ_0 ; y, análogamente, $\Delta\psi$ modifica, con valores positivos o negativos, el ángulo avanzado a lo largo de la traslación.



7-2. Representación gráfica de los componentes de la nutación.

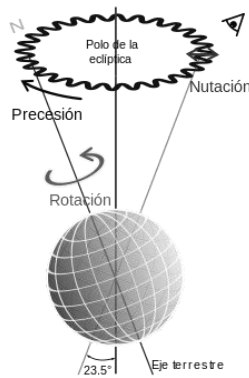
Debido a la precesión, descrita anteriormente, combinada con la nutación, un extremo ficticio del eje de giro terrestre formaría a lo largo del tiempo una línea en el espacio como la que se representa en la fig. 7-3.



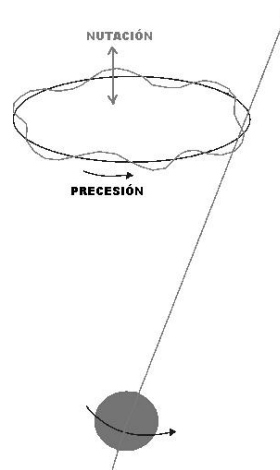
7-3. Composición de la nutación y la precesión.

Esta figura no deja de ser a su vez una simplificación, puesto que además la inclinación media de la eclíptica, ϵ_0 , varía también a lo largo del tiempo. Hemos representado de esta forma la combinación entre precesión y nutación por su fácil comprensión intuitiva, aunque las amplitudes de ambas perturbaciones están fuera de escala desde el punto de

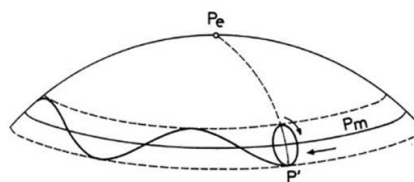
vista temporal y dimensional. Tengamos en cuenta, por mplo, que el período de nutación (giro elíptico completo) es de aproximadamente 18,2 años, mientras que el período de la precesión es de unos 25800 años. Aun conscientes de estos inconvenientes, preferimos este gráfico al habitualmente encontrado tanto en la red como en textos especializados, de los que presentamos a modo orientativo varios ejemplos. Los casos de las figs. 7-4 [61] y 7-5 [62] corresponden a páginas web de divulgación, correspondiendo la segunda al Ministerio de Educación español; sin embargo, la fig. 7-6 está extraída de una obra altamente especializada, citada a menudo en esta tesis debido al valor científico de sus desarrollos y metodología [6].



7-4. Precesión + nutación (a). Caliver. Wikimedia Commons
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Precession-nutation-ES.svg> [61].



7-5. Precesión + nutación (b). "Proyecto Biosfera". Ministerio de Educación, España.
<http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/1ESO/Astro/contenido14.htm>. [62].



7-6. Precesión + nutación (c). Orús Navarro & alt. "Astronomía esférica y mecánica celeste"
©Ediciones de la Universidad de Barcelona. [6].

Desde un punto de vista meramente intuitivo, podemos observar que cualquiera de las tres ilustraciones anteriores se correspondería con un movimiento oscilante puro del eje de rotación con componente única en la dirección perpendicular al mismo, sin implicar avances o retrocesos con respecto al giro teórico en precesión como consecuencia de la trayectoria elíptica recorrida por el extremo ideal del eje de rotación terrestre. Por ello consideramos más acertada para explicar la conjunción de los dos fenómenos la figura propuesta por nosotros en 7-3, a pesar de los inconvenientes señalados. El fenómeno de la nutación se debe fundamentalmente a la acción gravitatoria de la Luna sobre nuestro planeta. Como en otros casos estudiados anteriormente, es habitual hoy en día calcular numéricamente los términos de la nutación como sumatorio de términos periódicos.

7.2. CÁLCULO DE LA NUTACIÓN

Actualmente existen varios procedimientos de diferente precisión para el cálculo de la nutación, aunque podemos considerar que los más conocidos parten, con diversas simplificaciones, de la “1980 IAU Theory of Nutation”[38]. En este capítulo analizaremos los más extendidos.

7.3. TEORÍA DE LA NUTACIÓN (1980)

Este modelo, dirigido por P. K. Seidelmann, y aceptado por la IAU, sigue en plena vigencia en las aplicaciones informáticas a día de hoy, aunque existen algunas propuestas de modificación en función de diversos factores estudiados cada vez más en profundidad, entre los que podemos citar el comportamiento de nuestro planeta como sólido no rígido (*Resolution B3 on non-rigid Earth Nutation Theory*) [63] .

El modelo tiene la particularidad de presentar una tabla de coeficientes para el cálculo de los dos términos de la nutación, que se reproducen en facsímil en el apéndice III, tal y como se presentaron en la publicación [38]. En dicha tabla, que contiene 106 términos, se puede observar la periodicidad en días de los fenómenos asociados a cada término.

El procedimiento consiste en la suma de los productos de dichos coeficientes por la expresión numérica de cuatro variables fundamentales operadas previamente de acuerdo con leyes senoidales (nutación en longitud) o cosenoidales (nutación en oblicuidad).

Las variables previas son:

$D =$ Elongación media de la Luna desde el Sol.

$l' =$ Anomalía media del Sol.

$l =$ Anomalía media de la Luna.

F = Argumento de la latitud de la Luna.

Ω = Longitud del nodo ascendente de la órbita media de la Luna, medida desde el equinoccio medio de la fecha.

No es objeto de esta tesis el análisis ni la definición de estos términos, desde el momento en que solo se citan a efectos de presentar un procedimiento auxiliar de cálculo. La equivalencia de las abreviaturas anteriores con las utilizadas para los mismos términos por J. Meeus [9] e Ibrahim Reda & alt. [37] son:

IAU	D	l'	l	F	Ω
J. Meeus	D	M	M'	F	Ω
Reda	X0	X1	X2	X3	X4

Y la expresión matemática de estos elementos es la siguiente [37] (terminología de Reda):

$$X_0 = 297,85036 + 445267,111480 \cdot JCE - 0,0019142 \cdot JCE^2 + \frac{JCE^3}{189474}$$

$$X_1 = 357,52772 + 35999,050340 \cdot JCE - 0,0001603 \cdot JCE^2 - \frac{JCE^3}{300000}$$

$$X_2 = 134,96298 + 477198,867398 \cdot JCE + 0,0086972 \cdot JCE^2 - \frac{JCE^3}{56250}$$

$$X_3 = 93,27191 + 483202,017538 \cdot JCE + 0,0036825 \cdot JCE^2 - \frac{JCE^3}{327270}$$

$$X_4 = 125,04452 - 1934,136261 \cdot JCE + 0,0020708 \cdot JCE^2 - \frac{JCE^3}{450000}$$

Siendo

$$JCE = \frac{JDE - 2451545,0}{36525}$$

Aquí nos encontramos por primera vez con JDE, muy similar a JD, pero incrementado en el valor ΔT que corrige, como sabemos, la diferencia entre *tiempo universal* y el tiempo medido por procedimientos atómicos (Ver el cap. 4.9). Esto es así en este caso, debido a que el algoritmo para el cálculo de la nutación se desarrolló para mediciones de tiempo dinámico, utilizando los procedimientos atómicos mencionados anteriormente.

El valor ΔT se da siempre en segundos, por lo que:

$$JDE = JD + \frac{\Delta T}{86400}$$

Ya que $86400 = 24 \cdot 60 \cdot 60$.

Para el tratamiento de las variables, preferimos también utilizar las tablas de Reda & alt.[37], (Tabla 7-1). Aunque están extraídas de [38] (la copia de la obra referida, similar a la tabla anterior, se incluye en el apéndice III), su ordenación, según el criterio de valor absoluto de coeficientes tipo a decrecientes y su terminología más neutra desde el punto de vista matemático, la hacen más sencilla de tratar numéricamente. A diferencia de la anterior, cuenta solamente con 63 términos. El truncamiento es considerado válido por Reda [37] incluso para determinaciones de acimut y elevación con errores menores de $\pm 0,0003^\circ$. Por lo demás, la tabla, aunque con diferentes abreviaturas, es la recogida por J. Meeus en [9], con el mismo criterio de ordenación de coeficientes.

El procedimiento es muy simple: los valores en 0,0001 arcseg se obtienen de las siguientes expresiones:

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^n [(a_i + b_i \cdot JDE) \sin(\sum_{j=0}^4 X_j \cdot Y_{i,j})]$$

$$\Delta\varepsilon = \sum_{i=1}^n [(c_i + d_i \cdot JDE) \sin(\sum_{j=0}^4 X_j \cdot Y_{i,j})]$$

Para transformar los valores anteriores en grados, que será la unidad utilizada en cálculo de longitudes, basta con dividir los resultados obtenidos por 36 000 000. (Es decir, $36 \cdot 10^6$).

Tabla 7-1. Términos para el cálculo de la nutación, basados en el VSOP 87. Autores: Reda, Ibrahim; Andreas, Afshin. "Solar Position Algorithm". Solar Energy © Elsevier Ltd 2004. [37].

Términos periódicos para nutación en longitud y oblicuidad

No. término i	Coeficientes términos en $\sin(\sum x_j \cdot y_{ij})$					Coeficientes $\Delta\psi$		Coeficientes $\Delta\varepsilon$	
	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	a	b	c	d
1	0	0	0	0	1	-171996	-174,2	92025	8,9
2	-2	0	0	2	2	-13187	-1,6	5736	-3,1
3	0	0	0	2	2	-2274	-0,2	977	-0,5
4	0	0	0	0	2	2062	0,2	-895	0,5
5	0	1	0	0	0	1426	-3,4	54	-0,1
6	0	0	1	0	0	712	0,1	-7	
7	-2	1	0	2	2	-517	1,2	224	-0,6
8	0	0	0	2	1	-386	-0,4	200	
9	0	0	1	2	2	-301		129	-0,1
10	-2	-1	0	2	2	217	-0,5	-95	0,3
11	-2	0	1	0	0	-158			
12	-2	0	0	2	1	129	0,1	-70	
13	0	0	-1	2	2	123		-53	
14	2	0	0	0	0	63			
15	0	0	1	0	1	63	0,1	-33	
16	2	0	-1	2	2	-59		26	
17	0	0	-1	0	1	-58	-0,1	32	
18	0	0	1	2	1	-51		27	
19	-2	0	2	0	0	48			
20	0	0	-2	2	1	46		-24	
21	2	0	0	2	2	-38		16	
22	0	0	2	2	2	-31		13	
23	0	0	2	0	0	29			
24	-2	0	1	2	2	29		-12	
25	0	0	0	2	0	26			
26	-2	0	0	2	0	-22			
27	0	0	-1	2	1	21		-10	
28	0	2	0	0	0	17	-0,1		
29	2	0	-1	0	1	16		-8	
30	-2	2	0	2	2	-16	0,1	7	
31	0	1	0	0	1	-15		9	
32	-2	0	1	0	1	-13		7	
33	0	-1	0	0	1	-12		6	
34	0	0	2	-2	0	11			
35	2	0	-1	2	1	-10		5	
36	2	0	1	2	2	-8		3	
37	0	1	0	2	2	7		-3	
38	-2	1	1	0	0	-7			
39	0	-1	0	2	2	-7		3	
40	2	0	0	2	1	-7		3	
41	2	0	1	0	0	6			
42	-2	0	2	2	2	6		-3	
43	-2	0	1	2	1	6		-3	
44	2	0	-2	0	1	-6		3	
45	2	0	0	0	1	-6		3	
46	0	-1	1	0	0	5			
47	-2	-1	0	2	1	-5		3	
48	-2	0	0	0	1	-5		3	
49	0	0	2	2	1	-5		3	
50	-2	0	2	0	1	4			
51	-2	1	0	2	1	4			
52	0	0	1	-2	0	4			
53	-1	0	1	0	0	-4			
54	-2	1	0	0	0	-4			
55	1	0	0	0	0	-4			
56	0	0	1	2	0	3			
57	0	0	-2	2	2	-3			
58	-1	-1	1	0	0	-3			
59	0	1	1	0	0	-3			
60	0	-1	1	2	2	-3			
61	2	-1	-1	2	2	-3			
62	0	0	3	2	2	-3			
63	2	-1	0	2	2	-3			

Para una máxima precisión puede utilizarse la serie entera de la tabla incluida en el apéndice III con sus 106 términos. No obstante, hay que valorar si el ordenador y *software* utilizados pueden procesar los datos con suficiente número real de decimales como para que el uso de todos los coeficientes sea apreciable en el resultado.

7.4. EXPRESIONES SIMPLIFICADAS

Es habitual utilizar algoritmos simplificados cuando no se requiere una precisión importante; por ejemplo, cuando utilizamos la hipótesis de órbita plana, sin considerar la latitud astronómica, en el caso del cálculo de la posición aparente del Sol.

7.4.1. PROPUESTA DE JEAN MEEUS

Jean Meeus [9] propone, para precisiones de 0",5 seg. de arco en $\Delta\psi$ y de 0",1 seg. en $\Delta\varepsilon$, las siguientes expresiones:

$$\Delta\psi = -17'' ,20 \sin \Omega - 1'' ,32 \sin 2L - 0'' ,23 \sin 2L' + 0'' ,21 \sin 2\Omega$$

$$\Delta\varepsilon = 9'' ,20 \cos \Omega + 0'' ,57 \cos 2L - 0'' ,10 \cos 2L' - 0'' ,09 \cos 2\Omega .$$

Estas expresiones están en arcseg, por lo que su conversión a grados se realiza dividiendo por 3600.

El valor de Ω es el definido anteriormente, y se corresponde con el término X_4 de la terminología de Reda. En cuanto a L y L' , longitudes medias del Sol y la Luna, respectivamente, J. Meeus utiliza las expresiones:

$$L = 280^\circ ,4665 + 36000^\circ ,7698 \cdot JDE$$

$$L' = 218^\circ ,3165 + 481267^\circ ,8813 \cdot JDE ,$$

con

$$T = \frac{JDE - 2451545}{36525}$$

7.4.2. APLICACIÓN NOAA

La NOAA, en su aplicación [20], que declara utilizar los algoritmos de Jean Meeus, aunque no hace referencia a las fuentes de este, (en concreto y para este caso, la *1980 IAU Theory of Nutation*), corrige la longitud y la oblicuidad de la eclíptica teniendo exclusivamente en cuenta la influencia del nodo ascendente de la órbita lunar. De esta forma, utiliza implícitamente en su hoja Excel las expresiones:

$$\Delta\psi = -0,00478 \cdot \sin(125^\circ,04 - 1934^\circ,136 \cdot JC)$$

$$\Delta\varepsilon = 0,00256 \cdot \cos(125^\circ,04 - 1934^\circ,136 \cdot JC),$$

siendo en este caso

$$JC = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$$

(Es frecuente encontrar el término JC denominado también como T, según autores).

Así, se están realizando varias simplificaciones de cierta importancia. En primer lugar, como decíamos, la consideración para el cálculo de solo uno de los términos de la teoría de la nutación. En segundo lugar, el despreciar el valor de ΔT , tal vez por su indefinición real a pesar de las expresiones aproximadas propuestas por varios autores. (ver cap. 4.9.).

En tercer lugar, se está sustituyendo un elemento dependiente de JC en los coeficientes de seno y coseno por el término independiente más significativo.

En efecto, si realizamos el desarrollo indicado en el cap. 7.3. haciendo que:

$X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 0$, y utilizando solamente X_4 , truncando este elemento a sus dos primeros términos y considerando $JCE \sim JC$, tendremos:

$$X_4 = 125,04452 - 1934,136261JC .$$

Con lo que, efectuando el desarrollo solo para los primeros coeficientes tendríamos:

$$\Delta\psi = (-171996 - 174,2 \cdot JC) \sin(125^\circ,04 - 1934^\circ,136 \cdot JC),$$

que, convirtiendo a grados (dividiendo por 36 000 000; no olvidemos que la expresión

anterior nos da $\Delta\psi$ en 0,0001 arcseg) quedaría como (grados):

$$\Delta\psi = (-0,00478 - 4,839 \cdot 10^{-6} \cdot JC) \sin(125^\circ,04 - 1934^\circ,136 \cdot JC)$$

Análogamente, se llegaría a:

$$\Delta\varepsilon = (0,00256 + 2,472 \cdot 10^{-7} JC) \cos(125^\circ,04 - 1934^\circ,136 \cdot JC)$$

Es cierto que la NOAA [20] advierte en sus observaciones correspondientes a sus *NOAA Sunrise/Sunset and Solar Position Calculators* :

“Please note that calculations in the spreadsheets are only valid for dates between 1901 and 2099, due to an approximation used in the Julian Day calculation. The web calculator does not use this approximation, and can report values between the years -2000 and +3000”.

Este espacio de tiempo está limitando, sin duda, el error, teniendo en cuenta que los procedimientos completos de la teoría de la nutación pueden considerarse precisos en el entorno de varios milenios desde JD2000. Además, el término en función de T despreciado se da en JC, no en JD, con lo cual el error es menor.

En efecto, si consideramos la fecha JD = 2817152,50000, correspondiente al 01/01/3001, es decir, al último instante de 3000 A.D., que es el que proporciona un valor absoluto máximo a $4,839 \cdot 10^{-6} JC$, tendremos:

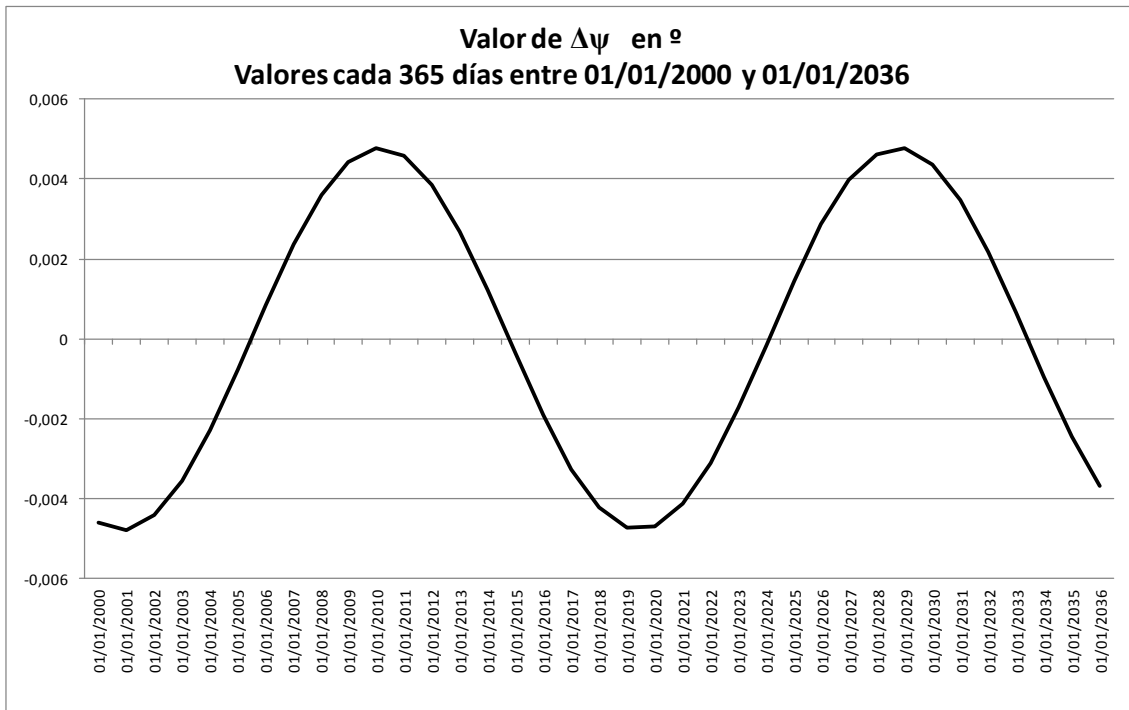
$$-4,839 \cdot 10^{-6} JC = -4,839 \cdot 10^{-6} \frac{2817152,5 - 2451545}{36525} = -4,839 \cdot 10^{-6} \cdot 10,0098 = 4,844 \cdot 10^{-5}$$

Valor que, efectivamente, es inferior en orden de magnitud al truncamiento del término independiente -0,00478 a la cienmilésima.

Análogamente para el término de corrección de la nutación por oblicuidad.

Sin duda, la aplicación ha considerado el mismo razonamiento a la hora de truncar el proceso de cálculo en $i=1$ y despreciar los términos X_0 a X_3 . Tengamos en cuenta que a efectos astronómicos el espacio considerado en la acotación [-2000 , +3000] es muy breve teniendo en cuenta la precisión de los modelos actuales.

En la fig. 7-7 podemos comprobar el carácter cíclico de la nutación, aplicando el algoritmo de la NOAA. Obsérvese la ley de tipo senoidal, que arroja valores tanto positivos como negativos para $\Delta\psi$, lo cual concuerda con la representación gráfica elegida anteriormente fig. (7-3) para ilustrar la composición de la nutación con la precesión. Es evidente que las composiciones de las figs. 7-4, 7-5 y 7-6 no darían nunca lugar a valores negativos, dado que representan curvas continuas sin regresiones.



7-7. Carácter cíclico de la corrección de la longitud por nutación.

8. LA ABERRACIÓN DE LA LUZ

Te regat alia lux

Como se indicó en 2.6.2. y 2.6.4., el valor finito de la velocidad de la luz ha de ser tenido en cuenta a la hora de realizar las correspondientes correcciones a la posición teórica de la Tierra con respecto al Sol (o viceversa, en función del sistema heliocéntrico o geocéntrico elegido).

La corrección por aberración, para el caso de la Tierra, en su expresión más simplificada viene dada por la expresión, que reproducimos sin demostración: ([9], pág.167)

$$\Delta\tau = -\frac{k \cdot a \cdot (1 - e^2)}{R}$$

Donde

a es el semieje mayor de la órbita terrestre $a = 1,000\,001\,018$ UA [17].

k = constante de aberración = $20''$,49552 [9]⁵³.

e = excentricidad de la órbita, que para 2013 era de 0,0167 034 4 [17].

R = radio terrestre en unidades astronómicas.

La lenta variación de la excentricidad terrestre permite a Meeus [9] adoptar la expresión simplificada

$$\Delta\tau = -\frac{20''\,4898}{R}, \quad (\text{Ec. 8.1})$$

que puede expresarse en grados como

$$\Delta\tau^\circ = -\frac{20,4898}{3600R} \quad [37].$$

O bien

$$\Delta\tau^\circ = -\frac{0,00569161}{R}$$

En algunas aplicaciones, como la de la NOAA, habida cuenta de la pequeña variación de R en términos de unidades astronómicas, se utiliza como constante el valor de corrección:

⁵³ Este valor es corregido en el análisis de la Ecuación del tiempo, que estudiaremos más adelante, por el propio Meeus en [9], con el valor adicional $-0''09033$ para su adaptación al sistema FK5. No se utilizará en nuestros cálculos posteriores dicha corrección.

$$\Delta\tau^o = -0,00569$$

que en la aplicación mencionada aparece como primer término independiente junto a la nutación dentro del apartado del paso de longitud real a aparente.

Recordemos que, según veíamos en 2.6.4. podemos calcular dentro de una cierta incertidumbre la aberración aproximada teniendo en cuenta exclusivamente el movimiento de traslación. La consideración de la rotación terrestre se correspondería con la conocida como *aberración diurna*.

Vamos a reproducir los mismos cálculos, pero en función de R:

$$\Delta\tau_{aprox} = -\frac{R(km)}{c(km/s) \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600} \cdot 360^o = -3,8026 \cdot 10^{-11} \cdot R$$

Para R= Rmedio = 149 598 000 km y c = 2,99792458·10⁶ km/s, como se indicó en 2.6.4:

$$\Delta\tau_{aprox} = -0,0056925 P$$

Puede resultar paradójico que, aunque las cifras obtenidas son muy similares, en una de ellas aparece el valor R en el numerador y en otra en el denominador. Ello se debe a haber utilizado en el cálculo clásico la constante de aberración.

El Technical Report del NREL [37] preconiza el uso de la fórmula simplificada (Ec. 8.1.) para precisiones globales en el cálculo de altura y acimut solares con errores menores de ± 0,0003°, por lo que queda fuera de lugar recomendar métodos de cálculo de mayor precisión o integrar nuevos términos de aberración lumínica.

Finalmente, cabe indicar que las expresiones de Ron-Vondrak [64] para cálculos referidos a cálculos estelares, y citadas en [9], no son necesarias en esta obra dedicada al análisis del movimiento del Sol, la más cercana a la Tierra de todas las estrellas del firmamento.

9. CORRECCIONES A L Y ϵ_0 : LONGITUD APARENTE L_t Y ECLÍPTICA CORREGIDA ϵ .

Aut lauda vel emenda

9.1. CORRECCIONES A L

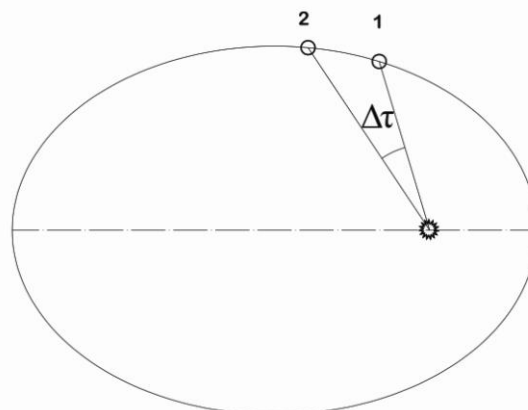
Los procedimientos de cálculo de L tenían por objeto calcular la posición real de nuestro planeta a lo largo de su recorrido orbital.

Sin embargo, no tiene sentido aplicar L a los cálculos de la posición aparente del Sol cuando lo que necesitamos es L_t . El plano de sombra, tantas veces mencionado, se corresponderá con la posición aparente del Sol con respecto a nuestro planeta, no con la posición real en el instante determinado. Ello viene condicionado por dos factores: la aberración de la luz y la nutación en oblicuidad.

9.1.1. LA ABERRACIÓN Y LA LONGITUD

La principal consecuencia de la aberración lumínica es la modificación de la longitud solar a efectos de los cálculos de la trayectoria aparente del Sol. O lo que es lo mismo, el ángulo recorrido por la Tierra en su movimiento de traslación debe ser corregido en la magnitud resultante de la aberración con el fin de que nuestros cálculos sean coherentes.

En la fig. 9-1 podemos ver que cuando la Tierra está en 2, recibe los rayos de Sol que salieron del mismo en el instante 1.



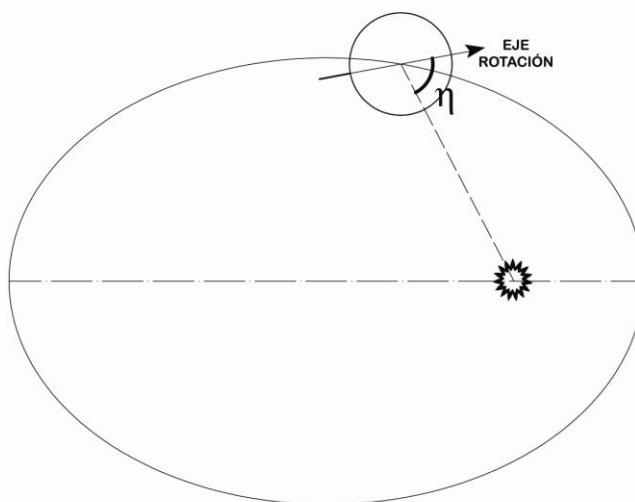
9-1. Representación geométrica de $\Delta\tau$.

Por lo tanto, a efectos de cálculo, aunque la Tierra esté en 2, debe ser realizada la correspondiente corrección en longitud de valor $\Delta\tau$, es decir, la debida a la aberración (ver cap. 8). Su signo es siempre negativo.

Pero esta corrección a L no es la única, como veremos a continuación.

9.1.2. NUTACIÓN EN LONGITUD Y L

El efecto de la nutación en longitud es también sencillo desde un punto de vista intuitivo. En este caso, la nutación en longitud o $\Delta\psi$ (ver cap. 7), al provocar un giro en el eje de rotación terrestre, varía igualmente la posición relativa del plano de sombra con respecto a este: aunque L no varíe en relación con el centro de la Tierra, la consecuencia de esta perturbación cíclica sobre el eje de giro provoca que, en el instante dado, la orientación del mismo varíe también, provocando un efecto similar al de un mayor avance de la precesión o un retroceso de la misma según el signo de $\Delta\psi$. En la fig. 9-2 podemos observar la Tierra en una posición determinada, y su eje de rotación proyectado sobre la eclíptica forma un ángulo η ⁵⁴ con el radio vector Tierra-Sol.

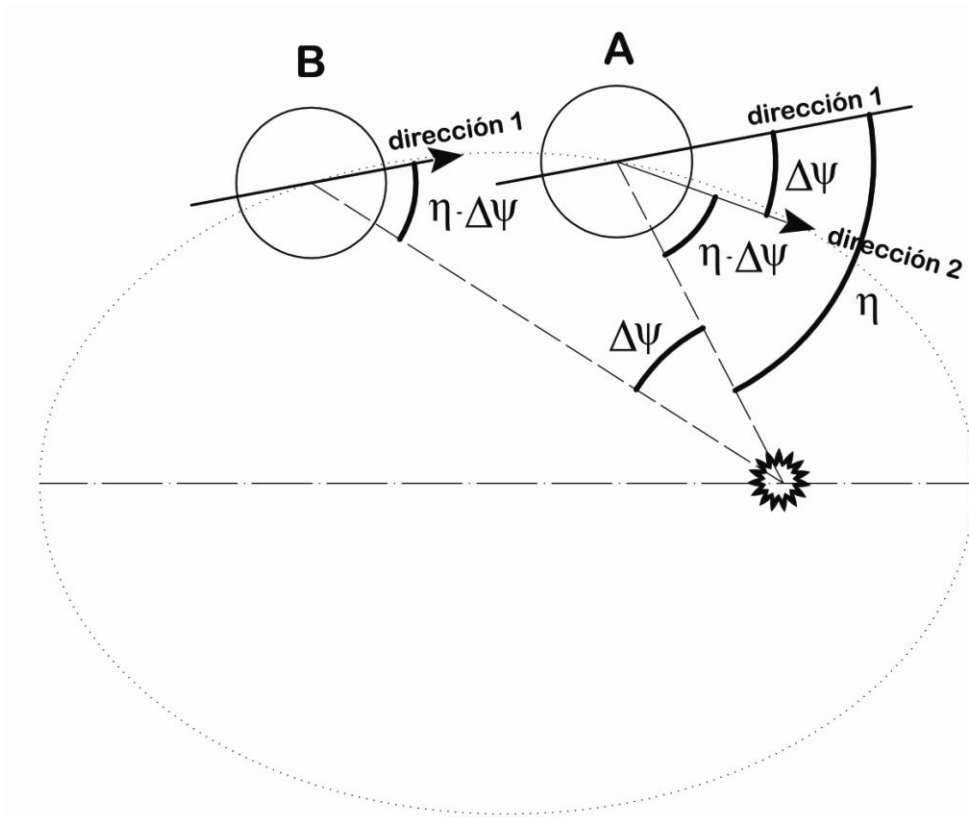


9-2. Posición genérica de la Tierra. Ángulo η .

En dicha figura no se ha considerado el efecto de la nutación sobre la componente horizontal con respecto al plano de la eclíptica del eje de giro terrestre.

En la fig. 9-3, en la posición A se representa la Tierra con dos direcciones de ejes proyectados sobre la eclíptica: la dirección 1, correspondiente al eje sin nutación; y la dirección 2, con la corrección $\Delta\psi$.

⁵⁴ Denominación auxiliar adoptada solamente para este apartado.



9-3. Comparación de orientaciones del eje de rotación y su relación con el radio Tierra-Sol. Consecuencia de $\Delta\psi$.

Como puede verse, el cambio de dirección inducido en A por $\Delta\psi$ sobre el eje hace que la posición relativa del mismo con respecto al radio vector sea idéntica a la que tendría sin corregir cuando la Tierra está en B, siendo la diferencia angular en la traslación entre B y A precisamente el ángulo $\Delta\psi$.

En otras palabras, produce a efectos de cálculo de posiciones relativas de la Tierra respecto del Sol (y viceversa) el mismo efecto que un incremento angular en traslación de valor ψ .

9.2. LONGITUD APARENTE: L_t

La longitud aparente L_t será, pues, la longitud L corregida por los dos términos anteriores.

A partir de ahora, denominaremos L_t a esta longitud, que se corresponde con la terminología heliocéntrica que utilizábamos en los primeros capítulos. Todas las deducciones que se hicieron entonces se basaban en la posición aparente de la Tierra con respecto al Sol; como queda dicho anteriormente, no tiene sentido a efectos

prácticos utilizar L en los cálculos de acimut, elevación, horas de luz, etc., puesto que el Sol que se percibe desde nuestro planeta es el aparente y no el real.

Sin embargo, en todos los apartados del cap. 6 las longitudes calculadas para la Tierra eran reales, en el sentido astronómico del término.

Por tanto,

$$L_t = L + \Delta\tau + \Delta\psi$$

Insistimos una vez más, a modo de aclaración, en que todas las magnitudes angulares calculadas en los caps. 2 y 0, para las que se utilizó L_t en sus deducciones, van referidas a la longitud aparente.

9.2.1. CORRECCIÓN DE LA OBLICUIDAD DE LA ECLÍPTICA

Igualmente, la oblicuidad media de la eclíptica ε_0 (cap. 5.2) se debe también corregir mediante el término asociado a la nutación proyectado sobre la perpendicular a la eclíptica, cuyo valor se calcula de acuerdo con los métodos propuestos en el cap. 7, y que se denominaba $\Delta\varepsilon$. Por lo tanto, a partir de ahora, en cualquier cálculo donde encontremos ε , deberemos entender que nos referimos a:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$$

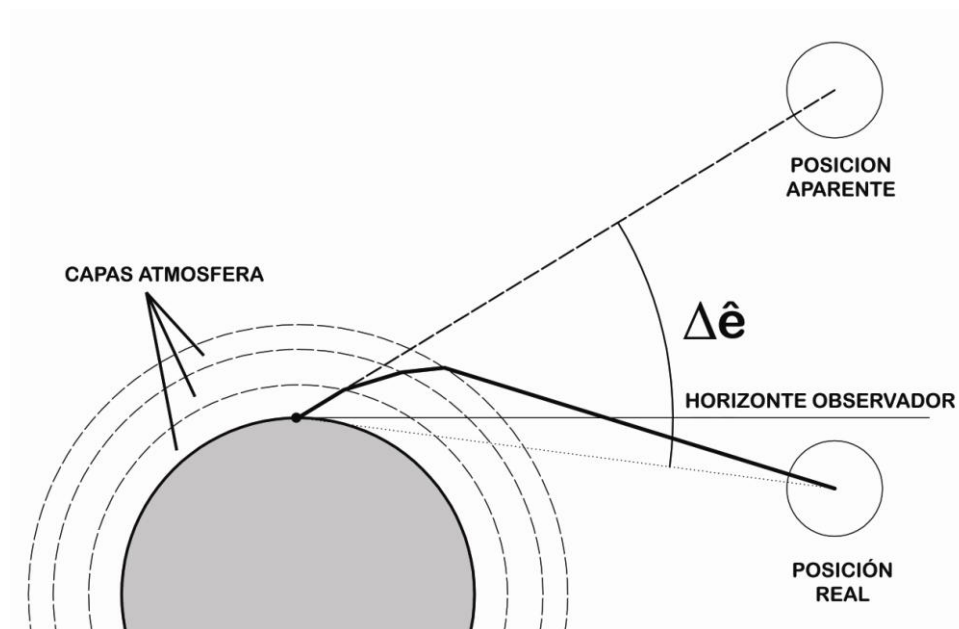
Por supuesto, las expresiones angulares deducidas en el cap. 2 y que incluyen ε (α_s , δ) van referidas, lógicamente, a esta oblicuidad corregida.

10. REFRACCIÓN ATMOSFÉRICA

Coeli lux nostra dux

La existencia de atmósfera terrestre implica la desviación de los rayos solares que la atraviesan, debido al paso de la luz a través de capas de aire con diferentes densidades.

La curvatura de los rayos provoca que la altura aparente del Sol, estrellas, etc., sea siempre mayor que la real, según puede observarse en la fig. 10-1.



10-1. Esquema de la refracción de la luz en la atmósfera.

10.1. APROXIMACIONES EMPÍRICAS

10.1.1. PROPUESTA DE JEAN MEEUS (BASADA EN BENNETT Y SAEMUNDSSON)

J. Meeus ([9], pp. 105-108) recoge las expresiones de G. G. Bennett [39], para corregir las alturas sobre el horizonte teóricas, y la de Saemundsson [40], para la corrección de alturas observadas y su correspondiente conversión a alturas reales.

En nuestro caso, dado que deseamos predecir la elevación del sol sobre el horizonte, una vez calculada por procedimientos geométricos su altura teórica, utilizaremos el método de Bennett para efectuar las correcciones.

Denominando $\Delta\hat{e}$ a la corrección por refracción, su expresión matemática es:

$$\Delta\hat{e} = \frac{I}{\tan\left[\hat{e} + \frac{7,31}{\hat{e} + 4,4}\right]} \quad (\Delta\hat{e} \text{ en minutos de arco, } \hat{e} \text{ en grados)}$$

Las condiciones estándar para la aplicación de esta fórmula son:

- Observación a nivel del mar
- Presión atmosférica de 1010 milibares
- Temperatura del aire de 10° Celsius

En caso de poderse determinar otras condiciones de presión y temperatura, la expresión anterior quedaría como:

$$\Delta\hat{e} = \frac{I}{\tan\left[\hat{e} + \frac{7,31}{\hat{e} + 4,4}\right]} \cdot \frac{P}{1010} \cdot \frac{283}{273 + T}$$

($\Delta\hat{e}$ en minutos de arco, \hat{e} en grados), con P en milibares y T en grados Celsius.

J. Meeus [9] indica que esta fórmula aproximada es válida para la longitud de onda de la luz amarilla, para la que el ojo humano tiene mayor sensibilidad. No recoge modificaciones para otras longitudes de onda.

10.1.2. ANUARIO DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE MADRID

El AOAM [17] analiza la refracción atmosférica en sus capítulos “*Efemérides del sol*” y “*Corrección de refracción atmosférica*”. Presenta una serie de tablas para su cálculo que reproducimos en la Tabla 10-1 y la Tabla 10-2.

Las condiciones estándar que da el AOAM, para el uso de dichas tablas, y que incluyen la longitud de onda de la luz, son:

- Longitud de onda $\lambda_0 = 0,575 \mu\text{m}$
- Presión atmosférica $P_0 = 1000 \text{ mbar}$

- Temperatura ambiente $T_0 = 10^\circ \text{C}$

La longitud de onda para las condiciones normales estaría igualmente, como en la propuesta de J. Meeus, dentro de la banda de la luz amarilla. El *Anuario* considera una longitud de onda estándar $\lambda = 0,575 \mu\text{m}^{55}$, aunque aporta una expresión matemática para la corrección de los resultados en caso de considerar otra luz diferente.

Tabla 10-1. Corrección de la refracción atmosférica, entradas por grados para alturas entre 20° y 90° . Extraída del *Anuario Astronómico 2013*. Instituto geográfico Nacional [17].

Corrección de la refracción atmosférica media, R_0
con entradas cada grado para alturas entre 20° y 90°
($\lambda = 0,575 \mu\text{m}$, $P=1000 \text{ mbar}$, $T=10^\circ\text{C}$)

alt. obs.	0° (")	1° (")	2° (")	3° (")	4° (")	5° (")	6° (")	7° (")	8° (")	9° (")
80°	10,1	9,1	8,1	7,0	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0	1,0
70°	20,9	19,8	18,6	17,5	16,5	15,4	14,3	13,3	12,2	11,2
60°	33,1	31,8	30,5	29,2	28,0	26,8	25,5	24,4	23,2	22,0
50°	48,1	46,4	44,8	43,2	41,7	40,2	38,7	37,3	35,8	34,5
40°	68,3	65,9	63,7	61,5	59,4	57,3	55,4	53,5	51,6	49,9
30°	99,1	95,2	91,6	88,1	84,9	81,8	78,8	76,0	73,3	70,8
20°	156,3	148,4	141,1	134,4	128,2	122,4	117,1	112,2	107,5	103,2

Tabla 10-2. Corrección de la refracción para \hat{e} entre 0° y 20° . Extraída del *Anuario Astronómico 2013*. Instituto geográfico Nacional [17].

Corrección de la refracción atmosférica media, R_0
con entradas cada $10'$ para alturas entre 0° y 20°
($\lambda = 0,575 \mu\text{m}$, $P=1000 \text{ mbar}$, $T=10^\circ\text{C}$)

altura observada	$0'$ (' ")	$10'$ (' ")	$20'$ (' ")	$30'$ (' ")	$40'$ (' ")	$50'$ (' ")
19°	2 45	2 44	2 42	2 41	2 39	2 38
18°	2 55	2 53	2 51	2 50	2 48	2 47
17°	3 05	3 04	3 02	3 00	2 58	2 56
16°	3 17	3 15	3 13	3 11	3 09	3 07
15°	3 31	3 29	3 26	3 24	3 22	3 20
14°	3 46	3 43	3 41	3 38	3 36	3 33
13°	4 03	4 00	3 57	3 54	3 51	3 48
12°	4 23	4 19	4 16	4 12	4 09	4 06
11°	4 46	4 42	4 38	4 34	4 30	4 26
10°	5 13	5 08	5 04	4 59	4 54	4 50
9°	5 46	5 40	5 35	5 29	5 24	5 18
8°	6 26	6 19	6 12	6 05	5 59	5 52
7°	7 16	7 07	6 58	6 50	6 42	6 34
6°	8 19	8 08	7 57	7 46	7 36	7 26
5°	9 42	9 26	9 12	8 58	8 44	8 32
4°	11 33	11 12	10 52	10 33	10 15	9 58
3°	14 08	13 38	13 10	12 44	12 19	11 55
2°	17 56	17 11	16 30	15 51	15 14	14 40
1°	23 53	22 41	21 35	20 34	19 37	18 45
0°	33 48	31 45	29 52	28 10	26 37	25 11

⁵⁵ El término λ se utiliza en este apartado con diferente significado al utilizado en otros capítulos.

Para condiciones diferentes a las estándar, el AOAM propone las siguientes correcciones:

- Corrección en λ (longitud de onda de la luz considerada): multiplicar los resultados de la tabla por

$$0,983 + \left[\frac{0,075}{\lambda} \right]^2$$

- Corrección por presión: multiplicar los resultados de la tabla por

$$\frac{P}{1000}$$

- Corrección por temperatura: multiplicar los resultados de la tabla por

$$\frac{283}{273 + T}$$

Por otra parte, el AOAM recomienda, con indicación de que se puede utilizar para trabajos que no requieran una elevada precisión, el uso de la fórmula de Bennett en la forma:

$$\Delta \hat{e} = \frac{60}{\tan \left[\hat{e} + \frac{7,31}{\hat{e} + 4,4} \right]} \cdot \frac{0,28P}{273 + T}$$

($\Delta \hat{e}$ en segundos de arco, \hat{e} en grados)

Expresión que resultaría idéntica a la utilizada por J. Meeus en minutos, salvo en la diferencia de 10mbar en la presión atmosférica estándar.

En caso de no conocerse la presión ni la temperatura, se recomienda, igual que en el caso anterior (J. Meeus), imponer la condición

$$\frac{0,28P}{273 + T} = 1$$

A pesar de la preferencia por las tablas que parece indicar el AOAM, resulta más práctico el uso de la fórmula de Bennett para cálculos masivos a través de hojas de cálculo.

10.1.3. APLICACIÓN INFORMÁTICA DE LA NOAA

La aplicación informática de la NOAA describe en su página web “*Solar Calculations Details*” [20] el procedimiento de cálculo de la posición solar que utiliza en su “*Solar position calculator*”. En la misma, describe el algoritmo de cálculo de la refracción solar⁵⁶.

Según las elevaciones (valores en grados):

$$85^\circ < \hat{e} \leq 90^\circ$$

$$\Delta\hat{e} = 0^\circ$$

$$5^\circ < \hat{e} \leq 85^\circ$$

$$\Delta\hat{e} = \frac{1}{3600} \left(\frac{58,1}{\tan \hat{e}} - \frac{0,07}{\tan^3 \hat{e}} + \frac{0,000086}{\tan^5 \hat{e}} \right)$$

$$-0,575 < \hat{e} \leq 5^\circ$$

$$\Delta\hat{e} = \frac{1}{3600} (1735 - 5182\hat{e} + 103,4\hat{e}^2 - 12,79\hat{e}^3 + 0,711\hat{e}^4)$$

$$\hat{e} < -0,575$$

$$\Delta\hat{e} = \frac{1}{3600} \left(\frac{-20,774}{\tan \hat{e}} \right)$$

Para los instantes de salida y puesta del Sol, calculados directamente y no a través de las fórmulas de acimut y elevación, la NOAA asigna directamente el valor $\Delta\hat{e} = 0,833^\circ$, que se analizará más adelante. No se indican condiciones estándar ni posibles correcciones por temperatura o presión diferentes a las mismas, dado que la aplicación de la NOAA no presenta entradas para presión y temperatura. No obstante, está muy extendido el uso de considerar, a efectos de observaciones, las condiciones normales de

- Presión atmosférica de 1010 milibares
- Temperatura del aire de 10° Celsius

tal y como indica Meeus.

⁵⁶ No han podido encontrarse fuentes primarias diferentes de la propia NOAA para este algoritmo, lo cual nos hace suponer que procede de un proceso de investigación propio. Tengamos en cuenta que, a pesar del número limitado de procedimientos empíricos para el cálculo aproximado de la corrección de la elevación por refracción que se relacionan en la presente obra, existen otros muchos no recogidos aquí.

10.1.4. FÓRMULA “INVERSA” DE SAEMUNDSSON

Determinados procedimientos, entre los que citamos el de la NREL para altas precisiones en *referencia topocéntrica*, y elaborado por Reda & alt. [37] utilizan este algoritmo propuesto por Saemundsson [40]⁵⁷, que hemos citado anteriormente, extraído de los procedimientos de corrección de alturas *observadas*; de ahí su denominación “inverso”.

$$\Delta\hat{e} = \frac{P}{1010} \cdot \frac{283}{273+T} \cdot \frac{1,02}{60 \cdot \tan\left(\hat{e} + \frac{10,3}{\hat{e} + 5,11}\right)}$$

Las condiciones normales en esta fórmula son las indicadas anteriormente, 10°C y 1010 mbar.

⁵⁷ No existe una justificación en la obra citada acerca de la preferencia de los autores por un procedimiento inverso adaptado al cálculo topocéntrico. No obstante lo cual, los resultados, como se verá más adelante en este mismo capítulo, son perfectamente coherentes con los del resto de métodos analizados.

Tabla 10-3. Comparativa para $\Delta\hat{\epsilon}$ por refracción atmosférica.

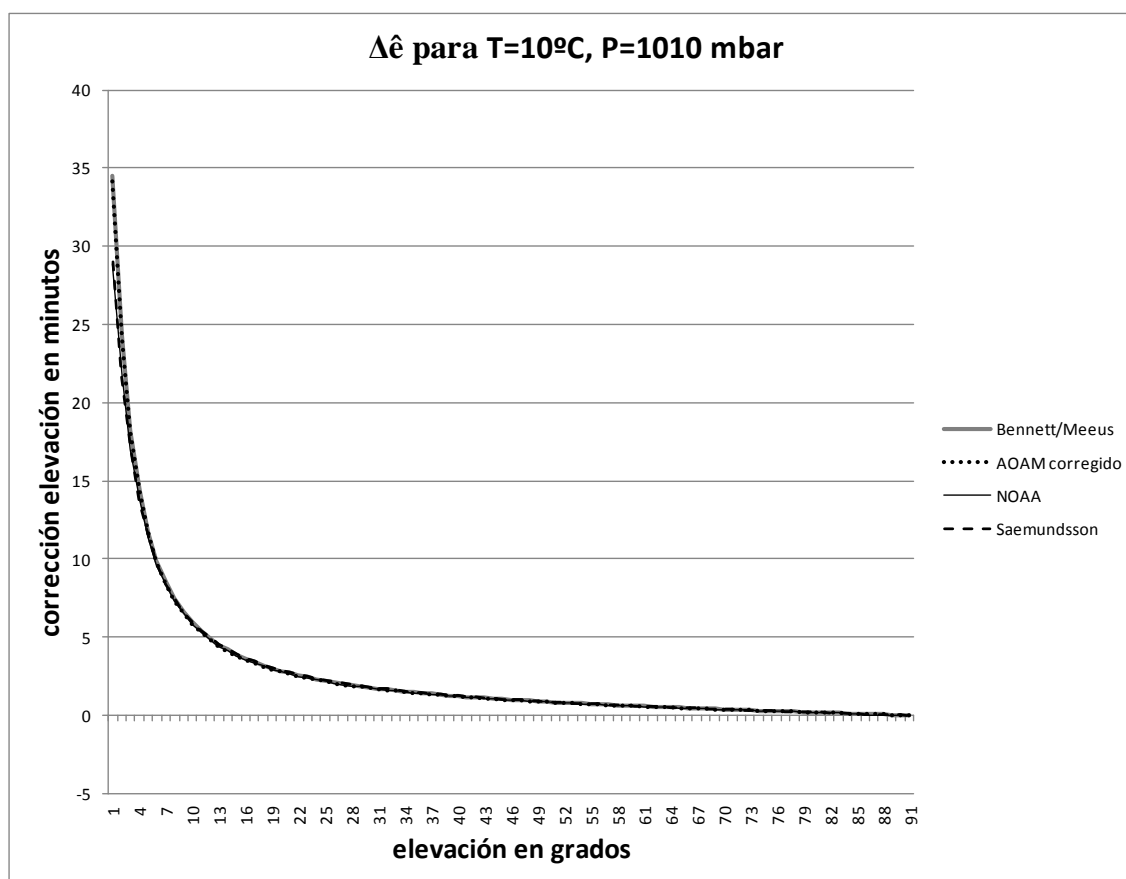
	AOAM					AOAM			
	Meeus /Bennett	TABLA corregido	NOAA	Saemundsson		Meeus /Bennett	TABLA corregido	NOAA	Saemundsson
-1	49,81572636	0	19,83569438	38,79483725	45	0,994847968	0,955	0,9671681	1,012707659
0	34,47753374	33,8	28,91666667	28,98192738	46	0,960808586	0,923333333	0,934059183	0,978092681
1	24,32912258	23,88333333	21,80201667	21,74388679	47	0,927885166	0,891666667	0,902040402	0,944607778
2	18,21607629	17,93333333	17,02093333	16,92571511	48	0,896004919	0,86	0,871040452	0,912179491
3	14,34442244	14,13333333	13,72101667	13,66111279	49	0,865100793	0,831666667	0,84099367	0,880740124
4	11,73612441	11,55	11,33426667	11,36029198	50	0,835110899	0,801666667	0,811839472	0,850227167
5	9,883144234	9,7	9,605559904	9,674126604	51	0,80597801	0,773333333	0,783521853	0,8205828
6	8,508897232	8,316666667	8,320010813	8,395538107	52	0,777649113	0,746666667	0,755988946	0,791753438
7	7,453734632	7,266666667	7,307548677	7,397648484	53	0,750075009	0,72	0,729192636	0,76368934
8	6,620384752	6,433333333	6,49591096	6,599724446	54	0,723209964	0,695	0,703088203	0,736344248
9	5,946735707	5,766666667	5,834560938	5,948503664	55	0,697011387	0,67	0,677634018	0,709675075
10	5,391505468	5,216666667	5,287291165	5,407680803	56	0,671439554	0,645	0,652791259	0,683641618
11	4,926301393	4,766666667	4,827957312	4,951782562	57	0,646457345	0,621666667	0,628523664	0,658206304
12	4,531013812	4,383333333	4,437468495	4,5624744	58	0,622030026	0,596666667	0,604797307	0,63333396
13	4,191033469	4,05	4,101687776	4,226260112	59	0,598125035	0,575	0,581580392	0,608991607
14	3,895509852	3,766666667	3,809988463	3,933005737	60	0,574711802	0,551666667	0,558843078	0,585148277
15	3,636226395	3,516666667	3,554262708	3,674966582	61	0,551761578	0,53	0,536557304	0,561774837
16	3,406853684	3,283333333	3,328235863	3,446130102	62	0,529247285	0,508333333	0,514696651	0,538843842
17	3,202441299	3,083333333	3,126986889	3,241762261	63	0,507143377	0,486666667	0,493236198	0,516329393
18	3,019064378	2,916666667	2,946608407	3,058088091	64	0,485425715	0,466666667	0,472152402	0,494207014
19	2,853572908	2,75	2,783962373	2,892062681	65	0,46407145	0,446666667	0,451422986	0,472453531
20	2,7034107	2,605	2,636502053	2,741204284	66	0,443058924	0,425	0,431026835	0,451046973
21	2,566482577	2,473333333	2,502140574	2,603470877	67	0,422367569	0,406666667	0,410943905	0,429966471
22	2,441055487	2,356666667	2,379152636	2,477167595	68	0,401977821	0,386666667	0,391155133	0,409192171
23	2,325683905	2,24	2,266100132	2,360876461	69	0,381871041	0,366666667	0,371642362	0,388705153
24	2,219152853	2,136666667	2,161775241	2,253402406	70	0,362029439	0,348333333	0,352388267	0,368487357
25	2,120433897	2,04	2,065156419	2,153731381	71	0,342436007	0,33	0,333376284	0,348521511
26	2,028650808	1,951666667	1,975374037	2,060997508	72	0,323074453	0,31	0,314590558	0,32879107
27	1,943052506	1,87	1,891683304	1,974457102	73	0,303929146	0,291666667	0,296015874	0,309280157
28	1,862991559	1,791666667	1,813442747	1,893467947	74	0,284985059	0,275	0,277637611	0,289973503
29	1,787906944	1,72	1,740096961	1,817472624	75	0,26622772	0,256666667	0,259441692	0,270856404
30	1,717310134	1,651666667	1,671162698	1,745985015	76	0,247643161	0,238333333	0,241414535	0,251914664
31	1,65077377	1,586666667	1,606217541	1,678579281	77	0,22921788	0,221666667	0,22354301	0,233134558
32	1,587922395	1,526666667	1,54489065	1,61488083	78	0,210938794	0,203333333	0,205814401	0,214502784
33	1,528424809	1,468333333	1,486855129	1,554558836	79	0,1927932	0,186666667	0,188216365	0,196006428
34	1,471987735	1,365	1,431821713	1,497320045	80	0,174768742	0,168333333	0,170736897	0,177632921
35	1,418350544	1,363333333	1,379533498	1,442903583	81	0,156853372	0,151666667	0,153364298	0,15937001
36	1,367280822	1,313333333	1,329761542	1,391076606	82	0,139035318	0,135	0,136087136	0,14120572
37	1,31857065	1,266666667	1,282301147	1,341630633	83	0,121303052	0,116666667	0,118894224	0,12312832
38	1,272033447	1,221666667	1,236968728	1,294378428	84	0,103645259	0,1	0,10177458	0,105126297
39	1,227501293	1,18	1,19359915	1,249151355	85	0,086050809	0,083333333	0	0,087188322
40	1,184822635	1,138333333	1,152043451	1,205797113	86	0,068508727	0,066666667	0	0,069303224
41	1,143860333	1,098333333	1,112166902	1,164177793	87	0,051008165	0,05	0	0,051459959
42	1,104489972	1,061666667	1,073847328	1,124168206	88	0,033538377	0,033333333	0	0,033647584
43	1,066598402	1,025	1,036973671	1,085654434	89	0,016088689	0,016666667	0	0,015855231
44	1,030082479	0,99	1,001444734	1,048532576	90	-0,00135152	0	0	-0,00192792

10.2. ANÁLISIS COMPARATIVO

Es interesante observar que la aplicación directa de la fórmula de Bennett propuesta por Jean Meeus nos lleva al absurdo de presentar una cifra negativa para la desviación por refracción en el cenit, donde, al no existir componente horizontal en la elevación, no se produce desviación de los rayos. Igualmente con Saemundsson.

Es habitual añadir constantes a los valores obtenidos con el fin de que todos los resultados sean = 0 para $\hat{e} = 90^\circ$ (Meeus [9]). La diferencia no es apreciable.

A la vista de los resultados homogeneizados a minutos de arco que se presentan en la Tabla 10-3 no se aprecian diferencias significativas entre los cuatro métodos utilizados (Meeus-Bennett, tablas del AOAM, Algoritmo de la NOAA, salvo en tramos próximos al grado de elevación (la refracción es máxima en alturas próximas al horizonte). Es de resaltar que los valores extraídos de las tablas del AOAM, que son válidos para condiciones de presión de 1000 mb, han sido corregidos por nosotros a 1010 mb para homogeneizarlos con el resto de los algoritmos.



10-2. Variación de la corrección $\Delta\hat{e}$ por refracción en función de la altitud solar

Los resultados de la tabla se han trasladado a la fig.10-2. Se han eliminado para mayor claridad los valores correspondientes a altitudes negativas. Obsérvese la visible coincidencia de todas las curvas, con ligeras dispersiones en los valores asociados a elevaciones próximas a 0° (con el Sol en el horizonte del observador).

10.3. CÓMO APLICAR LA REFRACCIÓN ATMOSFÉRICA A NUESTROS CÁLCULOS

En primer lugar, para cálculos masivos mediante hojas de cálculo, independientemente del sistema elegido, es conveniente reflejar el valor de la refracción en grados. Tengamos en cuenta que hemos utilizado anteriormente los minutos.

A continuación, el valor de la refracción así obtenido se sumará directamente a la elevación \hat{e} del Sol.

En el caso de decantarnos por el procedimiento NOAA, se aplicará el filtro indicado en 10.1.3 en función del ángulo \hat{e} .

Mención especial merece la aplicación de la refracción al cálculo de los instantes de salida y puesta del Sol (orto y ocaso), que analizamos a continuación.

10.3.1. REFRACCIÓN EN ORTO Y OCASO. SU INFLUENCIA EN EL CÁLCULO DE LAS HORAS DE SOL

En 2.13. dedujimos la expresión que corregía el número de horas de sol debido a la diferencia de radios entre el Sol y la Tierra, denominándolo entonces *complemento angular*. La expresión es⁵⁸:

$$Hs = 24 - \frac{2}{15} \arccos\left(\tan \delta \cdot \tan \Phi + \frac{\sin \sigma}{\cos \delta \cdot \cos \Phi}\right) ,$$

siendo:

$$\sin \sigma = \frac{R_s - R_t}{\rho} \cong \frac{R_s}{\rho} ,$$

con:

R_s = radio solar = 696.000 km

R_t = radio terrestre (ecuatorial) = 6.378,14 km

⁵⁸ Recordamos que la denominación σ utilizada en este apartado, al igual que en el 2.13., no se corresponde con ninguna convención astronómica, y ha sido elegida arbitrariamente por el autor.

ρ = distancia Tierra-Sol, para la que podemos tomar la expresión (apéndice I, punto I.1):

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

Con

v = anomalía verdadera (ver 6.3.1)

e = excentricidad de la órbita (ver caps. 1 y 5)

a = semieje mayor de la órbita terrestre , o 1,000 001 018 UA (ver 1.1).

Para comparar R_t con ρ , tendremos que expresar esta última constante en km, o lo que es lo mismo, a en km en la expresión anterior, multiplicando, como sabemos, por 149 597 871,108.

El considerar la refracción en orto y ocaso supone, en la práctica, mayorar el valor auxiliar σ , debido a que aquella tiende a “elevar” aparentemente el Sol en dichos instantes; en ellos la refracción es máxima, como sabemos (elevación $\hat{e} = 0$).

Por ello, tendríamos que considerar un σ' tal que $\sigma' = \sigma + \Delta\sigma$.

Este $\Delta\sigma$ adopta un valor que, entre 0° y 20°C , puede estimarse ([17]) en

$$33'48'' \sim 0,5633$$

De esta forma, tendremos:

$$\sigma' = \arcsin\left(\frac{R_s}{\rho}\right) + 0,5633$$

Por lo que, directamente, para obtener el número de horas de Sol corregidas por refracción proponemos la expresión, que denominaremos “algoritmo M. Perea⁵⁹,”

$$HScorr = 24 - \frac{2}{15} \arccos\left[\tan\delta \cdot \tan\Phi + \frac{\sin(\arcsin(\frac{R_s}{\rho}) + 0,5633)}{\cos\delta \cdot \cos\Phi}\right] \quad (\text{Ec } 10.1)$$

⁵⁹ No estamos con ello defendiendo de forma irrefutable nuestra autoría, a pesar de que no hemos encontrado esta variante en la literatura consultada. Simplemente, estamos distinguiendo este método propuesto del habitual y ampliamente difundido, utilizado, entre otras instituciones u organizaciones, por la NOAA, que se analizará a continuación.

$$\text{con :} \quad \left(\frac{R_s}{\rho} \right) = \frac{6378,14 \cdot (1 + e \cdot \cos v)}{1,000\,001\,018 \cdot 149\,597\,871,108 \cdot (1 - e^2)}$$

Sin embargo, está generalmente admitido el corregir las horas de Sol directamente mediante una constante que englobaría tanto la corrección por radio solar como la reflexión media para $\hat{e} = 0$.

Esta constante, se encuentra utilizada, por ejemplo, en la aplicación de la NOAA [20], y su valor es:

$$0^{\circ},833 \sim 50'$$

Grosso modo, esta constante se divide en :

16' de corrección por radio solar.

34' de corrección por refracción media

Cifra esta última ligeramente inferior a la propuesta por el *Anuario* [17] para $\hat{e} = 0$.

Nótese que, además, la utilización de esta constante supondría asumir, igualmente, que el valor de ρ se mantiene invariable en el tiempo.

Así, la fórmula (Ec 10.1) quedaría transformada como sigue:

$$HScorr = 24 - \frac{2}{15} \arccos \left[\tan \delta \cdot \tan \Phi + \frac{\sin 0,833}{\cos \delta \cdot \cos \Phi} \right] \quad (\text{Ec. 10.2.})$$

Con lo que, realizando las transformaciones trigonométricas pertinentes, llegaremos a la misma expresión que en (Ec. 10.2.).

10.4. DURACIÓN DEL DÍA: LA CONSTANTE 0,833° (NOAA) VS ALGORITMO DE M. PEREA BASADO EN 2.13.

En la fig. 10-3 representamos las diferencias entre los valores de la aplicación NOAA, obtenidos mediante el procedimiento descrito de considerar el valor constante agrupado para diferencia de radios y refracción de 0°,833, y el correspondiente a la propuesta de ángulo variable del autor de la tesis obtenido en 2-32, es decir:

Valores NOAA - Valores algoritmo M. Perea

O sea: $(\text{Ec. 10.2.}) - (\text{Ec. 10.1.})$

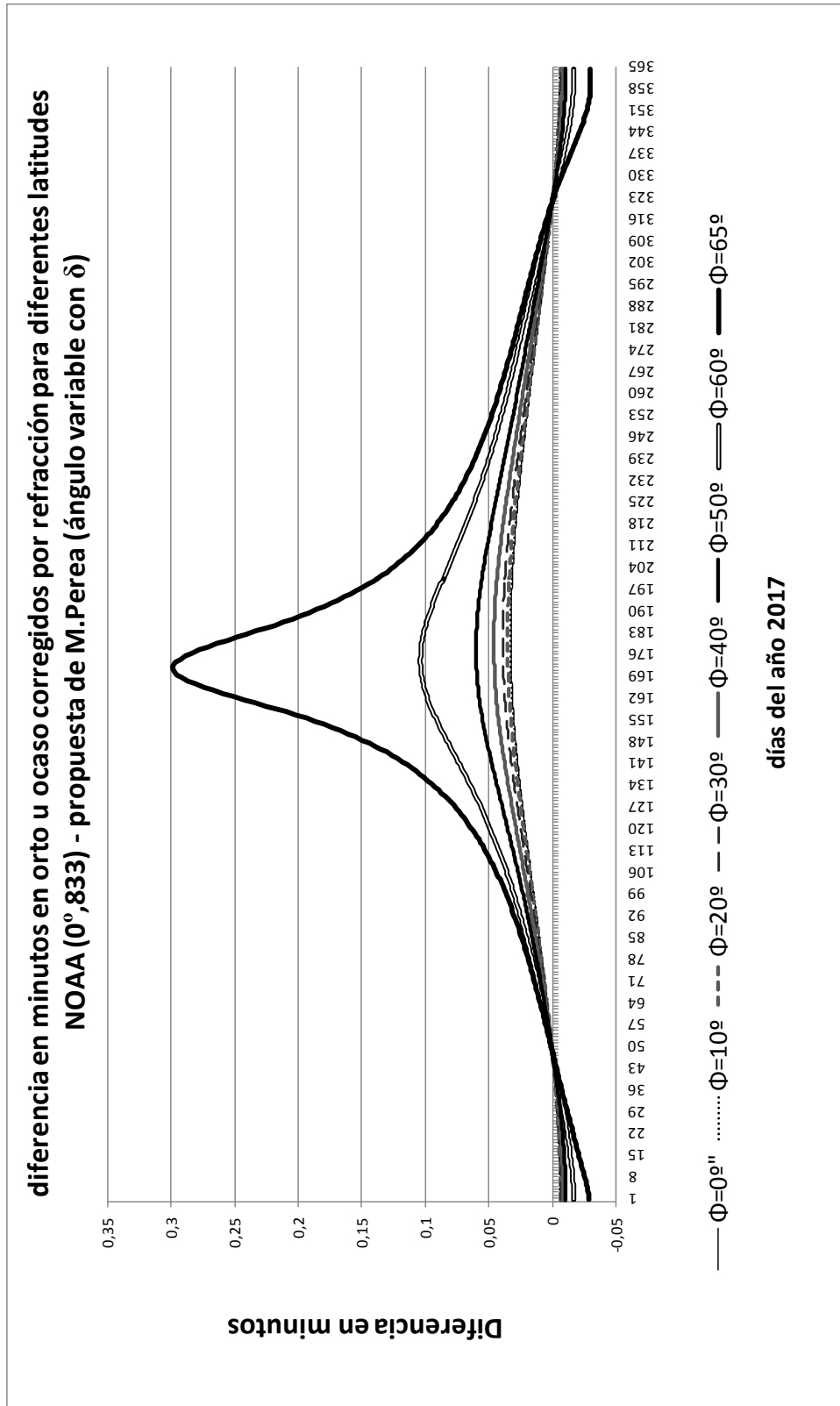
Los valores están en minutos y corresponden a la mitad de la diferencia total de horas de Sol al día entre ambas hipótesis, por lo que el valor obtenido correspondería aproximadamente a la diferencia en minutos que se registraría entre el instante del orto o del ocaso comparando ambos supuestos.

Se han obviado los valores correspondientes a latitudes mayores de 65° por arrojar valores absurdos que no podrían registrarse en la gráfica, debido al hecho de entrar en zonas de noche o día continuo según la estación.

Nótese que los máximos errores en módulo se producen en la proximidad del solsticio de verano.

Igualmente, los valores para latitudes próximas a los círculos polares presentarían los máximos errores. El análisis de valores aislados correspondientes a Φ superiores a 70°, no representados aquí, no arroja, en contra de lo que pudiera esperarse, un incremento en los errores en la zona de los resultados numéricamente coherentes, sino todo lo contrario.

Los valores de la declinación δ son los obtenidos directamente de la aplicación NOAA [20]; aunque no coinciden exactamente con los del MICA [33], son perfectamente válidos para caracterizar la diferencia calculada.



10-3. Comparación entre la corrección constante NOAA y la propuesta M. Perea para el orto solar.

11. LA ECUACIÓN DEL TIEMPO (EoT)

Solis mendaces arguit horas

11.1. INTRODUCCIÓN Y NOCIONES GENERALES

Hasta aquí, al haber utilizado en nuestros cálculos geométricos la hora solar local, hemos considerado siempre que el mediodía es el instante en el que el Sol está a mayor altura para el observador, y situado sobre el meridiano en el que este se encuentra. Es lo que conocemos como *culminación del Sol*. Si, por ejemplo, el observador se sitúa en Madrid, concretamente en el Observatorio Astronómico Nacional, con coordenadas 40°24'35" N, 03°41'11" W (en formato decimal, 40,983333N, 3°,68639W) , tendremos que, dada su diferencia de longitud con respecto a Greenwich (meridiano de referencia para el tiempo universal, TU) el mediodía solar en dicho punto se produciría con un retraso, respecto a dicho meridiano, de:

$$\frac{3^{\circ},68639}{360^{\circ}} \cdot 24h = 0h14,75 \text{ min .}$$

Es decir, que prescindiendo de horarios oficiales de invierno y verano, el mediodía solar (culminación, en términos astronómicos) se produciría todos los días a las 12:14:45 (TU).

11.1.1. LA PARADOJA DEL MEDIODÍA CAMBIANTE

Si observamos las tablas del *Anuario del Observatorio Astronómico Nacional* (años 2012 [16] y 2013[17]), que van referidas a las coordenadas del propio observatorio, comprobaremos que el mediodía solar se produce realmente en unos instantes totalmente cambiantes de un día para otro, sin seguir aparentemente una regla fija. Así, vemos, por ejemplo, que en febrero (Tabla 11-1) la culminación llega a producirse hasta 14m13s más tarde de lo esperado, en concreto los días 10 y 11.

Por el contrario, en noviembre (Tabla 11-1), y siempre tomando como referencia las 12:14:45, antes calculada, observaremos un adelanto máximo del mediodía el 01/11, con casi 16m25s de diferencia con respecto a aquella. El resto del mes, se producen diferentes adelantos y retrasos según la fecha.

Este comportamiento aparentemente anómalo del Sol provoca otras igualmente aparentes paradojas a la vista de los datos del *Anuario*. Por ejemplo, aunque el solsticio de invierno, es decir, el día más corto del año, es el 21/12 en 2012, observamos que la

hora del orto (salida del Sol) sigue retrasándose más allá de esa fecha, y no comienza a adelantarse realmente hasta el 10/01/2013 (Tabla 11-2).

Las horas que aparecen en el *Anuario* son horas oficiales Greenwich (TU), es decir, las que marcan nuestros relojes si los referimos a dicho meridiano.

Tabla 11-1. Orto, ocaso y culminación en febrero y noviembre de 2013.
Extraída del Anuario Astronómico 2013. Instituto Geográfico Nacional [17].

SOL Febrero 2013					SOL Noviembre 2013				
en Madrid (TU)					en Madrid (TU)				
Día	Orto h m	Culmin. h m s		Ocaso h m	Día	Orto h m	Culmin. h m s		Ocaso h m
1 V	7 24	12 28 21	17 33		1 V	6 45	11 58 20	17 12	
2 S	7 23	12 28 28	17 34		2 S	6 46	11 58 19	17 10	
3 D	7 22	12 28 34	17 36		3 D	6 47	11 58 19	17 09	
4 L	7 21	12 28 40	17 37		4 L	6 48	11 58 20	17 08	
5 M	7 20	12 28 45	17 38		5 M	6 49	11 58 21	17 07	
6 M	7 19	12 28 49	17 39		6 M	6 50	11 58 24	17 06	
7 J	7 18	12 28 52	17 40		7 J	6 52	11 58 27	17 05	
8 V	7 17	12 28 55	17 42		8 V	6 53	11 58 31	17 04	
9 S	7 16	12 28 57	17 43		9 S	6 54	11 58 36	17 03	
10 D	7 14	12 28 58	17 44		10 D	6 55	11 58 41	17 02	
11 L	7 13	12 28 58	17 45		11 L	6 56	11 58 48	17 01	
12 M	7 12	12 28 57	17 47		12 M	6 57	11 58 55	17 00	
13 M	7 11	12 28 56	17 48		13 M	6 59	11 59 04	16 59	
14 J	7 09	12 28 54	17 49		14 J	7 00	11 59 13	16 58	
15 V	7 08	12 28 51	17 50		15 V	7 01	11 59 23	16 57	
16 S	7 07	12 28 48	17 51		16 S	7 02	11 59 33	16 57	
17 D	7 06	12 28 43	17 52		17 D	7 03	11 59 45	16 56	
18 L	7 04	12 28 38	17 54		18 L	7 04	11 59 57	16 55	
19 M	7 03	12 28 33	17 55		19 M	7 05	12 00 10	16 54	
20 M	7 01	12 28 26	17 56		20 M	7 07	12 00 24	16 54	
21 J	7 00	12 28 19	17 57		21 J	7 08	12 00 39	16 53	
22 V	6 59	12 28 12	17 58		22 V	7 09	12 00 55	16 53	
23 S	6 57	12 28 03	17 59		23 S	7 10	12 01 11	16 52	
24 D	6 56	12 27 55	18 01		24 D	7 11	12 01 29	16 52	
25 L	6 54	12 27 45	18 02		25 L	7 12	12 01 47	16 51	
26 M	6 53	12 27 35	18 03		26 M	7 13	12 02 05	16 51	
27 M	6 51	12 27 24	18 04		27 M	7 14	12 02 25	16 50	
28 J	6 50	12 27 13	18 05		28 J	7 15	12 02 45	16 50	
					29 V	7 16	12 03 06	16 49	
					30 S	7 18	12 03 28	16 49	

Estas anomalías aparentes se explican fácilmente mediante el concepto de *ecuación del tiempo*, que nos permite cuantificarlas numéricamente para poder determinar la hora exacta del mediodía cuando utilizamos como referencia temporal la hora marcada *por nuestros relojes*.

Esta hora va a ser siempre diferente de la que marque cualquier reloj de sol local bien orientado⁶⁰.

Tabla 11-2. Orto, ocaso y culminación solares en diciembre de 2012 y enero de 2013.
Extraída del Anuario Astronómico 2012 e íd.2013 Instituto Geográfico Nacional. [16] y [17].

SOL Diciembre 2012				SOL Enero 2013			
Día	en Madrid (TU)			Día	en Madrid (TU)		
	Orto h m	Culmin. h m s	Ocaso h m		Orto h m	Culmin. h m s	Ocaso h m
1 S	7 19	12 03 56	16 49	1 M	7 38	12 18 25	16 59
2 D	7 20	12 04 19	16 49	2 M	7 38	12 18 53	17 00
3 L	7 21	12 04 43	16 48	3 J	7 38	12 19 21	17 01
4 M	7 22	12 05 07	16 48	4 V	7 38	12 19 48	17 02
5 M	7 23	12 05 32	16 48	5 S	7 38	12 20 15	17 03
6 J	7 24	12 05 57	16 48	6 D	7 38	12 20 41	17 04
7 V	7 25	12 06 23	16 48	7 L	7 38	12 21 07	17 05
8 S	7 25	12 06 50	16 48	8 M	7 38	12 21 33	17 06
9 D	7 26	12 07 17	16 48	9 M	7 38	12 21 58	17 07
10 L	7 27	12 07 44	16 48	10 J	7 37	12 22 22	17 08
11 M	7 28	12 08 12	16 48	11 V	7 37	12 22 46	17 09
12 M	7 29	12 08 40	16 49	12 S	7 37	12 23 09	17 10
13 J	7 29	12 09 08	16 49	13 D	7 37	12 23 32	17 11
14 V	7 30	12 09 37	16 49	14 L	7 36	12 23 54	17 12
15 S	7 31	12 10 06	16 49	15 M	7 36	12 24 15	17 13
16 D	7 32	12 10 35	16 50	16 M	7 35	12 24 36	17 14
17 L	7 32	12 11 05	16 50	17 J	7 35	12 24 56	17 15
18 M	7 33	12 11 34	16 50	18 V	7 34	12 25 15	17 16
19 M	7 33	12 12 04	16 51	19 S	7 34	12 25 33	17 18
20 J	7 34	12 12 34	16 51	20 D	7 33	12 25 51	17 19
21 V	7 34	12 13 03	16 52	21 L	7 33	12 26 08	17 20
22 S	7 35	12 13 33	16 52	22 M	7 32	12 26 24	17 21
23 D	7 35	12 14 03	16 53	23 M	7 31	12 26 39	17 22
24 L	7 36	12 14 33	16 53	24 J	7 31	12 26 54	17 23
25 M	7 36	12 15 03	16 54	25 V	7 30	12 27 07	17 25
26 M	7 37	12 15 32	16 55	26 S	7 29	12 27 20	17 26
27 J	7 37	12 16 02	16 55	27 D	7 28	12 27 32	17 27
28 V	7 37	12 16 31	16 56	28 L	7 28	12 27 44	17 28
29 S	7 37	12 17 00	16 57	29 M	7 27	12 27 54	17 29
30 D	7 38	12 17 29	16 57	30 M	7 26	12 28 04	17 31
31 L	7 38	12 17 57	16 58	31 J	7 25	12 28 13	17 32

Inicio del invierno el día 21
a las 11^h 12^m de TU.

⁶⁰ A excepción de cuatro instantes al año, como se verá más adelante.

La *ecuación del tiempo* (abreviadamente EoT) nos permite, conociendo el número de horas de Sol en un día determinado, situar en tiempo medio con exactitud tanto el mediodía como los instantes del orto (salida) y ocaso (puesta) solares.

11.2. DEFINICIONES PARA LA ECUACIÓN DEL TIEMPO

Podemos afirmar que la ecuación del tiempo es la diferencia en minutos entre el instante del mediodía real, es decir, el correspondiente al paso del Sol por el meridiano de Greenwich (12:00 en hora solar) y el mediodía marcado por los relojes basados en el tiempo medio (incidiremos sobre ello en 11.3.), como se desprende de los ejemplos presentados anteriormente. Desde un punto de vista analítico, y atendiendo a diversos autores, la ecuación del tiempo se define de muy diversas formas, no todas ellas intuitivas o sencillas.

Así, para Jean Meeus [9],

“The equation of time is the difference between apparent and mean time. In other words, it is the difference between the hour angles of the true Sun and the mean Sun”

Peter Duffett-Smith [10] indica:

“Equation of time: the difference between the mean solar time and the real solar time”.

En el glosario del MICA [33] (Multiyear Interactive Computer Almanac 1800-2050) leemos:

“...[equation of time]. The difference apparent solar time minus mean solar time”

Se trata de una definición muy escueta, que nos será de utilidad más adelante para elegir el signo de la EoT obtenido analíticamente.

Martín Asín [5], de forma más compleja, en el contexto de los *soles verdadero, ficticio y medio* (que no necesitamos desarrollar aquí), la define como:

“La diferencia entre las ascensiones rectas del Sol verdadero y ficticio”.

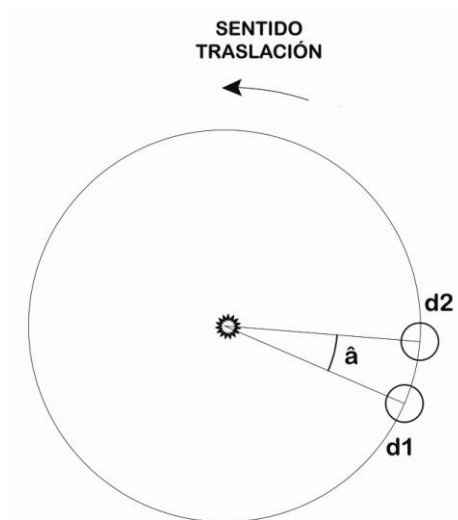
Esta última definición nos da idea de la complejidad de ciertos conceptos astronómicos, a los cuales estamos buscando una alternativa práctica más accesible.

11.3. DEDUCCIÓN INTUITIVA

El concepto de la ecuación del tiempo es extremadamente sencillo si atendemos a las causas que la componen, y su deducción, aun teniendo en cuenta diferentes parámetros cambiantes en la rotación y traslación terrestres, no lo es menos.

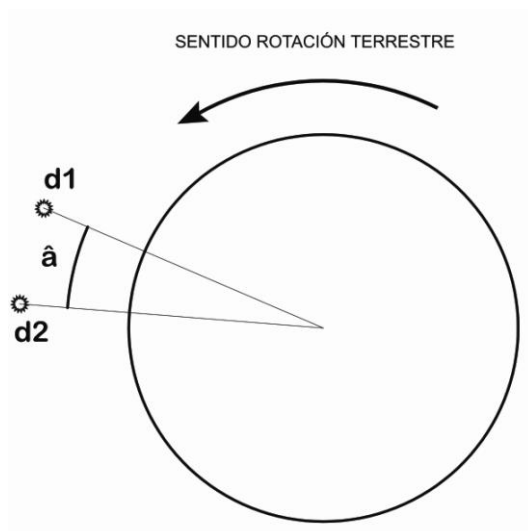
Partamos, pues, de la descomposición de la ecuación del tiempo (EoT) en sus dos factores constitutivos: el primero, debido a la forma elíptica de la órbita terrestre, y el segundo, debido a la inclinación del eje terrestre con respecto al plano de la eclíptica, ϵ .

Para nuestros relojes terrestres, de horas iguales, y con un patrón de tiempo rígido de acuerdo con una definición absoluta del segundo como unidad de medida del mismo, los instantes del mediodía (12:00 en hora media) se contabilizan, en una primera aproximación, como si la Tierra girase alrededor del Sol con una velocidad angular constante, y como si el eje de rotación terrestre estuviera orientado de tal forma que el mediodía (instante en el que el Sol se sitúa sobre la meridiana) se produjera igualmente a intervalos constantes con el paso de los días, de acuerdo con la fig. 11-1, esto es, con el eje de rotación perpendicular al plano de la eclíptica:



11-1. Traslación ideal correspondiente al tiempo medio.

Se puede observar que, con este modelo, al considerarse constante el ángulo girado en la traslación y ser el eje terrestre normal a la eclíptica, el giro de traslación diario coincide con el complemento angular $\hat{\alpha}$ que debe recorrer nuestro planeta cada día, más allá de la rotación completa, para que el Sol vuelva a observarse al mediodía sobre el mismo meridiano (fig. 11-2).



11-2. Complemento angular y rotación terrestre

En efecto, considerando valores medios, el período de rotación terrestre sería de $23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}},099$ [17] (23,9344719444 horas), mientras que el transcurrido entre mediodía y mediodía sería 24h debido al complemento angular citado; o lo que es lo mismo, de forma aproximada, se verifica que

$$(24 - 23,9344719444) \cdot 366,25 \sim 24$$

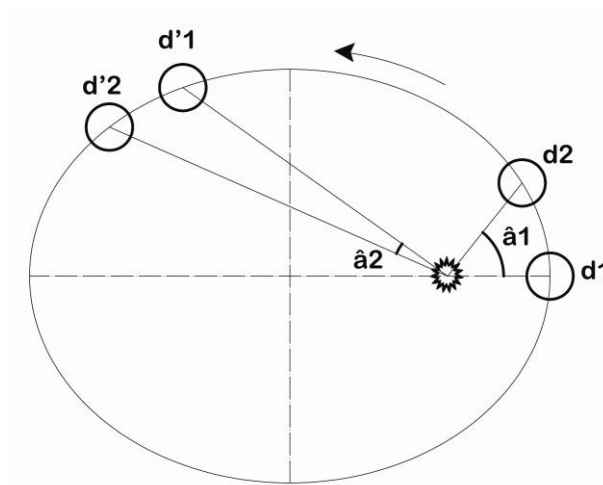
Al cabo del año, el número de rotaciones completas de la Tierra sobre su eje es una más que el número de días naturales.

Sin embargo, aunque la órbita terrestre tiene actualmente una bajísima excentricidad ($e=0,01670344$ en 2013 [17]), el ángulo girado por nuestro planeta en su movimiento de traslación alrededor del Sol medido desde el perihelio no es uniforme en el tiempo, de acuerdo con la segunda ley de Kepler. Ello implica que para completar su giro con respecto al sol, todos los días tienen un complemento angular diferente, de acuerdo con la fig. 11-3.

Por otra parte, el eje de rotación terrestre no es perpendicular al plano de la eclíptica, sino que forma un ángulo ϵ con su vector director⁶¹. Ello implica, como deduciremos analíticamente más adelante, que el giro debido a la traslación terrestre proyectado sobre el plano del ecuador no sea uniforme.

Estos dos factores conforman dos términos que, sumados, integrarán la expresión completa de la ecuación del tiempo.

⁶¹ Como se ha indicado anteriormente, el valor de ϵ que se utilizará en este capítulo es $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$.



11-3. Segunda ley de Kepler: velocidad areolar constante. El ángulo $\hat{a}1$ es mayor que $\hat{a}2$ al estar situada la Tierra más cerca del Sol entre $d1$ y $d2$ que entre $d'1$ y $d'2$.

11.4. PRIMER TÉRMINO DE LA EoT DEBIDO A LA EXCENTRICIDAD DE LA ÓRBITA

Si consideramos como punto de partida el perihelio, en él, por su mayor proximidad al sol, la Tierra tendrá la máxima velocidad de traslación. Dado que el efecto de la variación del ángulo recorrido con respecto al valor promedio es acumulativo, durante un cierto período de tiempo el mediodía real, en lo que a este término se refiere, se situará por delante de las 12:00 en hora media. Para conocer la magnitud de este adelanto (o retraso, en otros instantes a lo largo del año, dependiendo de las fechas), bastará con comparar el ángulo medio recorrido por la Tierra desde un punto conocido y compararlo con el ángulo real desde dicho punto.

Por ejemplo, desde el equinoccio⁶², teniéndose L_0 (longitud media) y L (longitud verdadera)⁶³.

⁶² Equinoccio medio de la fecha. Por tanto, para la longitud media L_0 en ese instante no será necesario considerar corrección por nutación.

⁶³ Véase que no estamos tomando L_t , pues en este término solamente analizamos diferencias angulares entre centros del planeta en dos posiciones. En el siguiente término tendremos en cuenta las variaciones relativas a la nutación.

Si tomamos el equinoccio como origen, tendremos, considerando la aberración de la luz (que podemos tomar como similar en ambos casos) y la nutación en longitud, que el primer término de la EoT, al que denominaremos EoT_1 , será, en grados:

$$EoT_1 = L_0 + L$$

Que, teniendo en cuenta que:

$$C = \nu - M = L - L_0 \quad (\text{ver 6.2}),$$

podemos reescribir como:

$$EoT_1 = -C$$

Este primer término EoT_1 lo hemos expresado en grados, como se dijo; lo habitual será expresarlo en minutos.

Los valores resultantes de la misma pueden ser positivos o negativos.

Para el cálculo de la ecuación de centro en una fecha determinada, el procedimiento más sencillo sería la aplicación directa de la expresión polinómica estudiada anteriormente (ver subcap. 6.3.1.⁶⁴):

$$C = (1,914602 - 0,004817T - 0,000014T^2) \sin M + (0,019993 - 0,000101T) \sin 2M + 0,000289 \sin 3M$$

Siendo:

$$M = 357^\circ,52911 + 35999^\circ,05029T + 0^\circ,0001537T^2,$$

con $T = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$ en ambos casos.

El paso a minutos de tiempo de diferencia entre el tiempo medio y real es muy sencillo. La rotación completa de la Tierra en 1 día es de 360° en $23\text{h}56'04'',099$ (AOAM), es decir, $23,93447194$ horas. Por lo tanto, la diferencia o término de la ecuación del tiempo debida a la excentricidad de la órbita será, teniendo en cuenta que para la misma se

⁶⁴ Estamos utilizando las expresiones simplificadas de J. Meeus [9].

prefiere el criterio de considerar positivo el adelanto del reloj medio respecto a la posición del Sol ⁶⁵(o de la Tierra en nuestro caso):

$$EoT_1 = -\frac{C}{360} \cdot 23,93447194 \cdot 60 = -3,989078657 \cdot C$$

Donde el tiempo EoT_1 se mide en minutos, como ya indicamos.

Ejemplo práctico.

Si tomamos como ejemplo la fecha $JD = 2464523,50$ (fecha que corresponde al 15/07/2035 a las 00:00 Greenwich), tendremos que, de acuerdo con el punto anterior,

$$T = 0,35533196$$

$$M = 189,14234696$$

$$C = -0,29780688$$

Por lo que:

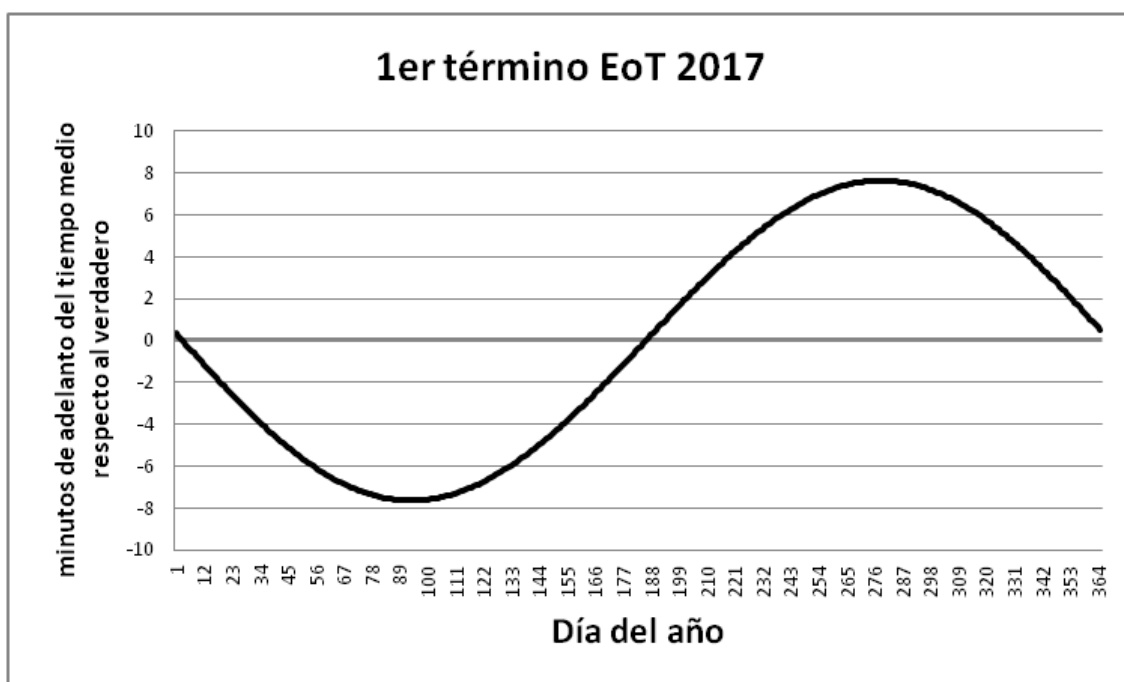
$$EoT_1 = -\frac{C}{360} \cdot 23,93447194 \cdot 60 = 1,18797509 \text{ minutos}$$

Como hemos indicado más arriba, C puede ser positiva o negativa. El valor 0 se obtiene en el perihelio y en el afelio (salvo la pequeña corrección por nutación, que a efectos de representaciones gráficas es insignificante), y se tienen un máximo y un mínimo anuales.

⁶⁵ Ha sido tradicional que los tratados franceses consideraran durante mucho tiempo el signo anterior cambiado, es decir, $EoT =$ adelanto de la posición del Sol con respecto al tiempo medio. Actualmente no se suele aceptar esta interpretación, por lo que se recoge aquí el criterio adoptado universalmente hoy en día.

11.4.1. VARIACIÓN ANUAL DEL PRIMER TÉRMINO DE LA EOT DEBIDO A LA ÓRBITA ELÍPTICA

Extendiendo el algoritmo anterior a todas las fechas de 2017, obtendremos la fig. 11-4, donde se puede comprobar la evolución de la componente EoT_1 de la ecuación del tiempo a lo largo del mismo⁶⁶. Por las características inherentes a esta función, que depende del giro del eje de ápsides, su perfil va variando lentamente a lo largo de los años con respecto a los hitos del calendario.



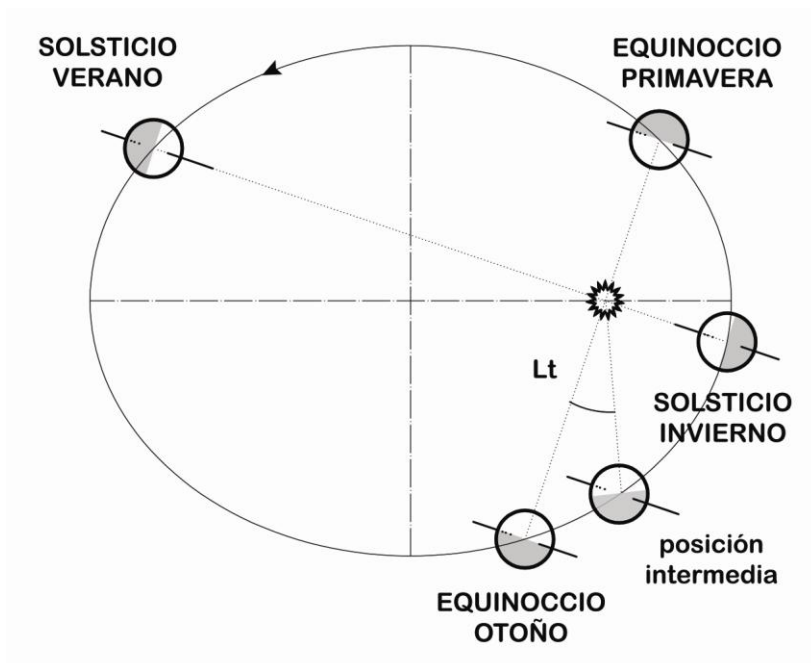
11-4. Primer término de la ecuación del tiempo 2017.

⁶⁶ Se han calculado las JD para cada día del 2017 a las 00:00:00 UT.

11.5. SEGUNDO TÉRMINO DE LA EoT DEBIDO A LA INCLINACIÓN DEL EJE DE ROTACIÓN CON RESPECTO A LA ECLÍPTICA: REDUCCIÓN AL ECUADOR

Este término es más complejo de visualizar, y para ello la mejor forma de analizarlo es mediante las figs. 11-5 y 11-6.

En la fig. 11-5 podemos observar la posición relativa del eje de rotación con respecto al vector Tierra-Sol, que es diferente a lo largo del año.



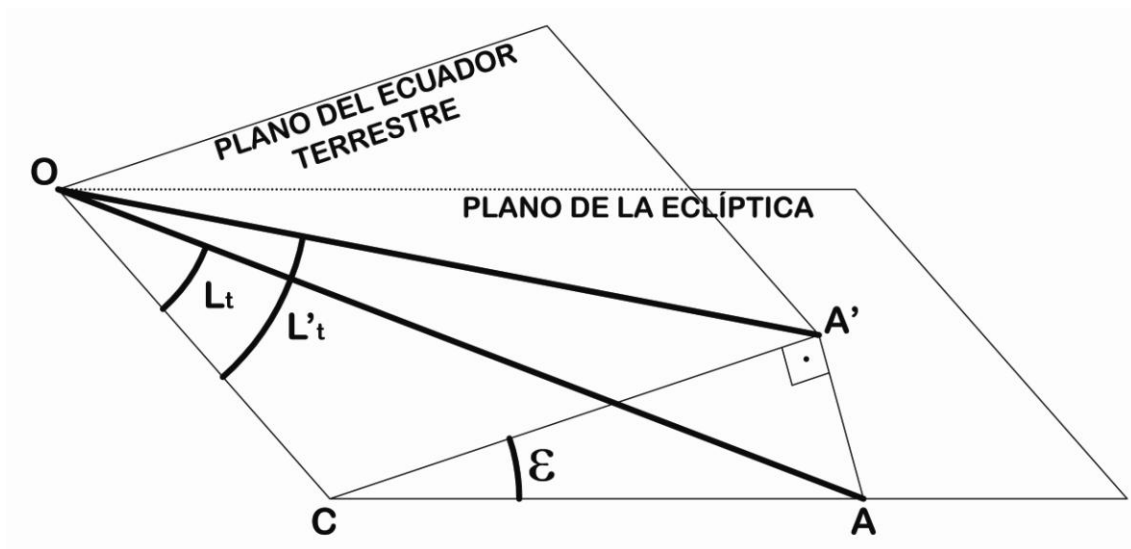
11-5. Vector Tierra-Sol respecto al eje de rotación terrestre

Vamos a analizar las consecuencias de la variación del ángulo L_t medido desde el equinoccio de otoño. En la fig. 11-5 tenemos representada la órbita. Ahora observemos su correspondencia con respecto a la Tierra en la fig. 11-6. En ella se ha representado la esfera terrestre y las posiciones aparentes del Sol desde la Tierra en el equinoccio de otoño y en un punto intermedio con longitud aparente L_t .

En el equinoccio de otoño, el vector Tierra-Sol corta a la esfera terrestre en C. En el solsticio de invierno, en R. En un punto intermedio, en P. Es fácil deducir que la suma total de los complementos angulares de la rotación desde el solsticio de verano sería igual a L_t si el eje de rotación terrestre coincidiera con la perpendicular al plano de la eclíptica.

plano de la eclíptica sobre el plano ecuatorial, y es muy sencillo encontrar la relación entre los ángulos L_t y L'_t .

Para ello, tendremos en cuenta la fig. 11-7:



11-7. Relaciones angulares entre L (sobre el plano de la eclíptica) y L' (sobre el plano del ecuador).

Tenemos que:

$$CA = R \cdot \sin L_t$$

y que

$$CA' = R \cdot \sin L_t \cdot \cos \varepsilon$$

por lo que

$$OC = R \cdot \cos L_t = OA' \cdot \cos L'_t$$

y, consecuentemente,

$$OA' = R \cdot \frac{\cos L_t}{\cos L'_t}$$

asi que:

$$CA' = OA' \cdot \sin L'_t = R \sin L_t \cdot \cos \varepsilon$$

Por tanto,

$$\sin L'_t = \frac{R}{OA'} \cdot \sin L_t \cdot \cos \varepsilon = \frac{\cos L'_t}{\cos L_t} \cdot \sin L_t \cdot \cos \varepsilon$$

Y, finalmente,
$$\tan L_t' = \tan L_t \cdot \cos \varepsilon \quad (\text{Ec. 11.1})$$

Los valores de L_t y L_t' se igualan en los solsticios y equinoccios, lo cual puede deducirse tanto de la figura 11-6 como analíticamente de la igualdad anterior. En efecto, en esos puntos se verifica que

$L_t = 0$: equinoccio de otoño

$L_t = \frac{\pi}{2}$: solsticio de invierno

$L_t = \pi$: equinoccio de primavera

$L_t = \frac{3\pi}{2}$: solsticio de verano

La ecuación (Ec. 11.1) también puede escribirse en función de la recíproca:

$$L_t' = \arctan(\tan L_t \cdot \cos \varepsilon) \quad , \quad (\text{Ec. 11.2})$$

teniendo esta ecuación el inconveniente de que presenta valores impropios en $L_t = \frac{\pi}{2}$ y en $L_t = \frac{3\pi}{2}$, al igual, por otra parte, que (Ec. 11.1).

Por ello, en cálculos programados mediante hoja de cálculo es interesante utilizar la función arctan2, de uso universal. Según la propia descripción del tutorial de Excel-Microsoft (versión 2007):

ATAN2(a;b) es igual a ATAN(b/a), con la excepción de que "a" puede ser igual a 0 en ATAN2

En este caso (a=0), la función nos devuelve el valor $\pi/2$.

Quedando la expresión (Ec. 11.2), en radianes, como:

$$L_t' = \text{ATAN } 2(\cos L_t; \sin L_t \cdot \cos \varepsilon)$$

Conviene tener en cuenta también, para cálculos programados, la siguiente corrección según el valor que adopte la función recíproca:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } L_t' = ATAN 2(\cos L_t; \sin L_t \cdot \cos \varepsilon) > 0, L_t' = ATAN 2(\cos L_t; \sin L_t \cdot \cos \varepsilon) \\ \text{Si } L_t' = ATAN 2(\cos L_t; \sin L_t \cdot \cos \varepsilon) < 0, L_t' = ATAN 2(\cos L_t; \sin L_t \cdot \cos \varepsilon) + 360^\circ \end{array} \right\}$$

Condicionales que designamos para posteriores referencias como (Ecs 11.3)

Finalmente, el valor buscado será el desfase angular $L_t - L_t'$ corregido convenientemente, de la misma forma que en el caso del primer término, en función del período de revolución diario de la Tierra:

$$EoT_2 = \frac{(L_t - L_t')}{360} \cdot 23,93447194 \cdot 60 = 3,989078657 \cdot (L_t - L_t')$$

Fórmula en la que está incluido el criterio de signos habitual (reloj medio adelantado a reloj de sol = positivo). La expresión “*reducción al ecuador*”⁶⁷ con la que se suele aludir a este término, procede del hecho de proyectar sobre el plano ecuatorial terrestre el ángulo L_t para obtener L_t' .

Ejemplo práctico.

Tomando el mismo valor de JD que en caso anterior de este capítulo, (JD =2464523,50) Debemos calcular primero L (longitud verdadera), con el procedimiento indicado en 6.3.1. Partiendo de la longitud media, L_0 , tendremos:

$$L_0 = 100^\circ,46646 + 36000^\circ,76983T + 0^\circ,0003032T^2$$

$$C = (1,914602 - 0,004817T - 0,000014T^2) \sin M + (0,019993 - 0,000101T) \sin 2M + 0,000289 \sin 3M$$

Teniéndose, para ambas ecuaciones:

⁶⁷ Se trata de una denominación habitual en Astronomía.

$$T = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$$

Así que:

$$L = L_0 + C$$

$$L_0 = 12892,69076217 = 292,69076217$$

$$C = -0,29780360$$

$$L = 292,39295529$$

Pero,

$$L_t = L + \Delta\psi + \Delta\tau$$

$\Delta\psi$ y $\Delta\tau$ pueden calcularse por cualquiera de los procedimientos estudiados en los caps. 7 y 8. Recordemos que la aberración de la luz siempre será negativa.

Si no se requieren una elevadas precisiones, podemos considerar:

$$\Delta\psi = -0,00478 \cdot \sin(125^\circ,04 - 1934^\circ,136JC) \quad (\text{ver subcap. 7.4.2.})$$

$$\Delta\tau = -0,00569161 \quad (\text{ver cap. 8})$$

Ambas simplificaciones están recogidas en la aplicación NOAA. Incluso, como sabemos, esta aplicación trunca el valor $\Delta\tau$ a:

$$\Delta\tau = -0,00569$$

Si son requeridas mayores precisiones, pueden utilizarse los procedimientos alternativos utilizados en los capítulos y subcapítulos mencionados: nutación más completa, $\Delta\tau$ en función de ρ , etc.

Tomando como referencia las expresiones anteriores,

$$\Delta\psi = -0,00180765$$

$$\Delta\tau = -0,00569000 \text{ ,}$$

por lo que:

$$L_t = 292,38545764$$

Ahora pasamos a calcular:

$$L_t' = ATAN 2(\cos L_t; \sin L_t \cdot \cos \varepsilon) ,$$

teniendo en cuenta que el valor de ε será el resultante de la oblicuidad de la órbita corregida por la nutación, es decir:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$$

Para el primer término, podemos utilizar, si no deseamos una gran precisión, la fórmula simplificada de Meeus (cap. 5.2):

$$\varepsilon_0 = 23^{\circ}26'21,448'' - 46,8150''T - 0,00059''T^2 + 0,001813''T^3 ,$$

con:
$$T = \frac{JD - 2451545,0}{36525} .$$

Para el segundo término, podemos utilizar cualquiera de las expresiones del cap. 7.

La NOAA utiliza como expresión simplificada la presentada en 7.4.2.

$$\Delta\varepsilon = 0,00256 \cdot \cos(125^{\circ},04 - 1934^{\circ},136T) ,$$

con la misma definición de T anterior.

Así, en nuestro caso, tendremos:

$$T = 0,35533196$$

$$\varepsilon_0 = 23,43467032$$

$$\Delta\varepsilon = -0,00236989$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon = 23,43230043 ,$$

por lo que:

$$L'_t = ATAN2(\cos L_t; \sin L_t \cdot \cos \varepsilon) = -65,82500645 .$$

Pero debemos tener en cuenta, de acuerdo con los condicionales (Ecs. 11.3), que como $L'_t < 0$, entonces debemos añadirle 360° :

$$L'_t = -65,82500645 + 360 = 294,17499355$$

Y, finalmente, calcularemos:

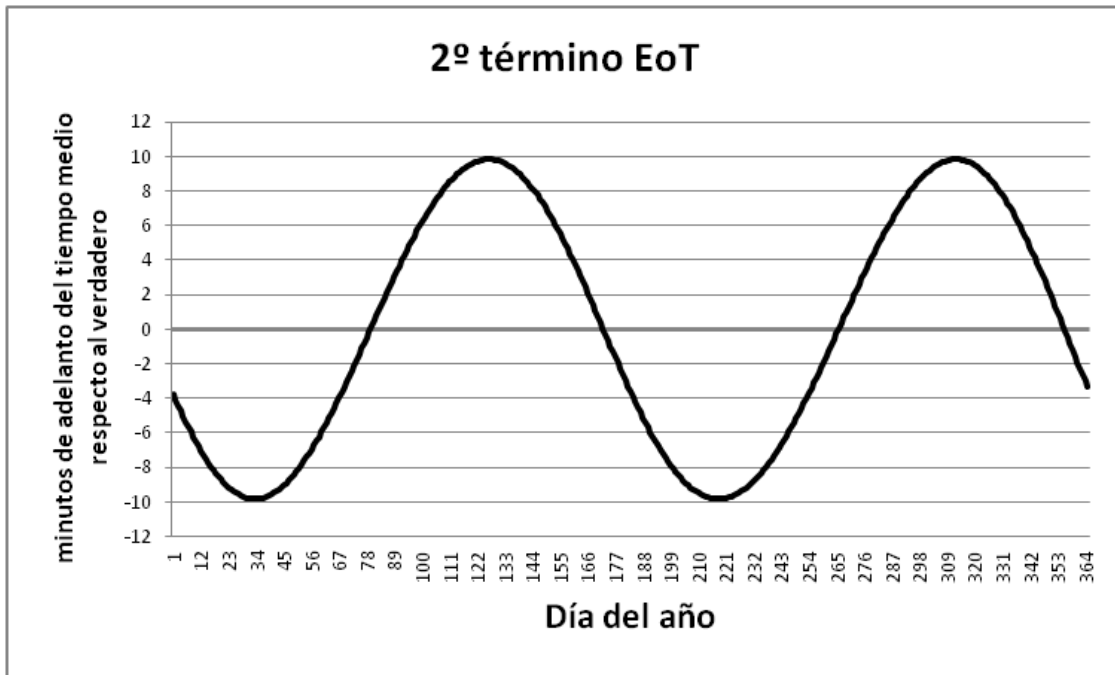
$$EoT_2 = \frac{(L_t - L'_t)}{360} \cdot 23,93447194 * 60 = -7,13859949$$

Valor que obtenemos directamente en minutos.

Si analizamos los valores obtenidos a través de NOAA, podemos observar pequeñas discrepancias en los resultados, que analizamos en el subcapítulo 11.7.

11.5.1. VARIACIÓN ANUAL DEL SEGUNDO TÉRMINO DE LA EoT DEBIDO A LA INCLINACIÓN DEL EJE DE ROTACIÓN

Si representamos esta función para 2017, siguiendo el algoritmo anterior, tendremos la fig. 11-8:



11-8. Segundo término ecuación del tiempo 2017

Al contrario que el primer término de la ecuación del tiempo, este segundo término, que depende de la fecha del equinoccio vernal, se ajusta con mucha precisión al calendario gregoriano actual, ideado para mantener en el tiempo aproximadamente constante la fecha del equinoccio en torno al 21 de marzo. Por ello, aparte de pequeñas oscilaciones debidas a la *discretización* de las correcciones (años bisiestos), las variaciones temporales a lo largo de los años de esta función son inapreciables en comparación con las de la correspondiente al primer término.

11.6. EoT: RESULTANTE DE LA SUMA DE SUS DOS TÉRMINOS

La ecuación del tiempo es la resultante de la suma de los dos términos anteriores, por lo que su representación es inmediata.

Es decir, la *ecuación del tiempo EoT*, en minutos, vale:

$$EoT = EoT_1 + EoT_2 = \frac{23,93447194}{360} \cdot 60(L_t - L' - C) = 3,989078657 \cdot (L_t - L' - C)$$

De esta forma, podemos representar directamente la ecuación del tiempo a lo largo del año.

En los ejemplos prácticos anteriores, que planteábamos para un mismo instante, si quisiéramos calcular la ecuación del tiempo completa bastaría con sumar los valores numéricos obtenidos:

$$EoT = EoT_1 + EoT_2 = 1,18797509 - 7,13859949 = -5,95062440 \text{ minutos.}$$

Como vemos, el signo es negativo, por lo que el reloj medio estaría retrasado con respecto al reloj solar en aproximadamente 6 minutos.

11.7. ALTERNATIVAS PARA EL CÁLCULO DIRECTO DE LA ECUACIÓN DEL TIEMPO

En nuestro estudio de la ecuación del tiempo hemos aplicado directamente las deducciones gráficas que nos han permitido obtener los valores de la misma de forma intuitiva. Sin embargo, diferentes autores o aplicaciones utilizan otros métodos, algunos de ellos basados en aproximaciones polinómicas o senoidales.

También suele calcularse la ecuación del tiempo a partir de la ascensión recta (α), concepto de gran importancia en Astronomía, pero que no hemos necesitado definir para obtener los valores de aquella. Es interesante recalcar que la ascensión recta, junto a la declinación, es una las dos coordenadas esféricas que definen la posición de un astro o planeta en el firmamento, y que se mide sobre el plano del ecuador. No es extraña, pues, su relación directa con el ángulo L' que hemos calculado sobre dicho plano, aunque metodológicamente hemos seguido un camino diferente.

11.7.1. ALGORITMO DE SMART

Recogemos, a continuación, el algoritmo aproximado de cálculo presente en la aplicación simplificada de la NOAA [20]⁶⁸, que opta por una definición matemática

⁶⁸ El análisis crítico completo del algoritmo simplificado de la NOAA se realiza en el cap. 13. No obstante, hemos creído conveniente anticipar este apartado en el contexto del estudio de la ecuación del tiempo.

directa, en lugar de calcular los dos términos clásicos. Está basado en los desarrollos en serie de Smart [7], aunque el astrónomo no es citado en su página web, que atribuye todas las expresiones utilizadas a Meeus. En [9] no se menciona este algoritmo de cálculo, optándose por otro diferente que analizaremos en el siguiente punto.

NOAA define en primer lugar, dentro de su hoja de cálculo, al igual que Smart, la variable auxiliar

$$V_y = \left[\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right]^2$$

Hace, también uso de la magnitud L_m = longitud media desde el equinoccio o punto Aries de la fecha considerada⁶⁹. Teniendo en cuenta que la aplicación utiliza longitudes geocéntricas, es decir, desde el equinoccio de primavera,

$$Eot = 4 \cdot [V_y \cdot \sin(2L_m) - 2e \sin M + 4eV_y \cdot \sin M \cdot \cos(2L_m) - 0,5 \cdot V_y^2 \cdot \sin(4L_m) - 1,25e^2 \sin(2M)]$$

Si utilizamos longitudes heliocéntricas tomadas desde el equinoccio de otoño, el resultado de la expresión no varía, ya que, si $L_0 = L_m + 180^\circ$:

$$\sin(2L_0) = \sin(2 \cdot (L_m + 180^\circ)) = \sin(360^\circ + 2L_m) = \sin(2L_m)$$

$$\sin(4L_0) = \sin(4 \cdot (L_m + 180^\circ)) = \sin(720^\circ + 4L_m) = \sin(4L_m)$$

De esta forma, para el mismo instante del ejemplo anterior (puntos 11.4 y 11.5), obtendríamos de forma directa el valor:

$$EoT = -5,963777 \text{ min.}$$

Que difiere de la obtenida anteriormente en, aproximadamente, 0,8 segundos.

Más adelante se realiza una comparación de resultados obtenidos por este procedimiento y mediante el anterior.

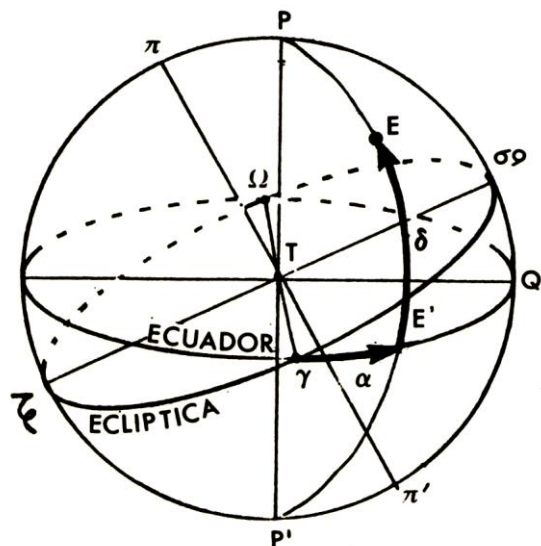
⁶⁹ Adoptamos la denominación L_m en este caso para la longitud media respecto al equinoccio de primavera (sistema geocéntrico) frente a L_0 (heliocéntrico).

11.7.2. EL CONCEPTO DE ASCENSIÓN RECTA COMO BASE DE OTROS ALGORITMOS

Meeus formula la EoT en [9] como sigue⁷⁰:

$$EoT = L_0 - 0,0057183 - \alpha + \Delta\psi \cdot \cos \varepsilon$$

L_0 es la longitud media, y α se conoce en Astronomía como *ascensión recta de un astro*, siendo su definición, teniendo en cuenta la fig. 11-9 donde se representa la esfera celeste, “el arco $\gamma E'$ contado sobre el ecuador, a partir del punto γ , y hasta el meridiano de la estrella E, en sentido directo (contrario a las agujas del reloj)”[5].



11-9. Esquema auxiliar para definir α . F. Martín Asín. “Astronomía”. © Ed. Paraninfo, 1982 [5]

Aunque todos nuestros desarrollos prescinden de este concepto y de la utilización de los diferentes sistemas de coordenadas habitualmente presentes en los libros de Astronomía, conviene contextualizar este ángulo y compararlo con nuestras deducciones. Como vemos en la fig. 11-9, el valor α en la esfera celeste es similar al de la longitud geográfica en la Tierra. Si observamos detenidamente el dibujo, concluiremos que α sería la proyección de L_t sobre el plano del ecuador terrestre, y

⁷⁰ La diferencia máxima entre los valores obtenidos mediante este algoritmo y los correspondientes a la expresión utilizada por nosotros como suma de dos términos es inferior a 0,11 s. en el período comprendido entre 2017 y 2047. Meeus, en este caso, realiza una corrección de $\Delta\tau$ de acuerdo con el FK5; y, consistentemente con éste, corrige α con $\Delta\psi \cdot \cos \varepsilon$ para restar la componente de la nutación en longitud y considerar el equinoccio medio de la fecha. Nosotros no hemos considerado estas hipótesis, y hemos optado por una deducción geométrica suficientemente precisa y conceptualmente consistente que, como hemos indicado, nos lleva a resultados similares.

equivaldría al valor L_t' que hemos calculado en puntos anteriores. Solamente hay una pequeña diferencia: nuestro L_t' tiene con respecto a α un desfase de 180° , fruto de considerar nuestro modelo heliocéntrico.

Por otra parte:

$$\tan \alpha = \tan(\alpha + 180^\circ) = \tan L_t'$$

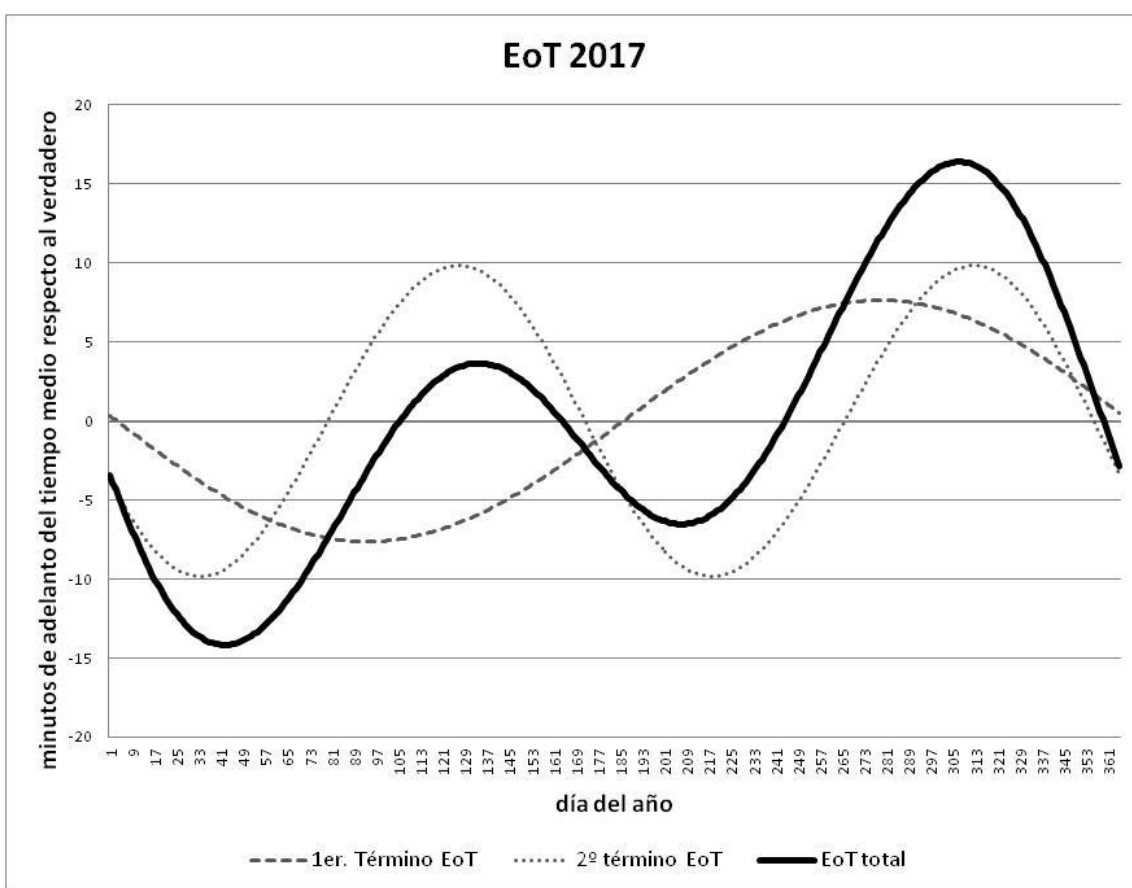
Aclarado este punto, insistimos en que es muy frecuente encontrar diferentes expresiones de la ecuación del tiempo en función de α , aunque, como queda indicado anteriormente, nuestra metodología prescinde de este concepto⁷¹.

⁷¹ La expresión compacta para la EoT utilizada por Smart (ver punto 11.7.1.) no va tampoco referida a α . No obstante, el algoritmo de la NOAA [20], que utiliza el método de Smart, y que se desarrolla de forma totalmente secuencial, calcula la ascensión recta, aun para no utilizarla en ninguno de sus cálculos posteriores.

11.8. REPRESENTACIÓN CLÁSICA DE LA ECUACIÓN DEL TIEMPO

Si nos fijamos en la fig. 11-10, en la que hemos representado los dos términos de la ecuación del tiempo para 2017, siguiendo el algoritmo utilizado en los ejemplos prácticos y, en trazo más oscuro, la superposición resultante de ambos, veremos que esta última, la EoT propiamente dicha, presenta dos máximos y dos mínimos relativos de diferente valor, debido al desfase entre los instantes de los equinoccios y el perihelio.

En 2017, dichos máximos y mínimos relativos se producen en las fechas recogidas en la Tabla 11-4, y con los valores indicados en ella, es decir:



11-10. Representación de la ecuación del tiempo para 2017.

11 de febrero:	-14,173 minutos
14 de marzo:	3,645 minutos
26 de julio:	-6,524 minutos
3 de noviembre:	16,389 minutos

Dado que la hora de cálculo en todos los casos ha sido las 00:00 TU, las fechas de paso con EoT = 0 serán:

15 de febrero
12 de junio (en los últimos instantes del día)
25 de diciembre

En la Tabla 11-3, que recoge los valores obtenidos con el procedimiento de cálculo directo de la NOAA mencionado anteriormente, comprobamos que, no obstante las pequeñas diferencias entre los mismos y los obtenidos mediante el método descrito de suma de dos términos, las fechas de los puntos singulares son los mismos.

Sin embargo, al analizar la Tabla 11-5, observamos que uno de los valores nulos de la EoT se correspondería con la fecha del 13 de junio, en lugar del 12 como en los casos anteriores.

Ello se debe a la discretización de los instantes de cálculo. En efecto, teniendo en cuenta que todas las EoT para cada fecha van referidas a las 00:00:00 TU, en la Tabla 11-4 y en la Tabla 11-3 deducimos que el salto de valores positivos a negativos se produce en las últimas horas del 12 de junio. Sin embargo, en la Tabla 11-5, a la vista de los valores, se verificaría el cambio de signo en las primeras horas del 13 de junio.

Si realizamos un par de interpolaciones sencillas (solo para la Tabla 11-4 y la Tabla 11-5) tendremos:

- Tabla 11-4

00:00 del día 12/06: EoT = 0,195
00:00 del día 13/06: EoT = - 0.012

Por lo tanto,

$$\frac{0,195 + 0,012}{24} = 0,008625 \text{ ,}$$

por lo que el cero se situará a una distancia en el tiempo desde las 00:00:00 de valor:

$$\frac{0,195}{0,008625} = 22,60869565 \text{ horas .}$$

Luego el paso a EoT = 0 se produce a las 22:36:31,3 del 12 de junio.

- Tabla 11-5

00:00 del día 13/06: EoT = 0,010
 00:00 del día 14/06: EoT = -0,198

Por lo tanto,

$$\frac{0,010 + 0,198}{24} = 0,008667, \text{ luego:}$$

$$\frac{0,010}{0,008667} = 1,153846154 \text{ horas,}$$

por lo que el paso a EoT = 0 se produce a las 01:09:13,8 del 13 de junio.

Esto aclara la aparente discontinuidad en las fechas de máximos, mínimos y ceros de la función según el método utilizado.

Aunque pueda parecer exagerado el intervalo temporal entre las horas obtenidas en ambos casos, realmente la diferencia que tiene importancia es la correspondiente a los valores de EoT en sí, de cara a cualquier cálculo que implique el cálculo del mediodía, y en ese sentido nos estaríamos moviendo en el entorno de los segundos. Por otra parte, la extrapolación que estamos haciendo para el ejemplo considerado es meramente lineal, cuando la evolución de la EoT no lo es.

La diferencia entre las EoT calculadas en ambos métodos nos arroja para el 13/06 el valor

$$(0,01 + 0,012) * 60 = 1,32 \text{ seg}$$

En esas fechas los propios valores cercanos a cero que adquiere EoT con cualquiera de los dos métodos suponen una variación de un segundo pueda significar dos o tres horas en la determinación del paso por cero de la ecuación. Como queda dicho, esta última cuestión no reviste importancia, pues se trata de un dato que no se utiliza en ningún cálculo relevante.

A este respecto, resulta interesante cuantificar las diferencias de valores de EoT en función de los métodos utilizados, lo cual se realiza en este mismo capítulo.

Tabla 11-3. Valores EoT (minutos) para 2017 obtenidos de la NOAA [20].
(Valores para las 00:00 TU).

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
1	-3,430	-13,493	-12,348	-3,946	2,856	2,196	-3,813	-6,344	-0,096	10,216	16,358	11,055
2	-3,898	-13,622	-12,152	-3,650	2,972	2,041	-4,004	-6,279	0,222	10,536	16,380	10,679
3	-4,361	-13,736	-11,947	-3,357	3,080	1,879	-4,190	-6,204	0,545	10,852	16,389	10,293
4	-4,817	-13,838	-11,735	-3,066	3,178	1,712	-4,371	-6,118	0,872	11,161	16,384	9,897
5	-5,266	-13,925	-11,515	-2,778	3,267	1,539	-4,547	-6,023	1,203	11,465	16,365	9,491
6	-5,708	-14,000	-11,288	-2,493	3,347	1,361	-4,717	-5,917	1,538	11,763	16,333	9,076
7	-6,142	-14,061	-11,054	-2,211	3,417	1,177	-4,882	-5,802	1,877	12,054	16,287	8,652
8	-6,568	-14,109	-10,814	-1,933	3,478	0,989	-5,040	-5,677	2,219	12,339	16,227	8,220
9	-6,986	-14,143	-10,567	-1,659	3,530	0,796	-5,191	-5,542	2,563	12,616	16,153	7,780
10	-7,395	-14,165	-10,314	-1,389	3,572	0,600	-5,336	-5,397	2,910	12,887	16,065	7,333
11	-7,794	-14,173	-10,056	-1,123	3,604	0,399	-5,473	-5,243	3,260	13,149	15,963	6,878
12	-8,183	-14,170	-9,793	-0,862	3,627	0,195	-5,603	-5,080	3,611	13,403	15,846	6,418
13	-8,563	-14,153	-9,525	-0,607	3,641	-0,012	-5,726	-4,907	3,964	13,649	15,716	5,951
14	-8,932	-14,124	-9,252	-0,356	3,645	-0,221	-5,840	-4,725	4,318	13,886	15,571	5,479
15	-9,290	-14,083	-8,975	-0,112	3,639	-0,433	-5,946	-4,534	4,674	14,115	15,413	5,002
16	-9,637	-14,030	-8,694	0,127	3,624	-0,647	-6,044	-4,334	5,030	14,334	15,240	4,521
17	-9,972	-13,965	-8,409	0,360	3,600	-0,862	-6,134	-4,126	5,386	14,543	15,053	4,036
18	-10,296	-13,888	-8,121	0,587	3,566	-1,078	-6,214	-3,909	5,742	14,743	14,853	3,547
19	-10,608	-13,800	-7,831	0,806	3,524	-1,295	-6,286	-3,683	6,098	14,932	14,639	3,056
20	-10,908	-13,701	-7,538	1,019	3,472	-1,513	-6,349	-3,450	6,453	15,111	14,411	2,563
21	-11,195	-13,591	-7,242	1,225	3,411	-1,730	-6,402	-3,209	6,807	15,280	14,169	2,068
22	-11,470	-13,470	-6,945	1,424	3,342	-1,947	-6,446	-2,960	7,160	15,437	13,914	1,573
23	-11,732	-13,339	-6,647	1,616	3,263	-2,163	-6,480	-2,703	7,511	15,583	13,646	1,077
24	-11,981	-13,197	-6,347	1,799	3,176	-2,377	-6,505	-2,439	7,860	15,718	13,365	0,581
25	-12,217	-13,046	-6,046	1,975	3,081	-2,591	-6,519	-2,168	8,206	15,841	13,071	0,086
26	-12,439	-12,885	-5,745	2,143	2,977	-2,802	-6,524	-1,891	8,550	15,952	12,765	-0,408
27	-12,649	-12,715	-5,444	2,303	2,866	-3,010	-6,520	-1,607	8,891	16,052	12,446	-0,900
28	-12,845	-12,536	-5,142	2,454	2,747	-3,216	-6,505	-1,316	9,228	16,138	12,116	-1,390
29	-13,027		-4,842	2,597	2,620	-3,419	-6,480	-1,019	9,562	16,212	11,773	-1,877
30	-13,196		-4,542	2,731	2,485	-3,618	-6,445	-0,717	9,891	16,274	11,419	-2,360
31	-13,352		-4,243		2,344		-6,400	-0,409		16,322		-2,839

Tabla 11-4. Valores EoT (minutos) para 2017 como suma de dos términos.
(Valores para las 00:00 TU).

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
1	-3,438	-13,553	-12,385	-3,933	2,864	2,197	-3,820	-6,360	-0,107	10,227	16,450	11,074
2	-3,906	-13,683	-12,187	-3,638	2,980	2,042	-4,011	-6,295	0,210	10,550	16,473	10,695
3	-4,369	-13,799	-11,979	-3,344	3,087	1,880	-4,198	-6,219	0,533	10,868	16,482	10,306
4	-4,826	-13,901	-11,765	-3,053	3,185	1,713	-4,380	-6,133	0,860	11,180	16,476	9,908
5	-5,275	-13,990	-11,542	-2,765	3,274	1,540	-4,556	-6,038	1,191	11,487	16,457	9,499
6	-5,718	-14,065	-11,313	-2,480	3,354	1,361	-4,727	-5,932	1,526	11,788	16,424	9,082
7	-6,154	-14,127	-11,076	-2,198	3,424	1,177	-4,891	-5,816	1,864	12,083	16,377	8,656
8	-6,581	-14,175	-10,833	-1,920	3,485	0,989	-5,050	-5,691	2,206	12,371	16,316	8,222
9	-7,000	-14,210	-10,584	-1,646	3,536	0,796	-5,202	-5,556	2,551	12,651	16,240	7,780
10	-7,410	-14,232	-10,329	-1,376	3,578	0,599	-5,347	-5,411	2,898	12,925	16,150	7,331
11	-7,810	-14,240	-10,069	-1,111	3,610	0,398	-5,485	-5,256	3,247	13,190	16,046	6,875
12	-8,201	-14,236	-9,803	-0,850	3,633	0,194	-5,615	-5,092	3,599	13,448	15,928	6,413
13	-8,582	-14,219	-9,533	-0,595	3,647	-0,013	-5,738	-4,919	3,952	13,697	15,795	5,946
14	-8,953	-14,189	-9,258	-0,345	3,650	-0,223	-5,853	-4,737	4,306	13,938	15,647	5,473
15	-9,313	-14,147	-8,979	-0,100	3,645	-0,435	-5,960	-4,546	4,662	14,170	15,486	4,995
16	-9,662	-14,093	-8,696	0,138	3,630	-0,649	-6,058	-4,346	5,018	14,392	15,310	4,513
17	-10,000	-14,027	-8,410	0,371	3,605	-0,865	-6,148	-4,137	5,375	14,605	15,121	4,028
18	-10,326	-13,949	-8,121	0,597	3,571	-1,081	-6,229	-3,920	5,732	14,808	14,917	3,539
19	-10,640	-13,859	-7,828	0,817	3,529	-1,298	-6,301	-3,694	6,089	15,000	14,699	3,048
20	-10,942	-13,758	-7,534	1,029	3,477	-1,516	-6,364	-3,461	6,445	15,182	14,468	2,555
21	-11,232	-13,646	-7,237	1,235	3,416	-1,734	-6,417	-3,219	6,800	15,353	14,223	2,060
22	-11,509	-13,524	-6,939	1,434	3,346	-1,951	-6,461	-2,970	7,154	15,514	13,964	1,564
23	-11,773	-13,390	-6,639	1,625	3,267	-2,167	-6,496	-2,714	7,506	15,662	13,693	1,068
24	-12,024	-13,247	-6,338	1,808	3,180	-2,382	-6,520	-2,450	7,856	15,800	13,408	0,572
25	-12,262	-13,093	-6,037	1,984	3,084	-2,595	-6,535	-2,179	8,205	15,925	13,111	0,077
26	-12,487	-12,930	-5,735	2,152	2,981	-2,807	-6,540	-1,901	8,550	16,038	12,801	-0,416
27	-12,699	-12,758	-5,433	2,311	2,869	-3,016	-6,536	-1,617	8,893	16,139	12,479	-0,908
28	-12,897	-12,576	-5,131	2,462	2,749	-3,222	-6,521	-1,327	9,232	16,227	12,145	-1,398
29	-13,081		-4,830	2,605	2,622	-3,425	-6,496	-1,030	9,568	16,303	11,799	-1,885
30	-13,252		-4,530	2,739	2,487	-3,624	-6,461	-0,728	9,900	16,365	11,442	-2,368
31	-13,410		-4,231		2,346		-6,415	-0,420		16,414		-2,847

Tabla 11-5. Valores en minutos de la EoT para 2017 obtenidos del MICA [33].
(Valores para las 00:00 TU).

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
1	-3,442	-13,533	-12,378	-3,952	2,872	2,212	-3,813	-6,355	-0,093	10,242	16,395	11,073
2	-3,912	-13,662	-12,183	-3,655	2,988	2,057	-4,005	-6,288	0,227	10,563	16,418	10,698
3	-4,377	-13,777	-11,978	-3,362	3,095	1,895	-4,192	-6,213	0,550	10,880	16,428	10,313
4	-4,835	-13,878	-11,767	-3,070	3,195	1,727	-4,372	-6,127	0,880	11,192	16,425	9,917
5	-5,285	-13,967	-11,547	-2,782	3,285	1,555	-4,548	-6,030	1,213	11,498	16,408	9,512
6	-5,728	-14,040	-11,318	-2,495	3,365	1,377	-4,718	-5,923	1,550	11,798	16,377	9,098
7	-6,163	-14,102	-11,083	-2,210	3,437	1,195	-4,882	-5,805	1,892	12,092	16,332	8,673
8	-6,590	-14,148	-10,842	-1,930	3,498	1,007	-5,038	-5,678	2,235	12,378	16,273	8,242
9	-7,008	-14,182	-10,593	-1,655	3,552	0,815	-5,188	-5,542	2,582	12,657	16,200	7,802
10	-7,417	-14,202	-10,338	-1,382	3,595	0,620	-5,332	-5,397	2,930	12,928	16,112	7,353
11	-7,815	-14,208	-10,078	-1,115	3,630	0,420	-5,468	-5,240	3,282	13,192	16,008	6,898
12	-8,205	-14,202	-9,813	-0,852	3,655	0,217	-5,598	-5,075	3,635	13,447	15,892	6,435
13	-8,583	-14,185	-9,542	-0,593	3,670	0,010	-5,720	-4,902	3,988	13,693	15,760	5,967
14	-8,952	-14,153	-9,267	-0,342	3,675	-0,198	-5,833	-4,718	4,343	13,932	15,615	5,493
15	-9,308	-14,112	-8,988	-0,095	3,670	-0,410	-5,940	-4,527	4,698	14,160	15,455	5,013
16	-9,655	-14,057	-8,705	0,147	3,657	-0,623	-6,037	-4,327	5,055	14,378	15,280	4,530
17	-9,990	-13,992	-8,418	0,380	3,633	-0,838	-6,127	-4,118	5,410	14,587	15,092	4,042
18	-10,315	-13,913	-8,128	0,608	3,600	-1,057	-6,208	-3,903	5,767	14,785	14,888	3,550
19	-10,627	-13,825	-7,837	0,828	3,557	-1,273	-6,280	-3,678	6,122	14,973	14,672	3,057
20	-10,927	-13,725	-7,542	1,042	3,505	-1,493	-6,345	-3,445	6,477	15,152	14,442	2,560
21	-11,215	-13,615	-7,247	1,248	3,443	-1,712	-6,400	-3,205	6,830	15,318	14,198	2,063
22	-11,492	-13,495	-6,948	1,447	3,373	-1,930	-6,445	-2,957	7,182	15,475	13,942	1,565
23	-11,755	-13,365	-6,650	1,638	3,293	-2,148	-6,482	-2,702	7,532	15,620	13,672	1,067
24	-12,005	-13,223	-6,350	1,822	3,205	-2,367	-6,508	-2,438	7,880	15,755	13,388	0,568
25	-12,243	-13,073	-6,048	1,997	3,107	-2,582	-6,525	-2,168	8,227	15,877	13,093	0,072
26	-12,467	-12,913	-5,748	2,163	3,002	-2,795	-6,532	-1,892	8,572	15,987	12,785	-0,423
27	-12,678	-12,745	-5,447	2,322	2,888	-3,005	-6,528	-1,607	8,912	16,087	12,467	-0,917
28	-12,877	-12,567	-5,147	2,472	2,767	-3,213	-6,513	-1,317	9,250	16,173	12,135	-1,407
29	-13,062		-4,847	2,613	2,638	-3,417	-6,490	-1,020	9,585	16,247	11,792	-1,893
30	-13,232		-4,547	2,747	2,503	-3,618	-6,455	-0,717	9,915	16,310	11,438	-2,377
31	-13,390		-4,248		2,360		-6,410	-0,408		16,358		-2,857

11.9. COMPARACIÓN ENTRE DIFERENTES PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO DE EOT

Es interesante, como indicábamos más arriba, conocer la aproximación de los métodos utilizados para la determinación de la EoT. A tal efecto, y en nuestro caso, utilizaremos los datos del MICA [33] como patrón de comparación⁷². Hay que reseñar, en primer lugar, que los datos suministrados por esta fuente tienen una precisión de 0,1 segundo, por lo que nos encontraremos a veces con oscilaciones debidas a este truncamiento al comparar con valores obtenidos de Excel con coma flotante, y con 15 dígitos significativos.

Los datos que vamos a comparar se han obtenido utilizando los siguientes algoritmos:

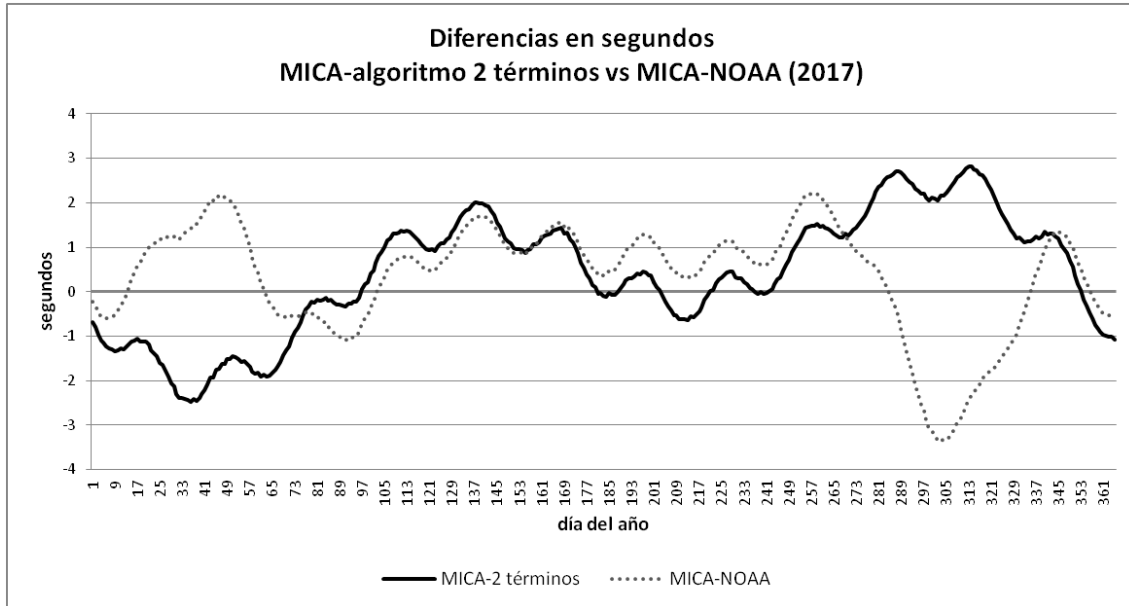
- a) El algoritmo descrito en este capítulo para el cálculo de EoT mediante dos términos y la expresión directa de C .
- b) El algoritmo utilizado por la NOAA [20].

Se ha analizado el algoritmo de Meeus al que nos referíamos en puntos anteriores; no hemos creído necesario incluirlo en las gráficas comparadas, pero sí se plasman finalmente sus resultados. Hay que indicar que para obtenerlos se ha partido de las mismas expresiones auxiliares que utiliza la NOAA y que hemos tomado para nuestros cálculos la EoT como suma de dos términos. Las expresiones de corrección de L por aberración y por nutación en longitud serán las mismas en todos los casos, es decir, se partirá de las mismas fórmulas simplificadas que utiliza la NOAA con el fin de homogeneizar resultados. Lo mismo puede decirse de la nutación en oblicuidad.

Se analizarán los procedimientos indicados en dos bloques comparativos: el año 2017 en primer lugar, y a continuación un período de 30 años desde el 01/01/2017 y para una determinación diaria a las 00:00:00 UT.

Cabe señalar que, para el año 2017, los valores obtenidos por el procedimiento de la suma de los dos términos mediante las expresiones simplificadas expuestas en este capítulo alcanzan unas diferencias con respecto a MICA [33] que quedarían siempre en el intervalo, en segundos, $(-2,474, 2,824)$ (MICA - 2 término), mientras que los errores MICA - NOAA quedarían en el intervalo, también en segundos, $(-3,364, 2,210)$, lo que significa en la práctica una diferencia casi inapreciable. En la fig. 11-11 se representan estas discrepancias.

⁷² Es habitual utilizar el MICA como comparación, así como, en otros casos, el Nautical Almanac de la USNO. En ese sentido, autores como Blanco-Muriel utilizan el MICA en sus análisis [23].



11-11. Diferencias en segundos MICA-2 términos vs MICA-NOAA para 2017.
(Valores diarios a las 00:00:00 TU)

Si extrapolamos nuestra comparación al intervalo comprendido entre el 1 de enero de 2017 y el 31 de diciembre de 2047, los máximos errores positivos y negativos se encuentran a su vez en los intervalos (en segundos):

Suma de 2 términos: (-3,591 , 4,532)

NOAA: (-3,735 , 3,768)

A la vista de las diferencias, podemos considerar los dos procedimientos completamente equivalentes en el período considerado. Sin embargo, las discrepancias entre los valores obtenidos mediante el algoritmo de los dos términos que hemos utilizado anteriormente y el propuesto por la NOAA son mayores entre sí que las diferencias entre ellos y la MICA ya analizadas.

En ese sentido, tenemos para 2017 y NOAA – 2 términos, los errores en segundos comprendidos en el intervalo:

(-4,020 , 5,573) . (ver fig.11-14)

Y en el período 2017-2047 definido como anteriormente, el intervalo se convierte en:

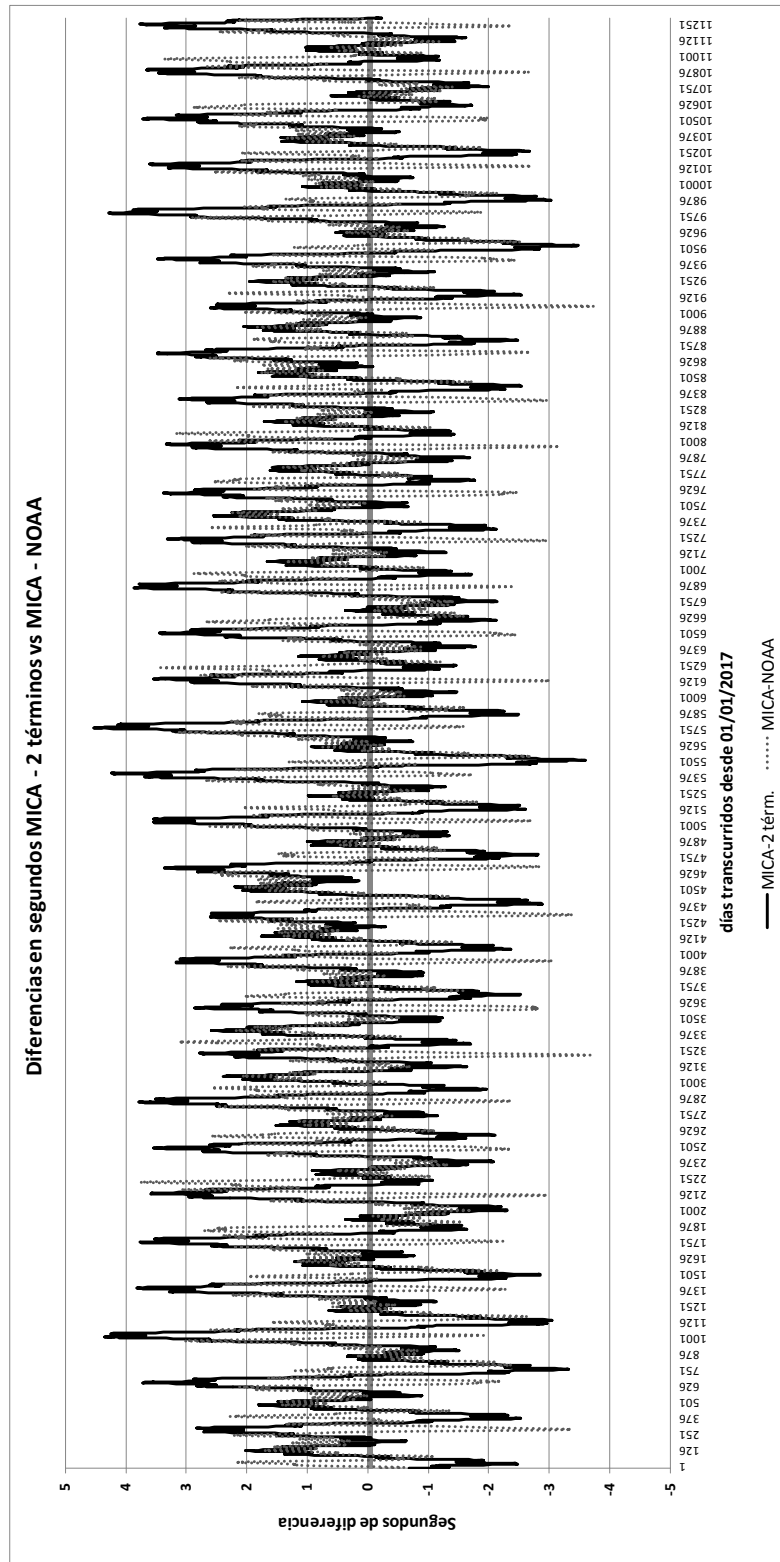
(-4,043 , 5,595) . (ver fig. 11-13)

Manteniéndose los errores en 30 años en un rango similar al anual.

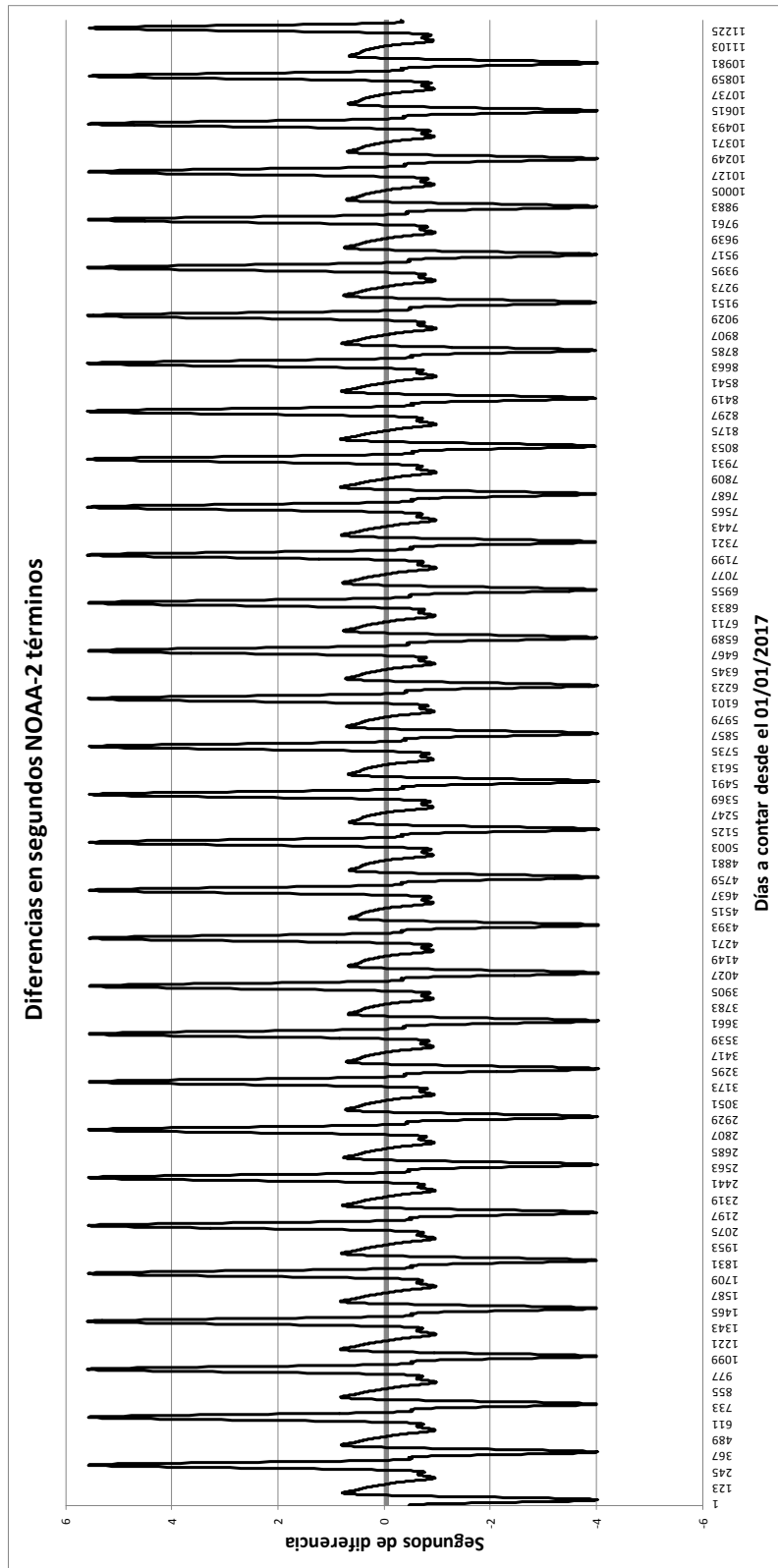
Finalmente, la comparación de datos para el mismo período MICA-Meeus (la expresión anteriormente citada) quedaría en el intervalo, en segundos:

$$(-3,51936524 , 4,58702756)$$

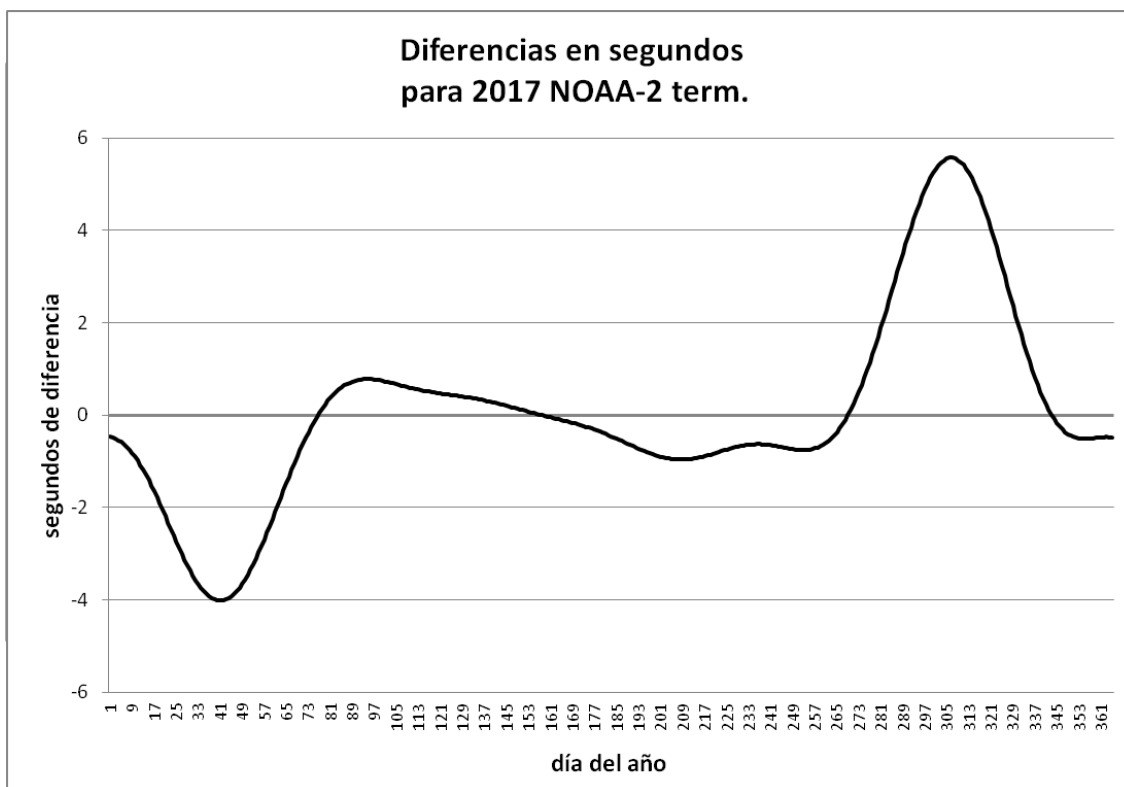
Muy similar al obtenido con los anteriores procedimientos de cálculo.



11-12. Diferencias en segundos en los valores de EoT entre MICA-2 términos y MICA-NOAA en el intervalo 01/01/2017 – 31/12/3047. (Valores diarios para las 00:00:00 TU).



11-13. Diferencias en segundos entre EoT según NOAA y el algoritmo de 2 términos en el período 01/01/2017 al 01/01/2047. Cálculos diarios para las 00:00:00 TU.



11-14. Diferencias en segundos entre EoT NOAA y el algoritmo de 2 términos en 2017. Cálculos diarios para las 00:00:00 TU.

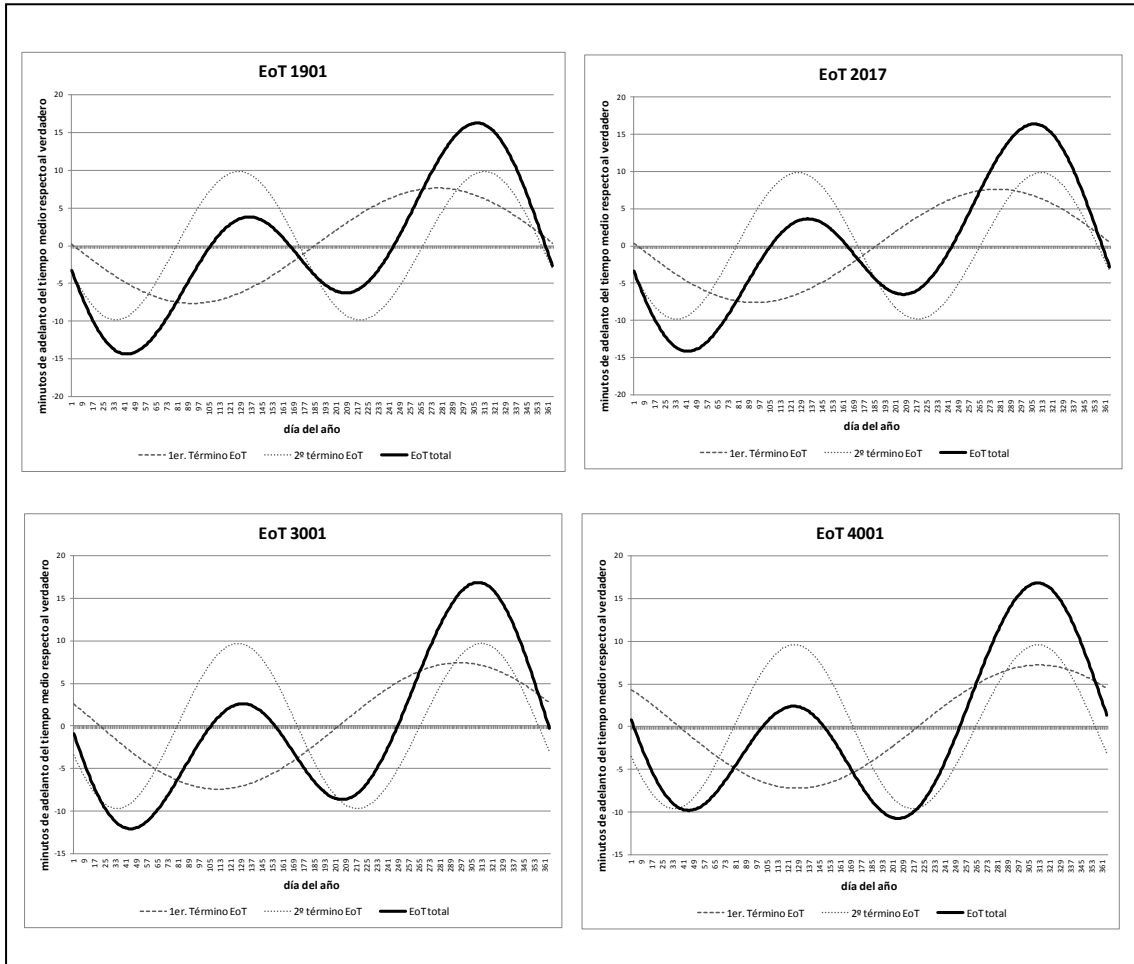
Como vemos, el patrón de diferencias entre ambos algoritmos se mantiene sensiblemente constante a lo largo de los años.

11.10. EVOLUCIÓN DE LA EoT A LO LARGO DEL LOS AÑOS

Los dos términos de la ecuación del tiempo sufren evoluciones diferentes a lo largo de los años. Así como el segundo término varía de forma apenas perceptible debido al hecho de la correcta adaptación del calendario gregoriano a la duración del año trópico, con mínimas oscilaciones causadas por la acumulación y corrección de errores en los años bisiestos, el primer término depende de la variación en el tiempo del eje de ápsides y, en definitiva, del instante del perihelio en cada año. Recordemos que, aunque el punto Aries rota en relación con estrellas lejanas, todos nuestros cálculos van referidos al instante del equinoccio de otoño, por lo que una correcta determinación del año trópico implícita en los mismos tiene el efecto de considerar fija la referencia equinoccial, con respecto a la que girarían los ejes de la órbita elíptica de nuestro planeta.

Por lo tanto, la resultante de la EoT como suma de dos términos va variando muy lentamente con el tiempo.

Hemos representado esta variación en la fig. 11-15, donde podemos observar las diferentes EoT para los años 1901, 2101, 3001 y 4001.



11-15. Evolución de la ecuación del tiempo a lo largo de los años. De izqda. a dcha. y de arriba a abajo, EoT de 1901, 2101, 3001 y 4001.

12. HORAS DEL MEDIODÍA, SALIDA Y PUESTA DEL SOL. ÁNGULO HORARIO ω

Hora a meridie numquam in eodem statu permanet

En este capítulo abordaremos el cálculo aproximado de las horas de salida y puesta del Sol referidas a la hora oficial, es decir, la que habitualmente conocemos a través de los relojes de uso general. En los ejemplos prácticos se indicará, asimismo, cómo tener en cuenta la norma de adelanto de hora en horario de verano (*DST: Daylight Saving Time*).

12.1. LOS HUSOS HORARIOS

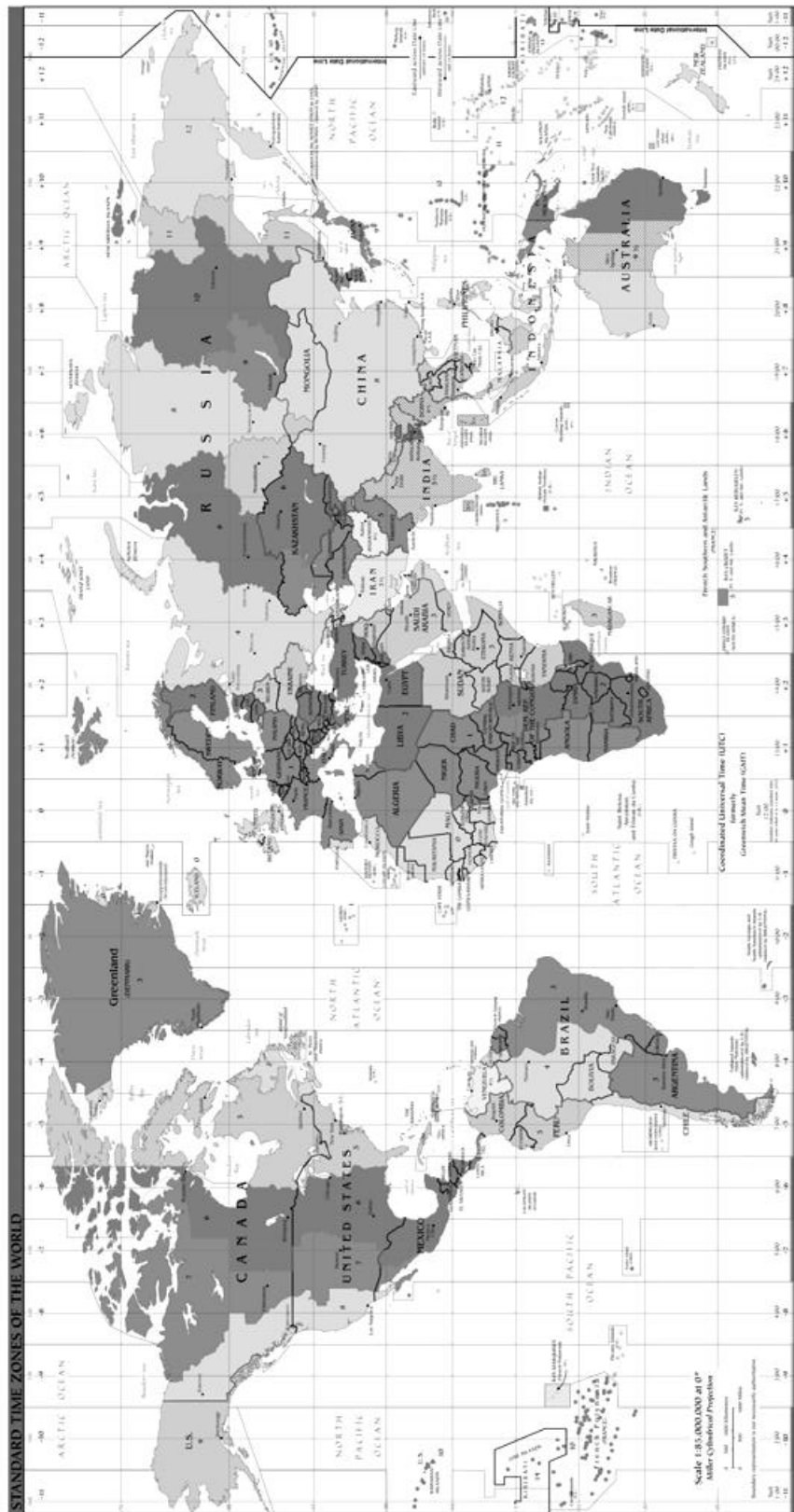
Como hemos indicado en capítulos anteriores, nuestros desarrollos teóricos se basan en las horas solares, que son las que surgen de considerar como referencia temporal el mediodía solar verdadero o instante de culminación del Sol⁷³ sobre el meridiano del lugar. Sin embargo, para el cálculo de los JD hemos recurrido a las horas solares medias o de reloj, tomando como referencia Greenwich. Dado que en lo que sigue vamos a relacionar la hora solar verdadera con la hora media oficial, necesitamos conocer el marco de referencia temporal para el establecimiento de horas medias en cada punto de la esfera terrestre.

La convención general consiste en considerar Greenwich como origen de meridianos. Las zonas o husos horarios sobre el planeta (TZ o *time zone*) se separan en franjas de 15°, con el meridiano de referencia en el centro de las mismas. Así, la zona TZ=0 abarca desde el meridiano de longitud 7,5° (este de Greenwich positivo) hasta el -7,5° (oeste de Greenwich negativo).

No obstante, por razones políticas o administrativas, la asignación de la TZ a cada lugar no es automática en función de su longitud, sino que está condicionada por fronteras, agrupaciones de Estados, etc.

En la fig. 12-1, obtenida de [65], se observan los husos horarios vigentes en la actualidad. Como vemos, a pesar de su situación geográfica, a la que correspondería el huso 0 (*horario europeo occidental*), España tiene adoptado oficialmente el huso +1 (*horario europeo central*) en todo el territorio nacional salvo las Islas Canarias, a las que se asigna el huso 0 aun cuando la totalidad de las mismas se encuentra geográficamente dentro del huso -1.

⁷³ Que se produce cuando es máxima la altura que alcanza el Sol en el día considerado, visto desde el observador.



12-1. Husos horarios geográficos y oficiales en 2011. TimeZonesBoy. Wikipedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:World_Time_Zones_Map.png [65].

12.1.1. HORARIO DE VERANO O DST

Es habitual que muchos países adopten en verano un horario de conveniencia consistente en añadir una hora a la correspondiente a su huso horario oficial en las proximidades del equinoccio de primavera, volviendo al horario habitual pasado el equinoccio de otoño. Este horario, concebido inicialmente para ahorrar energía, se conoce internacionalmente, como se ha indicado con anterioridad, como DST⁷⁴.

La elección de fechas y horas para su implantación está sujeta a normativas que en algunos casos son supranacionales, pero que en otros casos son decisión única de un solo Estado. Las fechas de paso tienen la particularidad, además, de ser variables cada año, con el fin de producirse los cambios en la madrugada de un sábado a un domingo, para causar los menores inconvenientes posibles a transportes, establecimientos, servicios y organismos públicos, etc.

A efectos meramente testimoniales, se adjunta, en el Apéndice V, la normativa europea sobre la implantación del DST en la Unión [66]. Véase que la directiva hace alusión al comienzo y al fin del horario de verano referidos a la hora universal (hora media en Greenwich). Enumerar las directivas de los distintos Estados a lo largo del mundo sería interminable, y queda fuera del alcance de esta tesis. Existen numerosas referencias en la web en caso de necesitarse para un cálculo concreto del DST en un país determinado.

12.2. CÁLCULO DE LA HORA DEL MEDIODÍA PARA EL OBSERVADOR

Teniendo en cuenta las precisiones anteriores acerca de los husos horarios oficiales y el análisis de la EoT de capítulos anteriores, tendremos que, para un observador situado en una longitud λ , el instante del mediodía se producirá en la hora H_{MED} dada por (formato de horas fraccionarias):

$$H_{MED} = 12 - \frac{\lambda}{360} \cdot 24 - \frac{EoT}{60} + TZ = 12 - \frac{\lambda}{15} - \frac{EoT}{60} + TZ ,$$

siendo:

λ = longitud del lugar en grados, positiva al este de Greenwich.

EoT = ecuación del tiempo en minutos.

TZ = zona horaria o huso del observador.

Para fijar mejor estos conceptos, se propone a continuación un ejemplo práctico.

⁷⁴ En España actualmente se sigue la norma de adoptar el DST a partir de las 2:00 del último domingo de marzo, hora peninsular, que pasan a ser las 3:00. El horario de invierno se adopta a partir del último domingo de octubre a partir de las 3:00, que pasan a ser las 2:00. Esta convención es general en Europa central.

Ejemplo práctico

Se supone un observador situado en España, en una longitud de $3^{\circ},5$ W, y para una fecha en la que la $EoT = 12$ min. Calcular el instante del mediodía.

En España, el huso es $TZ = +1$

$$\lambda = -3^{\circ},5$$

Por lo tanto,

$$H_{MED} = 12 + \frac{3,5}{15} - \frac{12}{60} + 1 = 13,033$$

Esta hora, en formato fraccionario, se corresponde con las 13:02:00 horas.

En horario de verano serían las 14:02:00.

En este caso concreto, tenemos un valor de $EoT = 12$ minutos, que solamente se puede alcanzar a primeros de octubre (ver cap. 11), por lo que en esta ocasión sabemos que se trata de una fecha en horario de verano⁷⁵.

Esta determinación de verano o invierno exclusivamente a partir del valor EoT no siempre es posible, ya que la función presenta dos máximos y dos mínimos relativos, por lo que a un mismo valor de EoT pueden corresponderle hasta cuatro fechas aproximadas.

La observación anterior es meramente teórica, ya que siempre conoceremos la fecha de cálculo, y el proceso será habitualmente el inverso: calcular previamente EoT para la misma.

Supongamos ahora un observador situado en una longitud de $20^{\circ}E$ dentro del mismo huso horario (en un cierto lugar de Polonia, por ejemplo).

En este caso,

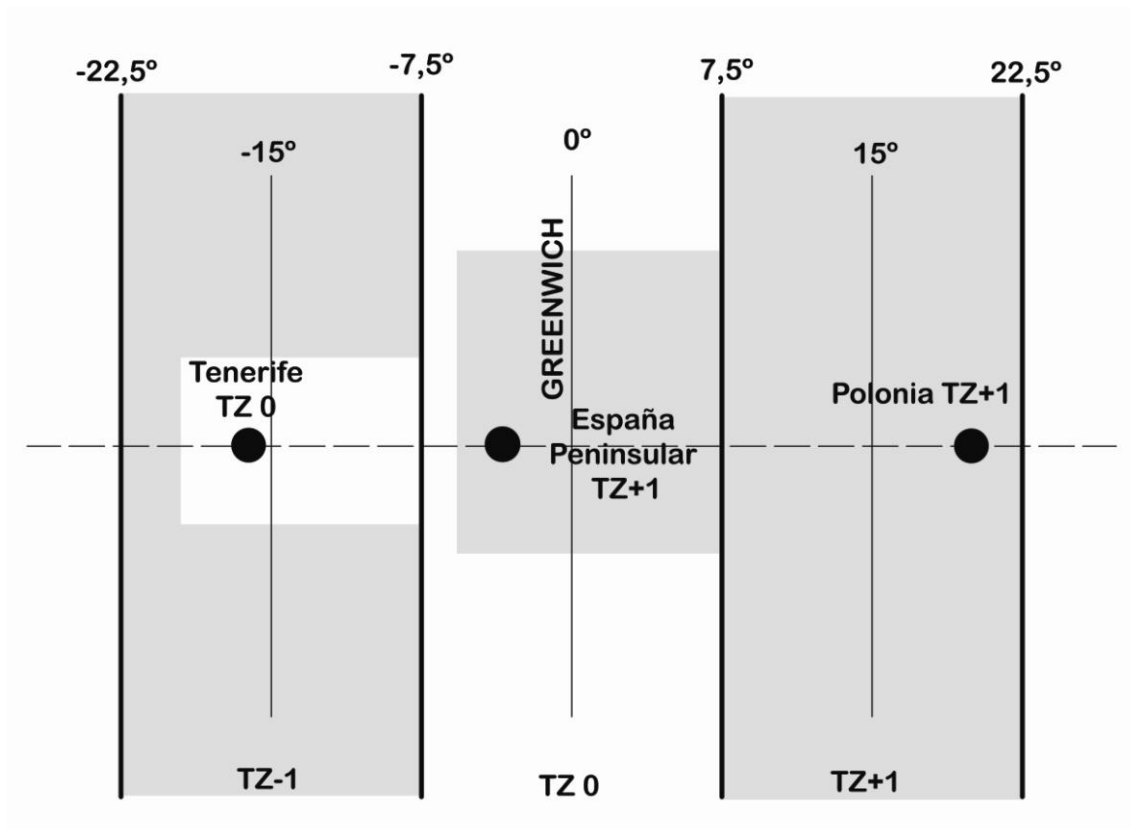
$$H_{MED} = 12 - \frac{20}{15} - \frac{12}{60} + 1 = 11,4666$$

⁷⁵ Es más, si nos fijamos en la Tabla 11-4, podremos deducir que la fecha desconocida es el 6/10. Además, como se ha indicado anteriormente, en España el cambio de DST a horario de invierno se produce el último domingo de octubre.

Esta hora en formato fraccionario se corresponde con las 11:28:00 horas en formato hh:mm:ss.

En horario de verano serían las 12:28:00, ya que Polonia adopta igualmente el DST en verano. Es válido el mismo razonamiento anterior para la EoT.

Resulta aclaratorio el esquema siguiente (fig. 12-2):



12-2. Esquema de detalle de horas oficiales y husos horarios.

En el gráfico anterior observamos las diferentes convenciones políticas a la hora de fijar el huso horario oficial. Aunque, geográficamente, al punto de la Península analizado le correspondería el huso 0, administrativamente se sitúa en el +1 (ver sombreados). Igualmente, como veíamos en puntos anteriores, a Santa Cruz de Tenerife, en Canarias, le correspondería geográficamente el huso -1, pero administrativamente la hora insular canaria se rige por la ZT 0. De los tres casos representados en el gráfico, solamente el punto analizado de Polonia se sitúa en un huso correspondiente a su situación geográfica.

12.3. HORAS DE SALIDA Y PUESTA DE SOL

Una vez conocido el procedimiento de cálculo de la hora del mediodía referida a nuestros relojes oficiales, la determinación de las horas de salida y puesta de Sol es muy sencilla. Dado que en capítulos anteriores hemos deducido cómo calcular el número de horas de Sol para cualquier punto de la esfera terrestre situado en una latitud Φ en un instante determinado conociendo la declinación δ en dicho instante, bastará con añadir o sustraer a la hora del mediodía calculada previamente la mitad de las horas de Sol obtenidas para la declinación y fecha mencionadas:

$$H_{orto} = H_{MED} - \frac{HS_{corr}}{2}$$

$$H_{ocaso} = H_{MED} + \frac{HS_{corr}}{2} .$$

Siendo:

$HS_{corr} = n.^{\circ}$ de horas de Sol corregidas por radio solar y refracción (es el criterio habitual en los anuarios)

Llegados a este punto, conviene hacer algunas precisiones.

En primer lugar, esta división temporal simétrica del tiempo de Sol es aproximada, ya que la declinación varía a lo largo del día. Por otra parte, la elección de la declinación δ para la fecha puede realizarse siguiendo diferentes criterios. En general, podemos estimar que una elección de δ basada en la hora del mediodía es acertada. Sin embargo, ¿a qué mediodía nos referimos? Es habitual considerar el mediodía oficial basado en tiempo medio, pero esto no es correcto. Deberíamos calcular primero el instante del mediodía verdadero, tal y como se ha indicado anteriormente. Para ello, los datos de longitud del lugar y el huso horario oficial nos dan una primera aproximación, pero para proceder correctamente, deberemos tener en cuenta la ecuación del tiempo, que igualmente, en una primera aproximación, se puede considerar constante para una fecha dada.

Algunas aplicaciones, como la de la NOAA [20], que se analiza más en detalle en otro capítulo, permiten realizar un cálculo en continuo, por lo que, elegido el instante, el programa nos proporciona la hora de salida y puesta del Sol, lo cual es correcto, pero, paradójicamente, para una misma fecha, tomadas dos horas diferentes, los resultados de orto y ocaso son también ligeramente diferentes, debido a la variación continua de δ .

12.4. EL ÁNGULO HORARIO ω

En el capítulo 3, las expresiones para el cálculo del acimut y la elevación solares venían referidas, entre otras variables, al ángulo horario ω , que está en relación directa con el ángulo recorrido por el observador desde el mediodía debido a la rotación terrestre.

A continuación, trataremos el problema del cálculo de dicho ángulo partiendo, como en otros puntos de este capítulo, de la hora oficial de nuestros relojes.

Para ello, conoceremos la hora correspondiente al instante del mediodía H_{MED} , tal y como la hemos calculado anteriormente.

Supongamos que el observador quiere obtener ω cuando su reloj de pulsera marca una determinada hora H_0 . Entonces,

$$\omega = \frac{H_0 - H_{MED}}{24} \cdot 360 = (H_0 - H_{MED}) \cdot 15,$$

estando H_0 y H_{MED} en formato de hora fraccionario.

Se fija la convención de que:

$\omega > 0$: después del mediodía solar.

$\omega < 0$: antes del mediodía solar.

Ejemplo práctico

Cálculo del ángulo horario ω a las 16:15 del 15 de agosto de 2017 para un observador situado en Madrid, España (40,41N, 3,69W).

En dicha fecha, el valor de EoT es de -4,41 min.

En primer lugar, como sabemos, el huso horario oficial para Madrid es el TZ +1.

Por otra parte, las 16:15 en formato fraccionario serán las 16,25. Hay que tener en cuenta que, en la fecha considerada, nuestro reloj marcará una hora DST (horario de verano).

Calculamos entonces el instante del mediodía en esa fecha, teniendo en cuenta:

3,69W = - 3°,69 de longitud.

$$H_{MED} = 12 + \frac{3,69}{15} + \frac{4,41}{60} + 1 = 13,3195$$

Como estamos en DST, la hora calculada se corregirá aumentando 1h.

Así, finalmente:

$$\omega = (16,25 - 14,3195) \cdot 15 = 28^\circ,9575$$

Que es el ángulo con el que operaríamos si deseáramos calcular el acimut y la elevación del Sol en ese instante.

13. ANÁLISIS CRÍTICO DEL MÉTODO SIMPLIFICADO

NOAA

Quaesivit caelo lucem ingenioque reperta

En su página web [20], la *National Oceanic & Atmospheric Administration of the U.S. Department of Commerce* (NOAA) incluye en versión libre varias hojas de cálculo adaptadas a los sistemas operativos *Windows* y *Mac* para la obtención de horas de salida y puesta del Sol, cálculos de acimut y elevación, horas de Sol, etc., que son la base de numerosas aplicaciones para cálculos *on-line*. Sus resultados han sido a menudo utilizados por nosotros en capítulos anteriores como base de comparación. La NOAA presenta estas hojas de cálculo a su vez en dos versiones: cálculos para año completo (con los resultados correspondientes a los 365 o 366 días del año considerado para la hora elegida) o cálculos diarios (para una fecha concreta en intervalos de 6 minutos).

Los algoritmos utilizados para la confección de la hoja de cálculo se han basado, según la propia agencia, en las expresiones atribuidas a Jean Meeus [9]. Sin embargo, como suele ocurrir a menudo en el campo de la Astronomía, muchas de las fórmulas han sido recopiladas por Meeus, con gran acierto, de otras fuentes primarias.

El objeto de este capítulo es la exposición del procedimiento de la NOAA como ejemplo de método de cálculo secuencial, que puede servir de base al estudioso que pretenda elaborar un procedimiento alternativo de cálculo masivo, mediante hoja Excel o similar, para la obtención de los elementos de la trayectoria aparente del Sol que desee.

Para el análisis se seguirá el mismo orden y se transcribirán las fórmulas utilizadas en la hoja por la NOAA sin más modificación que la sustitución de las referencias de celda por las variables que hemos ido utilizando hasta el momento, a fin de dotar al análisis de la necesaria consistencia con el resto de la tesis.

Se incluyen todos los comentarios críticos que se han considerado necesarios acerca de los métodos seguidos por la NOAA. Dada la universalidad de los términos utilizados para las diferentes variables y su similitud en todas las lenguas, se mantendrán en el análisis los términos originales en inglés, realizando en español las pertinentes aclaraciones cuando proceda.

13.1. ANÁLISIS PREVIO DEL MÉTODO

En relación con la precisión de los resultados, la NOAA declara sobre sus hojas de cálculo que los resultados están en el entorno del minuto para el cálculo del orto y ocaso

entre los -72° y $+72^\circ$ de latitud. Hay que hacer constar que el anuario del OAM ([15] y sucesivos) presentan los datos de orto, ocaso y culminación con precisión de segundos.

Igualmente, la NOAA especifica que, más allá de las latitudes indicadas, la precisión estaría situada dentro de los diez minutos de incertidumbre. Sobre esta afirmación hay que hacer constar, como también hace la NOAA, que temperaturas y presiones extremas pueden hacer variar estas precisiones. A este respecto, podemos añadir las alteraciones de todos conocidas en el instante de salida del Sol frente a las previsiones en latitudes polares, habiéndose registrado históricamente casos de varios días de desfase, o el conocido *Novaya Zemlya effect*⁷⁶, con diferencias de más de $+2^\circ$ sobre las previsiones del orto.

En lo relativo a acimut y elevaciones solares fuera de los puntos de orto y ocaso, los errores serán siempre menores, debido a la menor influencia de la refracción a medida que aumenta \hat{e} .

Estamos, en cualquier caso, ante un procedimiento de precisión media, debido a las simplificaciones realizadas en las expresiones utilizadas. A este respecto, cabe indicar que en esta propia tesis se presentan métodos alternativos de diferentes autores que ofrecen mayor precisión para la realización eventual de cálculos más afinados. Sin embargo, como marco de referencia, el método NOAA es bastante eficaz y recomendable.

Una de las limitaciones que se observan a la hora de utilizar la hoja de cálculo es la inexistencia de valores ΔT , por lo que los cálculos se realizan basándose en JD y, a partir de estos valores, en $T = JC$, en lugar de las fechas de efemérides JDE. Es evidente que la aplicación de diferentes ΔT presenta una elevada complicación para datos históricos, por no existir una única expresión simplificada para ello, como hemos visto en capítulos anteriores. Igualmente, la utilización de estimaciones de ΔT a futuro está sometida a continua revisión. Tal vez por ello, la NOAA obvia esta cuestión, de la misma forma que lo hace Jean Meeus en [9] al reescribir de forma simplificada las expresiones extraídas del VSOP 87.

Finalmente, debemos constatar, como se repetirá a lo largo del análisis, que el sistema utilizado por la hoja de la NOAA es geocéntrico.

13.2. LIMITACIÓN TEMPORAL

Una de las más curiosas limitaciones del método es, como se ha anticipado en capítulos anteriores (ver 4.7.), la limitación temporal en razón del uso de Excel, debido al conocido problema del “1900 bisiestro”. La NOAA no ha utilizado para el cálculo de la JD un algoritmo independiente, como por ejemplo los analizados en 4.6., sino que ha

⁷⁶ Se admite tradicionalmente como cierta la observación de la salida del disco solar sobre la línea del horizonte, por parte de la tripulación de la expedición ártica de Willem Barents en 1596–1597, dos semanas antes de las previsiones teóricas. Con diferencias en los adelantos, este fenómeno es frecuente en regiones polares.

puesto JD en función del valor numérico asignado por Excel a las presentaciones de fecha en formato dd/mm/yyyy mediante la corrección consistente en añadir 2415018,5 a dicho valor. Ello es correcto solamente a partir del 1 de marzo de 1900, por lo que la NOAA advierte que el límite inferior en años para la utilización de la hoja es 1901. Sin embargo, se indica que su aplicación *on-line* proporciona valores en el intervalo -2000, +3000 al no realizar las simplificaciones anteriores. Esta afirmación debe tomarse con cautela, habida cuenta de los problemas asociados a las fechas de paso del calendario juliano al gregoriano en los diferentes Estados (ver 4.5).

No obstante, la operativa de la hoja de cálculo permite procesar datos entre 01/01/1900 y 31/12/999, a pesar de los errores en los dos primeros meses de 1900. Igualmente, se aclara por parte de la NOAA que las aproximaciones son muy altas en el intervalo (1800, 2100). Se refiere, con estos límites, a la aplicación *on-line* de idénticas características, pero con el “1900 bisiestro” corregido.

13.3. DATOS DE PARTIDA

Son los siguientes:

Latitude:	Φ	(celda B2)
Longitude:	λ	(celda B3)
TZ (huso horario):	TZ	(celda B4)
Local Time (hora oficial local sin DST):	T	(celda B5)
Year:	Y	(celda B6)

Como se ve, el mes y el día del mes no están incluidos en los datos de partida, ya que el programa suministra en bloque por filas 365 días (más correctamente, 366, para incluir los bisiestos sin problema) para el cálculo a la misma hora elegida.

El formato de hora local debe introducirse en una sola celda formateada según hh.mm.ss que luego el programa interpreta como fracción horaria.

Las fechas de los diferentes días se obtienen añadiendo una unidad en la correspondiente columna al valor del día anterior. Así, el primer día del año viene dado por:

FECHANUMERO(“1/1/”&B\$6)

Recordemos que el valor del año elegido se situaba en la celda B6.

A continuación, describimos los algoritmos de cada columna, con los comentarios correspondientes.

13.4. SECUENCIA DE FUNCIONES POR COLUMNAS

Se presentan los algoritmos de columna en el mismo orden en que aparecen en la hoja de cálculo, caracterizados por el texto elegido por los desarrolladores. En esta versión de Excel se muestran por defecto las formas de las funciones (trigonométricas, etc.) en su versión española simplificada, al haberse elegido este idioma en la aplicación en el momento de su carga. Igualmente, debe constatarse que Excel opera en radianes, por lo que el uso de las funciones RADIANS(X) y GRADOS(X), así como PI() es muy frecuente.

Los valores genéricos de celdas se han sustituido para mayor claridad por las variables correspondientes adoptando la nomenclatura utilizada en esta tesis en capítulos anteriores (JD, T, M, etc.).

Las columnas son:

DATE (día)

TIME (hora)

JULIAN DAY = DATE + 2415018,5 + TIME – TZ/24

No es necesario extendernos sobre esta limitación que ya ha sido suficientemente descrita anteriormente. Como se ve, al incluir la cadena DATE de tipo dd/mm/yyyy en la sentencia anterior, Excel le asigna un valor numérico. Por ejemplo, para el día 11/03/2010, Excel asigna el numeral 40248,00 (en formato de celda “número”).

La hora, en tiempo medio, lleva aparejada la corrección por zona horaria en días.

JULIAN CENTURY = T = (JD-2451545)/36525

GEOM MEAN LONG SUN (DEG) = Longitud media = L_0 =

= RESIDUO(280,46646+T*(36000,76983+T*0,0003032);360)

Se trata de la ecuación polinómica estudiada en 6.3.1. La función RESIDUO(__;360) nos proporciona el resto módulo 360.

Obsérvese que el término independiente 280,46646 nos indica que estamos ante un sistema geocéntrico. En nuestro caso, como se dijo en 6.3., para un modelo heliocéntrico tomaríamos el valor 100,46646.

$$\begin{aligned} \text{GEOM MEAN ANOM SUN (DEG)} &= M = \\ &= 357,52911 + T.(3599,05029 - 0,0001537.T) \end{aligned}$$

Igualmente, ver 6.3.1.

$$\begin{aligned} \text{ECCENT EARTH ORBIT} &= e = \\ &= 0,016708634 - T.(0,000 042 037 + 0,000 000 126 7.T) \end{aligned}$$

Expresión simplificada de las contenidas en 6.3.1.

$$\begin{aligned} \text{SUN EQ OF CTR} &= \text{ecuación de centro} = C = \\ &= \text{SENO(RADIANES(M))}*(1,914602-T*(0,004817+0,000014*T))+ \\ &\text{SENO(RADIANES(2*T))}*(0,019993-0,000101*T)+ \\ &\text{SENO(RADIANES(3*T))} * 0,000289 \end{aligned}$$

Se trata de la expresión polinómica vista en 6.3.1.

$$\text{SUN TRUE LONG (DEG)} = L = L_0 + C.$$

En heliocéntricas, arrastraríamos la diferencia de 180° con respecto a este valor de L, debido a L₀.

$$\text{SUN TRUE ANOM (DEG)} = v = M + C$$

Obtenida de las expresiones anteriores.

$$\begin{aligned} \text{SUN RAD VECTOR (AUS)} &= \rho = \text{distancia Tierra-Sol} = \\ &= (1,000001018*(1-e*e))/(1+e*\text{COS(RADIANES(v))}) \end{aligned}$$

Expresión reflejada en el anexo I, punto I.1.

OBSERVACIÓN: Este cálculo carece de interés práctico, teniendo en cuenta que la aplicación va a utilizar posteriormente, como se verá, la simplificación analizada en 10.3.1. para la refracción consistente en imponer $\sigma = 0,833$, que hace innecesario el cálculo. Sin embargo, si se sigue el método propuesto en el mismo punto por nosotros, de no considerar σ como constante, el valor de ρ sería necesario.

$$\begin{aligned} \text{SUN APP LONG (DEG)} &= L_t = \\ &L-0,00569-0,00478*\text{SENO(RADIANES(125,04-1934,136*T))} \end{aligned}$$

Esta simplificación para la expresión de la longitud aparente consiste en asignar el valor constante -0,00569 como aberración solar (ver cap. 8).

El valor $\Delta\psi = -0,00478*\text{SENO}(\text{RADIANES}(125,04-1934,136*T))$ incluido en la fórmula supone una simplificación del procedimiento contenido en 7.4.2 que se explicitó y cuyos errores se evaluaron en dicho punto. Esta simplificación se separa de las propuestas de Meeus estudiadas en el mismo punto.

MEAN OBLIQ ECLIPTIC (DEG) = ϵ_0 =

$$23+(26+((21,448-T*(46,815+T*(0,00059-T*0,001813))))/60)/60$$

Se trata de la expresión simplificada analizada en 5.2., propuesta por Lieske [54] y recogida por J. Meeus [9]. NOAA no considera necesario aplicar la expresión completa de Laskar [36], que se incluyó igualmente en 5.2. y que cuenta con términos hasta la décima potencia, aunque su utilización alternativa requeriría el uso de la unidad de tiempo $U = T/100$.

OBLIQ CORR (DEG) = $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon =$

$$= \epsilon_0 + 0,00256*\text{COS}(\text{RADIANES}(125,04-1934,136*T))$$

El segundo término es el correspondiente a la nutación en oblicuidad, con la fórmula simplificada analizada igualmente en 7.4.2.

SUN RT ASCEN (DEG) = Ascensión recta = $\alpha =$

$$\text{GRADOS}(\text{ATAN2}(\text{COS}(\text{RADIANES}(\text{Lt})); \\ \text{COS}(\text{RADIANES}(\epsilon))*\text{SENO}(\text{RADIANES}(\text{Lt}))))$$

El concepto de ascensión recta no ha sido desarrollado en nuestros procedimientos anteriores, aunque sí expuesto en nuestro capítulo dedicado a la ecuación del tiempo. No obstante, dado que el método NOAA utiliza, como se verá, la expresión simplificada de Smart para EoT, nos encontramos ante el mismo caso que en el relativo al radio vector: este dato no es necesario para ningún cálculo posterior. Desconocemos por qué razón la NOAA mantiene esta salida.

SUN DECLIN (DEG) = declinación solar = $\delta =$

$$\text{GRADOS}(\text{ASENO}(\text{SENO}(\text{RADIANES}(\epsilon))*\text{SENO}(\text{RADIANES}(\text{Lt}))))$$

Esta expresión se definió en 2.6.1. Hay que hacer constar dos cuestiones:

- Como sabemos, este valor δ está relacionado con α_s a través de

$$\delta = \alpha_s - \frac{\pi}{2} = \alpha_s - 90^\circ$$

- La expresión de la declinación es la que se ha venido utilizando hasta ahora para la hipótesis de órbita plana. En capítulos posteriores se analizará la hipótesis de órbita tridimensional.

$$\text{VAR } y = \text{TAN}(\text{RADIANES}(\varepsilon/2)) * \text{TAN}(\text{RADIANES}(L_0/2))$$

Se trata de un cambio de variable auxiliar que se utilizará para el cálculo de la ecuación del tiempo. Esta se obtiene de forma diferente al cálculo con dos términos que hemos realizado en el cap. 11. Este término fue definido con la misma forma por Smart en [7], dentro de la expresión general propuesta para la ecuación del tiempo del mismo autor, que se reproduce a continuación.

$$\begin{aligned} \text{EQ OF TIME (MINUTES)} = \text{Ecuación del Tiempo } EoT \text{ (en minutos)} = \\ = 4 * \text{GRADOS}(\text{VAR } y * \text{SENO}(2 * \text{RADIANES}(L_0)) - 2 * e * \text{SENO}(\text{RADIANES}(M)) + 4 * e * \\ \text{VAR } y * \text{SENO}(\text{RADIANES}(M)) * \text{COS}(2 * \text{RADIANES}(L_0)) - 0,5 * \text{VAR } y * \text{VAR } y * \\ \text{SENO}(4 * \text{RADIANES}(L_0)) - 1,25 * e * e * \text{SENO}(2 * \text{RADIANES}(M))) \end{aligned}$$

La ecuación utilizada, como queda dicho, sigue el modelo propuesto por Smart, [7], y es recogido por J. Meeus [9], según vimos en 11.7.1

$$\begin{aligned} EoT = 4 \cdot \left[\tan^2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \cdot \sin(2L_0) - 2e \cdot \sin M + 4e \cdot \tan^2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \cdot \sin M \cdot \cos(2L_0) - \right. \\ \left. - 0,5 \tan^4\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \sin(4L_0) - 1,25e^2 \cdot \sin(2M) \right] \end{aligned}$$

Como hemos establecido anteriormente, se trata de un procedimiento de cálculo donde no se necesita obtener previamente el valor de la ascensión recta, cuestión manifestada más arriba.

$$\begin{aligned} \text{HA SUNRISE (DEG)} = \omega_0 = \text{ángulo horario abarcado por el orto (salida del sol) y} \\ \text{el mediodía} = \\ = \text{GRADOS}(\text{ACOS}(\text{COS}(\text{RADIANES}(90,833)) / (\text{COS}(\text{RADIANES}(\Phi)) * \\ \text{COS}(\text{RADIANES}(\delta))) - \text{TAN}(\text{RADIANES}(\Phi)) * \text{TAN}(\text{RADIANES}(\delta)))) \end{aligned}$$

Esta variable no se ha definido en capítulos anteriores, pues hemos seguido el procedimiento inverso, calculando previamente el mediodía en hora local y restándole la mitad de la duración de horas de Sol, que igualmente se han calculado antes. Por ello, este ángulo no ha sido utilizado como tal en nuestros cálculos de los capítulos previos.

La ecuación se puede transcribir como (hemos adoptado la denominación ω_0 de forma arbitraria):

$$\omega_o = \arccos\left(\frac{\cos 90,833}{\cos \Phi \cdot \cos \delta} - \tan \Phi \cdot \tan \delta\right)$$

Si convertimos este ángulo en horas de Sol anteriores al mediodía, bastará con multiplicar la expresión anterior por 24 y dividir por 360, es decir, multiplicar por 1/15:

$$\begin{aligned} HS &= \frac{1}{15} \omega_o = \frac{1}{15} \arccos\left(\frac{\cos 90,833}{\cos \Phi \cdot \cos \delta} - \tan \Phi \cdot \tan \delta\right) = \frac{1}{15} \arccos\left(\frac{-\sin 0,833}{\cos \Phi \cdot \cos \delta} - \tan \Phi \cdot \tan \delta\right) = \\ &= \frac{1}{15} (180 - \arccos\left(\frac{\sin 0,833}{\cos \Phi \cdot \cos \delta} + \tan \Phi \cdot \tan \delta\right)) = 12 - \frac{1}{15} \arccos\left(\frac{\sin 0,833}{\cos \Phi \cdot \cos \delta} + \tan \Phi \cdot \tan \delta\right) \end{aligned}$$

En nuestro procedimiento hemos deducido que la expresión que nos da el número de horas de Sol considerando un valor integrado constante para radio solar + refracción de 0,833 es (cap. 10.3):

$$HS_{corr} = 24 - \frac{2}{15} \arccos\left(\frac{\sin 0,833}{\cos \Phi \cdot \cos \delta} + \tan \Phi \cdot \tan \delta\right)$$

Que es similar, como se ve, a la expresión deducida más arriba, pero multiplicada por dos, como corresponde al arco de luz abarcado por la línea del orto y la del ocaso, es decir, el doble del arco entre orto y mediodía o entre mediodía y ocaso.

SOLAR NOON (LST) = H_{MED} = Instante del mediodía referido a la hora oficial sin considerar DST (Local Solar Time) =

$$= (720 - 4 * \lambda - EoT + TZ * 60) / 1440$$

Este procedimiento es equivalente al utilizado por nosotros en el cap. 12.2., con la única diferencia de que en el caso presente el numerador expresa el tiempo total en minutos en lugar de en horas, como en nuestro caso. Al dividir por 1440, número total de minutos de un día, lo que tenemos es una fracción de día, que Excel convierte en formato hh:mm:ss siguiendo la siguiente regla:

0,50 equivale a las 12:00:00

0,75 equivale a las 18:00:00

Y así sucesivamente.

SUNRISE TIME (LST) = H_{orto} = Hora del orto (salida del Sol en horario local LST) = $(H_{MED} * 1440 - \omega_0 * 4) / 1440$

Tengamos en cuenta que en esta aplicación se utiliza el ángulo horario ω_0 en grados, no en tiempo. Por tanto, operando como en el punto anterior, si H_{MED} está en fracción de día, habrá que traducirlo a minutos multiplicando por 1440. A esta cifra habrá que restarle ω_0 transformado en minutos de tiempo para hallar la hora de salida del Sol, es decir:

$$\omega_0 \cdot \frac{24}{360} \cdot 60 = 4 \cdot \omega_0$$

Que, dividido todo ello por 1440, nos da la fracción de día, que Excel convierte con el formato apropiado a hh:mm:ss.

SUNSET TIME (LST) = Hora del ocaso (puesta del Sol en horario local LST) = $H_{ocaso} = (H_{MED} * 1440 + \omega_0 * 4) / 1440$

Análogo razonamiento al caso anterior.

SUNLIGHT DURATION (MINUTES) = $8 * \omega_0$

Esta expresión procede de multiplicar ω_0 por 2 y transformarlo en minutos, es decir:

$$2\omega_0 \cdot \frac{24}{360} \cdot 60 = 8 \cdot \omega_0$$

TRUE SOLAR TIME (MIN) = T_{SV} = Tiempo transcurrido desde la medianoche verdadera hasta la hora considerada =

=RESIDUO(TIME*1440+EoT+4*\lambda-60*TZ;1440)

Esta expresión, que no hemos deducido previamente, por utilizar otro procedimiento de cálculo en nuestros desarrollos anteriores, la denominaremos T_{SV} . Tengamos en cuenta que el mediodía solar verdadero se produce a las 12:00 hora solar local. En esta hoja contamos nuevamente con una particularidad: la hora (time) en formato hh:mm:ss es interpretada en Excel como fracción de día. Por ello no debe extrañarnos su transformación a minutos multiplicando por 1440.

En cuanto al resto de la fórmula, recordemos que (subcap.12.2):

$$H_{MED} = 12 - \frac{\lambda}{15} - \frac{EoT}{60} + TZ$$

En la misma, en fracciones de hora, 12 era el mediodía solar expresado en horas. Para la medianoche H_{00} local tendremos:

$$H_{00} = -\frac{\lambda}{15} - \frac{EoT}{60} + TZ$$

Esta expresión nos sirve para cualquier hora pasada la medianoche, sin más que añadir la misma cantidad de tiempo en los dos miembros ($H = TIME$):

$$H = T_{sv} - \frac{\lambda}{15} - \frac{EoT}{60} + TZ$$

Ecuación que, invertida, nos da:

$$T_{sv} = H + \frac{\lambda}{15} + \frac{EoT}{60} - TZ$$

Para pasar este valor a minutos, habida cuenta del tratamiento que da Excel a las expresiones en hh:mm:ss, tendremos:

$$T_{sv} \text{ en minutos} = 1440 \cdot H + 4\lambda + EoT - 60 \cdot TZ$$

Valor que nos indica el número de minutos transcurridos desde la medianoche en tiempo solar verdadero hasta la hora considerada. Puede adoptar valores positivos o negativos.

La división módulo 1440 tiene sentido para no obtener valores absurdos >1440 min. (24 horas)

HOOR ANGLE (DEG) = ángulo horario = ω =

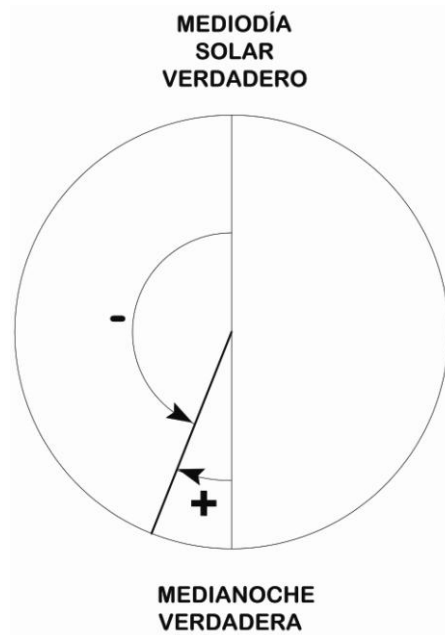
$$=SI(T_{sv}/4 < 0; AB2/4 + 180; T_{sv}/4 - 180)$$

Para el cálculo del ángulo horario nos apoyaremos en el tiempo obtenido en el punto anterior transformado en grados, es decir, multiplicado por

$$\frac{360}{24 \cdot 60} = \frac{1}{4}$$

Pero este ángulo hay que corregirlo. Podemos verlo en el gráfico 13-1.

Al tomar como referencia el mediodía, de acuerdo con el criterio general establecido, tenemos que hacer la corrección angular de considerar el suplementario del ángulo anteriormente hallado. Además, el convenio de signos nos indica que el ángulo horario ω es positivo para instantes posteriores al mediodía, y negativo para las horas anteriores. Ese es el motivo de las correcciones que se indican en la fórmula y del discriminante utilizado.



13-1. Corrección al ángulo horario.

$$\text{SOLAR ZENITH ANGLE (DEG)} = \theta = \\ = \text{GRADOS}(\text{ACOS}(\text{SENO}(\text{RADIANTES}(\Phi)) * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\delta)) + \\ \text{COS}(\text{RADIANTES}(\Phi)) * \text{COS}(\text{RADIANTES}(\delta)) * \text{COS}(\text{RADIANTES}(\omega))))$$

Es decir:

$$\cos \theta = \sin \Phi \cdot \sin \delta + \cos \Phi \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega \quad (\text{Ec. 13.1})$$

Nosotros hemos calculado directamente el ángulo de elevación medido desde el horizonte en lugar del ángulo cenital del Sol, pero esta expresión es equivalente, como veíamos en 3.2 .

Se verifica que:

$$\hat{e} + \theta = 90^\circ. \quad (\text{Ec. 13.2})$$

Por lo que:

$$\cos\theta = \sin \hat{e} .$$

Así pues, se puede obtener el cénit de la forma indicada, o la elevación mediante la aplicación de la recíproca del seno en (Ec. 13.2). En esta hoja, la NOAA prefiere el cálculo del cénit, lo que obligará a la corrección del cálculo del complementario posteriormente.

SOLAR ELEVATION ANGLE (DEG) = elevación = $\hat{e} = 90-\theta$

De acuerdo con lo indicado en el punto anterior.

APPROX ATMOSPHERIC REFRACTION (DEG) = corrección por refracción atmosférica = $\Delta\hat{e}$

$$=SI(\hat{e}>85;0;SI(\hat{e}>5;58,1/TAN(RADIANES(\hat{e}))-0,07/POTENCIA(TAN(RADIANES(\hat{e}));3)+0,000086/POTENCIA(TAN(RADIANES(\hat{e}));5);SI(\hat{e}>-0,575;1735+\hat{e}*(-518,2+\hat{e}*(103,4+\hat{e}*(-12,79+\hat{e}*0,711))));-20,772/TAN(RADIANES(\hat{e}))))/3600$$

La corrección se realiza por el procedimiento de la NOAA que se indicó en 10.1.3. No se han encontrado las fuentes primarias de esta propuesta que, por otra parte, proporciona resultados similares a los métodos alternativos estudiados en el capítulo 10.

SOLAR ELEVATION CORRECTED FOR ATM REFRACTION (DEG)

= elevación corregida por refracción = $\hat{e}_{cor} = \hat{e} + \Delta\hat{e}$

SOLAR AZIMUTH ANGLE (DEG CW FROM N) = acimut medido desde el Norte en sentido horario = γ_N .

$$=SI(\omega>0;RESIDUO(GRADOS(ACOS(((SENO(RADIANES\Phi))*COS(RADIANES(\theta)))-SENO(RADIANES(\delta)))/(COS(RADIANES(\Phi))*SENO(RADIANES(\theta)))))+180;360);RESIDUO(540-GRADOS(ACOS(((SENO(RADIANES(\Phi))*COS(RADIANES(\theta)))-SENO(RADIANES(\delta)))/(COS(RADIANES(\Phi))*SENO(RADIANES(\theta)))));360))$$

Curiosamente, para calcular el acimut respecto al norte, se parte de la expresión general del acimut respecto al sur en función del cénit: (ángulos crecientes en sentido horario):

$$\cos \gamma_s = \frac{\sin \Phi \cdot \cos \theta - \sin \delta}{\cos \Phi \cdot \sin \theta}$$

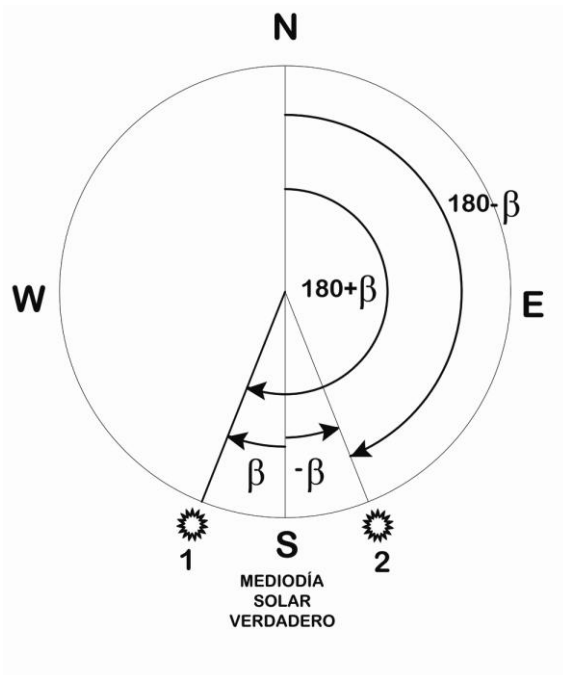
Expresión que, por (Ec. 13.2), es equivalente a la calculada por nosotros en 3.2. (Ec. 3.18b):

$$\cos \gamma_s = \frac{\sin \Phi \cdot \sin \hat{e} - \sin \delta}{\cos \Phi \cdot \cos \hat{e}}$$

La NOAA realiza una serie de correcciones angulares en función del ángulo horario, dado que a las fórmulas anteriores se les aplica su recíproca para el cálculo final de γ_s .

El problema del arccos es que esta función nos devolverá argumentos positivos aún cuando el ángulo solución debiera ser negativo. Si analizamos la siguiente fig. 13-2 veremos que la función recíproca nos va a arrojar siempre el resultado β incluso en los casos en los que debiera ser $-\beta$. Para saber en qué supuesto nos encontramos, tengamos en cuenta que, de acuerdo con la figura anterior, el valor de β será positivo si nos encontramos en la situación 1, es decir, cuando el Sol se encuentra al oeste, o lo que es lo mismo, cuando $\omega > 0$. En este caso, el acimut desde el norte valdrá:

$$\gamma_N = \gamma_s + 180^\circ$$



13-2. Determinación correcta del acimut. Problemas de las funciones recíprocas.

Por el contrario, cuando el Sol se divide hacia el este, estaremos en la posición 2, es decir, con $\omega > 0$. El valor β obtenido debería haber sido $-\beta$. En este caso, el ángulo medido desde el norte será

$$\gamma_N = 180^\circ - \gamma_S ,$$

tal y como se ve en la fig. 13-2.

Por razones prácticas, en vez de utilizarse en este segundo caso como referencia el ángulo 180° , se prefiere su equivalente 540° para evitar problemas de discontinuidades en los cálculos en columna. Una propuesta altamente útil.

13.5. CONCLUSIONES SOBRE EL MÉTODO SIMPLIFICADO NOAA

Este procedimiento es suficientemente válido para cualquier cálculo que no implique unos requerimientos de precisión excesivamente altos. Resulta curioso que no se haya solucionado el problema de Excel para fechas anteriores al 28/02/1900 mediante cualquiera de los algoritmos recogidos en 4.6. Igualmente, deben tomarse con cautela los instantes de salida y puesta del Sol, al tratarse de cálculos en continuo sometidos a la declinación δ variable en cada instante: el orto y el ocaso, en sentido estricto, no serían equidistantes del mediodía en el tiempo, pero esta cuestión se obvia tanto por la NOAA como por casi todas las fuentes consultadas. Con esta aplicación, para diferentes horas del día, obtenemos con pequeñas variaciones diferentes horas de salida y puesta del Sol. Podemos adoptar la convención de realizar los cálculos con la declinación correspondiente al mediodía solar en el punto de observación considerado, esto es, introduciendo como dato de partida las 12:00 hora local solar.

14. CÁLCULOS DE ALTA PRECISIÓN. EL SPA

Solem certissima signa sequuntur

En capítulos anteriores analizábamos las complejas expresiones polinómicas relativas a la teoría de la nutación y al método VSOP desarrollado hasta el término L5.

Sin embargo, hasta ahora hemos utilizado siempre expresiones simplificadas derivadas de ambos desarrollos. Estas expresiones son válidas en cuanto a precisión para la mayoría de los requerimientos habituales, pero no así para aplicaciones especiales en el campo de la energía solar. En ese sentido, NREL (*National Renewable Energy Laboratory*) de USA publicó en 2008 la versión revisada del SPA (*Solar Position Algorithm for Solar Radiation Applications*), cuyos autores, Ibrahim Reda y Afshin Andreas (citados en repetidas ocasiones en esta tesis) establecieron que permite el cálculo del acimut y la elevación del Sol con una precisión de $\pm 0.0003^\circ$ en el período comprendido entre los años -2000 y 6000 [37].

Este procedimiento consigue precisiones tan notables utilizando todos los términos de las tablas incluidas en los capítulos 6 y 0, concretamente las tablas de la Tabla 6-1 a la Tabla 6-4, y la Tabla 7-1. En el caso del VSOP87, hay que hacer constar que incluso la utilización de todos los valores de la tabla mencionada supone de por sí una considerable simplificación frente a la utilización del conjunto completo de valores de que consta el sistema.

Asimismo, se tienen en cuenta igualmente las dimensiones de nuestro planeta al fijar las observaciones del Sol sobre la superficie de aquel, y se considera para mayor precisión la forma de elipsoide de la Tierra. Recordemos que en el cap. 3 reducíamos el tamaño de la Tierra a un punto ideal situado en el centro de la misma, y desde dicho punto definíamos el acimut y elevación sobre un plano orientado en función de la latitud terrestre. En términos astronómicos diríamos que hemos pasado de un *sistema de coordenadas geocéntrico* (el nuestro, situado en el centro de la Tierra) a *topocéntrico* (situado sobre su superficie).

No debemos confundir estas definiciones del punto del observador con el sistema utilizado: en nuestro caso, heliocéntrico (origen de L_t en el Sol) frente al geocéntrico (origen de ángulos con centro en la Tierra).

Finalmente, y en relación con esta última aclaración, el modelo utilizado en el SPA es geocéntrico, por lo que, una vez obtenidos los valores de L a través del VSOP, deberemos proceder a realizar las oportunas correcciones que veíamos en capítulos anteriores en cuanto al origen de ángulos (desde el equinoccio de primavera en este caso).

Es importante hacer constar que el SPA considera la órbita terrestre tridimensional. Por ello, hace uso de los términos en B incluidos en las tablas VSOP, como ya comentamos en el subcapítulo 6.5, para el cálculo de la latitud eclíptica B en cada instante.

La presentación del SPA nos aparta, por tanto, del modelo heliocéntrico de órbita plana que hemos desarrollado hasta ahora, pero hemos creído conveniente mencionarlo, aun sin presentar una alternativa de cálculo como hicimos en los capítulos 6 y 7.

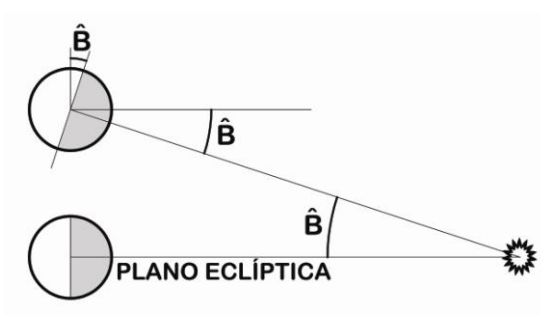
No obstante, algunos conceptos como la generalización a tres dimensiones de la declinación y la ascensión recta sí pueden ser deducidos de forma novedosa mediante la geometría plana y el sistema diédrico de proyección.

Dichos elementos serán imprescindibles para la utilización del algoritmo SPA.

14.1. GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE DECLINACIÓN SOLAR PARA EL ANÁLISIS DE LA ÓRBITA TERRESTRE CON COMPONENTES TRIDIMENSIONALES

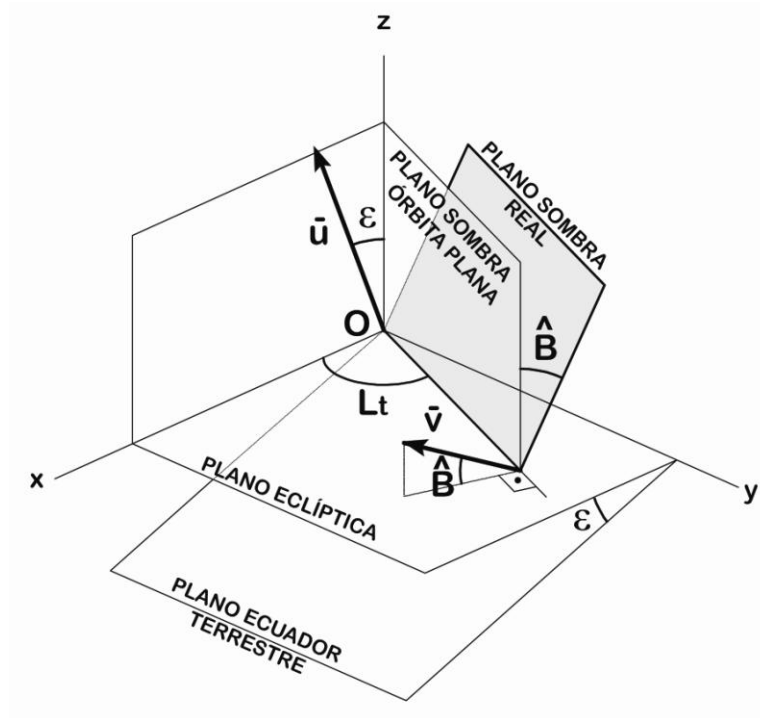
La determinación de la órbita terrestre mediante el método VSOP87 nos proporciona una serie de resultados sobre la latitud eclíptica de nuestro planeta a lo largo del tiempo, lo cual nos permite conocer las perturbaciones en el sentido perpendicular al plano de la eclíptica de la órbita terrestre. Si pretendemos aumentar la precisión de nuestros cálculos, deberemos tener en cuenta estas perturbaciones que, por otra parte, son tan sencillas de calcular con el VSOP como la longitud, ya que la operativa es idéntica.

Desde un punto de vista intuitivo, el paso de órbita plana a órbita tridimensional debido a perturbaciones externas es muy sencillo si recordamos el concepto de *plano de sombra*. En la fig. 14-1 podemos comprobar la basculación del mismo cuando la Tierra sufre un desplazamiento sobre la eclíptica de valor angular \hat{B} . El eje de giro de la Tierra no sufre alteración en su orientación espacial, pero la posición relativa del plano de sombra varía, manteniéndose, por propia definición, perpendicular a la línea Tierra-Sol.



14-1. Definición del ángulo \hat{B}

El plano de sombra, en caso de ser la órbita plana, siempre será perpendicular al plano de la eclíptica. Ahora bien, si desplazamos nuestro planeta un cierto ángulo \hat{B} , la situación es diferente: el plano de sombra ya no será perpendicular a aquel, sino que su vector director formará un ángulo \hat{B} con la perpendicular a la eclíptica (fig. 14-2).



14-2. Plano de sombra real por basculación respecto a la eclíptica.

Los vectores directores de los planos del ecuador terrestre y de sombra real, perpendiculares a los mismos, son, respectivamente, \vec{u} y \vec{v} .

Esta nueva situación del plano de sombra provoca un cambio en la determinación de α_s y, consecuentemente, de δ , ángulos que están directamente relacionados entre sí, como ya se vio en capítulos anteriores.

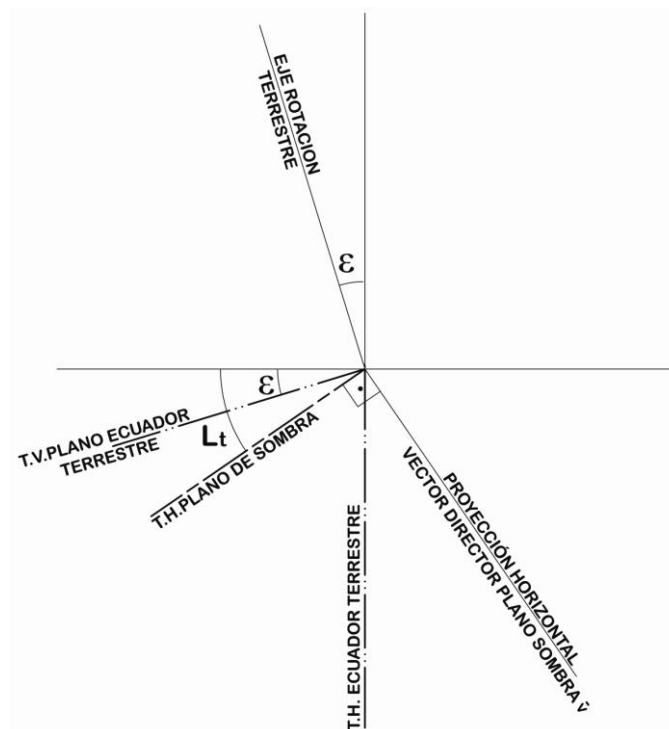
Como en aquellos casos, podemos resolver este elemental problema geométrico por varios procedimientos. El primero, mediante el sistema diédrico de proyección. El segundo, a través de un sencillo cálculo vectorial.

14.2. CÁLCULO DE LA δ GENERALIZADA PARA ÓRBITAS TRIDIMENSIONALES. MÉTODOS

En lo que sigue, utilizaremos dos procedimientos deductivos, como anteriormente: el sistema diédrico de proyección y el cálculo vectorial. Nos apoyaremos en la fig. 14-2.

14.2.1. CÁLCULO DE δ GENERALIZADA MEDIANTE EL SISTEMA DIÉDRICO

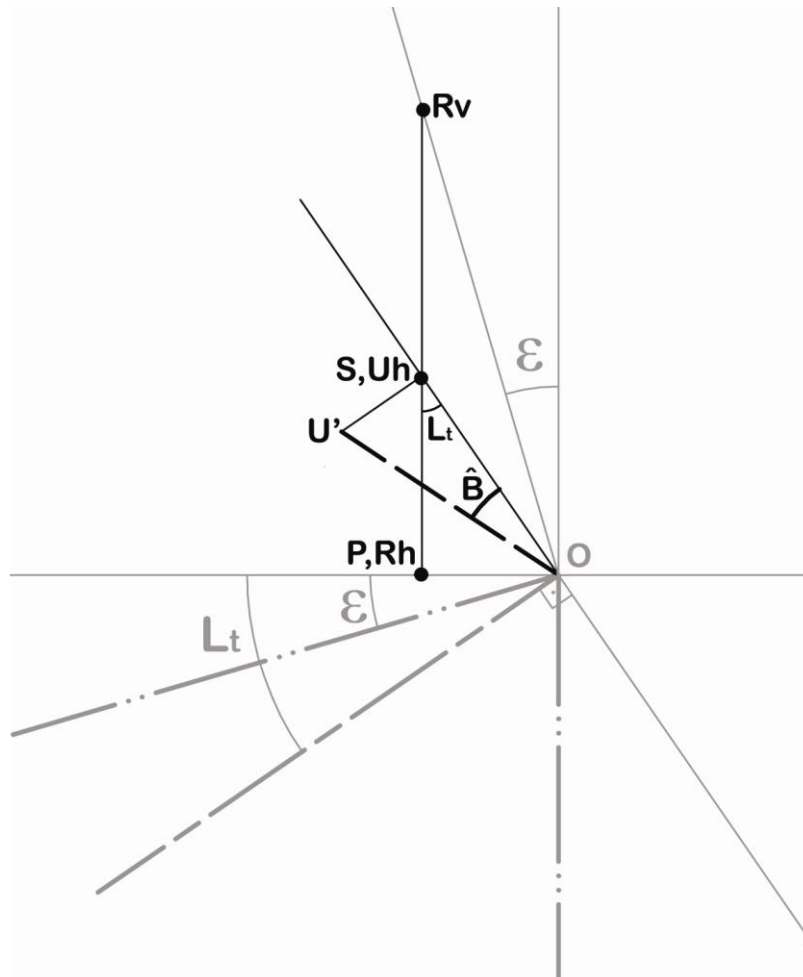
En primer lugar, determinaremos gráficamente el ángulo de la traza del plano de sombra real con la vertical, puesto que ya no podemos considerar que dicho ángulo sea $= 0^\circ$. El vector director del plano del ecuador terrestre, \vec{u} , sigue estando situado sobre el plano vertical. El vector \vec{v} , perpendicular al plano de sombra, forma un ángulo \hat{B} con el plano de la eclíptica. La representación grafica en diédrica es muy sencilla, y se puede observar en la fig. 14-3. En ella, para mayor simplicidad, se ha omitido la traza del plano de sombra sobre el plano vertical, toda vez que vamos a operar con abatimientos del vector \vec{v} , que está perfectamente definido por L_t y \hat{B} . Las abreviaturas T.H. y T.V. en la figura hacen alusión a las trazas horizontal y vertical, respectivamente.



14-3. Representación en diédrica de los planos ecuatorial y de sombra y las alineaciones de sus vectores directores.

El ángulo α_s del plano de sombra con el plano del ecuador lo podemos obtener como el ángulo formado por los vectores directores de dichos planos, es decir, \vec{u} y \vec{v} , perpendiculares a ellos.

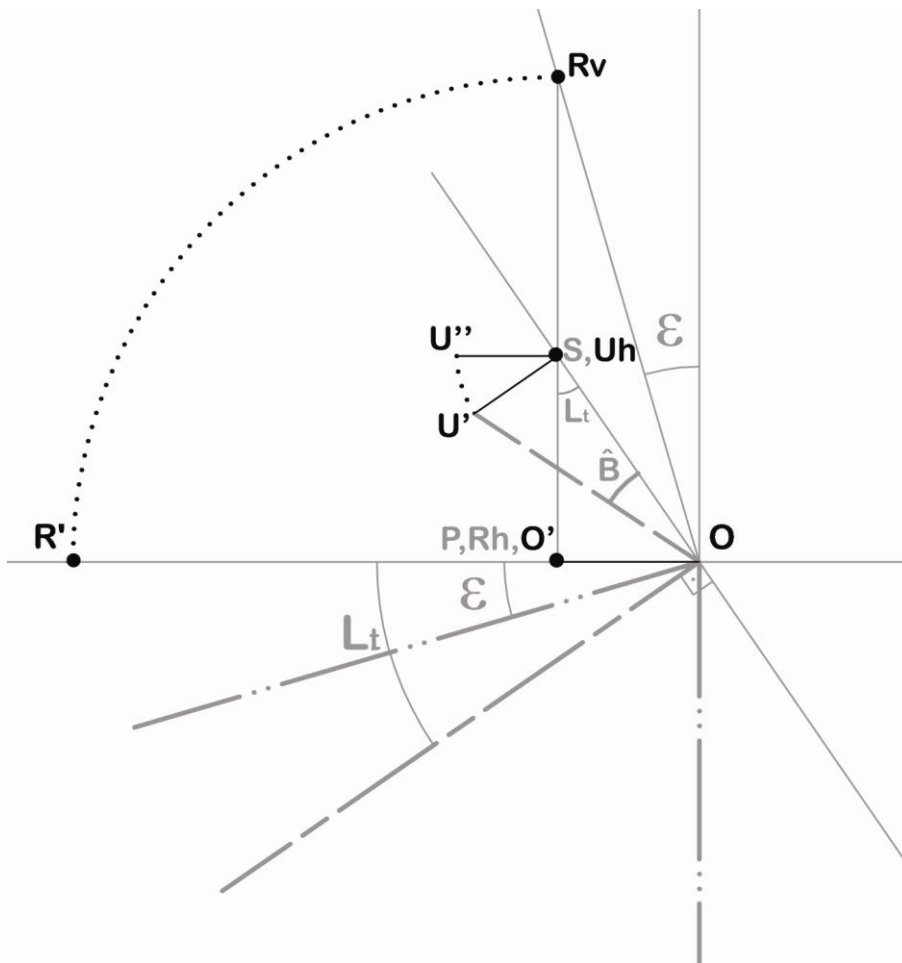
El criterio para la elección del sentido de los vectores directores es el mismo que se utilizó en capítulos anteriores. Consideremos una distancia arbitraria OP (fig. 14-4) sobre la intersección del plano de la eclíptica con el plano vertical teórico inicial (nuestra línea de Tierra en diédrica). En las deducciones gráficas, utilizaremos una coma para indicar puntos distintos con proyecciones coincidentes. Por otra parte, para evitar errores, utilizaremos los subíndices h y v para denominar las proyecciones horizontal y vertical de un punto cuando exista cierta confusión. Así, R_v será la proyección vertical de R y R_h la horizontal. El superíndice “prima” indicará que el punto en cuestión está abatido.



14-4. Abatimiento de OU y plano vertical por P .

Por P trazamos un plano perpendicular a la línea de Tierra que cortará en R al eje de rotación, esto es, a la recta que contiene a \vec{u} . También cortará en S a la perpendicular a la traza horizontal del plano de sombra, que, por tanto, será la proyección horizontal del vector \vec{v} (en diédrica, una recta perpendicular a un plano tiene sus proyecciones perpendiculares a las trazas del mismo).

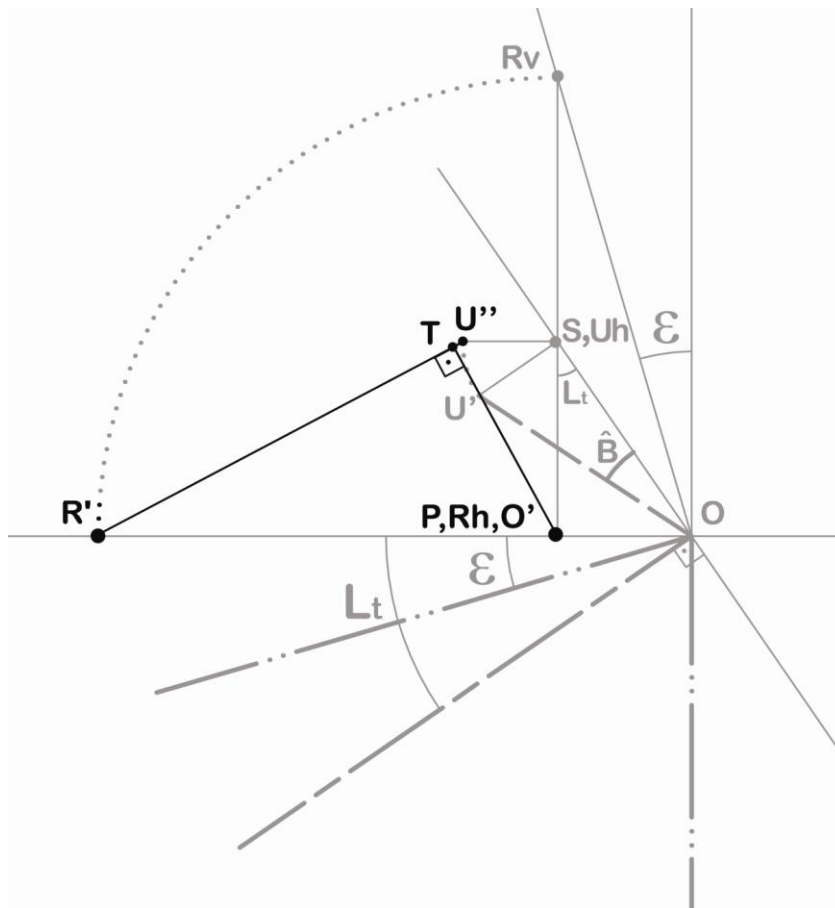
En la fig 14-4 hemos representado el vector \vec{v} como OU, que representamos abatido sobre el plano horizontal (U'). Este abatimiento auxiliar tiene por objeto solamente conocer el segmento SU en verdadera magnitud. El ángulo α_S que buscamos será ROU en verdadera magnitud. El segmento RS será a su vez el eje de charnela del abatimiento de los puntos R y U sobre el plano horizontal. Tengamos en cuenta que, independientemente del abatimiento auxiliar previo de U, este último está realmente en la vertical que pasa por S. Por esta razón, tanto U (cuya cota sobre el plano horizontal es la distancia hallada SU') como R quedarán abatidos sobre el plano horizontal como U'' y R' (fig. 14-5). Sin embargo, el abatimiento arrastrará al punto O hasta situarlo sobre la perpendicular a P (O').



14-5. Abatimiento de U y R sobre el plano horizontal.

Lógicamente, $OR = OR'$. Si unimos los puntos abatidos U'' y R' mediante un segmento, podemos utilizarlo a su vez como eje de charnela del segundo abatimiento para situar el punto O sobre P en el plano horizontal (fig.14-6).

Así pues, para hallar O'' bastará con trazar por O' una perpendicular a $U''R'$, que cortará a esta en T .

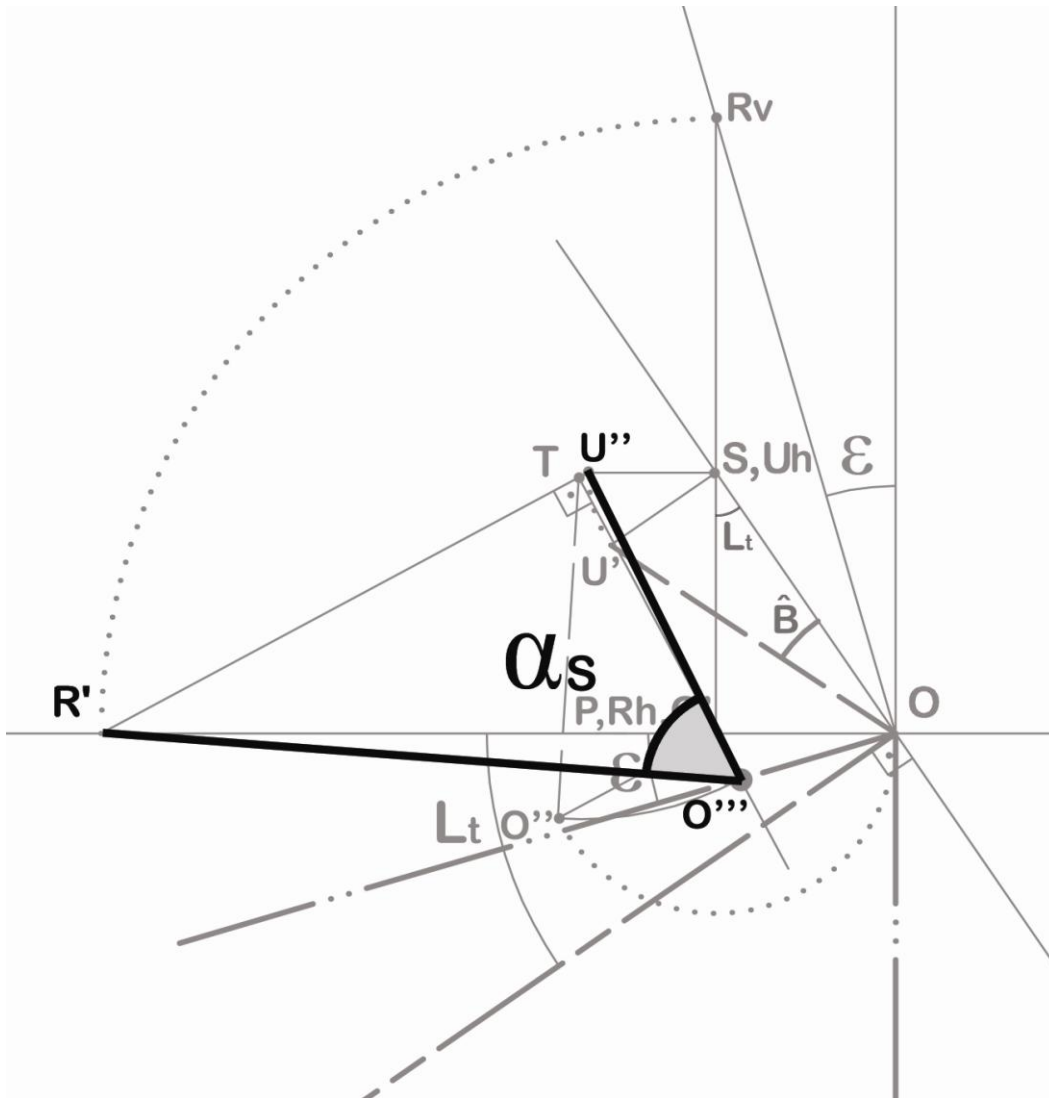


14-6. Nuevo eje de charnela $U'R'$.

Utilizando, como decíamos, este nuevo eje de charnela $R'U''$, o lo que es lo mismo, $R'T$, para abatir O' sobre el plano horizontal, tendremos que representar primero el segmento TO' en verdadera magnitud (recordemos que O' está situado en la vertical de P). Para ello bastará con llevar la distancia real $OP=O'P$ sobre la perpendicular a PT en P (fig. 14-7).

Así obtendremos O'' . A continuación, basándonos en esta rotación auxiliar, giraremos TO'' desde T hasta superponerlo con TO' , con lo que tendremos abatido O' sobre el plano horizontal, cuyo resultado es O''' .

La fig. 14-8 resume la solución descrita:



14-8. Obtención final de α_s .

La deducción de las expresiones analíticas se realiza, como en anteriores ocasiones, basándonos en el gráfico final. Para ello, relacionaremos todos los segmentos y ángulos que, inicialmente, definiremos en función del segmento auxiliar OP tomado arbitrariamente.

Así, de acuerdo con las figs. 14-7 y 14-8, tenemos que:

$$O''R' = OR = \frac{OP}{\sin \varepsilon} \quad (\text{Ec. 14.1})$$

$$O''U' = OU = \frac{OU_h}{\cos \hat{B}} = \frac{OP}{\sin L_t \cdot \cos \hat{B}} \quad (\text{Ec. 14.2})$$

$$SU' = SU = OU_h \cdot \tan \hat{B} = \frac{OP \cdot \tan \hat{B}}{\sin L_t} \quad (\text{Ec. 14.3})$$

$$PS = \frac{OP}{\tan L_t} \quad (\text{Ec. 14.4})$$

$$PR = \frac{OP}{\tan \varepsilon} \quad (\text{Ec. 14.5})$$

Ahora calculamos la longitud del segmento U'R', que por proceder de un abatimiento es igual a UR, como en casos anteriores. Para ello, basta con aplicar el teorema de Pitágoras a los catetos PR' - SU' = PR - SU (fig. 14-8) para hallar la hipotenusa U'R' con lo que tendremos:

$$U'R'' = UR = \sqrt{(PR - SU)^2 + PS^2} \quad (\text{Ec. 14.6})$$

Que, sustituyendo por los valores de las (Ec. 14.3), (Ec. 14.4), (Ec. 14.5), podemos escribir como:

$$UR = OP \cdot \sqrt{\frac{\tan^2 \hat{B}}{\sin^2 L_t} + \frac{1}{\tan^2 \varepsilon} - \frac{2 \cdot \tan \hat{B}}{\sin L_t \cdot \tan \varepsilon} + \frac{1}{\tan^2 L_t}} \quad (\text{Ec. 14.7})$$

Pero el teorema del coseno establece que (ver fig. 14-8) :

$$\cos \alpha_s = \frac{OU^2 + OR^2 - UR^2}{2 \cdot OU \cdot OR} \quad (\text{Ec. 14.8})$$

Por esta razón, sustituyendo los valores de (Ec. 14.2), (Ec. 14.1), (Ec. 14.7) en (Ec. 14.8) podemos escribir:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_s &= \frac{\frac{1}{\sin^2 L_t \cdot \cos^2 \hat{B}} + \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} - \frac{\tan^2 \hat{B}}{\sin^2 L_t} - \frac{1}{\tan^2 \varepsilon} + \frac{2 \tan \hat{B}}{\sin L_t \cdot \tan \varepsilon} - \frac{1}{\tan^2 L_t}}{2} = \\ &= \frac{\sin \varepsilon}{2 \sin L_t \cdot \cos \hat{B}} + \frac{\sin L_t \cdot \cos \hat{B}}{2 \sin \varepsilon} - \frac{\sin^2 \hat{B} \cdot \sin \varepsilon}{2 \sin L_t \cdot \cos \hat{B}} - \frac{\cos^2 \varepsilon \cdot \sin L_t \cdot \cos \hat{B}}{2 \sin \varepsilon} + \\ &\quad + \sin \hat{B} \cdot \cos \varepsilon - \frac{\sin \varepsilon \cdot \cos^2 L_t \cdot \cos \hat{B}}{2 \sin L_t} = \\ &= \frac{\sin^2 \varepsilon + \sin^2 L_t \cdot \cos^2 \hat{B} - \sin^2 \hat{B} \cdot \sin^2 \varepsilon - \cos^2 \varepsilon \cdot \sin^2 L_t \cdot \cos^2 \hat{B}}{2 \sin L_t \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin \varepsilon} + \\ &\quad + \frac{2 \sin L_t \cdot \sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon - \sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 L_t \cdot \cos^2 \hat{B}}{2 \sin L_t \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin \varepsilon} . \end{aligned}$$

Que, sustituyendo expresiones trigonométricas sucesivamente nos da:

$$\cos \alpha_s = \frac{2 \sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 \hat{B} \cdot \sin^2 L_t + 2 \cdot \sin L_t \cdot \sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{2 \sin L_t \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin \varepsilon} ,$$

Y, finalmente,

$$\cos \alpha_s = \sin \varepsilon \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin L_t + \sin \hat{B} \cdot \cos \varepsilon . \quad (\text{Ec. 14.9})$$

Pero, como sabemos,

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ + \delta) = -\sin \delta$$

por lo que:

$$\sin \delta = -\cos \varepsilon \cdot \sin \hat{B} - \sin \varepsilon \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin L_t \quad (\text{Ec. 14.10})$$

Expresión generalizada que incluye las perturbaciones que desvían a nuestro planeta de la hipótesis de órbita plana, con latitud \hat{B} .

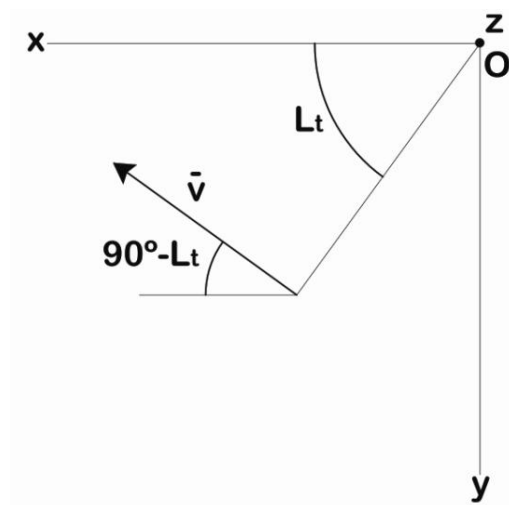
Así pues, si en esta ecuación hacemos $\hat{B} = 0$,

$$\sin \delta = -\sin \varepsilon \cdot \sin L_t$$

Ecuación que ya conocíamos en el caso de admitir la hipótesis de órbita plana.

14.2.2. CÁLCULO DE δ GENERALIZADA MEDIANTE ANÁLISIS VECTORIAL Y PROYECCIÓN DIÉDRICA SOBRE EL PLANO DE LA ECLÍPTICA (PLANO HORIZONTAL)

De la fig. 14-2, y de su proyección diédrica sobre el plano de la eclíptica (fig. 14-9), obtenemos, considerando \vec{u} y \vec{v} como vectores unitarios, que:



14-9. Proyección diédrica en planta de los vectores de la fig. 14-2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \sin \varepsilon \cdot \bar{i} + \cos \varepsilon \cdot \bar{k} \\ \bar{v} = \cos \hat{B} \cdot \cos(90 - L_t) \cdot \bar{i} + \cos \hat{B} \cdot \sin(90 - L_t) \cdot \bar{j} - \sin \hat{B} \cdot \bar{k} = \\ = \cos \hat{B} \cdot \sin L_t \cdot \bar{i} - \cos \hat{B} \cdot \cos L_t \cdot \bar{j} + \sin \hat{B} \cdot \bar{k} \end{array} \right.$$

Siendo el producto escalar de los vectores:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \left| \bar{u} \right| \left| \bar{v} \right| \cdot \cos \alpha = \sin \varepsilon \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin L_t + \cos \varepsilon \cdot \sin \hat{B}$$

Es decir :

$$\cos \alpha = \sin \varepsilon \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin L_t + \cos \varepsilon \cdot \sin \hat{B}$$

Que nos lleva, como en el caso anterior, dada la relación conocida entre α y δ mencionada anteriormente, a:

$$\sin \delta = -\sin \varepsilon \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin L_t - \cos \varepsilon \cdot \sin \hat{B}$$

14.2.3. COMPARACIÓN DE LAS EXPRESIONES OBTENIDAS CON LAS HABITUALES EN ASTRONOMÍA

Si observamos las expresiones habitualmente utilizadas en las obras de Astronomía, podemos encontrar diferencias aparentes con las anteriores.

Por ejemplo, en [12], Meeus [9], etc:

$$\sin \delta = \cos \beta \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \lambda + \sin \beta \cdot \cos \varepsilon$$

Pero según Meeus [9]:

“ λ = ecliptical (or celestial) longitude, measured from the vernal equinox along the ecliptic”.

“ β = ecliptical (or celestial) latitude, positive if north of the ecliptic, negative if south”.

Estas definiciones nos indican que:

- El sistema considerado es geocéntrico (origen en el equinoccio vernal, es decir, primaveral).

- Al ser geocéntrico, el ángulo con el que bascula el plano de sombra se invierte. Es decir, cuando, al producirse perturbaciones tridimensionales en la órbita la Tierra se ve bajo la eclíptica desde el Sol, el Sol se ve sobre la eclíptica desde Tierra.
- Podemos, por tanto, traducir los valores λ y β de la forma siguiente:

$$\lambda = L_t - 180^\circ \qquad \beta = -\hat{B} \quad .$$

Por ello, tendremos:

$$\sin \lambda = -\sin L_t \qquad \sin \beta = -\sin B \qquad \cos \beta = \cos \hat{B} \quad ,$$

por lo que:

$$\sin \delta = \cos \beta \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \lambda + \sin \beta \cdot \cos \varepsilon = -\cos \hat{B} \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin L_t - \sin \hat{B} \cdot \cos \varepsilon$$

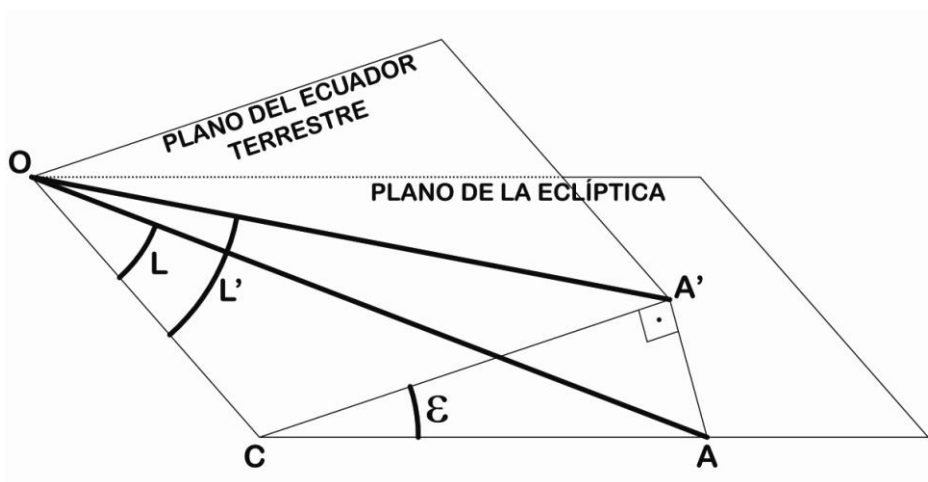
Es decir, se trata de expresiones totalmente equivalentes, con referencias diferentes (heliocéntrica vs. geocéntrica).

Hay que destacar que el SPA utiliza estas mismas expresiones de paso para trabajar con referencia topocéntrica. Para ello, se ha de utilizar la expresión acorde con el modelo geocéntrico.

En la fig. 14-11 se representa la Tierra en una posición desplazada con respecto al plano de la eclíptica, siendo la latitud eclíptica en sistema heliocéntrico el ángulo B. Hemos representado sobre la esfera terrestre el plano paralelo al e la eclíptica media para poder indicar los ángulos y sus relaciones de un modo más sencillo.

Observemos que, desde el plano real de la eclíptica y con origen en el Sol, el ángulo B así definido sería positivo.

En el capítulo 11 se tenía la fig. 11-7, que reproducimos ahora como fig. 14-11:



14-11. Relación entre ángulos en el plano de la eclíptica y su proyección sobre el plano ecuatorial.

Con las siguientes relaciones:

$$CA = OA \cdot \sin L$$

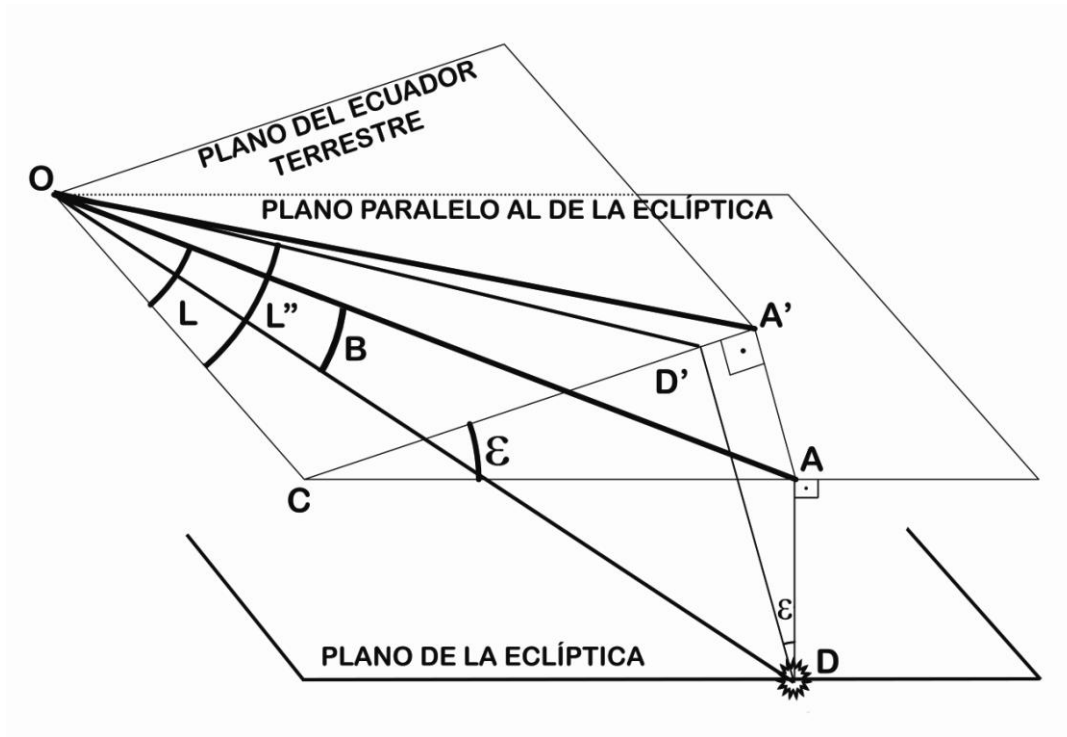
Ahora vamos a complementar este esquema, poniendo en juego la posición de este plano paralelo al de la eclíptica en relación con el Sol (ver fig. 14-12).

De dicha figura obtenemos que:

$$CA' = OA \cdot \sin L \cdot \cos \varepsilon$$

$$\frac{AD}{OA} = \tan B$$

$$A'D' = AD \cdot \sin \varepsilon$$



14-12. Proyección sobre el plano de la eclíptica del ángulo L corregido por la latitud orbital.

$$CD' = CA' - A'D' = OA \cdot \sin L \cdot \cos \varepsilon - AD \cdot \sin \varepsilon = OA \cdot \sin L \cdot \cos \varepsilon - OA \cdot \tan B \cdot \sin \varepsilon$$

Pero

$$\tan L'' = \frac{CD'}{OC} = \frac{OA}{OC} \sin L \cdot \cos \varepsilon - \frac{OA}{OC} \cdot \tan B \cdot \sin \varepsilon = \frac{\sin L}{\cos L} \cdot \cos \varepsilon - \frac{\tan B}{\cos L} \sin \varepsilon$$

Por lo que:

$$\tan L'' = \frac{\sin L \cdot \cos \varepsilon - \tan B \cdot \sin \varepsilon}{\cos L}$$

El valor angular de L'' transformado dado en horas (24h = 360°) es lo que conocemos como *ascensión recta*. Podemos escribir, prescindiendo de las unidades:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sin L \cdot \cos \varepsilon - \tan B \cdot \sin \varepsilon}{\cos L}\right)$$

En modelo geocéntrico tendremos:

$$\beta = -B$$

siendo β el ángulo aparente del Sol con la eclíptica visto desde la Tierra (negativo por debajo del plano paralelo a la eclíptica que pasa por el centro de la Tierra).

Por otra parte, llamando, como en el punto anterior, λ ⁷⁷ a la longitud eclíptica desde el equinoccio vernal:

$$\lambda = L + 180^\circ$$

Por lo que:

$$\sin \lambda = \sin(180 + L) = -\sin L$$

$$\cos \lambda = \cos(180 + L) = -\cos L$$

Resultando la ecuación:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sin \lambda \cdot \cos \varepsilon - \tan \beta \cdot \sin \varepsilon}{\cos \lambda}\right)$$

14.4. LOS CONCEPTOS DE ÁNGULO HORARIO Y TIEMPO SIDÉREO

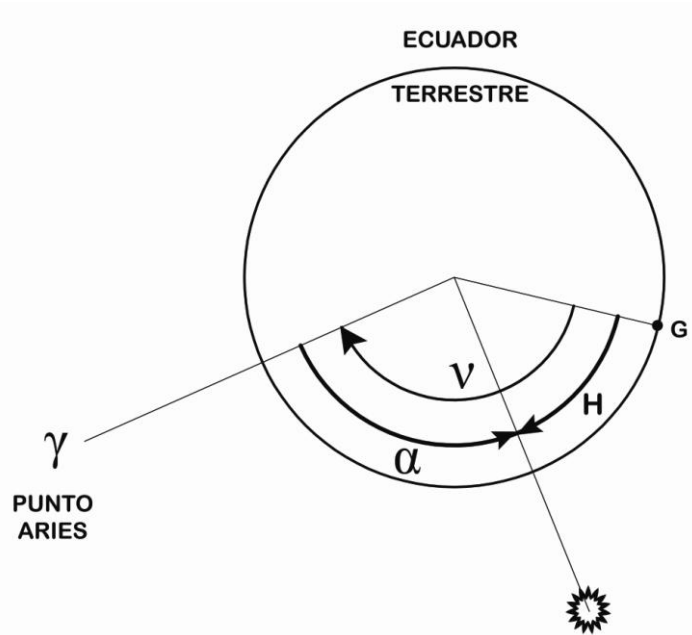
Cuando el plano de referencia es el ecuatorial y no el de la eclíptica, hay dos conceptos que, unidos al de la ascensión recta cobran gran importancia.

Ambos conceptos corresponden a magnitudes angulares y están enlazados entre sí; se trata del *ángulo horario* y el *tiempo sidéreo*

Estos conceptos han sido innecesarios desde el punto de vista metodológico mientras hemos utilizado nuestro modelo heliocéntrico; en esta última parte de nuestro estudio, de acuerdo con el algoritmo SPA, resultan imprescindibles.

Veamos la fig. 14-13:

⁷⁷ Hasta ahora hemos venido denominando λ a la longitud geográfica, como es habitual en Geografía y, a menudo, en Astronomía. Dado que el algoritmo SPA reserva la letra λ para la latitud eclíptica en sistema geocéntrico, nos ha parecido lógico seguir en este capítulo la misma nomenclatura de Reda [37]. Por ello, a partir de este punto, y solo para este capítulo, denominaremos λ_0 a la longitud geográfica.



14-13. Angulo horario y tiempo sidéreo.

En ella se representa la posición de un astro (en nuestro caso el Sol) cuya ascensión recta, o ángulo horizontal desde el punto Aries, es α . En este caso, el punto Aries marca el equinoccio vernal. El ángulo horario, medido en el sentido de las agujas del reloj, es el ángulo H entre el meridiano de referencia (en la fig. 14-13 hemos representado Greenwich, o sea, G) y la proyección del astro sobre el plano ecuatorial.

El tiempo sidéreo en Greenwich será la suma algebraica de los dos ángulos anteriores, es decir:

$$v = \alpha + H$$

Cuando el tiempo sidéreo está afectado por la corrección de nutación en oblicuidad, hablaremos de tiempo sidéreo aparente v ; en caso contrario de tiempo sidéreo medio v_0 . Es decir:

$$v = v_0 + \Delta\psi \cdot \cos \varepsilon$$

Pero podemos escribir H como:

$$H = v - \alpha$$

Que si particularizamos para la longitud geográfica del observador λ_0 ⁷⁸ nos dará:

$$H = v + \lambda_0 - \alpha$$

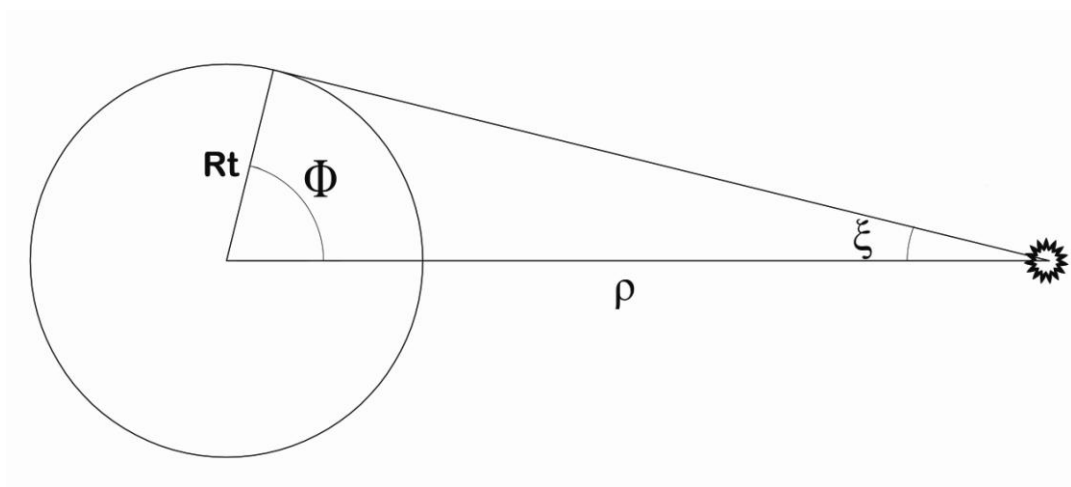
⁷⁸ Como hemos indicado en este mismo anteriormente, solamente en este capítulo denominaremos con λ_0 a la latitud geográfica. El convenio de signos es el habitual: positivo al Este, negativo al Oeste.

14.5. CORRECCIONES POR PARALAJE

Esta corrección, que vamos a citar brevemente, será necesaria asimismo para el desarrollo del SPA.

La consideración del centro de la esfera terrestre confundido con la superficie, es aproximación suficiente para cálculos generalistas, pero el error de paralaje (como determinación angular desde puntos diferentes para el mismo objeto) induce inexactitudes que se intentan evitar con el SPA.

Básicamente, el efecto se observa en la fig. 14-14:



14-14. Ángulo de paralaje.

Grosso modo, podemos considerar el ángulo de paralaje, ξ , de la siguiente forma:

$$\rho \cdot \sin \xi = R_t$$

Siendo ρ la distancia Tierra-Sol y R_t el radio terrestre.

Por ello,

$$\sin \xi = \frac{R_t}{\rho} \approx \xi$$

Si lo expresamos en grados, y consideramos que R es el mismo valor que ρ , pero en UA,

$$\xi = \frac{6378,140}{149\,597\,870 \cdot R} \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{0,00244282^\circ}{R} = \frac{8^\circ,794}{3600R}$$

Que es el valor aproximado que utilizará el SPA.

14.6. DEFINICIÓN GEODÉSICA SIMPLIFICADA DE LA SUPERFICIE TERRESTRE

Otra particularidad del método SPA consiste en corregir la superficie terrestre, considerada hasta aquí como esférica, mediante la adopción del valor de achatamiento recogido en [35]. El procedimiento seguido en dicho método en cuanto a la definición geométrica del elipsoide no se especifica de forma clara, por lo que lo desarrollamos a continuación.

Según la convención anteriormente citada, se adopta como radio ecuatorial de la Tierra, y, por tanto, como eje mayor del elipsoide terrestre, el valor

$$a = 6.378,140 \text{ km} = 6\,378\,140 \text{ m}$$

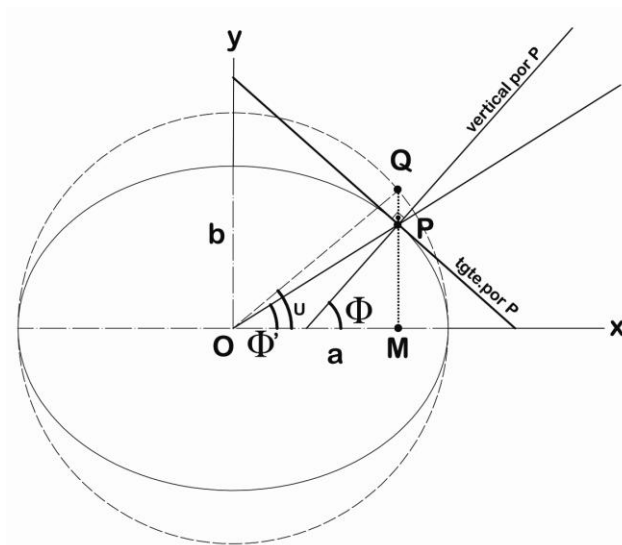
El valor del achatamiento (*flattening*, f) es

$$f = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298,257}$$

Por ello, el valor $(1-f)$ que se utilizará más adelante es:

$$1-f = 0,99664719$$

A continuación, nos basaremos en la fig. 14-15 para la deducción de las relaciones geométricas necesarias para los desarrollos posteriores, basado en [6].



14-15. Relación entre latitud terrestre geocéntrica y latitud geográfica terrestre.

Por el punto P hemos trazado la tangente y la normal al elipsoide. La vertical desde P cortará en Q al círculo circunscrito al mismo. Los ángulos Φ , latitud de P (determinado por la vertical por P y el eje x) y Φ' (determinado por la línea OP y el eje x) quedan definidos en la figura. Igualmente, el ángulo auxiliar u , conocido como *latitud reducida*.

Sean x e y las coordenadas del punto P.

Por las propiedades de la elipse (ver apéndice I), tendremos:

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{y}{MQ} = \frac{b}{a} .$$

Pero:

$$MQ = OQ \cdot \sin u = a \cdot \sin u .$$

Por lo que:

$$y = MQ \cdot \frac{b}{a} = b \cdot \sin u .$$

Pero:

$$b = a(1 - f) ,$$

por tanto:

$$y = a(1 - f) \sin u = a \cdot 0,99664719 \cdot \sin u .$$

Por otra parte, tenemos que la $\tan \Phi$ tendrá la pendiente inversa de la tangente en P, por lo que:

$$\tan \Phi = \frac{-dx}{dy} = -\frac{-a \cdot \sin u \cdot du}{a(1 - f) \cos u \cdot du} = \frac{1}{1 - f} \tan u .$$

Es decir,

$$\tan u = (1 - f) \cdot \tan \Phi = 0,99664719 \cdot \tan \Phi .$$

O bien:

$$u = \arctan(0,99664719 \cdot \tan \Phi) .$$

(a efectos de cálculo, u se utilizará en radianes).

Si extrapolamos estas deducciones al caso de que P esté situado a una altura h sobre el elipsoide, tendremos:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos u + h \cdot \cos \Phi \\ y = a \cdot 0,99664719 \cdot \sin u + h \cdot \sin \Phi \end{cases}$$

Debemos tener en cuenta que, denominando ρ_T al valor $\frac{OQ}{a}$ ⁷⁹:

$$\begin{cases} x = \rho_T \cdot a \cdot \cos \Phi' \\ y = \rho_T \cdot a \cdot \sin \Phi' \end{cases}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \rho_T \cdot \cos \Phi' &= \cos u + \frac{h}{a} \cdot \cos \Phi = \cos u + \frac{h}{6\,378\,140} \cdot \cos \Phi \\ \rho_T \cdot \sin \Phi' &= 0,99664719 \cdot \sin u + \frac{h}{a} \cdot \sin \Phi = 0,99664719 \cdot \sin u + \frac{h}{6\,378\,140} \cdot \sin \Phi \end{aligned}$$

Estos valores $\rho_T \cdot \cos \Phi'$ y $\rho_T \cdot \sin \Phi'$, de gran importancia según veremos más adelante como términos correctores, son los que, con un criterio poco adecuado desde nuestro punto de vista, Reda [37] denomina x e y a la hora de realizar cálculos posteriores. Preferiremos utilizar la terminología de Meeus para estos términos, con el fin de evitar confusiones con los x e y deducidos anteriormente para caracterizar el elipsoide.

⁷⁹ Tanto Meeus [9] como Reda [37] utilizan para este valor la denominación ρ . Nosotros utilizaremos ρ_T debido a que venimos denominando ρ a la distancia Tierra-Sol en anteriores capítulos de esta tesis.

14.7. EL SPA EN SÍNTESIS

Con las expresiones contenidas en los puntos anteriores, podemos realizar una exposición más clara del método SPA en sí. Realizaremos la exposición por pasos, siguiendo el mismo orden que Reda en [37], pero adaptándolo a la situación de los algoritmos según han ido apareciendo en puntos anteriores de nuestra tesis.

Se indica a continuación la secuencia de cálculos.

Cálculo de JD para la fecha dada

De acuerdo con el procedimiento expuesto en 4.6.1.

Cálculo de JDE

Nótese que necesitaremos el valor ΔT , que podemos obtener mediante las tablas o procedimientos expuestos en 4.9.

$$JDE = JD + \frac{\Delta T}{86400}$$

Cálculo de JC , JCE y JM

$$JC = \frac{JD - 2451545}{36525} \quad JCE = \frac{JD - 2451545}{36525} \quad JME = \frac{JCE}{10}$$

A continuación, seguiremos los pasos que indicamos:

Cálculo de la longitud eclíptica L

Se procederá de acuerdo con el punto 6.4. (método simplificado VSOP87).

Cálculo de la latitud eclíptica B

Se procederá de acuerdo con el punto 6.5. (método simplificado VSOP87).

Cálculo del radio vector R en UA

Se procederá de acuerdo con el punto 6.4. (método simplificado VSOP87). A continuación, transformación de L y B heliocéntricas en geocéntricas.

$$\theta = L + 180^\circ$$

$$\beta = -B$$

Cálculo de la nutación en longitud, $\Delta\psi$

Se seguirá el procedimiento especificado en 7.3 (teoría de la nutación).

Cálculo de la nutación en oblicuidad, $\Delta\varepsilon$

Se seguirá el procedimiento especificado en 7.3 (teoría de la nutación).

Cálculo de la oblicuidad media de la eclíptica ε_0

Se realizará el cálculo de acuerdo con 5.2. (propuesta de Laskar).

Cálculo de la corrección por aberración $\Delta\tau$

Según el cap.8., en concreto:

$$\Delta\tau = -\frac{20,4898}{3600.R}, \text{ estando R en UA.}$$

Cálculo de la longitud aparente del Sol

Método análogo al seguido para la longitud aparente heliocéntrica:

$$\lambda = \theta + \Delta\psi + \Delta\tau$$

Cálculo de la hora sidérea media en Greenwich v_0 (en grados)

Se seguirá el algoritmo:

$$v_0 = 280,46061837 + 360,98564736629 * (JD - 2451545) + \\ + 0,000387933 * JC^2 - \frac{JC^3}{38\,710\,000}$$

El resultado se ajustará al rango (0° , 360°).

Cálculo de la hora sidérea aparente en Greenwich, v

Se utilizará la corrección que vimos en 14.4.:

$$v = v_0 + \Delta\psi \cdot \cos \varepsilon$$

Cálculo de la ascensión recta geocéntrica en radianes α

Utilizaremos la expresión generalizada para órbitas tridimensionales expuesta en 14.3:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sin \lambda \cdot \cos \varepsilon - \tan \beta \cdot \sin \varepsilon}{\cos \lambda}\right)$$

prefiriéndose en la forma:

$$\alpha = \arctan 2(\cos \lambda ; \sin \lambda \cdot \cos \varepsilon - \tan \beta \cdot \sin \varepsilon)$$

al tratarse de una función recíproca.

Cálculo de la declinación geocéntrica δ (en grados)

Se utilizará la expresión generalizada obtenida en 14.2.3:

$$\sin \delta = \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda + \sin \beta \cos \varepsilon .$$

O bien:

$$\delta = \arcsin(\cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda + \sin \beta \cos \varepsilon) .$$

Expresión que deberá convertirse en grados.

Cálculo del ángulo horario local desde el observador, H , en grados

De acuerdo con lo indicado en 14.4.

$$H = v + \lambda_0 - \alpha$$

Siendo λ_0 , como veíamos, la longitud geográfica en grados (positiva al este).

Deberá limitarse el valor de H al rango $(0^\circ, 360^\circ)$.

Cálculo de la paralaje horizontal del Sol

De acuerdo con el punto 14.5

$$\xi = \frac{8^\circ,794}{3600R}$$

Con R , como se vio más arriba, en UA.

Cálculo de la latitud reducida u

De acuerdo con 14.6.:

$$u = \arctan(0,99664719 \cdot \tan \Phi)$$

Se calculará en radianes.

Cálculo de los términos correctores $\rho_T \cdot \cos \Phi'$ y $\rho_T \cdot \sin \Phi'$

Utilizando el procedimiento analizado en 14.6.,

$$\rho_T \cdot \cos \Phi' = \cos u + \frac{h}{6\,378\,140} \cos \Phi$$

$$\rho_T \cdot \sin \Phi' = 0,99664719 \sin u + \frac{h}{6\,378\,140} \sin \Phi$$

Siendo h la altura del observador sobre la superficie terrestre expresada en metros.

Cálculo de la paralaje en ascensión recta $\Delta\alpha$ (en grados)

Transcribimos sin demostración la expresión presente en [9] (cap.40):

$$\tan \Delta\alpha = \frac{-\rho \cdot \cos \Phi' \sin \xi \sin H}{\cos \delta - \rho \cos \Phi \sin \xi \cos H}$$

Como es habitual, podemos escribir esta función como

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\rho \cos \Phi' \sin \xi \cos H}{\cos \delta - \rho \cos \Phi \sin \xi \sin H} \right)$$

El resultado se convertirá en grados.

Cálculo del ángulo horario local topocéntrico corregido, H' en grados

(expresión tomada de Reda [37] sin demostración):

$$H' = H - \Delta\alpha$$

Cálculo del ángulo de elevación topocéntrico \hat{e} sin refracción

Se utilizará cualquiera de las expresiones deducidas en 3.2., sustituyendo el valor ω , geocéntrico, por H' . Reda opta por:

$$\hat{e} = \arcsin(\sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos H') .$$

Cálculo de la corrección por refracción, $\Delta\hat{e}$

En este apartado, Reda utiliza la fórmula de tipo “inverso”, procedente de Saemundsson y [40], para alturas verdaderas (considerando \hat{e} como tal), que ya expusimos en el cap. 10:

$$\Delta\hat{e} = \frac{P}{1010} \cdot \frac{283}{273+T} \cdot \frac{1,02}{60 \cdot \tan\left(\hat{e} + \frac{10,3}{\hat{e} + 5,11}\right)}$$

El valor obtenido está en grados.

Para altitudes bajo la línea del horizonte,

$$\Delta\hat{e} = 0$$

Siendo los parámetros los mismos que vimos en el cap. 10, es decir,

P = presión media local en milibares

T = temperatura media local anual ($^{\circ}\text{C}$)

\hat{e} = ángulo de elevación en grados.

(Al utilizar Excel, habrá que transformar \hat{e} en radianes).

Cálculo del ángulo de elevación corregido por refracción, \hat{e}_{cor}

Simplemente,

$$\hat{e}_{cor} = \hat{e} + \Delta\hat{e}$$

Si se desea, la transformación de este ángulo en cenital es inmediata; bastaría con restar $90^{\circ} - \hat{e}$.

Cálculo del acimut solar topocéntrico

Utilizaremos, al igual que para la elevación, las expresiones obtenidas en 3.2.

Hay que señalar que Reda opta por utilizar la expresión en tangente, con acimut medido desde el norte (fórmula 16, cap. 3.2). Igualmente, basta con sustituir ω por H' :

$$\tan \gamma_N = \frac{\sin H'}{\sin \Phi \cdot \cos H' - \tan \delta \cdot \cos \Phi}$$

Que, como es habitual, se prefiere en su expresión:

$$\gamma_N = \arctan(\sin \Phi \cdot \cos H' - \tan \delta \cdot \cos \Phi ; \sin H') .$$

14.8. COMENTARIOS SOBRE EL PROCEDIMIENTO DE REDA

La precisión del método SPA no ha sido a día de hoy cuestionada en cuanto a precisión o concepción metodológica. Sin embargo, siguen generándose procedimientos simplificados para obviar el número de cálculos incluidos en el método. Uno de los procedimientos más recientes para el cálculo de altura y acimut solares, el SG2, desarrollado por Blanc & Wald y presentado por los autores en 2012 como [67], cita como referencia para sus desarrollos el método SPA, tratando de simplificar su número de operaciones con la contrapartida de disminuir su período de validez, y aludiendo a la dificultad de evaluar ΔT .

A pesar de la precisión declarada por Reda & alt. [37] para su procedimiento, existen algunos puntos que pudiéramos considerar sometidos a factores estocásticos.

En primer lugar, la referencia al elipsoide terrestre ideal, que puede presentar ligeras alteraciones locales de forma, imposibles de predecir.

Igualmente, todos los elementos estudiados en capítulos anteriores no bastan para determinar de forma exacta todos los movimientos de nuestro planeta en relación con la eclíptica, aunque son ciertamente minúsculos en orden de magnitud: bamboleo de Chandler⁸⁰, comportamiento de la esfera terrestre como sólido no-rígido... No es necesario recordar igualmente el carácter especulativo del factor ΔT , ya indicado más arriba.

Sin embargo, desde nuestro punto de vista, el elemento más susceptible de producir distorsiones de importancia en los resultados es el cálculo de la refracción, cuyo principio es exclusivamente empírico y, tal y como se formula, depende de temperaturas

⁸⁰ No se ha tenido en cuenta en los desarrollos de esta tesis esta perturbación. Su valor (alrededor de 0,7" de arco en la oscilación geográfica de los polos en un período estimado en 433 días) se integra, sin embargo, en determinaciones de posición para satélites, especialmente en el campo militar.

medias anuales comparadas a su vez con temperaturas reales. Evidentemente, estas últimas aportan incertidumbre al método cuando se utiliza en forma predictiva.

TERCERA PARTE

**CONCLUSIONES, LIMITACIONES DEL MÉTODO Y
DESARROLLOS FUTUROS**

I. CONCLUSIONES

Cogita finem

Estimamos que, a lo largo de la presente tesis, los objetivos propuestos se han cumplido satisfactoriamente.

En relación con el desarrollo de un método alternativo al análisis del movimiento aparente del Sol mediante el uso exclusivo de la geometría plana y el sistema diédrico de proyección, ha quedado demostrado, sin ningún género de dudas, que nuestra propuesta era posible y que podía alcanzarse el objetivo sin grandes complicaciones desde el punto de vista matemático. Resulta evidente que puede prescindirse de la trigonometría esférica para el cálculo de los acimuts y elevaciones en el caso concreto del Sol, que es el que hemos analizado en esta obra.

Una nueva vía de análisis se ha abierto en paralelo, y con éxito, al haber utilizado como comprobación el cálculo vectorial de forma sencilla. Es cierto que, en los últimos años, trabajos como el de Alistair Sproul [14] han utilizado una metodología similar, pero, como hemos indicado con anterioridad, el marco teórico inicial difiere totalmente, ya que en nuestro caso no hemos definido en ningún momento un marco rígido de referencia, sino que hemos ido adaptando nuestro método de forma natural a los diferentes puntos de vista ideales del observador.

Por otra parte, los cálculos últimos, tanto en diédrica como vectoriales, tendentes a obtener la generalización de las expresiones de declinación e incluso de la ascensión recta para el caso de órbitas alabeadas, han sido desarrollados con éxito y comprobados satisfactoriamente con las expresiones equivalentes en Astronomía clásica, sin que exista ningún precedente del método utilizado (las propuestas de Sproul analizaban exclusivamente el caso particular de órbitas planas).

En lo que respecta a la reducción del número de términos astronómicos específicos, hemos cumplido nuestro compromiso con creces: prácticamente todos los elementos utilizados les son familiares a todos los técnicos y estudiantes de la rama científica, sin necesidad de conocimientos astronómicos. Quizá la única excepción sea la ascensión recta, mencionada anteriormente, concepto sobre el que establecemos un paralelismo en nuestra obra, pero que no es necesario como tal para nuestro modelo: solamente se utiliza en el contexto del capítulo final sobre altas precisiones como referencia para el método descrito. Conceptos como el de paralaje o aberración lumínica son también conocidos por los técnicos, y, en cualquier caso, se ha tratado de exponerlos de una forma clara, adaptada al objetivo concreto de ceñir los cálculos al Sol, olvidándonos de los condicionantes de largas distancias en el caso de galaxias lejanas. De esta forma, creemos haber ganado en sencillez y presentado los conceptos de la forma más intuitiva posible.

Uno de los retos que encarábamos era el de presentar al estudioso un método completo y autosuficiente que le permitiera no solamente entender el problema planteado, sino acometer por sí mismo la tarea de desarrollar aplicaciones de cálculo masivo con pleno

conocimiento y dominio de las secuencias. En ese sentido, la profusión de ejemplos prácticos, comparativas entre diversos algoritmos y el análisis pormenorizado de aplicaciones de terceros (NOAA, Reda), con indicación expresa del origen de todos los procedimientos utilizados y su localización en los diferentes apartados de la tesis, serán, como deseábamos, de gran ayuda a todo aquel que desee crear un programa o una aplicación desde cero para los cálculos que nos ocupan.

No pretendíamos realizar un estudio de precisiones, y así hemos procedido, dado que las fórmulas deducidas y chequeadas son de tipo determinista, y, por otro lado, las expresiones polinómicas tomadas de terceros han sido cuantificadas en cuanto a su precisión por los autores. Sin embargo, nos hemos permitido la licencia de presentar algunas comparativas de resultados cuando, en el contexto de la realización de alguna crítica a hipótesis simplificativas concretas de las fuentes utilizadas, hemos aportado alguna solución alternativa; tal ha sido el caso de la ecuación del tiempo y de la corrección de los instantes de orto y ocaso. Para ello, como hemos ido indicando, se ha utilizado como base de comparación el MICA [33], citado con profusión a lo largo de la obra. Hemos huido, en todo caso, en aras del rigor científico, de conceder excesivo protagonismo a los diversos métodos simplificados “de una línea” para el cálculo aproximado de declinaciones en función del día del año, etc. En este sentido, nos hemos limitado a exponer al lector algunas de las expresiones que con más frecuencia pueden hallarse en la red, poniendo de manifiesto sus errores, inadmisibles estos fuera del ámbito divulgativo o la mera representación gráfica. Consideramos que debían ser expuestas y que su inclusión podría sentar las bases de un futuro estudio sobre el cálculo de estos errores, el cual queda fuera del alcance de esta tesis.

Podemos afirmar que el carácter secuencial de nuestro trabajo, dividido en capítulos ordenados de forma pareja al orden general de cálculos, y suficientemente diferenciados entre sí, hace que sea extremadamente sencillo suprimir en el futuro cualquier elemento y sustituirlo por nuevos procedimientos reconocidos por la comunidad científica.

Las referencias bibliográficas citadas nos han servido para dotar de legitimidad a los procedimientos, habitualmente asociados a un número limitado de autores. De esta forma, creemos haber identificado satisfactoriamente las fuentes primarias de todos los algoritmos de terceros citados. Todos los documentos aludidos en la obra han sido obtenidos físicamente, estudiados en profundidad y chequeados en su caso por el autor de la tesis.

Creemos, finalmente, haber desarrollado en conjunto, tanto en lo relativo a nuestras deducciones por métodos totalmente novedosos como en lo que respecta a la recopilación selectiva y ordenada de los trabajos de diversos autores y organismos, un método alternativo desde el punto de vista didáctico, de gran sencillez y, sin duda, dotado de una eficiente curva de aprendizaje. Esperamos que así sea.

Siempre nos ha guiado el principio de que resolver con rigor nuestras dudas es el mejor procedimiento para exponer eficientemente nuestras conclusiones a terceros.

II. LIMITACIONES DEL MÉTODO Y DESARROLLOS FUTUROS

Hinc ...disce

No podemos hablar de limitaciones o desarrollos futuros en el caso de los capítulos iniciales y sus procedimientos deductivos, pues las expresiones matemáticas obtenidas son similares a las expuestas en los manuales de Astronomía clásica. Se trata de fórmulas de alguna forma consustanciales al espacio tridimensional y a la posición relativa del observador.

Por tanto, en ese sentido, los únicos límites son los relativos a la reducción geométrica de la Tierra al centro de la misma, método ampliamente utilizado en Astronomía. La limitación queda mitigada mediante la exposición del método de alta precisión presentado en el cap. 14, en el que se realiza un estudio pormenorizado del método recomendado por Reda & alt. [37].

En lo que respecta a los procedimientos recopilados de diferentes autores, la evolución futura queda en función, como decíamos, de los nuevos procedimientos de cálculo que vayan apareciendo de la mano del incremento de potencia de los nuevos ordenadores. La sustitución de cualquiera de los capítulos para dar cabida a nuevas propuestas parciales es extremadamente sencilla, tal y como se ha estructurado la obra.

Existe, sin embargo, un punto sobre el que pueden resultar de una asombrosa utilidad posibles desarrollos futuros del *software* gráfico. Nos estamos refiriendo al principio deductivo aquí utilizado de basarnos en la resolución gráfica previa de los problemas mediante el sistema diédrico de proyección. En caso de disponerse de un programa de diseño gráfico suficientemente avanzado, podría obviarse en el futuro la utilización de expresiones matemáticas, toda vez que un procedimiento automático de variación de trazas de los planos referidas a un eje de giro podría suministrar directamente las soluciones geométricas buscadas. Estamos hablando de perfeccionamientos funcionales de programas tipo CAD, que podrían abrir en el futuro nuevos caminos en la resolución de los problemas analíticos de la Astronomía solar.

De una forma inmediata, creemos que el mejor desarrollo que puede esperarse del método presentado es el de su utilización con fines didácticos para la capacitación acelerada de técnicos en el campo de los cálculos asociados a la tecnología solar.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Real Academia Española, «Diccionario de la lengua española,» [En línea]. Available: <http://dle.rae.es>. [Último acceso: 13 9 2017].
- [2] M. Moliner, A. Jarraud, F. Ramón, H. Ramón y S. Ramón, Diccionario de Uso del Español, Madrid: Gredos, 2001.
- [3] G. Velarde y Sola, Conclusiones Cosmographicas del uso de los globos celeste, terrestre y esfera copernicana, 1740.
- [4] R. Soler Gayá, Diseño y construcción de relojes de sol y de luna. Métodos gráficos y analíticos, Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos., 1997 (segunda edición).
- [5] F. Martín Asín, Astronomía, Madrid: Paraninfo, 1982.
- [6] J. J. de Orús Navarro, M. Catalá Poch y J. Núñez de Murga, Astronomía esférica y mecánica celeste, Barcelona: Publicacions i Edicions, Universitat de Barcelona, 2007.
- [7] W. M. Smart, Textbook on Spherical Astronomy, 6th edition, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1977.
- [8] S. Newcomb, A Compendium of Spherical Astronomy, New York (USA): The MacMillan Company, 1906.
- [9] J. Meeus, Astronomical Algorithms, Richmond, Virginia (USA): Willmann-Bell, Inc., 1998.
- [10] P. Duffett-Smith, Practical Astronomy with your Calculator, Binghamton, N.Y. USA: Cambridge University Press, 1980.
- [11] P. Duffett-Smith y J. Zwart, Practical Astronomy with your Calculator or Spreadsheet, Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [12] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen y K. J. Donner, Fundamental Astronomy, Berlin: Springer, 2017.
- [13] F. W. Bessel, Fundamenta astronomiae, Königsberg: Regiomonti Prussorum, (Brüder Bontraeger), 1818.
- [14] A. Sproul, «Derivation of the solar geometric relationships using vector analysis,» *Renewable Energy* (Ed. Elsevier), nº 32/2007, p. 1187–1205, 2007.
- [15] Ministerio de Fomento. Instituto Geográfico Nacional, «Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid para 1999,» Instituto Geográfico Nacional, Madrid, 1998.

-
- [16] Ministerio de Fomento. Instituto Geográfico Nacional, Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid para 2012, Madrid: Instituto Geográfico Nacional, 2011.
- [17] Ministerio de Fomento. Instituto Geográfico Nacional, Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid para 2013, Madrid: Instituto Geográfico Nacional, 2012.
- [18] J. Palencia Rodríguez, Geometría descriptiva. Proyección diédrica, Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 1970.
- [19] F. Izquierdo Asensi, Geometría descriptiva (24ª edición), Madrid: Paraninfo, 2000.
- [20] U.S. Department of Commerce .National Oceanic & Atmospheric Administration. NOAA Research.Earth System Research Laboratory | Global Monitoring Division, «Solar Calculation Details,» [En línea]. Available: <https://www.esrl.noaa.gov/gmd/grad/solcalc/calcdetails.html>. [Último acceso: 02 05 2016].
- [21] J. Braun y J. Mitchell, «Solar geometry for fixed and tracking surfaces,» *Solar Energy*, vol. 31, n° 5, pp. 439-444, 1983.
- [22] G. Roth, Handbook of Practical Astronomy, Berlin: Springer-Verlag, 2009.
- [23] M. Blanco-Muriel, D. C. Alarcón-Padilla, T. López-Moratalla y M. Lara Coira, «Computing the solar vector,» *Solar Energy (Elsevier)*, vol. 70, n° 5, pp. 431-441, 2001.
- [24] J. Duffie y W. Beckman, Solar engineering of thermal processes (2nd edition), New york: Wiley Interscience, 1991.
- [25] C. Perrin de Brichambaut, Cahiers A.F.E.D.E.S., Paris: Editions Européennes Thermique et Industrie, 1975.
- [26] P. I. Cooper, «The absorption of radiation in solar stills,» *Solar Energy*, vol. 12, pp. 339-346, 1969.
- [27] J. W. Spencer, «Fourier series representation of the position of the sun,» *Search*, n° 2, p. 172, 1971.
- [28] T. van Flandern y K. Pulkkinen, «Low-precision formulae for planetary positions,» *Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 41, pp. 391-411, 11 1979.
- [29] P. Duffett-Smith, Practical Astronomy with your calculator, 3ª edición, Oxford, UK: Oxford University Press, 1995.
- [30] United States Naval Observatory, «Julian Date Converter,» 18 12 2016 (Last modified). [En línea]. Available: <http://aa.usno.navy.mil/data/docs/JulianDate.php>. [Último acceso: 06 04 2017].
- [31] J. D. Fernie, «A One-Line Algorithm for Julian Date,» *International Amateur-Professional Photoelectric Photometry Communication*, n° 13, p. 16, 09 1983.
-

-
- [32] F. Espenak y J. Meeus, «NASA ECLIPSE WEBSITE.(Five Millennium Canon of Solar Eclipses.DELTA T),» NASA Goddard Space Flight Center, 2006. [En línea]. Available: <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEcat5/deltat.html#tab1>. [Último acceso: 16 06 2017].
- [33] U.S.Naval Observatory, Multiyear Interactive Computer Almanac 1800-2050, Richmond,Va,USA.: Willmann-Bell,Inc., 2005.
- [34] J. Simon, J. Bretagnon, J. Chapront-Touzé y J. Laskar, «Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and planets,» *Astronomy and Astrophysics*, n° 282, pp. 663-683, 1994.
- [35] International Union of Astronomers, «Resolution n° 1,» de *XVIIe Assemblée Générale*, Grenoble (France), 1976.
- [36] J. Laskar, «Secular terms of classical planetarytheories using the results of general theory,» *Astronomy and Astrophysics*, n° 57, pp. 59-70, 1986.
- [37] I. Reda y A. Andreas, «Solar Position Algorithm for Solar Radiation Applications.,» *Solar Energy*, vol. 76, n° 5, pp. 577-589, 2004.
- [38] P. Seidelmann, «1980 IAU Theory of nutation: the final report of the IAU.Working group on nutation,» *Celestial Mechanics.*, vol. 27, n° 1, pp. 79-106, 1982.
- [39] G. Bennett, «The Calculation of Astronomical Refraction in Marine Navigation.,» *Journal of Navigation*, vol. 35, n° 2, pp. 255-259, 1982.
- [40] Þ. Saemundsson, «Astronomical Computing: Atmospheric Refraction,» *Sky & Telescope*, vol. 72, n° 1/jul, 1986.
- [41] B. Urschel, «Analemma,» [En línea]. Available: <http://analemma.com/>. [Último acceso: 12 06 2017].
- [42] H. Poincaré, «Pourquoi l'espace a trois dimensions.,» *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 20º año, n° 4/1912, 1912.
- [43] H. Reid, *Elements of Astronomy*, London: Oliver & Boyd , 1842.
- [44] Gobierno de España. Ministerio de Agricultura, Pesca, Alimentación y Medio Ambiente, «Sistema de Información Geográfica de Parcelas Agrícolas (SIGPAC),» [En línea]. Available: <http://www.mapama.gob.es/es/agricultura/temas/sistema-de-informacion-geografica-de-parcelas-agricolas-sigpac/>. [Último acceso: 20 12 2016].
- [45] National Aeronautics and Space Administration, "NASA Visible Earth," 6 February 2018. [Online]. Available: <https://visibleearth.nasa.gov/view.php?id=57752>. [Accessed 06 02 2018].
- [46] United States Naval Observatory (USNO), "Day and night across the Earth," 24 August 2016. [Online]. Available:
-

-
- <http://aa.usno.navy.mil/imagery/earth/map?year=2017&month=4&day=16&hour=06&minute=00>. [Accessed 05 02 2018].
- [47] Bureau International des Poids et Mesures, «SI Brochure: The International System of Units (SI) [8th edition, 2006; updated in 2014],» 2014. [En línea]. Available: <http://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/second.html>. [Último acceso: 15 06 2017].
- [48] National Aeronautics and Space Administration., «NASA ECLIPSE WEBSITE,» 30 01 2009. [En línea]. Available: <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/LEcat5/time.html>. [Último acceso: 21 06 2017].
- [49] Wikipedia, «Cambio al calendario gregoriano,» 31 03 2017. [En línea]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Cambio_al_calendario_gregoriano. [Último acceso: 08 05 2017].
- [50] D. Mc Carthy y A. Babcock, «The length of day since 1656,» *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 44, pp. 281-292, 1986.
- [51] Nautical Almanac Office , United States Naval Observatory , HM Nautical Almanac Office , Rutherford Appleton Laboratory, *Astronomical Almanac for 2006*, London, U.K.: Stationery Office Books, 2004.
- [52] J. Giesen, «Physik und Astronomie. Applets, Programmen, Materialien,» 24 03 2006. [En línea]. Available: <http://www.jgiesen.de/kepler/eccentricity1.html>. [Último acceso: 15 01 2017].
- [53] J. Meeus, *More Mathematical Astronomy Morsels*, Virginia, USA: Willmann-Bell, 2002.
- [54] J. Lieske, T. Lederle, W. Fricke y B. Morando, «Expressions for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants.,» *Astronomy and Astrophysics*, n° 58, pp. 1-16, 1977.
- [55] O. Montenbruck, *Practical ephemeris calculations*, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 1989.
- [56] S. Newcomb, «Tables of the four inner planets,» *Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac*, vol. 6, n° S. Newcomb., 1898.
- [57] M. Capderou, *Satellites, orbits and missions*, París: Springer-Verlag France, 2005.
- [58] P. Bretagnon, «Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP82,» *Astronomy & Astrophysics*, n° 114, p. 278–288, 1982.
- [59] P. Bretagnon y G. Francou, «Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions,» *Astronomy & Astrophysics*, n° 202, p. 309–315, 1988.
-

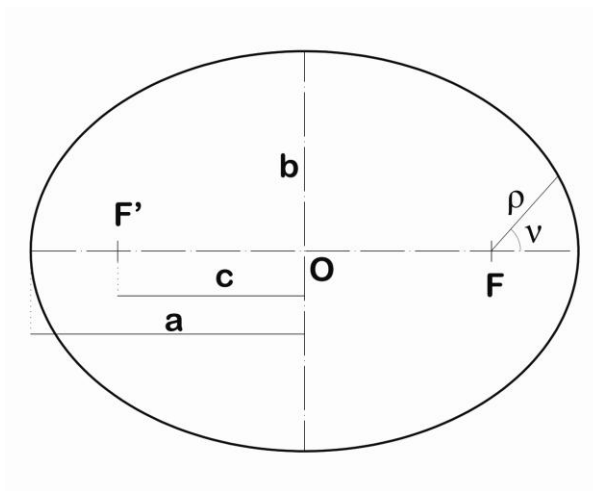
-
- [60] J. Simon, G. Francou, A. Fienga y H. Manche, «New analytical planetary theories VSOP2013 and TOP2013,» *Astronomy and Astrophysics*, vol. 557, nº A49, 2013.
- [61] Caliver, «Wikimedia Commons (File:Precession-nutation-ES.svg),» 9 6 2010. [En línea]. Available: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Precession-nutation-ES.svg>. [Último acceso: 24 7 2017].
- [62] Gobierno de España. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, «Proyecto Biosfera,» [En línea]. Available: <http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/1ESO/Astro/contenido14.htm>. [Último acceso: 24 7 2017].
- [63] International Earth's Rotation and Reference Systems Service, «International Earth's Rotation and Reference Systems Service,» 2013 (Federal Agency for Cartography and Geodesy). [En línea]. Available: <https://www.iers.org/IERS/EN/Science/Recommendations/resolutionB3..> [Último acceso: 04 18 2017].
- [64] C. Ron y J. Vondrak, «Expansion of Annual Aberration into Trigonometric Series,» *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, vol. 37, pp. 96-103, 1986.
- [65] TimeZonesBoy, «Wikimedia Commons (File:World Time Zones Map.png),» 5 11 2012. [En línea]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:World_Time_Zones_Map.png. [Último acceso: 05 02 2018].
- [66] Parlamento Europeo, *Directiva 2000/84/CE del Parlamento Europeo y del Consejo de 19/01/2001 relativa a las disposiciones sobre la hora de verano*, Bruselas: Diario oficial de las Comunidades Europeas, 2001.
- [67] P. Blanc y L. Wald, «The SG2 algorithm for a fast and accurate computation of the position of the Sun for multi-decadal time period,» *Solar Energy*, vol. 86 (2012), pp. 3072-3083, 2012.
- [68] M. Wilson, «Wikimedia Commons (File:MootHallSundial.JPG),» 14 11 2005. [En línea]. Available: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MootHallSundial.JPG>. [Último acceso: 2 8 2017].
- [69] Internetworks Ltd, «Sundials on the internet,» Internetworks Ltd 1997/2010, 24 07 2015. [En línea]. Available: <http://www.sundials.co.uk/mottoesp.htm>. [Último acceso: 20 06 2017].

APÉNDICES

I. APÉNDICE N.º 1. LA ELIPSE

Se exponen a continuación las propiedades generales de la elipse, así como sus expresiones matemáticas en coordenadas cartesianas y polares particularizadas para nuestros cálculos posteriores.

I.1. Elementos básicos



AI-1. Elementos principales de la elipse.

Ejes: a (semieje mayor), b (semieje menor).

Semidistancia focal: $c = OF$

Relación entre semiejes y semidistancia focal: $a^2 = b^2 + c^2$

Definición de excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

Ecuación cartesiana de la elipse con centro en O: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ecuación en coordenadas polares de la elipse con origen en F:

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu}$$

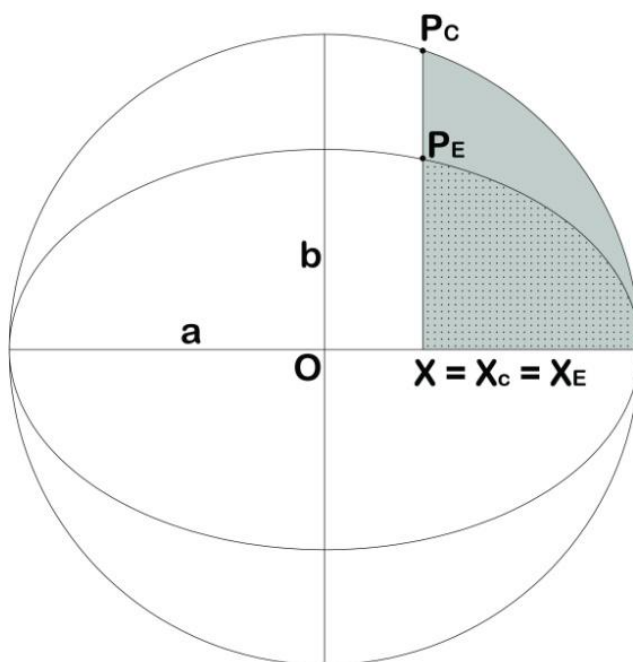
I.2. Circunferencia y elipse: proporcionalidad de áreas

Sea una elipse de centro O, de semieje mayor = a y semieje menor = b . Supongamos dicha elipse circunscrita por una circunferencia. El radio de esta será $R = a$.

En coordenadas cartesianas, las ecuaciones de dichas curvas serán:

Elipse:
$$\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_e = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_e^2}$$

Circunferencia:
$$x_c^2 + y_c^2 = a^2 \Rightarrow y_c = \sqrt{a^2 - x_c^2}$$



AI-2. Relación de la elipse con la circunferencia circunscrita.

Ahora, para dos puntos P_c y P_e cuyas abscisas verifiquen $x_c = x_e$, tendremos (ver fig. AI-2), dividiendo las expresiones anteriores, que:

$$\frac{y_e}{y_c} = \frac{b}{a}$$

De aquí obtenemos la proporcionalidad de áreas entre elipse y circunferencia. Ello es aplicable a elementos de área como los indicados en la fig AI-2 , donde tendremos que si S_E es la superficie sombreada limitada por la elipse y S_C es la superficie punteada, limitada por la circunferencia, entonces:

$$S_E = \frac{b}{a} S_C ,$$

igualdad que, no obstante resultar evidente, puede ser demostrada sin más que aplicar una integral definida entre $X=X_C=X_E$ y $X= a$ a ambas curvas.

II. APÉNDICE N.º 2. LA ECUACIÓN DE KEPLER. ANOMALÍAS

II.1. Las leyes de Kepler

Para determinar el ángulo recorrido por la Tierra en un instante determinado desde una referencia fija, tal como, por ejemplo, el perihelio, nos basaremos en las universalmente conocidas leyes de Kepler, que enunciamos sin demostración:

Primera Ley de Kepler: Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas. El Sol está en uno de los focos de la elipse.

Segunda Ley de Kepler: Los planetas se mueven con velocidad areolar constante. Es decir, el vector posición ρ de cada planeta con respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

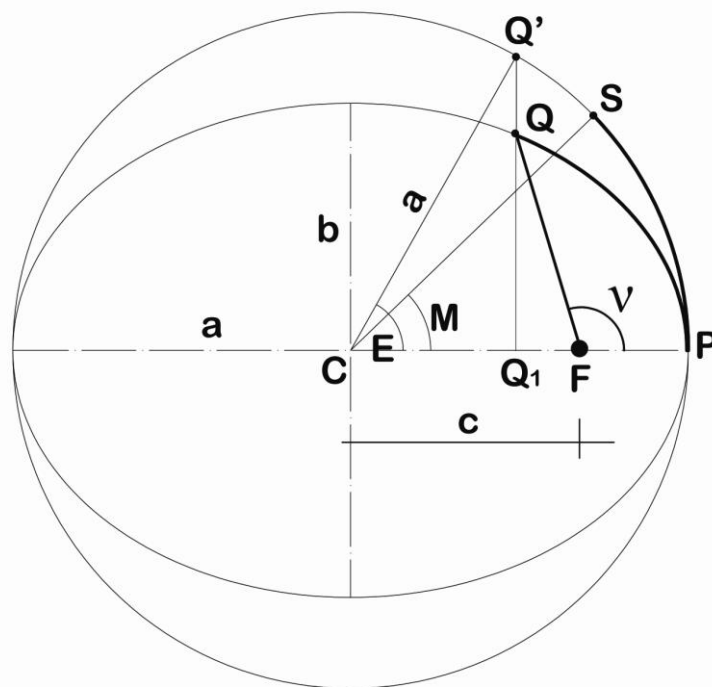
Tercera Ley de Kepler: Para todos los planetas, la relación entre el periodo de revolución al cuadrado y el radio orbital al cubo se mantiene constante. Es decir,

$$\frac{T^2}{a^3} = cte \quad \text{con } T = \text{período orbital y } a = \text{semieje mayor de la elipse.}$$

Partiendo de estas leyes, podemos deducir la expresión matemática que nos relacione el ángulo recorrido por la Tierra desde un punto de referencia (generalmente el perihelio) tomado sobre su trayectoria elíptica.

II.2. Anomalías

En Astronomía clásica se definen como anomalías tres ángulos cuyo significado geométrico desarrollaremos basándonos en la fig. AII-1. En ella observamos una órbita materializada por una elipse de semiejes a (mayor) y b (menor). La masa central (en nuestro caso el Sol) en torno a la cual orbita el planeta (en nuestro caso, la Tierra) se sitúa, de acuerdo con la primera ley de Kepler, en uno de los focos de la elipse, F. Se utiliza habitualmente como elemento auxiliar para los cálculos astronómicos la circunferencia circunscrita a dicha elipse. Su radio será $R=a$, como en el caso estudiado en el punto anterior. Consideraremos que si el planeta recorre la elipse completa en un período T, un planeta ficticio recorrerá la circunferencia completa en el mismo tiempo.



AII-1. Definición de las anomalías excéntrica E , media M y verdadera v .

Tomando como referencia inicial del movimiento orbital del planeta real el punto P (perihelio), en un instante t determinado habrá recorrido una trayectoria sobre la elipse hasta situarse en S, punto que queda definido por el ángulo $\nu = PFQ$. Este ángulo se conoce como *anomalía verdadera*. En textos anglosajones no es infrecuente la denominación T para este ángulo (*true anomaly*); tampoco lo es el uso de v en literatura astronómica en español).

En ese tiempo t , el planeta ficticio habrá recorrido un arco de circunferencia, con movimiento uniforme, hasta situarse en S. Dicho punto queda definido, a su vez, por el ángulo $M = PCS$. Este ángulo se conoce como *anomalía media* (*mean anomaly*).

Si desde S trazamos una recta vertical, cortará a la circunferencia en el punto Q' y al semieje mayor CP en el punto Q_1 .

El ángulo $E = PCQ'$ es el que se conoce como *anomalía excéntrica* (*eccentric anomaly*).

El cálculo de este ángulo será fundamental para la determinación de v .

II.3. Demostración de la ecuación de Kepler

La demostración de la ecuación de Kepler tiene por objeto deducir una expresión matemática que nos relacione la anomalía media, M , de cálculo inmediato, con la anomalía excéntrica, E . Basaremos nuestra deducción en el método recogido en [5] por su sencillez. En lo que sigue, nos apoyaremos en la fig. AII-1 del punto anterior.

Considerando el perihelio (P) como punto de partida del movimiento elíptico de nuestro planeta, el área barrida en el instante t será la superficie delimitada por PFQ. Vamos a relacionar esta área con la barrida desde F por el planeta ficticio de referencia, partiendo de P en su movimiento circular uniforme. Dicha área será la limitada por PCS.

Ahora bien, tenemos, de acuerdo con la proporcionalidad de áreas entre circunferencia y elipse estudiada en el punto I.2 del anexo I, que la superficie PQ_1Q es proporcional a PQ_1Q' de acuerdo con:

$$PQ_1Q' = PQ_1Q \frac{a}{b}$$

Pero, además, los triángulos FQ_1Q y FQ_1Q' son igualmente proporcionales con la misma razón de proporcionalidad:

$$FQ_1Q' = FQ_1Q \frac{a}{b} .$$

Entonces;

$$PQ_1Q' - FQ_1Q' = (PQ_1Q - FQ_1Q) \frac{a}{b} .$$

Es decir,

$$PFQ' = PFQ \frac{a}{b} .$$

Si el tiempo de recorrido total de la órbita en los dos casos circular y elíptico es T, en un tiempo t el área barrida en la elipse será:

$$PFQ = \frac{t}{T} \pi ab ,$$

por lo que:

$$PFQ' = \frac{t}{T} \pi a^2 \tag{Ec.A.II.1}$$

Pero, por otra parte,

$$PFQ' = PCQ' - FCQ' ,$$

y además:

$$PCQ' = \frac{E}{2\pi} \pi a^2 = \frac{E}{2} a^2 . \quad (E \text{ en radianes})$$

También:

$$FCQ' = \frac{1}{2} ac \sin E .$$

Pero en una elipse, el valor de la excentricidad e se define como

$$e = \frac{c}{a} ,$$

por lo que:

$$FCQ' = \frac{1}{2} a^2 e \sin E .$$

Así que:

$$PFQ' = \frac{E}{2} a^2 - \frac{1}{2} a^2 e \sin E . \quad (\text{Ec. A.II.2})$$

Igualando (Ec.A.II.1) y (Ec. A.II.2):

$$\frac{t}{T} 2\pi = E - e \sin E$$

Pero precisamente,

$$\frac{t}{T} 2\pi = M ,$$

siendo el ángulo M la anomalía media, por lo que, finalmente, llegamos a la expresión conocida de:

$$M = E - e \sin E .$$

También denominada *ecuación de Kepler*.

Esta ecuación solamente puede resolverse por procedimientos numéricos aproximativos. También, en función del valor de la excentricidad, se pueden realizar aproximaciones de tipo senoidal.

La obtención del ángulo M es siempre muy sencilla, pues para el instante dado t , como decíamos,

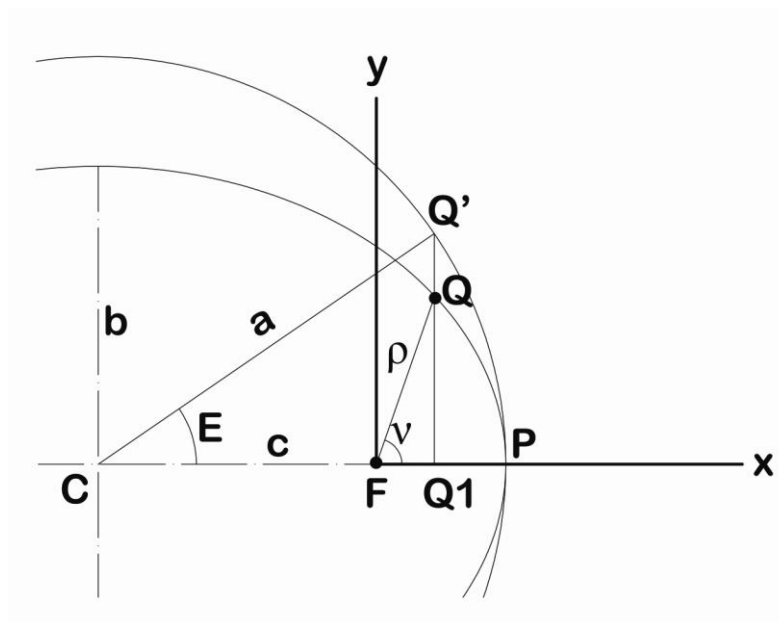
$$M = \frac{t}{T} 2\pi ,$$

estando M en radianes .

El siguiente paso consistirá en obtener v (anomalía verdadera) a partir de E.

II.4. Cálculo de la anomalía verdadera en función de la excéntrica. (basado en el método descrito en [6])

Vamos a tomar ahora de forma auxiliar dos ejes de coordenadas x e y con origen en el foco F en el que se sitúa el Sol (fig. AII-2. Relación entre E y v . Sistema de coordenadas con origen en F).



AII-2. Relación entre E y v . Sistema de coordenadas con origen en F .

Entonces tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos v = CQ_1 - CF = CQ_1 - c = a \cdot \cos E - ae = a \cdot (\cos E - e) \\ y &= \rho \cdot \sin v = b \cdot \sin E = a\sqrt{1-e^2} \sin E \end{aligned} \right\} \text{(Ecs. A.II.3)}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 = a^2 \cos^2 E + a^2 e^2 - 2a^2 e \cos E + a^2 \sin^2 E - a^2 e^2 \sin^2 E = \\ &= a^2 (1 + e^2 - 2e \cos E - e^2 \sin^2 E) = a^2 (1 + e^2 - 2e \cos E - e^2 + e^2 \cos^2 E) , \end{aligned}$$

por lo que, finalmente,

$$\rho^2 = a^2(1 - e \cos E)^2$$

Teniendo en cuenta que $a > 1$ y que la excentricidad en una elipse es $e < 1$, podemos extraer la raíz cuadrada, quedando:

$$\rho = a (1 - e \cos E) \quad (\text{Ec. A.II.4})$$

Esta ecuación nos da directamente el radio vector en función de la anomalía excéntrica.

Si ahora consideramos las ecuaciones (Ec. II.3) y (Ec. II.4), tendremos que:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cdot \cos \nu &= a \cdot (\cos E - e) \\ \rho &= a (1 - e \cos E) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ec. A.II.5})$$

Así que:

$$\rho = \frac{a \cdot (\cos E - e)}{\cos \nu} = a (1 - e \cos E)$$

Obteniendo al final la igualdad que relaciona E y ν :

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (\text{Ec. A.II.6})$$

Es habitual también expresar esta igualdad de otra forma. Partiendo de la igualdad (Ec. II.5), restando miembro a miembro, tendremos que

$$\rho(1 - \cos \nu) = a(1 - e \cos E - \cos E + e) = a(1 + e)(1 - \cos E) \quad (\text{Ec. A.II.7})$$

Pero:

$$\rho(1 - \cos \nu) = \rho \cdot 2 \sin^2 \left(\frac{\nu}{2} \right)$$

Y, análogamente,

$$1 - \cos E = 2 \sin^2 \left(\frac{E}{2} \right)$$

por lo que podemos transformar (Ec. A.II.7) directamente en:

$$2\rho \sin^2 \left(\frac{\nu}{2} \right) = 2a(1+e) \sin^2 \left(\frac{E}{2} \right) \quad (\text{Ec. A.II.8})$$

Si partimos nuevamente de (Ec. A.II.5), sumando miembro a miembro:

$$\rho(1 + \cos \nu) = a(1 - e \cos E + \cos E - e)$$

Que podemos transformar en

$$2\rho \cos^2 \left(\frac{\nu}{2} \right) = 2a(1-e) \cdot \cos^2 \left(\frac{E}{2} \right) \quad . \quad (\text{Ec. A.II.9})$$

Si, finalmente, dividimos (Ec. II.8) entre (Ec. II.9), tendremos:

$$\tan^2 \left(\frac{\nu}{2} \right) = \frac{1+e}{1-e} \cdot \tan^2 \left(\frac{E}{2} \right) \quad .$$

Es decir:

$$\tan \left(\frac{\nu}{2} \right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \left(\frac{E}{2} \right) \quad . \quad (\text{Ec. A.II.10})$$

Expresión más habitual en Astronomía que la (Ec. A.II.6).

III. APÉNDICE N.º 3. TABLAS “1980 IAU THEORY OF NUTATION”

Se reproducen a continuación las tablas completas de la *Theory of Nutation*, tal y como aparecen en [38].

Tabla AIII-1. *Tablas Theory of Nutation. Autor: Seidelmann, P.K. Elementos 1-28. Celestial Mechanics. © Springer Nature, 1982. [38].*

TABLE I
Nutation in Longitude and Obliquity referred to mean ecliptic of date.
Epoch J2000.0 (JD 2451 545.0 TDB) T in Julian Centuries

	Argument					Period (days)	Longitude (0.0001")		Obliquity (0.0001")	
	l	l'	F	D	Ω					
1	0	0	0	0	1	6798.4	-171 996	-174.2T	92025	8.9T
2	0	0	0	0	2	3399.2	2062	0.2T	-895	0.5T
3	-2	0	2	0	1	1305.5	46	0.0T	-24	0.0T
4	2	0	-2	0	0	1095.2	11	0.0T	0	0.0T
5	-2	0	2	0	2	1615.7	-3	0.0T	1	0.0T
6	1	-1	0	-1	0	3232.9	-3	0.0T	0	0.0T
7	0	-2	2	-2	1	6786.3	-2	0.0T	1	0.0T
8	2	0	-2	0	1	943.2	1	0.0T	0	0.0T
9	0	0	2	-2	2	182.6	-13187	-1.6T	5736	-3.1T
10	0	1	0	0	0	365.3	1426	-3.4T	54	-0.1T
11	0	1	2	-2	2	121.7	-517	1.2T	224	-0.6T
12	0	-1	2	-2	2	365.2	217	-0.5T	-95	0.3T
13	0	0	2	-2	1	177.8	129	0.1T	-70	0.0T
14	2	0	0	-2	0	205.9	48	0.0T	1	0.0T
15	0	0	2	-2	0	173.3	-22	0.0T	0	0.0T
16	0	2	0	0	0	182.6	17	-0.1T	0	0.0T
17	0	1	0	0	1	386.0	-15	0.0T	9	0.0T
18	0	2	2	-2	2	91.3	-16	0.1T	7	0.0T
19	0	-1	0	0	1	346.6	-12	0.0T	6	0.0T
20	-2	0	0	2	1	199.8	-6	0.0T	3	0.0T
21	0	-1	2	-2	1	346.6	-5	0.0T	3	0.0T
22	2	0	0	-2	1	212.3	4	0.0T	-2	0.0T
23	0	1	2	-2	1	119.6	4	0.0T	-2	0.0T
24	1	0	0	-1	0	411.8	-4	0.0T	0	0.0T
25	2	1	0	-2	0	131.7	1	0.0T	0	0.0T
26	0	0	-2	2	1	169.0	1	0.0T	0	0.0T
27	0	1	-2	2	0	329.8	-1	0.0T	0	0.0T
28	0	1	0	0	2	409.2	1	0.0T	0	0.0T

Tabla AIII-2. *Tablas Theory of Nutation. Autor: Seidelmann, P.K. Elementos 29-79. Celestial Mechanics. © Springer Nature,1982. [38].*

Table I (continued)										
	Argument					Period (days)	Longitude (0.0001")		Obliquity (0.0001")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	Ω					
29	-1	0	0	1	1	388.3	1	0.0T	0	0.0T
30	0	1	2	-2	0	117.5	-1	0.0T	0	0.0T
31	0	0	2	0	2	13.7	-2274	-0.2T	977	-0.5T
32	1	0	0	0	0	27.6	712	0.1T	-7	0.0T
33	0	0	2	0	1	13.6	-386	-0.4T	200	0.0T
34	1	0	2	0	2	9.1	-301	0.0T	129	-0.1T
35	1	0	0	-2	0	31.8	-158	0.0T	-1	0.0T
36	-1	0	2	0	2	27.1	123	0.0T	-53	0.0T
37	0	0	0	2	0	14.8	63	0.0T	-2	0.0T
38	1	0	0	0	1	27.7	63	0.1T	-33	0.0T
39	-1	0	0	0	1	27.4	-58	-0.1T	32	0.0T
40	-1	0	2	2	2	9.6	-59	0.0T	26	0.0T
41	1	0	2	0	1	9.1	-51	0.0T	27	0.0T
42	0	0	2	2	2	7.1	-38	0.0T	16	0.0T
43	2	0	0	0	0	13.8	29	0.0T	-1	0.0T
44	1	0	2	-2	2	23.9	29	0.0T	-12	0.0T
45	2	0	2	0	2	6.9	-31	0.0T	13	0.0T
46	0	0	2	0	0	13.6	26	0.0T	-1	0.0T
47	-1	0	2	0	1	27.0	21	0.0T	-10	0.0T
48	-1	0	0	2	1	32.0	16	0.0T	-8	0.0T
49	1	0	0	-2	1	31.7	-13	0.0T	7	0.0T
50	-1	0	2	2	1	9.5	-10	0.0T	5	0.0T
51	1	1	0	-2	0	34.8	-7	0.0T	0	0.0T
52	0	1	2	0	2	13.2	7	0.0T	-3	0.0T
53	0	-1	2	0	2	14.2	-7	0.0T	3	0.0T
54	1	0	2	2	2	5.6	-8	0.0T	3	0.0T
55	1	0	0	2	0	9.6	6	0.0T	0	0.0T
56	2	0	2	-2	2	12.8	6	0.0T	-3	0.0T
57	0	0	0	2	1	14.8	-6	0.0T	3	0.0T
58	0	0	2	2	1	7.1	-7	0.0T	3	0.0T
59	1	0	2	-2	1	23.9	6	0.0T	-3	0.0T
60	0	0	0	-2	1	14.7	-5	0.0T	3	0.0T
61	1	-1	0	0	0	29.8	5	0.0T	0	0.0T
62	2	0	2	0	1	6.9	-5	0.0T	3	0.0T
63	0	1	0	-2	0	15.4	-4	0.0T	0	0.0T
64	1	0	-2	0	0	26.9	4	0.0T	0	0.0T
65	0	0	0	1	0	29.5	-4	0.0T	0	0.0T
66	1	1	0	0	0	25.6	-3	0.0T	0	0.0T
67	1	0	2	0	0	9.1	3	0.0T	0	0.0T
68	1	-1	2	0	2	9.4	-3	0.0T	1	0.0T
69	-1	-1	2	2	2	9.8	-3	0.0T	1	0.0T
70	-2	0	0	0	1	13.7	-2	0.0T	1	0.0T
71	3	0	2	0	2	5.5	-3	0.0T	1	0.0T
72	0	-1	2	2	2	7.2	-3	0.0T	1	0.0T
73	1	1	2	0	2	8.9	2	0.0T	-1	0.0T
74	-1	0	2	-2	1	32.6	-2	0.0T	1	0.0T
75	2	0	0	0	1	13.8	2	0.0T	-1	0.0T
76	1	0	0	0	2	27.8	-2	0.0T	1	0.0T
77	3	0	0	0	0	9.2	2	0.0T	0	0.0T
78	0	0	2	1	2	9.3	2	0.0T	-1	0.0T
79	-1	0	0	0	2	27.3	1	0.0T	-1	0.0T

Tabla AIII-3. *Tablas Theory of Nutation. Autor: Seidelmann, P.K. Elementos 80-106. Celestial Mechanics. © Springer Nature,1982. [38].*

Table I (continued)

	Argument					Period (days)	Longitude (0.0001")		Obliquity (0.0001")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	Ω					
80	1	0	0	-4	0	10.1	-1	0.0T	0	0.0T
81	-2	0	2	2	2	14.6	1	0.0T	-1	0.0T
82	-1	0	2	4	2	5.8	-2	0.0T	1	0.0T
83	2	0	0	-4	0	15.9	-1	0.0T	0	0.0T
84	1	1	2	-2	2	22.5	1	0.0T	-1	0.0T
85	1	0	2	2	1	5.6	-1	0.0T	1	0.0T
86	-2	0	2	4	2	7.3	-1	0.0T	1	0.0T
87	-1	0	4	0	2	9.1	1	0.0T	0	0.0T
88	1	-1	0	-2	0	29.3	1	0.0T	0	0.0T
89	2	0	2	-2	1	12.8	1	0.0T	-1	0.0T
90	2	0	2	2	2	4.7	-1	0.0T	0	0.0T
91	1	0	0	2	1	9.6	-1	0.0T	0	0.0T
92	0	0	4	-2	2	12.7	1	0.0T	0	0.0T
93	3	0	2	-2	2	8.7	1	0.0T	0	0.0T
94	1	0	2	-2	0	23.8	-1	0.0T	0	0.0T
95	0	1	2	0	1	13.1	1	0.0T	0	0.0T
96	-1	-1	0	2	1	35.0	1	0.0T	0	0.0T
97	0	0	-2	0	1	13.6	-1	0.0T	0	0.0T
98	0	0	2	-1	2	25.4	-1	0.0T	0	0.0T
99	0	1	0	2	0	14.2	-1	0.0T	0	0.0T
100	1	0	-2	-2	0	9.5	-1	0.0T	0	0.0T
101	0	-1	2	0	1	14.2	-1	0.0T	0	0.0T
102	1	1	0	-2	1	34.7	-1	0.0T	0	0.0T
103	1	0	-2	2	0	32.8	-1	0.0T	0	0.0T
104	2	0	0	2	0	7.1	1	0.0T	0	0.0T
105	0	0	2	4	2	4.8	-1	0.0T	0	0.0T
106	0	1	0	1	0	27.3	1	0.0T	0	0.0T

$\varepsilon_{J2000} = 23^{\circ}26'21''.448$
 $\sin \varepsilon_{J2000} = 0.397\ 777\ 16$

IV. APÉNDICE N.º 4. ΔT

Las siguientes tablas corresponden a los valores de ΔT obtenidos mediante la aplicación informática del *Multiyear Interactive Computer Almanac* (MICA) [33].

Dadas las características del programa, se han editado los valores cercanos al 1 de enero de cada año, desde el 01/01/1800 a las 0h00m00s, en intervalos de 1 año aproximadamente (8765,82 minutos, debido al carácter cerrado de la aplicación, con indicación de intervalo en minutos hasta el primer decimal).

No obstante, se indican los instantes considerados como JD, de cara a una más cómoda interpolación.

Tabla AIV.1. Valores de ΔT entre 1800 y 1901 extraídos a partir de MICA [33]

	(U	Julian Date			Delta T		Julian Date			Delta T	
		T1)	(UT1)				s	d	h	m	d
	d	h	m	d	s		d	h	m	d	s
1800 Jan	1	0	0	2378496,500	12,600	1851 Jan	1	7	48	2397123,825	6,690
1801 Jan	1	5	48	2378861,742	12,000	1852 Jan	1	13	36	2397489,067	6,840
1802 Jan	1	11	36	2379226,983	11,799	1852 Dec	31	19	24	2397854,308	7,030
1803 Jan	1	17	24	2379592,225	11,399	1854 Jan	1	1	12	2398219,550	7,150
1804 Jan	1	23	12	2379957,467	11,167	1855 Jan	1	7	0	2398584,792	7,260
1805 Jan	1	5	0	2380322,708	11,100	1856 Jan	1	12	48	2398950,033	7,230
1806 Jan	1	10	48	2380687,950	11,167	1856 Dec	31	18	36	2399315,275	7,210
1807 Jan	1	16	36	2381053,192	11,133	1858 Jan	1	0	24	2399680,517	6,990
1808 Jan	1	22	24	2381418,433	11,201	1859 Jan	1	6	12	2400045,758	7,190
1809 Jan	1	4	12	2381783,675	11,500	1860 Jan	1	12	0	2400411,000	7,350
1810 Jan	1	10	0	2382148,917	11,200	1860 Dec	31	17	48	2400776,242	7,410
1811 Jan	1	15	48	2382514,158	11,700	1861 Dec	31	23	36	2401141,483	7,360
1812 Jan	1	21	36	2382879,400	11,900	1863 Jan	1	5	24	2401506,725	6,950
1813 Jan	1	3	24	2383244,642	11,800	1864 Jan	1	11	12	2401871,967	6,449
1814 Jan	1	9	12	2383609,883	11,750	1864 Dec	31	17	0	2402237,208	5,921
1815 Jan	1	15	0	2383975,125	11,750	1865 Dec	31	22	48	2402602,450	5,150
1816 Jan	1	20	48	2384340,367	11,633	1867 Jan	1	4	36	2402967,692	4,109
1817 Jan	1	2	36	2384705,608	11,525	1868 Jan	1	10	24	2403332,933	2,939
1818 Jan	1	8	24	2385070,850	11,425	1868 Dec	31	16	12	2403698,175	1,971
1819 Jan	1	14	12	2385436,092	11,325	1869 Dec	31	22	0	2404063,417	1,040
1820 Jan	1	20	0	2385801,333	11,130	1871 Jan	1	3	48	2404428,658	0,110
1821 Jan	1	1	48	2386166,575	10,940	1872 Jan	1	9	36	2404793,900	-0,821
1822 Jan	1	7	36	2386531,817	10,290	1872 Dec	31	15	24	2405159,142	-1,699
1823 Jan	1	13	24	2386897,058	9,940	1873 Dec	31	21	12	2405524,383	-2,480
1824 Jan	1	19	12	2387262,300	9,880	1875 Jan	1	3	0	2405889,625	-3,190
1825 Jan	1	1	0	2387627,542	9,720	1876 Jan	1	8	48	2406254,867	-3,841
1826 Jan	1	6	48	2387992,783	9,660	1876 Dec	31	14	36	2406620,108	-4,429
1827 Jan	1	12	36	2388358,025	9,510	1877 Dec	31	20	24	2406985,350	-4,790
1828 Jan	1	18	24	2388723,267	9,209	1879 Jan	1	2	12	2407350,592	-5,090
1829 Jan	1	0	12	2389088,508	8,600	1880 Jan	1	8	0	2407715,833	-5,360
1830 Jan	1	6	0	2389453,750	7,950	1880 Dec	31	13	48	2408081,075	-5,370
1831 Jan	1	11	48	2389818,992	7,590	1881 Dec	31	19	36	2408446,317	-5,340
1832 Jan	1	17	36	2390184,233	7,360	1883 Jan	1	1	24	2408811,558	-5,400
1832 Dec	31	23	24	2390549,475	7,100	1884 Jan	1	7	12	2409176,800	-5,580
1834 Jan	1	5	12	2390914,717	6,890	1884 Dec	31	13	0	2409542,042	-5,740
1835 Jan	1	11	0	2391279,958	6,730	1885 Dec	31	18	48	2409907,283	-5,690
1836 Jan	1	16	48	2391645,200	6,390	1887 Jan	1	0	36	2410272,525	-5,670
1836 Dec	31	22	36	2392010,442	6,250	1888 Jan	1	6	24	2410637,767	-5,730
1838 Jan	1	4	24	2392375,683	6,250	1888 Dec	31	12	12	2411003,008	-5,780
1839 Jan	1	10	12	2392740,925	6,220	1889 Dec	31	18	0	2411368,250	-5,860
1840 Jan	1	16	0	2393106,167	6,220	1890 Dec	31	23	48	2411733,492	-6,010
1840 Dec	31	21	48	2393471,408	6,300	1892 Jan	1	5	36	2412098,733	-6,280
1842 Jan	1	3	36	2393836,650	6,350	1892 Dec	31	11	24	2412463,975	-6,530
1843 Jan	1	9	24	2394201,892	6,320	1893 Dec	31	17	12	2412829,217	-6,500
1844 Jan	1	15	12	2394567,133	6,340	1894 Dec	31	23	0	2413194,458	-6,410
1844 Dec	31	21	0	2394932,375	6,383	1896 Jan	1	4	48	2413559,700	-6,110
1846 Jan	1	2	48	2395297,617	6,400	1896 Dec	31	10	36	2413924,942	-5,631
1847 Jan	1	8	36	2395662,858	6,460	1897 Dec	31	16	24	2414290,183	-4,681
1848 Jan	1	14	24	2396028,100	6,480	1898 Dec	31	22	12	2414655,425	-3,720
1848 Dec	31	20	12	2396393,342	6,530	1900 Jan	1	4	0	2415020,667	-2,699
1850 Jan	1	2	0	2396758,583	6,550	1901 Jan	1	9	48	2415385,908	-1,478

Tabla AIV.2. Valores de ΔT entre 1902 y 2000 extraídos a partir de MICA [33]

Julian Date					Delta T	Julian Date					Delta T
d	h	m	d	s		d	h	m	d	s	
						1951 Jan	1	11	: 48	2433647,992	29,571
						1952 Jan	1	17	: 36	2434013,233	29,971
1902 Jan	1	15	: 36	2415751,150	-0,078	1952 Dec	31	23	: 24	2434378,475	30,360
1903 Jan	1	21	: 24	2416116,392	1,263	1954 Jan	1	5	: 12	2434743,717	30,720
1904 Jan	2	3	: 12	2416481,633	2,594	1955 Jan	1	11	: 0	2435108,958	31,070
1905 Jan	1	9	: 0	2416846,875	3,921	1956 Jan	1	16	: 48	2435474,200	31,350
1906 Jan	1	14	: 48	2417212,117	5,202	1956 Dec	31	22	: 36	2435839,442	31,677
1907 Jan	1	20	: 36	2417577,358	6,293	1958 Jan	1	4	: 24	2436204,683	32,166
1908 Jan	2	2	: 24	2417942,600	7,685	1959 Jan	1	10	: 12	2436569,925	32,672
1909 Jan	1	8	: 12	2418307,842	9,131	1960 Jan	1	16	: 0	2436935,167	33,151
1910 Jan	1	14	: 0	2418673,083	10,382	1960 Dec	31	21	: 48	2437300,408	33,584
1911 Jan	1	19	: 48	2419038,325	11,644	1962 Jan	1	3	: 36	2437665,650	33,992
1912 Jan	2	1	: 36	2419403,567	13,234	1963 Jan	1	9	: 24	2438030,892	34,467
1913 Jan	1	7	: 24	2419768,808	14,691	1964 Jan	1	15	: 12	2438396,133	35,031
1914 Jan	1	13	: 12	2420134,050	16,002	1964 Dec	31	21	: 0	2438761,375	35,738
1915 Jan	1	19	: 0	2420499,292	17,192	1966 Jan	1	2	: 48	2439126,617	36,546
1916 Jan	2	0	: 48	2420864,533	18,193	1967 Jan	1	8	: 36	2439491,858	37,430
1917 Jan	1	6	: 36	2421229,775	19,131	1968 Jan	1	14	: 24	2439857,100	38,293
1918 Jan	1	12	: 24	2421595,017	20,141	1968 Dec	31	20	: 12	2440222,342	39,204
1919 Jan	1	18	: 12	2421960,258	20,861	1970 Jan	1	2	: 0	2440587,583	40,182
1920 Jan	2	0	: 0	2422325,500	21,412	1971 Jan	1	7	: 48	2440952,825	41,171
1921 Jan	1	5	: 48	2422690,742	22,060	1972 Jan	1	13	: 36	2441318,067	42,229
1922 Jan	1	11	: 36	2423055,983	22,511	1972 Dec	31	19	: 24	2441683,308	43,372
1923 Jan	1	17	: 24	2423421,225	23,011	1974 Jan	1	1	: 12	2442048,550	44,484
1924 Jan	1	23	: 12	2423786,467	23,460	1975 Jan	1	7	: 0	2442413,792	45,477
1925 Jan	1	5	: 0	2424151,708	23,630	1976 Jan	1	12	: 48	2442779,033	46,458
1926 Jan	1	10	: 48	2424516,950	23,951	1976 Dec	31	18	: 36	2443144,275	47,521
1927 Jan	1	16	: 36	2424882,192	24,390	1978 Jan	1	0	: 24	2443509,517	48,534
1928 Jan	1	22	: 24	2425247,433	24,339	1979 Jan	1	6	: 12	2443874,758	49,587
1929 Jan	1	4	: 12	2425612,675	24,100	1980 Jan	1	12	: 0	2444240,000	50,540
1930 Jan	1	10	: 0	2425977,917	24,020	1980 Dec	31	17	: 48	2444605,242	51,380
1931 Jan	1	15	: 48	2426343,158	23,980	1981 Dec	31	23	: 36	2444970,483	52,167
1932 Jan	1	21	: 36	2426708,400	23,890	1983 Jan	1	5	: 24	2445335,725	52,957
1933 Jan	1	3	: 24	2427073,642	23,930	1984 Jan	1	11	: 12	2445700,967	53,789
1934 Jan	1	9	: 12	2427438,883	23,880	1984 Dec	31	17	: 0	2446066,208	54,342
1935 Jan	1	15	: 0	2427804,125	23,910	1985 Dec	31	22	: 48	2446431,450	54,871
1936 Jan	1	20	: 48	2428169,367	23,761	1987 Jan	1	4	: 36	2446796,692	55,322
1937 Jan	1	2	: 36	2428534,608	23,910	1988 Jan	1	10	: 24	2447161,933	55,820
1938 Jan	1	8	: 24	2428899,850	23,960	1988 Dec	31	16	: 12	2447527,175	56,300
1939 Jan	1	14	: 12	2429265,092	24,041	1989 Dec	31	22	: 0	2447892,417	56,855
1940 Jan	1	20	: 0	2429630,333	24,351	1991 Jan	1	3	: 48	2448257,658	57,566
1941 Jan	1	1	: 48	2429995,575	24,820	1992 Jan	1	9	: 36	2448622,900	58,310
1942 Jan	1	7	: 36	2430360,817	25,300	1992 Dec	31	15	: 24	2448988,142	59,121
1943 Jan	1	13	: 24	2430726,058	25,771	1993 Dec	31	21	: 12	2449353,383	59,984
1944 Jan	1	19	: 12	2431091,300	26,271	1995 Jan	1	3	: 0	2449718,625	60,786
1945 Jan	1	1	: 0	2431456,542	26,760	1996 Jan	1	8	: 48	2450083,867	61,629
1946 Jan	1	6	: 48	2431821,783	27,270	1996 Dec	31	14	: 36	2450449,108	62,294
1947 Jan	1	12	: 36	2432187,025	27,771	1997 Dec	31	20	: 24	2450814,350	62,966
1948 Jan	1	18	: 24	2432552,267	28,251	1999 Jan	1	2	: 12	2451179,592	63,467
1949 Jan	1	0	: 12	2432917,508	28,700	2000 Jan	1	8	: 0	2451544,833	63,829
1950 Jan	1	6	: 0	2433282,750	29,150						

Tabla AIV.3. Valores de ΔT entre 2000 y 2050 extraídos a partir de MICA [33]

		Julian Date			Delta T	
	d	h	m	d	s	
2000 Dec	31	13	:	48	2451910,075	64,090
2001 Dec	31	19	:	36	2452275,317	64,300
2003 Jan	1	1	:	24	2452640,558	64,473
2004 Jan	1	7	:	12	2453005,800	64,574
2004 Dec	31	13	:	0	2453371,042	64,687
2005 Dec	31	18	:	48	2453736,283	64,845
2007 Jan	1	0	:	36	2454101,525	65,146
2008 Jan	1	6	:	24	2454466,767	65,458
2008 Dec	31	12	:	12	2454832,008	65,776
2009 Dec	31	18	:	0	2455197,250	66,070
2010 Dec	31	23	:	48	2455562,492	66,325
2012 Jan	1	5	:	36	2455927,733	66,590
2012 Dec	31	11	:	24	2456292,975	67,199
2013 Dec	31	17	:	12	2456658,217	67,700
2014 Dec	31	23	:	0	2457023,458	67,980
2016 Jan	1	4	:	48	2457388,700	68,538
2016 Dec	31	10	:	36	2457753,942	69,125
2017 Dec	31	16	:	24	2458119,183	69,625
2018 Dec	31	22	:	12	2458484,425	70,133
2020 Jan	1	4	:	0	2458849,667	70,666
2020 Dec	31	9	:	48	2459214,908	71,176
2021 Dec	31	15	:	36	2459580,150	71,647
2022 Dec	31	21	:	24	2459945,392	72,125
2024 Jan	1	3	:	12	2460310,633	72,625
2024 Dec	31	9	:	0	2460675,875	73,133
2025 Dec	31	14	:	48	2461041,117	73,666
2026 Dec	31	20	:	36	2461406,358	74,166
2028 Jan	1	2	:	24	2461771,600	74,611
2028 Dec	31	8	:	12	2462136,842	75,055
2029 Dec	31	14	:	0	2462502,083	75,500
2030 Dec	31	19	:	48	2462867,325	75,944
2032 Jan	1	1	:	36	2463232,567	76,411
2032 Dec	31	7	:	24	2463597,808	76,882
2033 Dec	31	13	:	12	2463963,050	77,315
2034 Dec	31	19	:	0	2464328,292	77,737
2036 Jan	1	0	:	48	2464693,533	78,158
2036 Dec	31	6	:	36	2465058,775	78,579
2037 Dec	31	12	:	24	2465424,017	78,999
2038 Dec	31	18	:	12	2465789,258	79,470
2040 Jan	1	0	:	0	2466154,500	79,941
2040 Dec	31	5	:	48	2466519,742	80,411
2041 Dec	31	11	:	36	2466884,983	80,882
2042 Dec	31	17	:	24	2467250,225	81,352
2043 Dec	31	23	:	12	2467615,467	81,823
2044 Dec	31	5	:	0	2467980,708	82,312
2045 Dec	31	10	:	48	2468345,950	82,812
2046 Dec	31	16	:	36	2468711,192	83,312
2047 Dec	31	22	:	24	2469076,433	83,812
2048 Dec	31	4	:	12	2469441,675	84,333
2049 Dec	31	10	:	0	2469806,917	84,866
2050 Dec	31	15	:	48	2470172,158	85,428

V. APÉNDICE N.º 5. DIRECTIVA 2000/84/CE DEL PARLAMENTO EUROPEO Y DEL CONSEJO DE 19 DE ENERO DE 2001 SOBRE LA HORA DE VERANO [66]

Se incluye a continuación la transcripción de la directiva arriba mencionada con el fin de completar el contenido del punto 12.1.1. relativo al DST.

Solamente se presenta la normativa europea, debido al sinnúmero de disposiciones oficiales para los diferentes Estados a nivel mundial.

**DIRECTIVA 2000/84/CE DEL PARLAMENTO EUROPEO Y DEL CONSEJO
de 19 de enero de 2001
relativa a las disposiciones sobre la hora de verano**

EL PARLAMENTO EUROPEO Y EL CONSEJO DE LA UNIÓN EUROPEA,

Visto el Tratado constitutivo de la Comunidad Europea y, en particular, su artículo 95,

Vista la propuesta de la Comisión ⁽¹⁾,

Visto el dictamen del Comité Económico y Social ⁽²⁾,

De conformidad con el procedimiento establecido en el artículo 251 del Tratado ⁽³⁾,

Considerando lo siguiente:

- (1) La Octava Directiva 97/44/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 22 de julio de 1997, relativa a las disposiciones sobre la hora de verano ⁽⁴⁾, fija una fecha y una hora comunes a todos los Estados miembros para el comienzo y el fin del período de la hora de verano durante los años 1998, 1999, 2000 y 2001.
- (2) Habida cuenta de que los Estados miembros aplican disposiciones relativas a la hora de verano, resulta importante para el funcionamiento del mercado interior seguir fijando una fecha y una hora comunes para el comienzo y el fin del período de la hora de verano aplicables en toda la Comunidad.
- (3) El período de la hora de verano considerado más apropiado por los Estados miembros es el comprendido entre el final de marzo y el final de octubre. Procede, por consiguiente, mantener ese período.
- (4) El buen funcionamiento de algunos sectores, no sólo el de los transportes y las comunicaciones, sino también otros ramos de la industria, requiere una programación estable a largo plazo. Resulta por consiguiente apropiado establecer por un período indeterminado disposiciones relativas al período de la hora de verano. El artículo 4 de la Directiva 97/44/CE establece a este respecto que el régimen aplicable a partir de 2002 debe ser aprobado por el Parlamento Europeo y el Consejo antes del 1 de enero de 2001.
- (5) En aras de la claridad y de la precisión de la información, es preciso publicar cada cinco años el calendario de aplicación del período de la hora de verano para los cinco años siguientes.
- (6) Es preciso, además, supervisar la aplicación de la presente Directiva sobre la base de un informe que la Comisión deberá presentar al Parlamento Europeo, al Consejo y al Comité Económico y Social sobre las repercusiones de las presentes disposiciones en todos los sectores afectados. Dicho informe se deberá basar en la información comunicada por los Estados miembros a la Comisión con tiempo suficiente para permitir la presentación del informe en el plazo fijado.

- (7) Dado que el objetivo de la armonización completa del calendario de la hora de verano con el fin de facilitar los transportes y las comunicaciones no puede ser alcanzado de manera suficiente por los Estados miembros, y por consiguiente puede lograrse mejor a nivel comunitario, la Comunidad puede tomar medidas con arreglo al principio de subsidiariedad establecido en el artículo 5 del Tratado. La presente Directiva no excederá de lo que sea necesario para alcanzar ese objetivo.
- (8) Por motivos de carácter geográfico, es preciso que las disposiciones comunes relativas a la hora de verano no se apliquen a los territorios de ultramar de los Estados miembros.

HAN ADOPTADO LA PRESENTE DIRECTIVA:

Artículo 1

A efectos de la presente Directiva, se entenderá por «período de la hora de verano» el período del año durante el cual la hora se adelanta en sesenta minutos respecto a la hora del resto del año.

Artículo 2

A partir del año 2002, el período de la hora de verano comenzará en todos los Estados miembros a la 1 de la madrugada, hora universal, del último domingo de marzo.

Artículo 3

A partir del año 2002, el período de la hora de verano terminará en todos los Estados miembros a la 1 de la madrugada, hora universal, del último domingo de octubre.

Artículo 4

La Comisión publicará en el *Diario Oficial de las Comunidades Europeas* ⁽⁵⁾, por primera vez en el momento de la publicación de la presente Directiva y en lo sucesivo cada cinco años, una comunicación que incluirá el calendario de fechas de inicio y fin de la hora de verano para los cinco años siguientes.

Artículo 5

La Comisión presentará al Parlamento Europeo, al Consejo y al Comité Económico y Social, a más tardar el 31 de diciembre de 2007, un informe en el que dará cuenta de la incidencia de la aplicación de las disposiciones de la presente Directiva en los sectores afectados.

Dicho informe se elaborará sobre la base de la información comunicada por los Estados miembros a la Comisión a más tardar el 30 de abril de 2007.

La Comisión presentará, en su caso, las propuestas adecuadas, siguiendo las conclusiones del informe.

⁽¹⁾ DO C 337 E de 28.11.2000, p. 136.

⁽²⁾ Dictamen emitido el 29 de noviembre de 2000 (no publicado aún en el Diario Oficial).

⁽³⁾ Dictamen del Parlamento Europeo de 12 de diciembre de 2000 (no publicado aún en el Diario Oficial) y Decisión del Consejo de 20 de diciembre de 2000.

⁽⁴⁾ DO L 206 de 1.8.1997, p. 62.

⁽⁵⁾ DO C 35 de 2.2.2001.

Artículo 6

La presente Directiva no se aplicará a los territorios de ultramar de los Estados miembros.

Artículo 7

Los Estados miembros pondrán en vigor las disposiciones legales, reglamentarias y administrativas necesarias para dar cumplimiento a lo establecido en la presente Directiva a más tardar el 31 de diciembre de 2001. Informarán de ello inmediatamente a la Comisión.

Cuando los Estados miembros adopten dichas disposiciones, éstas incluirán una referencia a la presente Directiva o irán acompañadas de dicha referencia en su publicación oficial. Los Estados miembros establecerán las modalidades de la mencionada referencia.

Artículo 8

La presente Directiva entrará en vigor el día de su publicación en el *Diario Oficial de las Comunidades Europeas*.

Artículo 9

Los destinatarios de la presente Directiva serán los Estados miembros.

Hecho en Bruselas, el 19 de enero de 2001.

Por el Parlamento Europeo

La Presidenta

N. FONTAINE

Por el Consejo

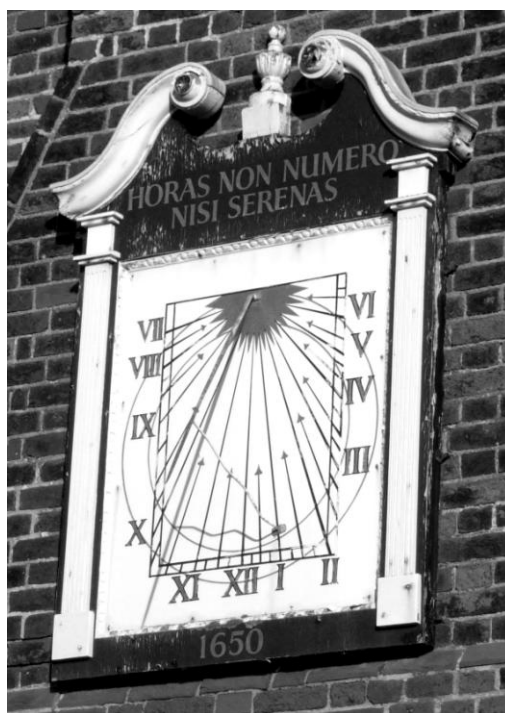
El Presidente

B. RINGHOLM

VI. APÉNDICE N.º 6. EXPRESIONES LATINAS UTILIZADAS EN LA TESIS

Hubo un tiempo en el que la *universalidad* de las universidades quedaba garantizada por el uso generalizado en las mismas del latín como lengua de intercambio de conocimientos. Actualmente, y tras su paulatina sustitución por las lenguas vernáculas en los campus en siglos pasados, es el inglés el idioma que se ha arrogado tan destacada misión en las comunidades científicas y académicas a nivel mundial. Este aparente triunfo de una lengua germánica sobre el latín es relativo: algunos lingüistas estiman hasta en un 65% el léxico inglés de origen latino, llegando a afirmar que en el ámbito científico este porcentaje alcanza el 85%.

En cualquier caso, y sea como fuere, hemos deseado reivindicar la lengua universitaria y universal por excelencia iniciando cada capítulo de esta tesis con una breve locución latina. Todas ellas se han elegido de forma que su significado aluda directamente a la temática del capítulo que encabezan. Y todas ellas, con una única excepción, tienen una característica en común: son leyendas grabadas en relojes de sol, recopiladas gracias al trabajo de expertos que comparten con el autor de esta tesis su afición por la Gnomónica, la ancestral ciencia tan unida a los propósitos de esta obra.



AVI-1. Leyenda latina en un reloj de Sol del s. XVII. Autor: Mark Wilson. Wikimedia Commons. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MootHallSundial.JPG> [68].

Relacionamos todas ellas a continuación por orden de aparición en la presente tesis. Se incluyen sus traducciones al español. La mayor parte ellas están extraídas de [4]. Pueden encontrarse también en la red en [69].

<i>Nascor cum sol oritur</i>	Nazco con la salida del Sol
<i>Sicut erat in principio</i>	Como era en el principio
<i>Hic umbra docet</i>	Aquí la sombra enseña.
<i>Motum solis adaequat</i>	Copia el movimiento del sol
<i>Tempora computantur</i>	El tiempo se registra
<i>Tempora mutantur, et nos mutamur in illis</i>	El tiempo cambia y nosotros cambiamos también con él
<i>Solem movet ac regit horas</i>	Mueve al sol y rige las horas
<i>Sic volvitur orbis</i>	Así rueda el mundo
<i>Te regat alia lux</i>	Que otra luz te guíe
<i>Aut lauda vel emenda</i>	Alaba o rectifica
<i>Coeli lux nostra dux</i>	La luz del cielo nos guía
<i>Solis mendaces arguit horas</i> ⁸¹	Ello demuestra que las horas solares son mentirosas
<i>Hora a meridie numquam in eodem statu permanet</i>	Desde el mediodía, la hora no se marca nunca en el mismo punto
<i>Quaesivit coelo lucem ingenioque reperta</i>	Buscó la luz en los cielos y la encontró en un artificio
<i>Solem certissima signa sequuntur</i>	Los signos más seguros siguen al Sol
<i>Cogita finem</i>	Piensa en el final
<i>Hinc... disce</i>	De ahora en adelante... aprende

⁸¹ El avisado lector habrá identificado perfectamente la frase que jamás ha formado parte del interminable abanico de leyendas grabadas sobre relojes de sol. No obstante, la reproducimos a continuación, explicando su origen: *Solis mendaces arguit horas*, según la tradición (recogida por Camille Flammarion en el S. XIX) era una expresión grabada a menudo por los relojeros franceses sobre sus creaciones, aludiendo a que los días mostraban, a lo largo del año, duraciones diferentes. La precisión creciente de los cronógrafos hizo que fuera cada vez más patente el desfase entre el instante del mediodía solar (que en París se anunciaba con salvas de cañón) y el mediodía marcado por los relojes mecánicos. Por esta razón, hemos reservado esta frase latina para el capítulo dedicado a la ecuación del tiempo.

En cuanto al párrafo “*In Sneffels...*” incluido en las páginas de presentación, y extraído de la obra de Julio Verne allí citada, no es necesaria su traducción al ser universalmente conocida.

