



ISSN: 2603-9982

Alsina, Á. y Delgado-Rebolledo, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 5(1), 18-37.

¿QUÉ CONOCIMIENTOS NECESITA EL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS?

Ángel Alsina, Universidad de Girona, España

Rosa Delgado-Rebolledo, Universidad de Concepción, Chile

Resumen

Se concretan los conocimientos para enseñar matemáticas en Educación Infantil a partir de la revisión de: a) las finalidades, las prácticas y la organización de la enseñanza; b) la literatura previa sobre el conocimiento del profesorado de infantil para enseñar matemáticas. Considerando estos antecedentes, se describen y ejemplifican dos tipos de conocimiento: Conocimiento Matemático en Educación Infantil y Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil, junto con sus respectivos subtipos. Se concluye que la concreción de estos conocimientos puede contribuir al desarrollo profesional del profesorado de infantil y, adicionalmente, pueden usarse como herramienta de análisis.

Palabras clave: conocimiento del profesorado; conocimiento para enseñar matemáticas; conocimiento didáctico de las matemáticas; práctica docente; Educación Infantil.

What knowledge do early childhood teachers need to teach mathematics?

Abstract

The knowledge for teaching mathematics in Early Childhood Education is specified on the basis of a review of: a) the aims, practices and organisation of teaching; b) previous literature on early childhood teachers' knowledge for teaching mathematics. Considering this background, two types of knowledge are described and exemplified: Mathematical Knowledge in Early Childhood Education and Didactic Knowledge of Mathematics in Early Childhood Education, together with their respective subtypes. It is concluded that the concreteness of this knowledge can contribute to the professional development of early childhood teachers and, additionally, can be used as a tool for analysis.

Keywords: teacher knowledge; knowledge for teaching mathematics; didactic knowledge of mathematics; teaching practice; Early Childhood Education.

INTRODUCCIÓN

Desde los años noventa del siglo XX, la investigación educativa se ha interesado en el análisis del conocimiento que el profesorado manifiesta en sus prácticas de enseñanza, siendo una de las propuestas teóricas más relevantes la desarrollada por Shulman (1986). Desde entonces, el estudio del conocimiento del profesorado para enseñar matemáticas ha dado lugar a una prolífica actividad de investigación, de modo que han surgido distintos modelos de análisis. Entre ellos, destacan el *Knowledge Quartet* (KQ), que considera cuatro categorías que permiten observar, analizar y discutir acerca de situaciones de aula en las que el conocimiento del profesorado se pone en acción (Rowland et al., 2005); el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), que considera un conjunto de conocimientos y habilidades que requiere el profesorado para gestionar las tareas y los problemas recurrentes en la enseñanza de las matemáticas (Ball et al., 2008); el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) de Godino et al. (2017), para analizar, interpretar, caracterizar y categorizar los conocimientos que pone en juego el profesorado al enseñar un determinado contenido matemático; o el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), que asume que todo el conocimiento que es útil para el profesor en el contexto de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es especializado (Carrillo et al., 2018).

La mayoría de estudios desarrollados desde estos distintos modelos se han centrado en el profesorado de matemáticas de primaria y secundaria, mientras que las investigaciones sobre el conocimiento del profesorado de infantil son más bien escasas (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016). En este sentido, Alsina (2019a) señala que uno de los focos en los que se debería centrar la investigación en educación matemática infantil en las próximas décadas consiste, precisamente, en definir el conocimiento y destrezas útiles para enseñar matemáticas del profesorado de esta etapa, considerando que se trata de profesorado generalista.

En este artículo ponemos la atención en este tema de interés, identificando de manera fundamentada el conjunto de conocimientos que requiere el profesorado de Educación Infantil (EI, de ahora en adelante) para enseñar matemáticas, teniendo en cuenta las características específicas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en esta etapa y el conocimiento que el profesorado debería poner en juego en sus prácticas de enseñanza. La concreción de estos conocimientos pretende ser, principalmente, una herramienta de desarrollo profesional del profesorado de EI que describa los distintos conocimientos que se deben movilizar para llevar a cabo una enseñanza eficaz, con el propósito también de facilitar la identificación, el análisis y la reflexión de posibles falencias en la propia práctica que deberían ser subsanadas a través de la formación.

Para llevar a cabo este propósito, el artículo se estructura en tres partes: en la primera parte, se caracteriza la enseñanza de las matemáticas en EI en tres dimensiones (Alsina, 2020a); en la segunda parte, se realiza una revisión de la literatura previa acerca del conocimiento del profesorado de EI para enseñar matemáticas, teniendo en cuenta que las investigaciones que han tratado de identificar este conocimiento son escasas (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016); finalmente, en la tercera parte, considerando los puntos anteriores, se describen y ejemplifican los tipos de conocimiento que debería movilizar el profesorado de EI para llevar a cabo una enseñanza eficaz de las matemáticas en esta etapa educativa.

CARACTERÍSTICAS DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

En el contexto internacional, se está realizando una importante labor de investigación en Educación Matemática Infantil en el grupo *Early Years Mathematics* (EYM) dentro del *Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME), donde se tratan cuestiones como el papel de los materiales, las diferentes formas de comunicación y representación matemática de los niños o las evidencias de aprendizaje sobre contenidos específicos (Edo, 2016). Asimismo, en las *POEM Conferences on Early Mathematics Learning* (Benz et al., 2018; Carlsen et al., 2020; Kortenkamp et al., 2014; Meaney et al., 2016) se aportan datos sobre la enseñanza y el aprendizaje de los procesos y contenidos matemáticos o la profesionalización de los docentes de la primera infancia, con una amplia variedad de enfoques teóricos y metodológicos que establecen bases para futuras investigaciones en esta área (Alsina, 2002b). A partir de estos resultados, junto con las aportaciones de organismos internacionales que han hecho recomendaciones sobre cómo se deberían trabajar las matemáticas en los primeros niveles escolares y las conclusiones de diversos estudios bibliométricos y metaanálisis, Alsina (2020a) caracteriza la enseñanza de las matemáticas en infantil a partir de tres dimensiones: las finalidades de la enseñanza, las prácticas de enseñanza y la organización del conocimiento a enseñar.

Finalidades de la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

Concretar finalidades requiere posicionarse. En este sentido, en primer lugar, se asume que la educación matemática infantil tiene unos objetivos propios (Alsina, 2020a; NAEYC & NCTM, 2002; The Australian Association of Mathematics Teachers Inc. & Early Childhood Australia, 2006). Con esto se quiere remarcar que, a diferencia de lo que se ha venido pensando, la finalidad de la enseñanza de las matemáticas tempranas no es preparar al alumnado para la siguiente etapa educativa. En otras palabras, no se trata de una etapa pre-escolar en la que el profesorado forma al alumnado para que accedan a primaria sabiendo, por ejemplo, escribir números, recitando de memoria la serie numérica o indicando el nombre de las principales formas geométricas, por citar algunos estereotipos (Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014). Desde este punto de vista, el primer posicionamiento que se asume y que es acorde con los currículos de EI, es que la enseñanza de las matemáticas en infantil tiene el propósito de promover el desarrollo progresivo de los primeros conocimientos matemáticos, de naturaleza intuitiva, como parte del desarrollo integral de los niños.

El segundo posicionamiento tiene que ver con la forma de desarrollar el conocimiento matemático de los niños. En este sentido, se asumen los planteamientos del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), planteado por Alsina (2018, 2019b, 2020c). Este enfoque se fundamenta en tres pilares: a) la Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano (Vygotsky, 1978), que concibe la educación como un fenómeno social y cultural que se basa en el lenguaje y en la interacción como herramientas fundamentales para promover el aprendizaje; b) el Modelo Realista de Formación del Profesorado (Korthagen, 2001), que considera que el profesorado debería conocer muchas maneras de actuar y ejercitarlas en la práctica, es decir, debería disponer de criterios para saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente y reflexionar sobre ello sistemáticamente; y c) y la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991), que impulsa el uso de situaciones de la vida cotidiana o problemas contextualizados como punto de partida para aprender matemáticas. Progresivamente, estas situaciones son matematizadas a través de modelos, mediadores entre lo abstracto y lo concreto, para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.

Prácticas de enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

La investigación acerca de las formas de facilitar el acceso al conocimiento matemático en las primeras edades ha sido muy productiva. Como señala Alsina (2020a), han surgido múltiples enfoques, que van desde “el modelo europeo al aire libre” hasta la enseñanza clásica con fichas, pasando por otros enfoques que se inspiran y fundamentan en autores clásicos como Bruner, Dienes, Montessori, Piaget, Skemp, Vygotsky, etc. Con base en estas distintas aportaciones, el desarrollo del pensamiento matemático infantil se debería sustentar en actividades concretas, experimentales y adecuadas a las capacidades mentales de los niños, para que observen, experimenten, reflexionen y obtengan conclusiones. Para lograr esta finalidad, el EIEM (2018, 2019a) propone itinerarios de enseñanza, entendiendo por itinerario una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles: 1) informal, en el que se visualizan las ideas matemáticas de manera concreta a través de situaciones de vida cotidianas, materiales manipulativos y juegos; 2) intermedio, en el que se avanza hacia la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático a través de recursos literarios y tecnológicos; y 3) formal, en el que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales para completar de esta forma el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico, a través de recursos gráficos. El EIEM plantea entonces que es necesario fomentar la comprensión más que la mera memorización, la actividad heurística más que la pura ejercitación, o el pensamiento matemático crítico más que la simple repetición.

Más adelante, con el propósito de ofrecer algunas orientaciones para aplicar el EIEM en el aula, Alsina (2020c) plantea cinco recomendaciones: 1) planificar y gestionar la enseñanza de los contenidos a través de los procesos matemáticos, es decir, promover una enseñanza que implique pensar y hacer, más que memorizar definiciones y procedimientos; 2) promover prácticas de enseñanza-aprendizaje que consideren tanto al alumnado como al profesorado, en las que haya espacio tanto para que el alumnado indague y construya su conocimiento, como para que el profesorado explique de forma directa un conocimiento matemático; 3) considerar contextos reales, intermedios y formales, con distinto protagonismo en función del nivel escolar; 4) garantizar el principio de abstracción progresiva, desde lo concreto hacia lo abstracto, de manera que, a lo largo de un itinerario, se considere la visualización, la manipulación, la simbolización y la abstracción; y 5) disponer de criterios objetivos para la selección de los contextos de enseñanza de las matemáticas, a partir de distintas herramientas.

La organización del conocimiento matemático en Educación Infantil

Como se indica en Alsina (2020a), abordar de forma sintética el conjunto de conocimientos matemáticos que contribuyen a desarrollar el pensamiento matemático de los niños menores de 6 años es ampliamente complejo, puesto que son muchos los autores y organismos que desde hace décadas vienen realizando aportaciones que han contribuido a organizar la disciplina.

A nivel internacional, las aportaciones del NCTM (2003), Geist (2014) o Clements y Sarama (2015), han tenido amplia repercusión. El NCTM (2003), por ejemplo, ha explicitado los conocimientos matemáticos que deberían aprender los niños a partir de los 3 años. Esta asociación organiza los conocimientos en diez estándares, que son el reflejo de la cultura matemática que la sociedad necesita: 1) cinco estándares de contenidos (Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad), que describen explícitamente los contenidos que deberían aprender los niños; y 2) cinco estándares de procesos (Resolución de Problemas, Razonamiento y

prueba, Comunicación, Conexiones y Representación), que ponen de relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos. Además, Geist (2014) y Clements y Sarama (2015) han realizado una extensa labor de investigación que les ha permitido establecer qué conocimientos matemáticos van desarrollando los niños desde el nacimiento.

En el contexto español, a partir de un estudio longitudinal con más de 700 niños menores de 3 años, Alsina (2015) organiza las matemáticas intuitivas e informales que se aprenden y usan durante la primera infancia en el marco de situaciones de exploración del entorno, la manipulación y experimentación con materiales y el juego. A partir de estos datos, se establecen cuatro categorías de conocimientos vinculados a las cualidades sensoriales, las cantidades discretas y continuas, las posiciones y las formas y los atributos mesurables, con distintos contenidos en cada categoría.

Asimismo, a partir de los datos de diversos estudios (e.g., Alsina, 2006, 2015; Castro y Castro, 2016; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Muñoz-Catalán y Carrillo, 2018; NCTM, 2003), Alsina (2020a) considera cinco categorías de conocimientos con distintos contenidos en cada categoría: Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad.

PANORAMA SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS

A pesar de que, tal como se indicado, las investigaciones que han tratado de identificar el conocimiento del profesorado de infantil para enseñar matemáticas son escasas (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016), se han reportado algunos estudios sobre el tema. En el trabajo de Lee (2010), por ejemplo, se mide el Conocimiento Pedagógico del Contenido en Matemáticas (PCKM, por su acrónimo en inglés) encontrando que el profesorado de niños menores de 5 años con mayor formación académica y más de 10 años de experiencia obtiene mayores puntajes en PCKM. Considerando estos datos, el autor concluye que es necesario fortalecer tanto la formación inicial del futuro profesorado de infantil como la formación continua del profesorado en servicio sobre cómo enseñar matemáticas al alumnado de esta etapa.

McGray y Chen (2012) también estudian el PCKM del profesorado de infantil (niños entre 4 y 5 años). Las autoras encuentran que este conocimiento en particular requiere comprender los conceptos fundamentales de los contenidos matemáticos y el lenguaje relacionado con las matemáticas, lo cual se combina con la capacidad de observar de cerca cómo juegan y qué piensan los niños. Los resultados, además, sugieren que el profesorado de infantil necesita un tipo de conocimiento que les permita promover la construcción de conexiones iniciales entre conceptos y procedimientos, ya sea en situaciones de juego libre o de instrucción directa, para ayudar al alumnado a ver y comprender las matemáticas en el mundo que los rodea. En línea con las ideas anteriores, Opperman et al. (2016) muestran que el conocimiento del contenido matemático se refleja en el PCKM del profesorado de infantil (niños entre 3 y 6 años) respecto a la identificación de las matemáticas presentes en situaciones de juego.

Con base en estos estudios, Gasteiger et al. (2020) señalan que las mediciones del PCKM se han realizado desde una perspectiva cognitiva de este conocimiento (e.g., Lee, 2010) o desde una perspectiva situada del mismo (e.g., McCray y Chen, 2012). Con el propósito de combinar la ventaja de ambos enfoques, los investigadores proponen un nuevo instrumento para medir el PCKM del profesorado de infantil donde este constructo se conceptualiza considerando conocimientos implícitos del profesorado (Gasteiger y Benz,

2018). En el estudio se reflexiona sobre el *conocimiento de las habilidades matemáticas* de los niños y el *conocimiento de la adaptación de actividades de aprendizaje matemático* como componentes relevantes del conocimiento del profesorado de infantil.

Respecto a estudios que utilizan modelos de conocimiento del profesorado de matemáticas, Mosvold et al. (2011) analizan el conocimiento de una maestra de infantil (niños de 3 años) desde la perspectiva del MKT. Los investigadores identifican situaciones en las cuales la maestra muestra su conocimiento sobre el conteo, particularmente su PCK en cuanto al *conocimiento del contenido y los estudiantes*. Se identifica el conocimiento de la maestra de formas de conteo que utilizan los niños y tareas de enseñanza donde es necesario seleccionar representaciones apropiadas para los niños. Los autores reflexionan sobre los componentes del MKT y concluyen que algunos de ellos parecen ser aplicables al estudio del profesorado de infantil, mientras que otros podrían ser reformulados para responder mejor a las tareas de enseñanza que desarrolla el profesorado de infantil, las cuales difieren considerablemente de las realizadas por los profesores de secundaria.

Adicionalmente, Hundeland et al. (2017) utilizan el KQ con el fin de caracterizar las competencias y el conocimiento de una maestra de niños de 5 años en el contexto de una clase de geometría. En los *fundamentos*, se identifica un conocimiento explícito de los contenidos geométricos cuando la maestra usa tanto la terminología de las figuras geométricas como una variedad de figuras similares y congruentes. Además, la maestra propone una actividad lúdica buscando despertar el interés y la curiosidad del alumnado, lo que se relaciona con un conocimiento didáctico. En las *transformaciones*, se resalta la elección que hace la maestra de ejemplos para introducir nuevas figuras geométricas. En las *conexiones*, se identifica la relación que hace la maestra entre lados paralelos y lados opuestos de igual longitud. Finalmente, la *contingencia* se observa cuando la maestra respondió a las ideas del alumnado, introdujo más figuras geométricas a la actividad y se refirió a cómo clasificar figuras geométricas a pesar de que esto no había sido considerado en la planeación. De acuerdo con los resultados obtenidos, de manera general, el KQ es útil para el propósito de este estudio, a pesar de que algunos códigos del modelo podrían ser modificados para adecuarse mejor al conocimiento del profesorado de infantil.

Desde la perspectiva del modelo MTSK, Muñoz-Catalán et al. (2017), reflexionan sobre el conocimiento deseable del profesorado de infantil en relación con la resta. En el dominio del Conocimiento Matemático (MK), describen la riqueza de elementos asociados a la resta en el *conocimiento de los temas* respecto a propiedades de la resta en los números naturales, significados asociados a la resta, tipos de problemas de estructura aditiva, procedimientos que se pueden utilizar para restar, entre otros. Además, describen el *conocimiento de la estructura de la matemática* a partir de variadas conexiones entre estos elementos de conocimiento, como por ejemplo la relación entre la resta y la división (conexión de complejización) o la relación entre la resta en su perspectiva procedimental y la enumeración (conexión de simplificación). Sumando a lo anterior, en esta propuesta teórica, se considera que, al ser la etapa de infantil generadora de lenguaje, cobra relevancia el conocimiento del profesorado acerca de la precisión en el uso del lenguaje matemático y el papel de los símbolos, ambos componentes del *conocimiento de la práctica matemática*. En el caso del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) resalta el conocimiento de las fases que los niños siguen en su proceso de comprensión del número en el subdominio *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas*.

Posteriormente, Muñoz-Catalán et al. (2019) exploran el conocimiento especializado que sustenta las prácticas de enseñanza de contenidos aritméticos y geométricos en el caso de

un maestro y una maestra de infantil. En dicho estudio se identifica el conocimiento de los profesores en los subdominios *conocimiento de los temas* y *conocimiento de la práctica matemática* en el dominio MK, así como el *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* y el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* en el PCK. En ambos maestros se identifica el conocimiento de sistemas de representación y la complementariedad entre ellos, además del conocimiento de la comparación como práctica matemática en este nivel. La comparación es utilizada como parte de una estrategia de enseñanza, lo cual busca promover el desarrollo del pensamiento flexible de los niños considerando su necesidad de partir de representaciones concretas. A su vez, el conocimiento de los sistemas de representación permite tomar decisiones sobre los recursos didácticos a utilizar en la enseñanza de cada tema.

UN PASO MÁS: CONCRETANDO EL CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS

Siguiendo las ideas anteriores, para concretar el conocimiento del profesorado de infantil podríamos pensar en un dominio de conocimiento que tenga en cuenta los contenidos matemáticos que se enseñan en EI, lo cual es común en la mayoría de modelos de conocimiento. A lo anterior, añadiríamos un rasgo distintivo de esta etapa, los conocimientos intuitivos e informales que permitan hacer las conexiones que mencionan Mosvold et al. (2011), así como otras conexiones entre contenidos matemáticos. Lo anterior, a su vez, considera nuestro posicionamiento sobre las finalidades de la enseñanza de las matemáticas en EI, donde las primeras matemáticas que los niños aprenden y usan en el marco de sus experiencias informales son el eslabón imprescindible para el acceso a las matemáticas escolares (Baroody, 1987), de modo que la conexión más importante en los primeros aprendizajes matemáticos es la existente entre las matemáticas intuitivas, informales, que los niños han aprendido a través de sus experiencias, y las que están aprendiendo en la escuela (NCTM, 2003, p. 136). A su vez, organismos como el NCTM (2003) subrayan el papel de los procesos matemáticos para enseñar los distintos contenidos a partir de los 3 años, con el propósito de potenciar habilidades como la resolución de problemas, el razonamiento y la argumentación o bien formas de comunicar y representar planteamientos y resultados. Si bien el conocimiento acerca de los procesos matemáticos no es exclusivo del profesorado de EI, es fundamental considerarlo explícitamente a partir de esta etapa educativa.

Por otra parte, en cuanto a los conocimientos pertenecientes al PCK y PCKM, observamos que los estudios revisados se refieren a conocimientos sobre los juegos y otras actividades que podrían ser interesantes para los niños (Hundeland et al., 2017; McGray y Chen, 2012), el conocimiento de las habilidades matemáticas de los niños (Gasteiger et al., 2020) y el conocimiento de las fases que los niños siguen en su proceso de comprensión del número y su necesidad de partir de representaciones concretas (Muñoz-Catalán et al., 2017). Lo anterior se relaciona con un conocimiento sobre cómo aprenden matemáticas los niños, lo cual se complementa con los resultados que ha aportado la investigación educativa a lo largo de muchos años sobre este tema (e.g., Alsina, 2006; Mialaret, 1984).

En la literatura también se reportan datos relevantes sobre las formas específicas de enseñar matemáticas en EI (e.g., Alsina, 2006; Berdonneau, 2008), lo que hace pensar en la necesidad de definir un conocimiento que se refiera a cómo se enseñan las matemáticas en esta etapa. Si bien un elemento común en los distintos modelos de conocimiento es incluir un componente asociado a la enseñanza, este debería concretarse de acuerdo con las características y necesidades específicas de los niños de Educación Infantil, que son

diferentes a las de otros niveles superiores. En este sentido, el EIEM aglutina las distintas formas de enseñar teniendo en cuenta las necesidades reales de los niños de Educación Infantil para aprender matemáticas, otorgando protagonismo a lo concreto y avanzando progresivamente hacia lo abstracto, en contraste con lo que ocurre en otras etapas educativas (Alsina, 2018; 2019b; 2020c). Además, para completar el conjunto de conocimientos del profesorado, es imprescindible considerar también al conocimiento del currículum, en sintonía con los modelos de conocimiento que se han enfocado más en otras etapas educativas. En este sentido, el profesorado de infantil, que como se ha indicado es generalista, debería poseer un conocimiento tanto de la estructura como del contenido del currículo de infantil que, a diferencia del resto de etapas, se organiza en tres áreas (Conocimiento de sí mismo y autonomía personal; Conocimiento del entorno; y Lenguajes: Comunicación y representación), y los contenidos referentes a las matemáticas están integrados dentro de estas áreas.

Con base en estos antecedentes, se concreta el conjunto de conocimientos para enseñar matemáticas en Educación Infantil, con la finalidad de ayudar al profesorado tanto a reconocer cuáles son estos conocimientos como a identificar posibles falencias en el mismo que deberían ser subsanadas para poder ofrecer una enseñanza eficaz. En este artículo, se asume que una enseñanza eficaz de las matemáticas “requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien” (NCTM, 2003). Ello implica, por parte del profesorado: a) conocer y comprender en profundidad los conocimientos matemáticos que enseñan; b) conocer y comprender en profundidad a los alumnos y, en especial, sus necesidades y posibilidades de aprendizaje; c) conocer y comprender en profundidad los recursos y estrategias docentes más adecuadas para llevar a cabo la enseñanza; d) conocer y comprender en profundidad las formas de evaluar los conocimientos más acordes con los recursos y estrategias docentes usadas para llevar a cabo la enseñanza (NCTM, 2003). En síntesis, pues, para una enseñanza eficaz es preciso que el profesorado disponga de un amplio abanico de conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales que permitan alfabetizar a los alumnos, en el sentido que puedan usar los conocimientos que aprenden en la escuela en todos los contextos de la vida cotidiana en los que dichos conocimientos son necesarios.

Así, y en sintonía con los principales modelos de conocimiento del profesorado para enseñar matemáticas, para el profesorado de infantil inicialmente se consideran dos tipos de conocimientos interrelacionados: 1) Conocimiento Matemático en Educación Infantil (CM-EI); y 2) Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil (CDM-EI). Cada tipo está compuesto, a su vez, por subtipos de conocimiento, como se muestra en la Figura 1.

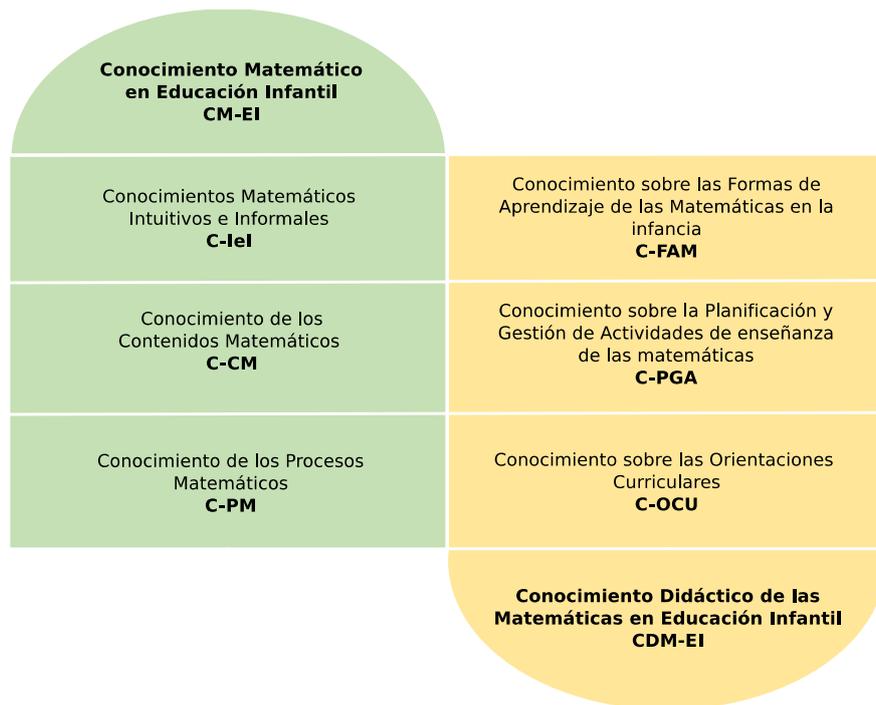


Figura 1. Tipos de Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil.
Fuente: elaboración propia.

El Conocimiento Matemático en Educación Infantil

El reconocimiento de que el profesorado de infantil requiere un conocimiento matemático específico y estructurado que les permita promover el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas de los niños nos lleva a describir un tipo de Conocimiento Matemático en Educación Infantil (CM-EI) que dé cuenta de la naturaleza del conocimiento matemático infantil. Este tipo de conocimiento está formado por tres subtipos que engloban los conocimientos intuitivos e informales, los contenidos matemáticos que deberían aprender los niños y los procesos matemáticos, que ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos.

Conocimientos matemáticos Intuitivos e Informales (C-IeI)

El acceso a las matemáticas escolares requiere una base sólida de conocimientos matemáticos intuitivos e informales: los conocimientos matemáticos intuitivos se refieren a un tipo de conocimiento autoevidente, basado en la certeza intrínseca, más global, metafórico, no analítico (Fischbein, 1987). Adicionalmente, los conocimientos matemáticos informales tratan sobre las nociones y procesos aprendidos en la dinámica diaria no escolar, los cuales se desarrollan a partir de las interacciones con el medio físico y social, donde se presentan escenarios como los juegos que generan aprendizajes de una manera natural y espontánea (Alsina, 2015; Baroody, 1987; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Ginsburg y Baroody, 2007). Estos conocimientos informales son el eslabón necesario para el acceso a la matemática formal, que se refiere a las habilidades y conceptos que se aprenden en las escuelas, y suele caracterizarse por una matemática más simbólica y escrita (Baroody, 2000). De acuerdo con Ginsburg et al. (1998), estas formas de aprendizaje se relacionan entre sí para ir dando un sentido al desarrollo de los conocimientos matemáticos.

Desde este punto de vista, es altamente recomendable que el profesorado de infantil tenga un amplio conocimiento de las matemáticas intuitivas e informales que los niños de la primera infancia usan en situaciones de exploración del entorno, manipulación y juego, además del papel que éstas juegan en su desarrollo. Siguiendo la categorización desarrollada por Alsina (2015), el conocimiento del profesorado de infantil de las cualidades sensoriales, las cantidades discretas y continuas, las posiciones y las formas y los atributos mesurables forman parte del C-IeI.

A continuación, se muestran ejemplos de situaciones de manipulación en las que se pone de manifiesto este conocimiento (Figura 2): durante el recreo, un alumno juega con las palas siguiendo un patrón de repetición AB según el color: una roja, una azul, ...; otro alumno, juega con piedras y las ordena por el tamaño, de mayor a menor. En estas dos situaciones, el C-IeI permite que el maestro se dé cuenta, en primer lugar, de que en estas acciones espontáneas de los niños emergen conocimientos matemáticos vinculados a las relaciones de orden y a los patrones; en segundo lugar, a través del diálogo, el maestro indaga en la intencionalidad de los alumnos para observar si realmente hay consciencia del patrón y de la relación de orden respectivamente y, finalmente, también promueve que haya una comprensión e interiorización de la idea matemática implícita en la acción a través del planteamiento de preguntas.



Figura 2. Situaciones de manipulación en las que emergen matemáticas informales.

Fuente: Alsina (2015)

Conocimiento de los contenidos matemáticos (C-CM)

El profesorado de Educación Infantil debe tener un conocimiento de las matemáticas que puede movilizar un niño de esta etapa en los distintos niveles, asumiendo que debería conocerlas de una manera profunda y diferente a como debe saberlo un alumno. En otras palabras, el hecho de que un alumno de infantil haga una relación de orden, como se muestra en la segunda imagen de la Figura 2, no significa que el maestro sólo deba saber ordenar elementos o que en las ordenaciones siempre hay un mínimo, un máximo y una gradación, sino que es imprescindible que conozca las propiedades matemáticas de una relación de orden: antireflexiva, antisimétrica y transitiva (Alsina, 2006).

Tal como se ha indicado en la revisión de la literatura sobre la organización del conocimiento matemático en infantil, a partir de una síntesis de las aportaciones de diversos autores y organismos internacionales (e.g., Alsina, 2006, 2015; Castro y Castro, 2016; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Muñoz-Catalán y Carrillo, 2018; NCTM, 2003), Alsina (2020a) señala cinco categorías de contenidos matemáticos propios de la etapa de Educación Infantil: Números y operaciones, Álgebra Temprana, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad, y describe el conocimiento matemático que el profesorado de infantil debería conocer acerca de estos contenidos. Adicionalmente,

incluimos también dentro del C-CM el conocimiento de relaciones entre temas matemáticos ubicados en el mismo bloque de contenidos, así como relaciones entre temas pertenecientes a diferentes bloques de contenidos.

En el siguiente episodio, tomado de Alsina y Delgado (2021), se transcribe una situación de medición de la temperatura del agua de dos vasos (uno con agua de nevera y otro con agua de lluvia), en la que la maestra (Sara) hace uso de este conocimiento:

Sara: ¿Ya mediste alguno?

E2: Si

Sara: muy bien, me dices entonces lo que registrasteis

E2: Si profe, el de la nevera 1 y 0, el de la lluvia un 2

Sara: ¿Sí?, ¿estáis seguros?

E3: Si 1 y 0 es 10 el frío, y el 2 templado

Sara: 10 ¿es más o menos que 2?

E3: Mássssssssss

Sara: ¿Y entonces?, ¿cómo es [templado] un número más pequeño?

Este episodio continúa cuando el grupo que decide repetir la medición, obtiene como resultado 20 grados y concluye que el registro anterior era errado pues el 20 es más grande que el 10. Cuando Sara nota que los alumnos no han registrado correctamente la temperatura del agua de lluvia, los conduce hacia la comparación numérica para darle otro sentido a la situación, de este modo la maestra promueve la construcción de conocimiento matemático respecto a la relación “mayor que” y “menor que”. El conocimiento de Sara sobre la comparación como un contenido matemático en Educación Infantil forma parte del C-CM.

Conocimiento de los procesos matemáticos (C-PM)

Como ha puesto de manifiesto la revisión de la literatura acerca del conocimiento matemático infantil, junto con el conocimiento de los contenidos existe un conocimiento de los procesos matemáticos (habilidades o dimensiones) que ponen de relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos. Algunos de estos procesos matemáticos son resolver problemas, modelizar, razonar, argumentar, comunicar, y representar. En esta línea, el conocimiento del profesorado de infantil acerca de qué cuenta como un problema en este nivel; qué estrategias y heurísticas se pueden utilizar para resolver un problema; cómo, porqué y para qué se argumenta en EI; o cómo se utilizan los símbolos y el lenguaje para comunicar ideas matemáticas son elementos que forman parte del subdominio de C-PM.

A modo de ejemplo, presentamos una situación tomada de Cornejo-Morales et al. (2021) en la cual se transcribe un episodio en el que una maestra de EI (P) trata de introducir el número 0, y se pone de manifiesto su conocimiento acerca de la argumentación en el aula de matemáticas de EI. Además de P, en dicho episodio intervienen, principalmente, dos alumnas (E1 y E2):

P: ¿Dónde está el cero aquí en la sala? (se acerca a la cinta)

E1: En los números.

E2: Ahí (indica con el índice la cinta)

P: ¿Aquí? (indica la cinta)

E2: Sí.

P: Muy bien E2.

P: El cero, en su cuadrito, ¿tiene algo? (se refiere al cuadro bajo el número)

Es: (no hay respuesta)

E1: Sí.

Es: Sí.

No. (variadas respuestas)

P: El número cero, ¿tiene algo en los cuadritos?

¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas?

Es: No (a coro)
P: ¿Y el número 1? ¿en los cuadritos tiene algo?
Es: Sí (a coro)
P: ¿Qué tiene?
E1: Un círculo.
P: Un círculo, ¿y el cero tiene algo?
Es: No (a coro)
E1: Nada.
P: Nada, ¿por qué tendrá nada?
E1: Porque se cuenta a partir del uno.
P: El cero, ¿qué representaría?
Es: (no hay respuesta)
P: Nada, porque no hay nada. Ahora vamos a ver un vídeo...

Partiendo del modelo de la Situación Argumentativa (SA), que considera cinco elementos: 1) argumento (¿qué se argumenta? y ¿por qué?); 2) interacción (¿quiénes argumentan?); 3) función (¿para qué se argumenta?); 4) carácter (¿cómo se argumenta?); y 5) matemática (¿sobre qué se argumenta?), los autores del estudio ponen de manifiesto que, para hacer emerger conocimientos acerca del conteo, el antecesor de un número o de la relación número-cantidad, la maestra moviliza diversos conocimientos acerca de la argumentación en matemáticas en EI que se ilustran en la Figura 3:

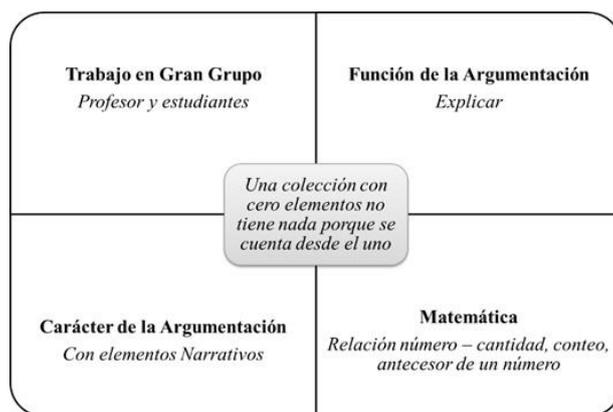


Figura 3. Componentes de la SA. Fuente: Cornejo-Morales et al. (2021)

De forma muy sintética, en el centro de la figura se muestra el argumento y en los cuatro cuadrantes los conocimientos de la maestra alrededor de la argumentación, especialmente la función y el carácter.

1.1. El Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil

Todos los modelos de conocimiento del profesorado de matemáticas describen, de una forma u otra, el conjunto de conocimientos psicopedagógicos y didácticos sobre cómo se aprenden y cómo se enseñan las matemáticas (Ball et al., 2008; Carrillo et al.; 2018; Godino et al., 2017; Rowland et al., 2005). En nuestro caso, especificamos estos conocimientos para el caso concreto de EI, ya que existen rasgos distintivos de la enseñanza y el aprendizaje en esta etapa. Desde este prisma, se consideran tres subtipos de conocimientos que abordan cuestiones que deberían formar parte del profesorado de infantil para enseñar matemáticas respondiendo a cómo se adquiere el conocimiento matemático en infantil y cómo se enseña.

Conocimiento sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la infancia (C-FAM)

Tal como indican los antecedentes descritos en las secciones anteriores, los niños de EI empiezan a desarrollar su pensamiento matemático a partir de la visualización de las ideas matemáticas de manera concreta, las situaciones reales y el uso de manipulativos, principalmente. En la Figura 4, por ejemplo, vemos como mediante la manipulación de objetos, los niños de la Escuela Infantil empiezan a clasificar elementos por un criterio de color o bien comparan la altura de diversos montones de cápsulas de café:



Figura 4. Aprendizaje a través de la manipulación de objetos. Fuente: Alsina (2015)

Luego, diversos autores señalan que los niños son capaces de empezar a representar mentalmente el conocimiento y avanzar hacia la esquematización y formalización, usando otros recursos que promueven este desarrollo. En la Figura 5, por ejemplo, se observa cómo unos niños de infantil han interiorizado un patrón y programan un robot para que lo ejecute y pare en cada una de las flores:



Figura 5. Ejecución de un patrón representando mentalmente a través de un robot. Fuente: Alsina y Acosta (2018)

El conocimiento de esta forma general de aprendizaje matemático en la infancia y otras formas en que los niños menores de 6 años se enfrentan al aprendizaje de contenidos matemáticos particulares se incluyen en el C-FAM.

Conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA)

Este subtipo de conocimiento aglutina dos características esenciales de las prácticas de enseñanza: por un lado, los conocimientos sobre el diseño de itinerarios o secuencias de enseñanza a través de diversos recursos para promover el desarrollo del pensamiento matemático en EI y, por otro, qué acciones lleva a cabo el profesorado en el aula para fomentar dicho desarrollo, lo cual tiene que ver con la planificación y gestión respectivamente.

Respecto a la planificación de itinerarios de enseñanza, se consideran los niveles del EIEM y los recursos didácticos y las estrategias docentes incluidos en cada nivel (Figura 6):

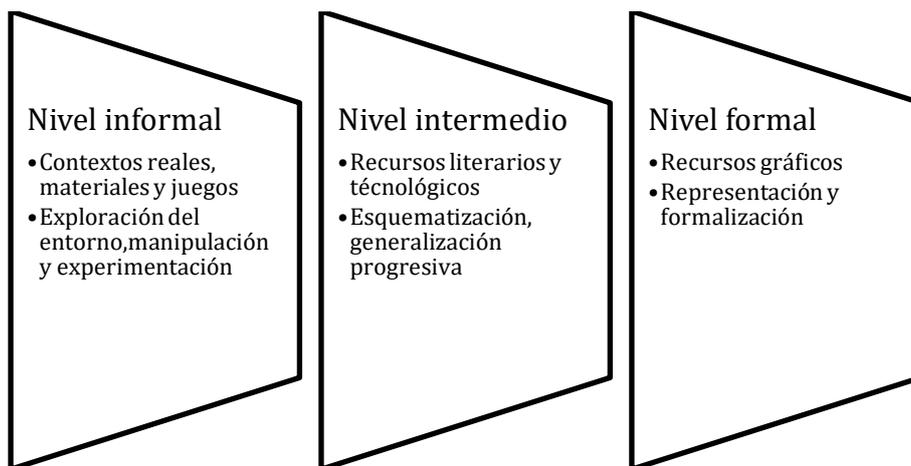


Figura 6. Niveles del EIEM. Fuente: Alsina (2018; 2019b)

Para la gestión, se considera la enseñanza de las matemáticas a través de los procesos, es decir, una enseñanza basada en prácticas productivas (Alsina, 2020d): pensar, argumentar, comunicar, conectar y representar. En la Figura 7 se muestran algunas orientaciones clave en este sentido:

Resolución de problemas	Razonamiento y prueba/ Argumentación	Comunicación	Conexiones	Representación
¿Qué situación problemática/reto voy a plantear a los alumnos? ¿Cuál es la incógnita/cuáles son los datos? ¿Conoces algún problema vinculado con éste? ¿Qué pasos vas a seguir? .../...	¿Qué buenas preguntas voy a plantear para que los alumnos argumenten sus ideas matemáticas y sus acciones?	¿Cómo voy a fomentar la interacción? (en parejas, en pequeño grupo, etc.) ¿Qué vocabulario específico deben aprender?	¿Con qué bloques de contenidos matemáticos se puede relacionar la actividad? ¿Desde qué disciplina voy a plantear el reto?	¿Qué tipo de representación deben hacer? Verbal, gráfica, simbólica ...

Figura 7. Acciones del profesorado para promover una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. Fuente: Alsina (2020d)

Conocimiento sobre las orientaciones curriculares (C-OCU)

Los conocimientos acerca del currículo, tanto en lo que respecta a las bases psicopedagógicas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, la organización de la EI por áreas en lugar de asignaturas y la evaluación (inicial y formativa, principalmente) como elemento indisociable del proceso de enseñanza-aprendizaje, hacen parte del C-OCU.

Desde esta perspectiva, la principal diferencia respecto a las otras etapas radica en el hecho de que en el currículo de EI las matemáticas no tienen una sección específica, sino que forman parte de áreas más globales como el conocimiento de sí mismo y autonomía, del entorno o bien el lenguaje como herramienta de comunicación y representación. En este sentido, el profesorado debe conocer las matemáticas que forman parte de cada una de estas áreas. En el caso español, por ejemplo, (Alsina, 2013) ha realizado un análisis en esta dirección. A modo de ejemplo, en la Figura 8 se muestra la relación de contenidos del currículo español vigente referentes a los Números y Operaciones.

- | | | |
|--|---|--|
| <i>Área 1. Conocimiento de sí mismo y autonomía personal</i> | - | Exploración y reconocimiento del propio cuerpo. Identificación, valoración y aceptación progresiva de las características propias. |
| <i>Área 2. Conocimiento del entorno</i> | - | Cuantificación no numérica de colecciones (muchos, pocos). Comparación cuantitativa entre colecciones de objetos. Relaciones de igualdad y de desigualdad (igual que, más que, menos que). |
| | - | Estimación cuantitativa exacta de colecciones y uso de números cardinales referidos a cantidades manejables. |
| | - | Utilización oral de la serie numérica para contar. |
| | - | Observación y toma de conciencia del valor funcional de los números y de su utilidad en la vida cotidiana. |
| <i>Área 3. Lenguajes: comunicación y representación</i> | - | Diferenciación entre las formas escritas y otras formas de expresión gráfica. |
| | - | Iniciación en el uso de la escritura para cumplir finalidades reales. Interés y disposición para comunicarse por escrito y por el uso de algunas convenciones del sistema de la lengua escrita como linealidad, orientación y organización del espacio, y gusto por producir mensajes con trazos cada vez más precisos y legibles. |

Figura 8. Contenidos de Números y Operaciones para el 2º ciclo de Educación Infantil.
Fuente: Orden ECI/3960/2007

De forma sintética, se observa una visión del aprendizaje de los contenidos de numeración que tiene en cuenta las necesidades de los niños de las primeras edades para aprender: observar los números del entorno y comprender su utilidad; realizar acciones con cantidades para favorecer su comprensión e interiorización; etc. En el documento también se hace hincapié en la representación de las cantidades, aunque se obvian algunas fases imprescindibles. Además, se omiten las operaciones aritméticas elementales de suma y resta.

En síntesis, pues, el C-OCU considera el conocimiento de los estándares de contenidos matemáticos que deberían aprender los niños desde las distintas áreas que propone el currículo desde una perspectiva crítica, teniendo en cuenta lo propuesto por otros autores y organismos nacionales e internacionales.

CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se han descrito los principales conocimientos para enseñar Matemáticas en Educación Infantil. La identificación de estos conocimientos surge como respuesta a

la necesidad de disponer de una herramienta funcional que contribuya al desarrollo profesional del profesorado permitiendo investigar la práctica y, a su vez, mejorarla.

Por un lado, los estudios sobre las características de la enseñanza de las matemáticas en infantil han mostrado el escenario específico de esta etapa escolar a partir de las dimensiones planteadas por Alsina (2020a): las finalidades de la enseñanza, haciendo especial hincapié en el papel de las matemáticas intuitivas e informales en la primera infancia como eslabón imprescindible para el acceso a las matemáticas más formales; las prácticas de enseñanza en el contexto del EIEM; y, finalmente, la organización de la enseñanza de los contenidos de Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad.

Por otro lado, a partir de las escasas investigaciones sobre el conocimiento del profesorado de infantil para enseñar matemáticas que se han realizado haciendo uso modelos de conocimiento, se ha evidenciado que el conocimiento del contenido matemático y los conocimientos sobre cómo enseñar matemáticas en este nivel y la forma en que aprenden los niños se presentan como aspectos relevantes del conocimiento del profesorado de infantil.

Con base en estos datos, se han descrito los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas de forma eficaz en EI, organizados en dos grandes tipos: 1) Conocimiento Matemático en Educación Infantil (CM-EI); y 2) Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil (CDM-EI). El CM-EI, como se ha indicado, se refiere al conocimiento de las matemáticas específico y estructurado que necesita el profesorado de infantil para promover el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas de los niños, e incluye tres subtipos: Conocimientos matemáticos intuitivos e informales (C-IeI); Conocimiento de los contenidos matemáticos (C-CM) y Conocimiento de los procesos matemáticos (C-PM). Por su parte, el CDM-EI contiene los conocimientos psicopedagógicos y didácticos sobre cómo aprenden los niños y cómo se enseñan las matemáticas en infantil, y considera tres subtipos: Conocimiento sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la infancia (C-FAM); Conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA); y Conocimiento sobre las orientaciones curriculares (C-OCU).

Aunque se han presentado los conocimientos organizados en tipos y subtipos, estos elementos no están aislados, por lo cual el conocimiento que requiere el profesorado de infantil para enseñar matemáticas es un conocimiento con un carácter dinámico cuyos componentes se nutren entre sí. Además, este conocimiento se desarrolla tanto en contextos de formación como en la práctica de aula del profesorado. En línea con lo anterior, conocer los distintos tipos de conocimientos puede ser una herramienta instruccional que oriente al profesorado de EI acerca del conjunto de conocimientos que deben poner en práctica para enseñar matemáticas a niños menores de 6 años y, adicionalmente, puede ser una herramienta de análisis al servicio de la investigación en Educación Matemática Infantil. De este modo, en el futuro será necesario realizar nuevas investigaciones que permitan validar empíricamente estos tipos de conocimientos descritos, mejorar y/o refinar su descripción, utilizarlo en contextos de formación inicial y continua del profesorado y promover su difusión en el profesorado y futuro profesorado de esta etapa educativa. En esta línea, proponemos una formación en la cual el profesorado de infantil conozca diferentes formas de actuar y disponga de criterios para el diseño y la implementación de actividades y tareas de enseñanza, esto es, saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente de ser utilizado para la enseñanza de las matemáticas. Desde esta postura, el profesorado es el responsable de tomar decisiones acertadas durante la práctica docente, por ejemplo, cuándo es necesario introducir un conocimiento

matemático y cuándo es imprescindible que el alumnado indague y construya su conocimiento, antes de que este sea expuesto por el profesor (Korthagen, 2001).

REFERENCIAS

- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. (2013). Early Childhood Mathematics Education: Research, Curriculum, and Educational Practice. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 100-153.
- Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien*. Narcea, S.A. de Ediciones.
- Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros*, 376, 13-20.
- Alsina, Á. (2019a). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 85-108.
- Alsina, Á. (2019b). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Editorial Graó.
- Alsina, Á. (2020a). Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 9(2), 1-20.
- Alsina, Á. (2020b). La Matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: crónica de una ausencia anunciada. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 23(2), 373-387.
- Alsina, Á. (2020c). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, 3(2), 127-159.
- Alsina, Á. (2020d). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar*, 28, 1-13.
- Alsina, Á. y Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional. Una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 52, 218-235.
- Alsina, Á. y Delgado, R. (2021). Identificando los conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil: un primer paso para el desarrollo profesional. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 6(2), 1-23.
- Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Baroody, A.J. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Teachers College Press.
- Baroody, A. J. (2000). *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Visor.
- Benz, C., Steinweg, A.S., Gasteiger, H., Schöner, P., Vollmuth, H., y Zöllner, J. (2018).

- Mathematics Education in the Early Years: Results from the POEM3 Conference*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-78220-1>
- Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años)*. Graó.
- Carlsen, M., Erfjord, M., y Hundeland, P.S. (Eds.) (2020). *Mathematics Education in the Early Years. Results from the POEM4 Conference, 2018*. Springer. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01146-w>
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán; M^a.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Castro, E. y Castro, E. (Eds.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Pirámide.
- Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority mathematics education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 19–59). Routledge.
- Clements, H.D. y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC.
- Cornejo-Morales, C., Goizueta, M., y Alsina, Á. (2021). La Situación Argumentativa: un modelo para analizar la argumentación en educación matemática infantil. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 15(3), 159-185.
- Edo, M. (2016). Emergencia de la Investigación en Educación Matemática Infantil. Juego y Matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 53-66). SEIEM.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Holland Reidel Pub.
- Freudenthal, H. (1991). *Revising mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Gasteiger, H., Bruns, J., Benz, C., Brunner, E., y Sprenger, P. (2020). Mathematical pedagogical content knowledge of early childhood teachers: a standardized situation-related measurement approach. *ZDM*, 52, 193-205. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01103-2>
- Gasteiger, H. y Benz, C. (2018). Enhancing and analyzing kindergarten teachers' professional knowledge for early mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 51, 109-117.
- Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Pearson.
- Ginsburg, H. P., y Baroody, A. J. (2007). *Tema-3: Test de Competencia Matemática Básica*. TEA Ediciones.
- Ginsburg, H. P., Klein, A., y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. En I. E. Siegel & K. A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 4. Children Psychology in practice. 5th edition* (pp. 401-476). Wiley.

- Godino, J.D. y Burgos, M. (2020). Interweaving transmission and inquiry in mathematics and sciences instruction. En K. O. Villalba-Condori, A. Adúriz-Bravo, J. Lavonen, L.-H. Wong y T.-H. Wang (Eds.), *CISETC 2019, CCIS 1191* (pp. 6–21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-45344-2_2
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Hundeland, P.S., Erfjord, I., y Carlsen, M. (2017). A kindergarten teacher’s revealed knowledge in orchestration of mathematical activities. En T. Dooley, y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the CERME 10*, (pp. 1853 – 1860). DCU Institute of Education and ERME.
- Kortenkamp, U., Brandt, B., Benz, C., Krummheuer, G., Ladel, S., y Vogel, R. (2014). *Early Mathematics Learning: Selected Papers of the POEM 2012 Conference*. Springer.
- Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers’ pedagogical content knowledge of mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 42, 27-41. <https://doi.org/10.1007/s13158-010-0003-9>
- McCray, J. y Chen, J.Q. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, 26, 291-307. <https://doi.org/10.1080/02568543.2012.685123>
- Meaney, T., Helenius, O., Johansson, M.L., Lange, T. y Wernberg, A. (2016). *Mathematics Education in the Early Years: Results from the POEM2 Conference*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4>
- Mialaret, G. (1984). *Las Matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Visor.
- Mosvold, R., Bjuland, R., Fauskanger, J., y Jakobsen A. (2011). Similar but different - investigating the use of MKT in a Norwegian kindergarten setting. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the CERME 7*, (pp. 1802–1811). University of Rzeszów.
- Muñoz-Catalán, C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A. y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 63–84). Ediciones Universidad Salamanca.
- Muñoz-Catalán, M. C., Liñan-García, M., y Ribeiro, M. (2017). Conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, 24(esp.), 4-19. <http://dx.doi.org/10.18764/2178-2229.v24nespecialp4-19>
- Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (Eds.) (2018). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 173-211). Editorial Paraninfo.
- National Association for the Education of Young Children and National Council for Teachers of Mathematics [NAEYC y NCTM] (2002). *Early childhood mathematics: Promoting good beginnings. A joint position statement*.

<http://www.naeyc.org/files/naeyc/file/positions/psmath.pdf>.

- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. National Council of Teachers of Mathematics (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).
- Oppermann, E., Anders, Y., y Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, 58, 174-184. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.05.004>
- Reeuwijk, M.V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 12, 9-16.
- Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255–281. <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- The Australian Association of Mathematics Teachers Inc. & Early Childhood Australia (2006). *Position paper on early childhood mathematics*. AAMT & ECA.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Ángel Alsina
Universidad de Girona, España
angel.alsina@udg.edu

Rosa Delgado-Rebolledo
Universidad de Concepción, Chile
rosadelgado@udec.cl