Galindo Rivera, O. A. y Falk de Losada, M. (2022). Sobre los modos de pensamiento vectorial vía resolución de problemas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 6(1), 1-18

ISSN: 2603-9982

SOBRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO VECTORIAL VIA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Oscar Andrés Galindo Rivera, Universidad Antonio Nariño, Colombia.

Mary Falk de Losada, Universidad Antonio Nariño, Colombia.

Resumen

El propósito del presente artículo es el de mostrar a grandes rasgos lo fundamentado en la tesis doctoral del autor principal sobre los avances en la caracterización del Pensamiento Vectorial a través de la resolución de problemas en los estudiantes de ingenierías de la Universidad Antonio Nariño. En las actividades realizadas para tal fin se propuso un conjunto de problemas retadores y no rutinarios, donde salen a la luz cinco modos de pensamiento que caracterizan el Pensamiento Vectorial involucrado en los estudiantes y que se encuentran plasmados en la rúbrica para la caracterización del mismo que hace parte de los resultados de la investigación. Como contraste del aporte teórico de la tesis doctoral, y como elemento innovador del artículo, se muestra una generalización del enfoque basado en la teoría DNR propuesta por Harel (2021), donde se discuten sus llamados atajos inhibidores y catalizadores en relación a algunos conceptos propios de la asignatura.

Palabras clave*: Pensamiento Vectorial, Cálculo Vectorial, Atajos inhibidores y catalizadores.*

On ways of vectorial thinking through problem solving

Abstract

The purpose of this article is to show broadly what is based on the main author's doctoral thesis on the advances in the characterization of Vectorial Thinking through problem solving in engineering students at the Antonio Nariño University. In the activities carried out for this purpose, a set of challenging and non-routine problems was proposed, where five modes of thought that characterize vectorial thinking involved in the students came to light and are reflected in the rubric for its characterization included among the results of the investigation. As a contrast to the theoretical contribution of the doctoral thesis, and as an innovative element of the article, a generalization of the approach based on the DNR theory proposed by Harel (2021) is shown, where its so-called inhibitory and catalyst shortcuts are discussed in relation to some concepts of the course.

Keywords: *Vector Thinking, Vector Calculus. Inhibitory and catalysts shortcuts.*

Recibido: 02/08/2022; Aceptado: 10/04/2023

INTRODUCCION

El Cálculo Vectorial es una rama de las matemáticas que estudia las funciones en varias variables y funciones vectoriales en dos o más dimensiones. Tales funciones aparecen en el dominio de muchas ciencias aplicadas, pues es bien sabido que algunos fenómenos de naturaleza específica de tales ciencias dependen de más de una variable, y las herramientas del cálculo en una variable no son suficientes para realizar el estudio completo del fenómeno que se analiza.

El Cálculo Vectorial tiene sus orígenes durante finales del siglo XVIII y su desarrollo está relacionado con los cuatérnios de Hamilton y con la teoría del potencial (Tait, 1873). Estudios tan importantes en física como la termodinámica, la hidrodinámica, la mecánica de los fluidos desarrollada por Navier y Stokes, y las investigaciones sobre la luz, la electricidad y el magnetismo debidas a Maxwell, ejemplifican en sus teorías el desarrollo de esta rama del cálculo. Con Gibbs se da la notación actual del Cálculo Vectorial al elaborar una versión exclusivamente vectorial con su propio lenguaje, independientemente de los cuatérnios y se establece el Cálculo Vectorial como una disciplina autónoma (Marsden y Tromba, 1991).

Históricamente el Cálculo Vectorial y el Álgebra Lineal tuvieron un desarrollo conjunto también con la teoría electromagnética. Estas teorías se debieron al trabajo de grandes matemáticos y físicos que aportaron sus ideas y al estudio de la problemática de la dirección de cantidades, que tiene sus raíces en la dicotomía entre magnitud y número, presente en Euclides y estudiada después por Descartes con su primera representación de cantidades negativas (Kline, 1990).

Estas ideas planteadas anteriormente constituyen una antesala del concepto de vector, que tuvo su principio en la línea matemática sobre las representaciones de números complejos hecha por Wallis, Wessel, Gauss y Argand, entre otros (Kline, 1990).

En la línea física se destacan los trabajos de Galileo, Newton y Fourier, para mencionar algunos. En estos trabajos se trata de cambiar el esquema aristotélico de la física e iniciar su estudio implementando el método científico, que redundó en algunos métodos vectoriales tales como la descomposición de las fuerzas en componentes con sistemas mecánicos (paralelogramo de fuerzas), en la descripción de la velocidad y aceleración. Además, se favorece el concepto de espacio vectorial y los espacios generados en ellos. Estas ideas dan pie a fomentar un camino hacia el desarrollo del Pensamiento Vectorial (Kline, 1990).

Más recientemente, en el ámbito de la inteligencia artificial (IA), los procesos de Support Vector Machines sobresalen en esta teoría al tener en su base la optimización tomada de métodos del Cálculo Vectorial, donde a su vez el método del descenso por el gradiente aparece como una herramienta para lograr soluciones de manera rápida. Otros procesos en ingeniería biomédica, diseño gráfico, animación, entre otros, hacen resaltar la importancia de esta disciplina como fundamental para el abordaje de resolución de problemas (Stewart, 2018).

Esta descripción inicial pretende evaluar la pertinencia y el impacto de una propuesta teórico-metodológica para el desarrollo del Pensamiento Vectorial (PV) en el curso de Cálculo Vectorial, basado en la resolución de problemas, en los estudiantes de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño y la caracterización del Pensamiento Vectorial que efectivamente desarrollan los estudiantes en el proceso.

JUSTIFICACION

En la enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial, al ser una asignatura que se cursa posteriormente a la del cálculo en una variable, se presentan a los estudiantes una gran variedad de nuevos conceptos y de entidades matemáticas abstractas, entre ellas, los conceptos de campo escalar, campo vectorial, divergencia y rotacional. Además, aparecen los intrincados teoremas de Green, Gauss y Stokes, que relacionan conceptos tan importantes como las integrales de línea e integrales de superficie con integrales dobles y triples, tan útiles en los estudios de física, por ejemplo, en electricidad y magnetismo.

En la experiencia del investigador, estos nuevos conceptos presentan dificultades en su comprensión para los estudiantes. Estas dificultades están dadas por el nivel de abstracción de los mismos, las nuevas técnicas de cálculo que se adquieren en la asignatura y el conjunto de asignaturas previas que deben manejar, como son Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una variable, Geometría Analítica y un limitado razonamiento espacial.

En el ICME 14 se hace referencia a algunas investigaciones sobre la enseñanza – aprendizaje del cálculo, por ejemplo, las que se dieron en el grupo temático de estudio TSG13. Estas investigaciones tienden a concluir que la mayor dificultad de los estudiantes en ese proceso se refleja en la escasa visualización de los fenómenos que conllevan a su modelación y su posterior puesta en la práctica. Los resultados mostrados en el ICME 14 en parte están dados por la falta de comprensión del objeto que se le presenta al estudiante y cómo el docente se lo presenta. Cabe resaltar que las investigaciones sobre enseñanza – aprendizaje del Cálculo Vectorial son muy escasas y la mayoría se refieren a su interacción con el Álgebra Lineal.

Por otra parte, el investigador aduce que algunos estudiantes en su proceso de aprendizaje de los temas del curso de Cálculo Vectorial han visto reflejados cierta clase de comportamientos de estos nuevos conceptos, que se familiarizan con lo que acontece en los vectores o en el Álgebra Lineal en general. Esto revela un intrincado proceso de pensamiento presente en los estudiantes que motivó esta investigación y que permitió estudiar este proceso desde múltiples puntos de vista.

Como resultado de la aplicación de una secuencia de actividades compuestas por problemas cuidadosamente diseñados se logró caracterizar un tipo de pensamiento capaz de involucrar y magnificar la enseñanza - aprendizaje de los temas anteriormente señalados (Pensamiento Vectorial o PV que se entenderá como el *sistema de procesos cognitivos asociados con representaciones y operaciones vectoriales de objetos matemáticos de diversa índole*), que junto a una metodología coherente y una pertinente práctica pedagógica pudo llevar al estudiante de ingeniería a una aplicación exitosa de estos conceptos de la asignatura en la resolución de problemas.

METODOLOGÍA

En la investigación se elaboró una metodología sustentada en un modelo didáctico, Hernández et al. (2014), donde se imbrique la visualización, la manipulación geométrica, la heurística y el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) como herramientas didácticas, para la resolución de problemas retadores; dirigido a fortalecer el proceso de enseñanza - aprendizaje de la construcción robusta de los conceptos propios del curso de Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal en los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño.

Población y muestra

La investigación se desarrolló con estudiantes de carreras de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño, lo cual constituye la población. La muestra estuvo constituida por 35 estudiantes del curso de Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal, correspondiente a la asignación de los cursos ofrecidos en el semestre al profesor.

Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En el desarrollo de la investigación se utilizaron los siguientes métodos teóricos:

- Histórico-lógico: se empleó con el fin de valorar la evolución y el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería.
- Análisis-síntesis: presente en la investigación para el proceso de diagnóstico, análisis del estado del arte y en los fundamentos teóricos, del proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería, propiciando interpretar y sintetizar los resultados, así como la elaboración de las conclusiones y recomendaciones.
- La observación participante: se utilizó en la observación de clases, para obtener información sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería.
- Encuesta: Se aplicó una encuesta de satisfacción a los estudiantes una vez concluida la aplicación del sistema de actividades.

Fases de la investigación

Para el logro de resultados satisfactorios en el proceso investigativo se definieron las siguientes fases:

Fase 1. Preparatoria. Diseño de instrumentos: observación participante, encuesta a estudiantes y docentes, pretest. Aplicación de instrumentos. Recogida de datos arrojados por instrumentos. Triangulación de instrumentos para concretar el problema de investigación y el objetivo general. Se establece además la metodología de investigación a seguir.

Fase 2. Revisión de la literatura. Determinación el estado del arte sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería, para precisar las carencias presentes en las investigaciones, las cuales fueron bases para identificar el aporte teórico y determinar la unicidad del problema.

Fase 3. Construcción del marco teórico. El marco teórico estuvo dado por el pensamiento matemático basado en la visualización, el modelo DNR, la teoría de la resolución de problemas y problemas retadores, referentes sobre la modelación matemática y el contenido matemático sobre el Cálculo Vectorial. El marco teórico propició perfilar las categorías para la construcción del modelo didáctico.

Fase 4. Diseño de aportes teóricos y prácticos. En esta fase se elaboró un modelo didáctico y el sistema de actividades. Los problemas retadores planteados en estas actividades fueron enfocados para sacar a la luz los modos de Pensamiento Vectorial y estudiar sus características.

Fase 5. Trabajo de campo. Esta fase se dirigió a la aplicación del sistema de actividades por lo menos dos veces a través de un estudio piloto, lo cual perfeccionó las actividades y mejoró el modelo didáctico.

Fase 6. Recogida, análisis de la información resultante y evaluación. Recogida y procesamiento de la información, aplicación de encuesta de satisfacción, triangulación de resultados, elaboración de informes y publicación o socialización de resultados.

MARCO TEORICO

Sobre el pensamiento matemático y visualización

En la literatura pertinente el pensamiento matemático como tema de estudio se divide fundamentalmente en dos partes, que son el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). A continuación, se esboza sus similitudes y diferencias, haciendo énfasis en el PMA.

El PMA es aquel que involucra el uso de estructuras cognitivas producidas por un gran crisol de actividades matemáticas que permiten al individuo construir nuevas ideas que se continúan creando y extendiendo hasta su formalización. El PME será entonces aquel pensamiento intuitivo que se puede identificar algorítmicamente o con un proceso de reflexión en el trabajo matemático involucrado.

Para Tall (1990), el máximo representante de esta escuela, el paso del PME al PMA ocurre cuando se trasciende de describir a definir, se pasa de convencer a demostrar de forma lógica basada en esas definiciones, se progresa en la coherencia de las matemáticas elementales a la consecuencia de las matemáticas avanzadas basadas en entidades abstractas que el individuo debe construir a través de definiciones formales y donde se requiere una reconstrucción cognitiva.

Tall (2013) afirma que el pensamiento matemático comienza con los objetos físicos y las operaciones sobre los objetos. Por otra parte, plantea que los orígenes del pensamiento matemático están dados en “cómo la mente a través de conceptos materializados en objetos da origen a las matemáticas”. El pensamiento matemático comienza en la percepción, con el apoyo de la acción sensorio - motora y se desarrolla a través del lenguaje y del simbolismo.

Para Dreyfus (1991) el PMA consiste en una gran variedad de procesos de componentes interactivos, tales como representar, analizar, clasificar, verificar, manipular, traducir, modelar, visualizar, generalizar, conjeturar, inducir, sintetizar, abstraer y formalizar. Los procesos de representar y abstraer son los que más promueven avances en la comprensión y el manejo de situaciones matemáticas complejas. Afirma que la abstracción no es exclusiva del PMA. Se considera que una parte vital del PMA que aplica a esta investigación es la dada por este enfoque.

Como parte de los procesos de componentes interactivos está la visualización, la cual es fundamental para el desarrollo del PMA, en particular el Pensamiento Vectorial. Según Presmeg (2006) cuando una persona crea un arreglo espacial (que ha de entenderse como una serie de imágenes mentales superpuestas a partir de los datos de un problema), existe una guía creativa y visual de tal arreglo que permite procesar, construir y moldear la naturaleza del concepto espacial que está inmerso en el trabajo matemático. Este criterio muestra la forma recíproca de la toma del objeto matemático, de visualizarlo y transformarlo, criterios que son necesarios en el proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial.

Para Arcavi (2003) la visualización permite, además de las anteriores propuestas esbozadas, utilizar herramientas manuales o tecnológicas para alcanzar el propósito de una representación robusta y desarrollar las maneras de comunicación que se deducen de lo hecho en este proceso, lo cual es clave como fin del lenguaje matemático; el de poder expresar los resultados obtenidos de una manera clara y replicable que haga comprender y fortalecer el concepto tratado.

Los rasgos de estas definiciones son muy similares; en ellas se evidencian las operaciones de las imágenes mentales y visuales que se realizan mediante los procesos señalados y justifican plenamente el objetivo de esta investigación.

Una de las estrategias para desarrollar el PMA en el aula en el trabajo propuesto es enfatizar este cambio mental mediante el uso de las TIC, que a través de un software dinámico se permita el estudio de los conceptos propios de la asignatura y asumirlos en su parte geométrica y sus interpretaciones (modo vecto - dinámico)

Sobre la base del PMA en el Cálculo Vectorial algunas ideas que se tuvieron en la investigación fueron encaminadas a ampliar la valoración de la visualización más allá de sus aspectos semióticos y el avance de la caracterización de un Pensamiento Vectorial que permita entender los procesos cognitivos de los estudiantes para la construcción de significado de conceptos.

Es de destacar que el Pensamiento Matemático Elemental y el Pensamiento Matemático Avanzado son bases para el desarrollo del Pensamiento Vectorial.

Fundamentos del modelo DNR de Harel

Este componente se concibe desde la fundamentación teórica realizada por Harel (2008, a, b) en su trabajo del modelo DNR. En este trabajo, Harel (2008, a) plantea como propósito principal de la educación matemática el desarrollar el razonamiento matemático del estudiante, razonamiento que se compone de formas de entender y formas de pensar. El DNR basa su fundamentación en tres componentes: La Dualidad (D), la Necesidad (N) y el Razonamiento Repetido (R).

Tal escuela de pensamiento surge de dar sentido a las respuestas de cuál es la matemática que se debe enseñar en las escuelas y de cómo se debería enseñar, para lo cual existen como guía de desarrollo la enseñanza, la integridad de los contenidos (integridad matemática) y la necesidad intelectual que se crea en el estudiante.

Sobre la integridad matemática, hay que destacar que ella determinará las formas de entender y de pensar en el tiempo, pues ellas se transformarán y desarrollarán en el contexto de la práctica matemática, identificando, reconociendo y promoviendo estas formas en el pensamiento de los estudiantes, lo que redundará en la elaboración e implementación de currículos que estarán basados en la demostración matemática, que es uno de los principales objetivos de la educación matemática universitaria.

En cuanto a la necesidad intelectual del estudiante, será la forma como él entiende el cómo y el porqué de cierto conocimiento y el modo en el que acepta su existencia y quiere dominarlo. En esta interacción se evidencia la forma de entender del estudiante y la manera en la que nace la necesidad de realizar su descripción, junto a una justificación epistemológica que la validará y la hará avanzar a una forma de aprender.

Como estructura para el proceso de aprendizaje de las matemáticas, la Dualidad (D) hace referencia a la dupla conformada por las formas de entender (el significado e interpretación particular que una persona da a un concepto y sus relaciones. Una solución particular a un problema y la evidencia particular que una persona ofrece para establecer o refutar una afirmación matemática) y formas de pensar (que involucra tres categorías que se interrelacionan: creencias, enfoques de solución de problemas y esquemas de demostración).

La existencia de una Necesidad (N) intelectual es ese “algo” encargado de orientar y motivar a los estudiantes durante el proceso de aprendizaje como origen de la construcción de nuevos conocimientos y el desarrollo de formas de entender y de pensar matemáticamente.

El Razonamiento Repetido (R) facilita la interiorización y organización del conocimiento en cada estudiante. En la propuesta DNR, Harel sostiene que a partir de la necesidad intelectual (situación matematizable) y el actuar del estudiante se tienen que dar primero las formas de entender, para luego desarrollar las formas de pensar.

En su segundo trabajo, Harel (2008, b) amplia de manera considerable su teoría del DNR del proceso de aprendizaje al proceso de enseñanza, viéndolo como una unidad en sí para la educación matemática.

En este sentido, el autor propone que el docente, en su calidad de actor principal del proceso de enseñanza, tenga suficiente dominio y claridad de la integridad matemática, discutida anteriormente, y que responde a la situación de cuál es la matemática que se debe enseñar en las escuelas.

Se muestra cómo el docente en sus prácticas de enseñanza – aprendizaje deba tener su propio modelo DNR enmarcado en sus principios fundamentales y que le permita planear, preparar, ejecutar y evaluar cada una de sus clases, que lo conduzcan a desarrollar el pensamiento matemático en sus estudiantes, respondiendo a la situación de cómo se debe enseñar la matemática en la escuela.

El modelo DNR tiene su desarrollo actuando en tres categorías generales de la educación matemática: cuatro premisas, seis conceptos y sus afirmaciones. Las premisas matemáticas son el conjunto de saberes disciplinares, junto a sus formas de entender y sus formas de pensar.

Las premisas del aprendizaje serán las que tienen la relación conocimiento – saber, que es el resultado de la resolución de problemas asociados a una situación específica y que además tiene el proceso de transferencia de las formas de entender a las formas de pensar, que son independientes, pero se garantiza tal transferencia.

Las premisas de enseñanza son las que orientan el aprendizaje, pues no todos los conocimientos matemáticos se adquieren espontáneamente, sino que hace falta un instructor para tal fin.

Las premisas ontológicas son las que se ven influenciadas por algún punto de vista personal o alguna creencia propia de las matemáticas que hacen tener una necesidad intelectual, permitiendo hacer las orientaciones e interpretaciones intrínsecas entre docente y estudiante.

Los conceptos que propone Harel (2008) son sobre los que se basa fundamentalmente su modelo DNR y que son los puntos de interrelación del proceso de enseñanza – aprendizaje que llevan al docente a tener las herramientas para realizar el seguimiento respectivo del aprendizaje de sus estudiantes.

El concepto de las acciones mentales son las respuestas a una causa, incitada por una necesidad intelectual que deriva en la representación del concepto de formas de entender, que generan un conjunto de características de cognición que dan pie al concepto de formas de pensar, relacionadas a la acción mental que se ha hecho.

El concepto del aprendizaje el autor lo define como "… el proceso continuo de desequilibrio, en las fases de equilibrio, manifestado en las necesidades intelectuales y psicológicas, y en las formas de entender o de pensar que se utilizan en la construcción de una nueva fase" (Harel, 2008).

El concepto de la base de conocimientos del docente es la fundamentación y el dominio de los conocimientos disciplinares que el docente conoce y domina y que promoverá en sus estudiantes el aprendizaje (detección y corrección de problemas de cognición, junto a la organización y conservación de conocimientos), más la fundamentación pedagógica necesaria para planificar y ejecutar la clase.

El concepto de la práctica docente está basado en los conceptos de las acciones del docente, y como característica especial, de las formas de enseñar. Se puede pensar como el principio de dualidad lo reflejado en los recursos que el docente lleva al aula, los cuales le permitan interactuar con los estudiantes en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Por último, la categoría de las afirmaciones corresponde al resultado de la implementación de los tres principios del modelo DNR. La interacción entre las formas de entender y las formas de pensar dan un contraste que resulta en dar una visión más amplia del pensamiento matemático y sugiere un cambio en las metodologías de enseñanza alternativas. Este tipo de pensamiento es clave para la implementación de las actividades programadas en el aula de esta investigación, pues resulta ser un excelente modelo que puede ser verificable en el tiempo.

En el presente artículo se realizará un contraste del enfoque de este modelo que se ha descrito con el del Pensamiento Vectorial, del cual se ampliará la visión de los modos de pensamiento de estos dos apartados para el Cálculo Vectorial.

LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DEL CÁLCULO MULTIVARIABLE DESDE LA PERSPECTIVA DEL DNR

En el artículo "The Learning and Teaching of Multivariable Calculus: A DNR Perspective" del autor Harel (2021) se expone los diferentes fenómenos del aprendizaje y la enseñanza del cálculo multivariable, basado en DNR. El objetivo de este artículo es abordar la pregunta "¿Cómo se tratan ciertos conceptos fundamentales de cálculo multivariable (MVC) en la instrucción actual y cómo se tratarían en la instrucción basada en DNR" (Harel, 2021, p.3). Estos conceptos se analizan mediante diferentes fenómenos presentados en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo multivariable en temas mencionados por el autor como linealización, derivada total, regla de la cadena, diferenciación implícita y producto cruz. Este estudio se basa en condiciones específicas buscando la necesidad de los estudiantes por aprender matemáticas mediante prácticas, organización y retención de los conocimientos aprendidos.

En la segunda sección del artículo, el autor analiza la relación enseñanza – aprendizaje del cálculo multivariable centrándose en los conceptos de linealización, derivada total, regla de la cadena, diferenciación implícita y producto cruz establecidos en ese orden. Este análisis es organizado por medio de los tres principios fundamentales de la tercera premisa "DNR" integrado con el método de enseñanza - aprendizaje tradicional. En el análisis por temáticas el autor establece que el concepto de linealización debe estar diseñado en el DNR buscando relaciones entre la comprensión y la forma de pensar, “un examen del tratamiento del concepto de linealización revela dos problemas: (a) escasa atención al concepto y (b) enfoque prácticamente exclusivo en su interpretación geométrica” (Harel, 2021, p.6).

El concepto de linealización determina que este es fundamental en todo proceso de cálculo donde el límite del cociente de diferencias, es su definición básica y donde, según el autor, “si este límite existe, entonces su valor, denotado por f'(a), es la derivada de f en $x = a$” (Harel, 2021). Después de indagar con algunos instructores, Harel identifica que durante el curso de cálculo multivariable no se imparten más conocimientos sobre este tema sino únicamente los establecidos para cumplir con el plan de trabajo del curso; la justificación que generalmente se da de esto es que para los estudiantes es una definición abstracta y la falta de comprensión.

En el enfoque exclusivo de la interpretación geométrica, el autor revela que existe un problema con el concepto de linealización y la interpretación grafica de ésta. Según lo afirma Harel (2021), “la doctrina dominante en la enseñanza del cálculo parece basarse en la representación simbólica acompañada de la ilustración geométrica, con una atención insignificante a la configuración física de las covariaciones cuantitativas” (p.8). Finalmente en la linealización la importancia de esta área debe ser construida por los estudiantes quienes se deben involucrar constantemente, al igual que el razonamiento para dar soluciones y transformar relaciones no lineales entre variables.

En los conceptos de la derivada total, la regla de la cadena y la diferenciación implícita, el autor manifiesta que se debe tener la capacidad de aplicar, organizar y reestructurar el conocimiento en jerarquías y tener la capacidad de recordar y retener el conocimiento en tiempos prolongados; de igual manera menciona cómo estos “construyen entendimientos estables [y formas de pensar] construyéndolos repetidamente de nuevo ... para construir un esquema, los estudiantes deben participar repetidamente en el razonamiento que se solidificará en ese esquema para tener ocasiones de desarrollar las imágenes que lo sustentan” (Thompson et al., 2014, pág.12).

Por otro lado, Harel (2021) incluye los “atajos” que toman los estudiantes y los cataloga como inhibidores, los cuales corresponde a que, si un estudiante aplica su razonamiento repetidamente llegará a un punto de no avanzar con ese razonamiento matemático, o como catalizadores que se refieren a que un estudiante abrevia procesos mientras construye su pensamiento conceptual; esto se encuentra textualmente en la siguiente afirmación:

> “I distinguish between two forms of “shortcuts”, inhibition and catalyst, depending on the learning process through which the students acquire the shortcut. A shortcut is an inhibition if it is introduced to students before they had repeatedly applied the reasoning process underlying it to the point that they have encapsulated that process. I dubbed such a shortcut inhibition because its practice inhibits mathematical growth. The criterion for such an encapsulation is what defines a catalytic shortcut. Namely, a shortcut is a catalyst when one is able to carry out an abbreviated form of a process while constructing in thought the abridged conceptual links underlying the process. (Harel. 2021)

Con relación a los atajos inhibidores y catalizadores del concepto la regla de la cadena, por lo general en el material bibliográfico de cálculo multivariado se omiten las definiciones de derivadas totales de la transformación de matrices y por ello se carecen de herramientas para la regla de la cadena como se evidencia en la fórmula presentada por Harel (2021, p.10) y “cualquiera que sea la trayectoria que uno elija para llevar a cabo este proceso.”

Después de detallar todas las observaciones realizadas por el autor, se piensa que la comprensión matemática de los estudiantes se genera después del aprendizaje de procedimientos básicos matemáticos para poder pensar y analizar. Como ejemplo de lo anterior se tiene el estudio de Kwon et al. (2015) sobre argumentación, donde estudiantes de pregrado demuestran que la filosofía del pensamiento es relevante en el estudio del cálculo multivariado. De igual manera, el trabajo de Yerushalmy (1997) presenta el aprendizaje de estudiantes de séptimo en la comprensión de funciones de una sola variable y varias variables.

AVANCE EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VECTORIAL

Como parte del aporte teórico de la tesis doctoral del investigador principal del presente artículo, se manifestaron en el aula cinco modos de Pensamiento Vectorial, los cuales permitieron esbozar una rúbrica de caracterización del pensamiento la cual se puede observar en la Figura 1 donde se ve involucrado en la resolución de los problemas consagrados en ocho actividades ajustadas para tal fin.

Esta rúbrica es uno de los resultados más importantes de la investigación, la cual se construyó observando en el trabajo de los estudiantes en el aula los modos de entender y de pensar en la solución de un problema específico de la asignatura (recordando lo descrito por Harel (2021)). El análisis que se realizó de estas soluciones vislumbró que algunos estudiantes relacionaban un problema y su solución en un lenguaje puramente vectorial, cuyas consecuencias mostraban que había ciertos modos de pensar que no estaban contemplados en un análisis inicial.

Algunos de estos modos de pensamiento fueron similares a los del trabajo de Sierpinska (2000) y a los modos de pensar en Álgebra Lineal (Dorier, 1995), donde se ajustaron, modificaron y generalizaron a los requerimientos de lo observado en el curso de Cálculo Vectorial. A continuación se da una breve descripción de tales modos de Pensamiento Vectorial.

El modo vecto – algorítmico manifiesta la utilización del álgebra vectorial para darle solución a un problema. Es el modo más recurrente observado en las soluciones dadas por los estudiantes. En este modo de pensamiento se encuentran, por ejemplo, el uso de los algoritmos vectoriales como productos o determinantes, el álgebra del producto de cuatérnios, etc.

El modo vecto – dinámico manifiesta la utilización de herramientas tecnológicas de geometría dinámica para visualizar un problema o para entender algún concepto teórico que acarree resolver un problema (Donevska, 2016). En este modo se encuentran el uso de las construcciones de los productos vectoriales, curvas y superficies orientadas, campos vectoriales, etc.

El modo vecto – estructural manifiesta la utilización de estructuras vectoriales, tales como axiomas o teoremas propios, para transformar un problema y darle solución. Como ejemplo de tales modos podemos mencionar el uso de axiomas propios de los espacios vectoriales, las desigualdades de magnitud y producto escalar, etc.

El modo de orientabilidad manifiesta la necesidad de un tipo de orientación (por ejemplo productos vectoriales, áreas o volúmenes con signo, álgebra de formas diferenciales,…) que se usa para darle sentido a la solución de un problema. Así se puede mencionar el uso de esquemas de orientación que permitan darle sentido a una operación vectorial, el uso de los vectores tangentes y normales para caracterizar una recta o un plano respectivamente, etc.

El modo de generalización manifiesta la necesidad de ampliar u observar la solución de un problema desde otros puntos de vista para así proponer otros problemas y darles solución. Se observa por ejemplo el uso de este modo para complementar o expandir una construcción geométrica o un algorítmo efectivo que resulte útil para replicarlos, etc.

Cabe resaltar la importancia de estos modos de pensamiento en el trabajo con los estudiantes a la vez que tan solo es un avance para lograr una caracterización del Pensamiento Vectorial.

RÚBRICA PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VECTORIAL					
	1. Modo vecto-algorítmico	***2.*** Modo vecto-dinámico	***3.*** Modo vecto-estructural	***4.*** Modo de orientabilidad	***5.*** Modo de generalización
	0	0	0	0	0
	PARÁMETROS DE EVALUACIÓN				
PARÁMETROS DE EVALUACIÓN	***1.1.*** Recurre a una estrategia algorítmica eficiente y efectiva para resolver un problema.	***2.1.*** Por medio de herramientas tecnológicas visualiza completamente la situación problema.	***3.1.*** Reconoce la estructura vectorial implícita en un problema.	***4.1.*** Aplica la orientación del objeto geométrico subyacente a la solución de un problema.	***5.1.*** Propone algún algoritmo vectorial alternativo al desarrollado en clases.
	1.2. Presenta el desarrollo de la actividad con el proceso algorítmico correcto.	***2.2.*** Utiliza los vectores elaborados con geometría dinámica para dar solución a un problema.	***3.2.*** Propone una manera vectorial para formular la solución de un problema.	***4.2.*** Reconoce la orientación como factor determinante en una solución.	***5.2.*** Muestra otro tipo de construcción geométrica para visualizar un problema.
	1.3. Demuestra dominio de los procesos algorítmicos vistos con antelación a la actividad desarrollada.	***2.3.*** Construye situaciones geométricas que involucran vectores.	***3.3.*** Recurre a esquemas vectoriales para dar solución a un problema.	***4.3.*** Muestra una orientación al análisis de un esquema vectorial dado.	***5.3.*** Modifica una estructura vectorial dada que sirva para dar solución a un problema.
	1.4. Utiliza los algoritmos vectoriales para construir una solución de un problema.	***2.4.*** Conceptualiza el cálculo vectorial desde su faceta dinámica.	***3.4.*** Transforma un problema dado para resolverlo con estructuras vectoriales.	***4.4.*** Entiende la relación entre la orientación y una estructura vectorial dada.	***5.4.*** Conjetura diversos tipos de orientación distinta a la estándar.

Figura 1. Rúbrica de caracterización del Pensamiento Vectorial.

RESULTADOS

A la luz de las evidencias de la implementación del sistema de actividades y teniendo en cuenta el marco teórico mencionado con anterioridad, se obtuvo que:

El 35% de los estudiantes que resolvieron los problemas extra-clase mostraron nuevas formas de pensar algunos problemas propuestos desde el enfoque del Pensamiento Vectorial, dando así una oportunidad de mejora en este sentido. Estos problemas extra-clase conllevaban un alto nivel de complejidad en su solución y movilizaban gran parte de los conceptos del curso, donde las estrategias recurridas por los estudiantes para su solución mostraban más de una forma de pensar, por lo que la Dualidad (D) esbozada por Harel (2008) adquiere una generalización dada por los modos de pensar vectorialmente.

El 83% de los estudiantes usaron adecuadamente las herramientas y plataformas tecnológicas para la visualización de los problemas y sus soluciones, trabajando desde la práctica. De esta forma se manifestó de manera general el modo vecto - dinámico y el modo de orientabilidad en la solución de los problemas sugeridos, dando así paso a nuevos tipos de problemas conjeturales y soluciones planteadas por los estudiantes, lo que también manifiesta el modo de generalización del Pensamiento Vectorial.

El 74% de los estudiantes desarrollaron notaciones del Cálculo Vectorial que permitió optimizar las formas de entender y las formas de pensar de un problema particular, lo que contrasta con la teoría DNR de Harel (2008) al trabajar cada problema desde un punto de vista vectorial, donde la notación y métodos de solución de un problema particular quedaban enmarcados en el modo vecto-algorítmico y vecto – estructural y el modo de orientabilidad del Pensamiento Vectorial.

El 92% de los estudiantes se empoderó de las herramientas del Pensamiento Vectorial para la modelación de un problema específico, dando otro énfasis en la solución de los mismos. Esto se logró, por ejemplo, con ayuda de las herramientas tecnológicas al dinamizar un problema, o al aplicar algoritmos netamente vectoriales para la solución de un problema, o al ver la necesidad de recurrir a un esquema orientado para la aplicación de conceptos del curso (como por ejemplo el producto vectorial o el álgebra de formas diferenciales), o al ver que el problema podría complementarse con la solución de otro problema análogo asociado a él, lo que enmarca el uso de los modos de pensar vectorialmente.

El 74% de los estudiantes notaron un cambio de paradigma de enseñanza – aprendizaje del Cálculo Vectorial a través del Pensamiento Vectorial y sus rúbricas de caracterización, lo cual se llevó a cabo mostrando el trabajo clásico de los libros de texto y contrastándolo con los modos de Pensamiento Vectorial. En este contraste se utilizaron los libros de Stewart (2018) y Marsden y Tromba (1991), junto con las ideas plasmadas en el aula por el investigador y los estudiantes, quienes analizaban y sintetizaban las formas óptimas de pensar y de entender un problema dado, de nuevo contrastando con la teoría DNR de Harel (2008).

Como un producto de los resultados de esta investigación, que no está contemplada en la tesis doctoral del autor principal, y del cual determina uno de los objetivos principales de este artículo, es el de dar un contraste entre el Pensamiento Vectorial y la perspectiva de la teoría DNR para el Cálculo Multivariable desarrollada por Harel (2021) en su artículo y del cual son analizados algunos conceptos de la asignatura.

Cabe resaltar que en la tesis doctoral se abordaron los mismos conceptos y más, pero mostrados desde un enfoque puramente vectorial, lo que conllevó a una comprensión significativa de los mismos y a su posterior puesta en práctica.

Sobre el producto cruz cabe mencionar que el mismo se observó bajo la lupa de los modos de Pensamiento Vectorial descritos en la rúbrica de caracterización, el cual también es analizado bajo la óptica de los modos de pensar en Álgebra Lineal por Guerra y Parraguez (2019). El mismo se definió usando el álgebra de los cuatérnios dada por Hamilton y estructurada de la siguiente forma:

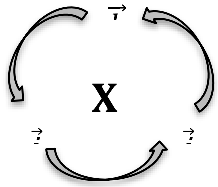
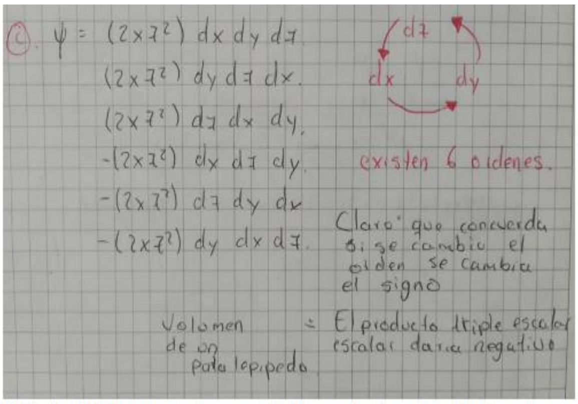


Figura 2. Esquema orientable del producto vectorial.

Lo anterior puso en manifiesto todas las propiedades de este producto, incluidas las geométricas y estructurales, más las propiedades de orientabilidad tanto de la estructura como del cálculo del mismo. Como contraste a lo indicado por Harel (2021), se podría pensar que la forma de inducir este concepto es un atajo catalizador, pues el mismo permitió, por ejemplo, motivar los campos rotacionales y el álgebra de las formas diferenciales, las cuales no hubieran sido posibles sin la ayuda de este importante concepto mostrado desde su faceta vectorial.

Pero lo anterior va mucho más allá de ser un atajo, pues la parte geométrica y estructural, que muchos autores exponen de manera ambigua y sin conexión con otros conceptos del curso Stewart (2018) y Tromba (1991), se muestran de manera natural, sin la necesidad de formulaciones abstractas ni de notaciones que violan un principio de forma establecido.

A modo de ejemplo se planteó un problema de formas diferenciales que versa: Dé los otros órdenes de la 3 - forma ψ. ¿Concuerda esto con lo visto anteriormente en el triple producto escalar de vectores? Justifique.



RTA// Existen 6 órdenes, y claro que si concuerda si se cambia el orden se cambia el signo, el producto triple escalar (que da volumen de un paralelepípedo) daría negativo.

Figura 3. Problema que representa el modo vecto – estructural.

A lo que los estudiantes acuden al esquema introducido para el producto vectorial y lo utilizan para generalizar las propiedades de las formas diferenciales, además de hacer conexiones geométricas y estructurales.

Cabe recalcar que la forma de introducir el producto vectorial de esta manera indujo la transición fluida entre medidas con signo, interacción de curvas o superficies con campos vectoriales, y otras más.

Sobre los demás conceptos abordados por Harel de las derivadas multivariables, lo mostrado en la tesis doctoral usando el Pensamiento Vectorial, motivó la definición de derivada total desde el punto de vista de los modos de pensar vectorialmente, lo cual implicó la introducción de los demás conceptos de forma vectorial.

Es así que, con base en la definición del concepto de derivada total para una función $w = f(x, y, z)$, motivada por sus razones geométricas y estructurales, se muestra como:

$$\partial w = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \langle f_x, f_y, f_z \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle = \nabla f(\vec{r}) \cdot \partial \vec{r}$$

Lo cual revela el carácter puramente vectorial de la definición, observando una conexión entre la regla de la cadena estudiada en cursos anteriores, lo que hace empoderar la definición del concepto y aplicarlo a los demás temas como son: Linealización y planos tangentes; Superficie de nivel de w ($\partial w = 0$) y $\partial \vec{r}$ lineal.

Regla de la cadena: Tomar a w como función de las variables principales t y s, lo que modifica la última versión de la derivada total mostrada (asemejándose al trabajo realizado por Dray & Manogue (1999) y (2003).

Derivada implícita: Tomando la primera versión y derivando con respecto a una variable independiente específica.

Derivada direccional: Tomando a $\partial \vec{r}$ como constante.

A la luz de lo indicado por Harel, de nuevo se diría que el concepto de derivada total de una función es un atajo catalizador, dado los conceptos subyacentes que se desprenden, pero claro que todo ello depende de un estudio de las curvas y superficies para cerrar el ciclo formal detallado por Harel (2021), los cuales constan de las fases preformal, formal y posformal.

Esta presentación de los temas anteriores no es común en los libros de texto, lo que al parecer del investigador deja de lado el formalismo recargado de notación confusa e inconexa a los demás temas del curso, lo que Harel ataca en su artículo y es el germen de los atajos inhibidores.

A manera de ejemplo se planteó el siguiente problema: *Por la estructura de los materiales que conforman una caja, su longitud, su ancho y su altura varían con el tiempo. En cierto instante las medidas de la caja son de dos metros su longitud y de tres metros su ancho y su altura. Se observa que la longitud y el ancho de la caja aumentan a razón de 2 m/h y que su altura disminuye a razón de 1m/h. En el momento que se tomaron las variaciones de las medidas, determine las razones a las que cambian el volumen de la caja y el área lateral de la caja.*

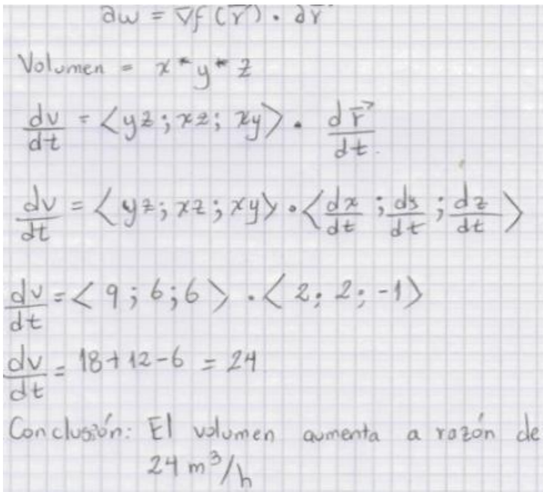


Figura 4. Problema que representa el modo vecto – algorítmico.

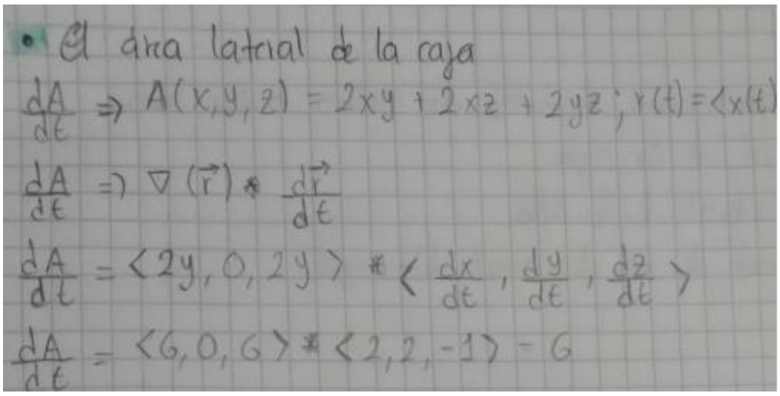


Figura 5. Problema que representa el modo vecto – algorítmico.

En este problema típico sobre regla de la cadena en varias variables, se nota que los estudiantes utilizan la notación deducida por la derivada total mostrada anteriormente y la aplican para resolver el problema. Nótese la sugestión del Pensamiento Vectorial involucrado en esta solución. El problema se complementó con el análisis geométrico y dinámico de la situación involucrada, lo que trajo consigo otro tipo de problemas que de nuevo hacía uso de la forma vectorial de esta derivada total, lo que lo descataloga únicamente como un atajo catalizador.

CONCLUSIONES

Las TIC permiten avanzar en la caracterización del Pensamiento Vectorial

Los modos de pensar vectorialmente muestran la necesidad de un cambio de paradigma entre lo que se imparte en un curso de Cálculo Vectorial y lo que se viene realizando actualmente con las herramientas tecnológicas disponibles, ya que se ha evidenciado el empoderamiento del estudiante en la formación de los conceptos del curso y su posterior aplicación. Lo anterior se enmarca mayormente en la visualización como mediador entre las formas de pensar vectorialmente, lo que se decanta en el modo vecto – dinámico.

La orientabilidad es un rasgo característico del Pensamiento Vectorial

En muchas investigaciones sobre la enseñanza – aprendizaje del Álgebra Lineal se hace una extrapolación entre sus modos de pensar identificados por Sierpinska (2000) y los que existen para el Cálculo Vectorial, como por ejemplo los que están enmarcados en la teoría DNR de Harel (2021). En esta investigación se evidenció otro modo de pensar vectorialmente que induce una orientación geométrica o estructural, que, si bien se puede analizar desde el Álgebra Lineal, en el curso de Cálculo Vectorial adquiere una relevancia importante al analizarse desde su faceta dinámica, y que los estudiantes construyen el significado de muchos conceptos del curso, donde algunos generalizan resultados estudiados en cursos anteriores, como lo es, por ejemplo, el Teorema Fundamental del Cálculo.

El Pensamiento Vectorial como generalizador en el marco del DNR

En esta investigación se realizó una caracterización de los modos de pensar vectorialmente que encierra lo propuesto por Harel y lo generaliza. Vale la pena aclarar que lo propuesto en este artículo no está basado en una coherente interpretación de los demás conceptos previos al curso de Cálculo Vectorial, por lo que la generalización prevista no está referenciada en este preconcepto.

Se concuerda con Thompson (2017) acerca de la necesidad de introducir los conceptos básicos del Cálculo a partir de mucho más antes en secundaria, pues el cambio de paradigma matemático se hace innovador al estudiar los conceptos de incrementos y la matemática del movimiento.

En la experiencia del investigador, muchas veces los estudiantes mantienen ciertos obstáculos, que pueden ser didácticos, epistemológicos o de otra índole, y algunos docentes tienden a pensar que los estudiantes ya tienen tales conceptos bien desarrollados por lo que avanzan sin detenerse en tales obstáculos.

Es por lo anterior que se debe reflexionar, además de ello, en llevar un texto acorde con las necesidades del curso. Un texto que motivó mucha de la notación usada en la tesis doctoral fue el de Thompson (1914), que al parecer del investigador merece la atención de la comunidad de educadores matemáticos. Temas como las reglas de las derivadas demostradas por medio de cantidades infinitamente pequeñas que son negligibles, y la geometría de estos diferenciales, hacen ver al estudiante que se puede comprender tales construcciones sin la necesidad de formalismos que obscurecen el horizonte de la solución de algún problema. Con un lenguaje poco tradicional, la exposición de los temas se hace agradable y no empaña la veracidad y la elegancia de los resultados. Lo anterior redundará en el empoderamiento de los diversos conceptos de la asignatura por parte de los estudiantes y los replicarán en los cursos mencionados anteriormente en la introducción del presente artículo.

Resta por explorar las demás facetas del Pensamiento Vectorial y sus modos de pensamiento, lo cual será el insumo de próximas publicaciones sobre el tema y de las cuales se mostrarán sus utilidades en la caracterización de este tipo de pensamiento matemático.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). *The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215–241

Donevska, A. (2016). *Thinking modes, with or without technology?* 13th International Congress on Mathematical Education. Hamburg.

Dorier, J. L. (1995). *A general outline of the genesis of vector Space theory.* Historia Matematica, 22 (3), 227-261.

Dray, T & Manogue, C. A. (1999). *The vector calculus gap*, PRIMUS 9, 21–28

Dray, T & Manogue, C. A. (2003). *Using differentials to bridge the vector calculus gap*, College Math. J. 34, 283–290

Dreyfus, T. (1991). *Advanced mathematical thinking processes.* In Tall, D. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, (pp.3-21). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Guerra, R. y Parraguez, M. (2019). *Comprensión del producto vectorial desde los modos de pensamiento: El caso de profesores en formación inicial. Comunicación*. XV CIAEM-IACME, Medellin, Colombia.

Harel, G. (2008 a). *DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I*, ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 40, 487-500.

Harel, G. (2008 b). *DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II*, ZDM— The International Journal on Mathematics Education, 893-907.

Harel, G. (2021). *The learning and teaching of multivariable calculus: A DNR perspective*, ZDM—Mathematics Education, Springer.

Hernández, Sampieri, R., Fernández C. y Baptista L, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. Sexta Edición. México: McGrawHill / Interamericana Editores S.A. de C.V.

Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Vol. 2. New Ed Edition.

Kwon, N., Bae, Y. & Oh, N. (2015). *Design researchon inquiry – based multivariable calculus: Focusing on students´ argumentation and instructional design*. ZDM mathematics Education, 47(6)

Marsden, J.E. and Tromba, A.J. (1991). *Cálculo vectorial (3a ed.)*. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, SA. Ortega, J.

Presmeg, N. C. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics.* In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sierpinska, A. (2000). *On some aspects of students´ thinking in Linear Algebra*. En Dorier, J.L. (Eds.), The teaching of Linear Algebra in question (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stewart, J. (2018). *Calculus of several variables. Early Transcendents*. Seventh edition. Brooks-Cole/Cengage Learning.

Tait, G. P. (1873). *Elementary Treatise on Quaternions*. País: Oxford.

Tall, D. (1990). *Inconsistencies in the learning of calculus and analysis*. Focus 12 (3 y 4), 49-63

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge.

Thompson. S. P. (1914). *Calculus Made Easy: Being a Very-Simplest Introduction to Those Beautiful Methods of Reckoning which Are Generally Called by the Terrifying Names of the Differential Calculus and the Integral Calculus*. New York: MacMillan Company, 2nd Ed.)

Thompson, P.W & Carlson, M.P (2017). *Variation, covariation and functions: fundamental ways of thinking mathematically*. In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oscar Andrés Galindo Rivera
Universidad Antonio Nariño, Colombia
ogalindo@uan.edu.co

Mary Falk de Losada
Universidad Antonio Nariño, Colombia
director.doctoradoem@uan.edu.co