*Carlos Romero & Tahir Rehman**

*La programación multiobjetivo y la planificación agraria: algunas consideraciones teóricas***

1. INTRODUCCION

En un artículo previo (Romero & Rehman, 1984) habíamos efectuado un análisis expositivo y una evaluación crítica de la programación por metas por ser este el enfoque más utilizado para tratar problemas de decisión con criterios múltiples, analizando sus posibilidades operativas en el campo de la planificación agraria. Nuestro análisis se centró en las dos principales variantes de la programación por metas: las estructuras lexicográficas y las metas ponderadas. Sin embargo, las técnicas de programación multicriterio constituyen un campo en rápida expansión, existiendo nuevas metodologías que tienen una relevancia directa tanto en la construcción de modelos de planificación agraria como en el análisis de las decisiones en

(*) Departamento de Economía de la Empresa Agraria (Universidad de Córdoba) y Departamento de Agricultura y Horticultura (Universidad de Reading) respectivamente.

(**) Este trabajo consiste en una versión considerablemente corregida y ampliada de un artículo que con el título: «Goal Programming and Multiple Criteria Decision Making in Farm Planning: Some Extensions» fue publicado en el *Journal of Agricultural Economics* (Vol 36, 1985, pp. 171-185). Los autores agradecen al Editor, Profesor Bateman, la autorización para publicar algunos de los contenidos del mencionado artículo en lengua castellana.

— Agricultura y Sociedad nº 40 (Julio-Septiembre 1986).

agricultura. Con este artículo pretendemos completar la presentación de las técnicas multicriterio a los economistas agrarios, evaluando críticamente estos nuevos enfoques.

El artículo está organizado en cinco secciones. Después de este apartado introductorio volvemos a utilizar nuestro ejemplo previo (Romero & Rehman, 1984) en las secciones segunda y tercera para explicar la programación multiobjetivo. La sección cuarta está dedicada al análisis de la programación compromiso que constituye una variante de la programación multiobjetivo, llena de posibilidades en el campo de la planificación agraria (Amador et. al., 1985). La última sección está dedicada a investigar cómo los métodos tradicionales de analizar el riesgo y la incertidumbre en planificación agraria pueden incorporarse dentro del marco multicriterio. Así, se demuestra que tanto el enfoque de teoría de juegos como el conocido método de Hazell de minimizar la desviación absoluta media pueden incorporarse con toda facilidad a un modelo de programación por metas.

2. PROGRAMACION MULTIOBJETIVO

La programación multiobjetivo u optimización vectorial se enfrenta al problema de optimizar simultáneamente varios objetivos sujetos a un conjunto de restricciones, usualmente lineales. Como desde un punto de vista tanto lógico como operativo es imposible definir un óptimo cuando existen varios objetivos, la programación multiobjetivo pretende establecer el conjunto de *soluciones eficientes (no dominadas o Pareto óptimas)* en vez de buscar un único óptimo.

El conjunto eficiente está formado por soluciones factibles (esto es, que cumplen las restricciones) tales que no existe otra solución factible que proporcione una mejora en un objetivo sin producir un empeoramiento en al menos otro de los objetivos.

Una vez establecido que el propósito de la programación multiobjetivo consiste en generar el *conjunto eficien-*

te, el problema puede plantearse dentro del siguiente marco general:

$$\text{Eff } Z(x) = [Z_1(x), Z_2(x), \ldots\ldots, Z_q(x)] \qquad (1)$$

sujeto a:

$$x \in F$$

donde Eff significa la búsqueda de soluciones eficientes y F representa el conjunto posible o alcanzable.

Con objeto de ilustrar las posibilidades de la programación multiobjetivo en el campo de la planificación agraria vamos a recurrir nuevamente al ejemplo utilizado en nuestro trabajo anterior, cuyos datos básicos están reproducidos en el Cuadro 1.

CUADRO 1

Datos de partida para el hipotético ejemplo

Variables de decisión		**Perales —ha.— (1)**	**Melocotoneros —ha.— (2)**
Valor actual neto de la inversión (£/ha)		6.250	5.000
Demanda de recursos:			
Capital circulante -	Año 1	550	400
(£/ha)	Año 2	200	175
	Año 3	300	250
	Año 4	325	200
Mano de obra	- Poda	120	180
(horas/ha)	- Recolección	400	450
Tractor para operaciones de cultivo (horas/ha)		35	35

Fuente: Romero & Rehman (1984, p. 90).

Permítasenos suponer ahora que el agricultor tiene dos objetivos: maximizar el valor actual neto (VAN) de la inversión en la plantación y minimizar la contratación de mano de obra eventual para las operaciones de recolección. Para establecer el conjunto de soluciones factibles es necesario recordar la siguiente información: a) las disponibilidades de capital circulante durante el primer año se estiman en 15.000 λ, mientras que el segundo, tercero y cuarto año se estiman únicamente en 7.000 λ; b) las disponibilidades anuales de mano de obra para la poda y de tractor propio están limitadas en 4.000 y en 1.000 horas respectivamente. Asimismo, se ha incluido una restricción adicional con objeto de asegurar que la superficie de la plantación será al menos de 10 hectáreas. Después de estas consideraciones la estructura formal del modelo multiobjetivo viene dada por:

$$\text{Eff } Z(x) = [Z_1(x), Z_2(x)]$$

donde:

$$Z_1(x) = 6.250x_1 + 5.000x_2$$
$$Z_2(x) = -400x_1 - 450x_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} &500x_1 + 400x_2 \leq 15{,}000 \\ &750x_1 + 575x_2 \leq 22{,}000 \\ &1.050x_1 + 825x_2 \leq 29{,}000 \\ &1.375x_1 + 1.025x_2 \leq 36{,}000 \\ &120x_1 + 180x_2 \leq 4{,}000 \\ &35x_1 + 35x_2 \leq 1{,}000 \\ &x_1 + x_2 \geq 10 \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Debe tenerse en cuenta que la función objetivo referente a la minimización de la contratación de la mano de obra eventual para la recolección se ha multiplicado por menos uno con objeto de establecer la eficiencia de todos los objetivos en un sentido maximizador. Asimismo, con respecto a las cuatro primeras restricciones, referentes a las disponibilidades de circulante, debe observarse que se ha admitido la posibilidad de transferir fondos de los períodos excedentarios a los deficitarios. Por otra parte, es fácil observar que las tres primeras restricciones están implicadas por la cuarta; es decir, las tres primeras restricciones son redundantes y pueden ignorarse en todos los procesos optimizadores que desarrollaremos seguidamente.

Como en nuestro simplificado ejemplo existen únicamente dos variables de decisión es posible representar gráficamente el conjunto de soluciones posibles F. Este dominio factible viene representado en la figura 1 por el polígono ABCDE. Los cinco puntos extremos factibles conjuntamente con los valores que corresponden a ambos objetivos están representados en el Cuadro 2.

CUADRO 2

Puntos extremos	Variables de decisión		Funciones objetivo	
	Perales —ha— x_1	Melocot. —ha— x_2	Z_1 (VAN)	Z_2 (Mano de obra event.-hor.)
A	10	0	62.500	4.000
B	26,18	0	163.625	10.472
C	19,18	9,38	166.775	11.893
D	0	22,22	111.111	10.000
E	0	10	50.000	4.500

Los valores de Z_1 y Z_2 en los puntos extremos en el espacio de las variables de decisión producen nuevos puntos extremos en otro espacio geométrico que se denomina espacio de los objetivos. En la figura 2 aparecen representados los cinco puntos extremos de nuestro ejemplo en el espacio de los objetivos. Es interesante observar que los puntos en el espacio de los objetivos son imágenes algebraicas de los puntos en el espacio de las variables de decisión. Así, el punto A de la figura 1 conduce al punto A' de la figura 2 a través de los valores de Z_1 y Z_2 que el punto A genera. Los puntos A', B', C', D' y E' de la figura 2 están conectados por líneas rectas que son imágenes algebraicas de las líneas rectas que conectan los puntos A, B, C, D y E de la figura 1. En pocas palabras el dominio factible F' en el espacio de los objetivos es una transformación del dominio F en el espacio de las variables de decisión.

De la observación de la figura 2 se deduce con facilidad que los puntos pertenecientes a la poligonal A'B'C' representan el conjunto eficiente en el espacio de los objetivos para el problema analizado. En efecto, cualquier punto del dominio F' no perteneciente a la poligonal A'B'C' es inferior pues ofrece menos VAN y la misma (o superior) contratación de mano de obra o el mismo (o inferior) VAN y superior contratación de mano de obra que cualquiera de los puntos pertenecientes a la comentada poligonal. Por tanto, para nuestro sencillo problema el conjunto eficiente viene dado por la poligonal ABC en el espacio de las variables de decisión o por la poligonal A'B'C' en el espacio de los objetivos.

Cuando el número de variables de decisión es mayor que dos, no puede aplicarse el método gráfico que acabamos de exponer. En tales casos es necesario recurrir a técnicas multiobjetivo que permitan generar o al menos aproximar el conjunto eficiente. Básicamente existen tres enfoques para efectuar esta tarea: a) el método de las restricciones *(constraint method)*, b) el método de los coeficientes de ponderación *(weighting method)* y c) el simplex con objetivos múltiples *(multiobjetive simplex)*. De estos tres enfoques el único que permite obtener con toda exactitud el conjunto eficiente es el simplex con objetivos múltiples. No obstante, la aplicabilidad de este procedimiento queda limitada a problemas multiobjetivo de muy reducido tamaño, siendo su interés práctico muy escaso, por lo que no será objeto de estudio en este trabajo. Los lectores interesados en este enfoque pueden consultar los trabajos de Philip (1972) y Zeleny (1973) donde se presentan los dos simplex multiobjetivo más conocidos.

En los apartados siguientes se explican con cierto detalle los aspectos fundamentales de los otros dos enfoques. Ahora bien, antes de proceder a realizar dicha tarea vamos a introducir un concepto esencial en programación multiobjetivo que es la idea de tasa de intercambio *(tradeoff)* entre objetivos. La tasa de intercambio entre dos objetivos mide el sacrificio necesario en un cierto objetivo, para poder compensar un incremento unitario en la realización del otro objetivo. Así, si tenemos dos soluciones eficientes x^1 y x^2 la tasa de intercambio T_{jk} entre los objetivos j-ésimo y k-ésimo viene dada por:

$$T_{jk} = \frac{f_j(x^1) - f_j(x^2)}{f_k(x^1) - f_k(x^2)}$$

donde $f_j(x)$ y $f_k(x)$ representan los niveles alcanzados por los correspondientes objetivos. Así por ejemplo al comparar las soluciones eficientes A' y B' la tasa de intercambio entre los objetivos VAN y contratación de mano de obra eventual es igual a:

$$T_{A', B'} = \frac{163.625 - 62.500}{10.472 - 4.000} = 25{,}28 \text{ £/hora}$$

El conocimiento de los valores de las tasas de intercambio puede ser de una gran utilidad a la hora de elegir la solución eficiente preferida por el centro decisor. Así, la tasa que acabamos de calcular nos indica que en esa porción del conjunto eficiente o curva de transformación cada hora de contratación de mano de obra eventual se transforma en 25,28 £ de VAN. Por tanto, si ese intercambio es interesante para el centro decisor el punto B' será preferido al A', en caso contrario el punto A' será preferido al B'.

3. EL METODO DE LAS RESTRICCIONES (CONSTRAINT METHOD)

La idea básica de este enfoque consiste en optimizar uno de los objetivos, mientras que a los restantes se les incluye en el conjunto de las restricciones. Por medio de variaciones paramétricas de los valores asignados a los términos independientes de las restricciones en que se han convertido los objetivos, se va generando el conjunto eficiente. Marglin (1967 pp. 24-25) fue el primero en proponer este enfoque. Así, para un problema multiobjetivo en el que se desea maximizar los q objetivos considerados la estructura del modelo a formular dentro del método de las restricciones sería:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } Z_k(x) \\
&\text{sujeto a:} \\
&x \in F && (3) \\
&Z_j(x) \geq L_j \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, q
\end{aligned}$$

siendo el objetivo k-ésimo el objetivo a optimizar. Por medio de variaciones paramétricas de los términos independientes L_j se va generando el conjunto de soluciones eficientes. Para nuestro ejemplo, si elegimos el VAN como objetivo a optimizar la aplicación del método de las restricciones conduce al siguiente programa lineal paramétrico:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } 6.250x_1 + 5.000x_2 \\
&\text{sujeto a:} \\
&x \in F \text{ [restricciones técnicas del modelo (2)]} \qquad (4) \\
&400x_1 + 450x_2 \leq \lambda
\end{aligned}$$

La información contenida en el Cuadro 2 es de una gran utilidad para establecer el campo de variación del parámetro λ. En efecto, de la observación de dicho Cuadro se deduce que la contratación de mano de obra eventual oscila entre un máximo de 11.893 horas/Ha. y un mínimo de 4.000 horas/Ha. Estos valores constituyen los límites del campo de variación del parámetro λ*. Por medio de variaciones del valor de este parámetro se van generando puntos eficientes que permiten aproximar el conjunto de solu-

(*) En problemas multiobjetivo con más de dos variables de decisión, los límites de variación de cada objetivo pueden obtenerse procediendo a la optimización por separado de cada objetivo. El límite máximo del objetivo j-ésimo vendrá dado, obviamente, por el máximo de dicho objetivo y el mínimo por el valor más pequño que toma el objetivo j-ésimo cuando se optimizan los otros objetivos.

ciones Pareto óptimas. En el Cuadro 3 se recogen dichos puntos eficientes, que corresponden a los puntos extremos eficientes A, B y C en el espacio de las variables de decisión o A', B' y C' en el espacio de los objetivos, o bien a puntos intermedios pertenecientes a los segmentos que conectan dichos puntos eficientes.

El método de las restricciones exige efectuar p^{q-1} «pasadas» del programa lineal correspondiente, siendo q el número de objetivos y p el número de subintervalos en que se ha dividido el campo de variación de los objetivos situados como restricciones. La fuerte demanda en tiempo de computador que exige este método puede atenuarse recurriendo a códigos de programación lineal paramétrica.

CUADRO 3

Perales —ha— x_1	Melocotoneros —ha— x_2	Valor actual neto —£—	Mano de obra eventual —horas—	Valor del parámet. λ
19,18	9.38	166.775	11.893	11.893
23,59	3.47	164.788	11.000	11.000
26,05	0	163.713	10.500	10.500
26,18	0	163.625	10.472	10.472
25	0	156.250	10.000	10.000
22,50	0	140.625	9.000	9.000
20	0	125.000	8.000	8.000
17,50	0	109.375	7.000	7.000
15	0	93.750	6.000	6.000
12,50	0	78.125	5.000	5.000
11,25	0	70.312	4.500	4.500
10	0	62.500	4.000	4.000

4. EL METODO DE LOS COEFICIENTES DE PONDERACION (WEIGHTING METHOD)

La idea básica de este método consiste en combinar todos los objetivos en una única función. Con este propósito a cada objetivo se le asocia un peso o coeficiente de ponderación, sumándose a continuación todos los objetivos. Seguidamente se someten los diferentes pesos a un tratamiento paramétrico, generándose de esta forma una aproximación del conjunto eficiente. Zadeh (1963) fue el primero en proponer este enfoque. Así, para un problema multiobjetivo en el que se desea maximizar los q objetivos, la aplicación del método de los coeficientes de ponderación conduciría a la formulación del siguiente modelo:

Maximizar $W_1 Z_1(x) + W_2 Z_2(x) + \ldots + W_q Z_q(x)$
Sujeto a:
$x \in F$
$W \geq 0$

Por medio de variaciones paramétricas de los coeficientes W se va generando el conjunto eficiente. Para nuestro ejemplo la aplicación del método de los coeficientes de ponderación conduce al siguiente programa lineal paramétrico:

Maximizar: $W_1(6.250x_1 + 5.000x_2) + W_2(-400x_1 -$
$- 450x_2)$
Sujeto a:
$x \in F$ [restricciones técnicas del modelo (2)] (6)
$W_1 \geq 0, W_2 \geq 0$

Trabajando con coeficientes de ponderación normalizados (es decir, haciendo $W_2 + W_1 = 1$) y procediendo a su parametrización se obtuvieron los siguientes resultados. Para $0,4 \leq W_1 \leq 1$ y por tanto para $0 \leq W_2 \leq 0,6$ la solución óptima corresponde a los puntos C-C' (esto es, $x_1 = 19,18$ ha, $x_2 = 9,38$ ha); es decir, siempre que el centro decisor de al objetivo VAN una importancia de al menos 0,66 veces la importancia que da al objetivo contratación mano de obra eventual la solución eficiente preferida por el agricultor será la C-C' . Para $0,1 \leq W_1 \leq 0,4$ y por tanto $0,6 \leq W_2 \leq 0,9$ la solución eficiente salta pasando a ser la B-B' (esto es, $x_1 = 26,18$ ha, $x_2 = 0$); es decir, la solución B-B' será la preferida por el centro decisor cuando éste de una importancia al VAN inferior en 0,66 veces a la que da al otro objetivo, pero superior en 0,11 veces. Finalmente, para $0 \leq W_1 \leq 0,1$ y por tanto $0,9 \leq W_2 \leq 1$ la solución eficiente salta de nuevo pasando a ser la A-A' (esto es, x_1 = 10 ha, x_2 = 0); es decir, la solución A-A' será la preferida por el centro decisor cuando de una importancia al VAN 0,11 veces inferior a la que da a la contratación de mano de obra eventual*.

Igual que sucedía con el método de las restricciones, el método de los coeficientes de ponderación requiere efectuar p^{q-1} «pasadas» del programa lineal correspondiente, siendo p en este caso el número de valores que se asigna a los coeficientes de ponderación. La fuerte demanda en tiempo de computador que exige este método puede paliarse recurriendo a opciones paramétricas. No obstante, como en este caso la parametrización se realiza con los coeficientes de la función objetivo en vez de con los términos independientes, las dificultades de cálculo son mayores, por lo que puede decirse que en términos operativos el método de las restricciones presenta una cierta superioridad con respecto al método de los coeficientes de ponderación.

Como acabamos de ver los dos métodos que existen para generar o al menos aproximar el conjunto eficiente demandan un tiempo de computador que medido en número de «pasadas» del programa crece casi exponencialmente con el número de objetivos. Así, un problema con cinco objetivos y en el que el número de valores que se asigne a los coeficientes de ponderación o bien el número de subintervalos en que se divide el campo de variación de los términos independientes fuera de seis, requeriría 6^4 = 1.296 «pasadas» de computador y generaría 1.296 puntos eficientes. Obviamente esta situación no es deseable, tanto por el excesivo coste del proceso de cálculo, como por la sobrecarga de información que supone para el centro decisor, resultando prácticamente imposible para él, en tales casos, elegir la solución óptima de entre el conjunto eficiente.

Para mitigar estos importantes problemas prácticos se han diseñado diferentes métodos. Así, Steuer (1976) ha su-

(*) Para que la interpretación que estamos dando a los coeficientes W como cuantificadores de las preferencias del centro decisor sea totalmente correcta hay que aceptar algunos supuestos, como que la función de utilidad del centro decisor es aditiva y separable.

gerido utilizar el método de los coeficientes de ponderación en vez de con coeficientes fijos con coeficientes variables pertenecientes a un determinado intervalo. De esta manera, sólo se analiza la parte del conjunto eficiente de mayor importancia para el centro decisor. Con este método se consigue ahorrar una gran cantidad de tiempo de computador y reducir considerablemente el tamaño del conjunto eficiente.

Steuer & Harris (1980) han recomendado el uso de técnicas de filtrado con el propósito de descartar soluciones eficientes no suficientemente diferentes con respecto a otras soluciones eficientes previamente calculadas y retenidas por el filtro. De esta forma es posible reducir el tamaño del conjunto eficiente a una dimensión muy manejable *(operación de poda)*. Esta técnica de filtrado ha sido aplicada con éxito por Romero et al. (1987) en el campo de la planificación agraria a un problema de decisión relacionado con un programa de reforma agraria.

Otra forma de mitigar este tipo de problemas consiste en el uso de técnicas interactivas. Este enfoque está basado en la definición progresiva de las preferencias del centro decisor; esto es, se establece una interacción entre el centro decisor y el modelo. La interacción consiste en una especie de conversación en la que al centro decisor se le preguntan sus preferencias o tasas de intercamnbio *(tradeoffs)* entre los diferentes objetivos. Una exposición de las técnicas interactivas excede de las pretensiones de este trabajo. No obstante, una buena revisión de este tipo de enfoques puede verse en Hwang & Masud (1979, páginas 102-226).

4. PROGRAMACION COMPROMISO (COMPROMISE PROGRAMMING)

Zeleny introdujo en 1973 un interesante método con el nombre de programación compromiso, que ayuda al centro decisor a elegir la solución óptima de entre un conjunto de soluciones eficientes. Este método comienza estableciendo lo que Zeleny llama el *punto ideal*. Las coordenadas de este punto vienen dadas por los valores óptimos de los diferentes objetivos del centro decisor. El *punto ideal* es normalmente inalcanzable. Si fuera alcanzable no existiría conflicto entre los objetivos. Cuando el punto ideal es inalcanzable el elemento óptimo o *solución compromiso* para el centro decisor viene dada por la solución eficiente que se encuentra más próxima con respecto al punto ideal *(axioma de elección* de Zeleny). Dependiendo de la medida de distancia utilizada puede establecerse un conjunto de soluciones compromiso.

Es fácil comprobar que en nuestro ejemplo el punto ideal I (véase figura 2) es (166.775; 4.000); es decir, representa un VAN de 166.755 λ y una contratación de 4.000 horas de mano de obra eventual para la recolección. Como el punto ideal es inalcanzable (esto es, queda fuera del dominio factible F) es necesario obtener soluciones compromiso. Para ello necesitamos calcular la distancia existente entre cada punto de la curva de transformación o de intercambios VAN-mano de obra eventual y su punto ideal. Con este propósito se introduce el concepto de grado de proximidad d_j entre el objetivo j-ésimo y su ideal por medio de:

$$d_j = Z_j^* - Z_j(x)$$

cuando el objetivo j-ésimo se maximiza, o por medio de:

$$d_j = Z_j(x) - Z_j^*$$

cuando el objetivo j-ésimo se minimiza. En ambos casos Z_j^* representa el punto ideal. Cuando las unidades en que vienen medidos los objetivos son diferentes (unidades monetarias y horas de trabajo en el caso considerado), deben utilizarse en el análisis desviaciones relativas en vez de desviaciones absolutas (Zeleny 1973, página 299). En tales casos el grado de proximidad viene dado por:

$$d_j = \frac{Z_j^* - Z_j(x)}{Z_j^* - Z_{*j}} \quad \text{o} \quad d_j = \frac{Z_j(x) - Z_j^*}{Z_{*j} - Z_j^*}$$

donde Z_{*j} es el anti-ideal para el objetivo j-ésimo; esto es, el valor de objetivo j-ésimo cuando el objetivo en conflicto se optimiza (esto es, 62.500 £ de VAN y 11.893 horas de mano de obra eventual).

Con objeto de obtener las distancias entre cada solución y el punto ideal la programación compromiso introduce la siguiente familia de funciones de distancia:

$$L_p\ (\partial,\ k) = \left[\left(\sum_{j=1}^{k} \partial_j\ d_j \right)^p \right]^{1/p} \tag{7}$$

donde los coeficientes ∂_j ponderan la importancia de la discrepancia entre el objetivo j-ésimo y su valor ideal.

En la programación compromiso la función (7) usualmente se operativiza para las métricas $p = 1$ (la distancia «más larga» en un sentido geométrico), $p = 2$ (la distancia «más corta» en un sentido geométrico; esto es, la línea recta) y $p = \infty$ (la distancia «chebysev»). Para $p > 2$ las medidas de distancia son incluso más cortas que la línea recta. El uso de (7) para $p > 2$ tiene sentido, pues las funciones de distancia no se utilizan en este contexto en un sentido geométrico, sino como una medida de proximidad entre cada solución y el punto ideal como indicador de las preferencias humanas*.

Es interesante observar que aumentos en el valor de p suponen dar una mayor ponderación a la desviación mayor. Así, cuando $p = \infty$, se procede a minimizar la máxima desviación individual. Dicho con otras palabras, el factor p pondera las diferentes desviaciones de acuerdo con sus magnitudes, mientras que el factor ∂_j pondera las desviaciones de acuerdo con la importancia relativa de cada objetivo. Para diferentes valores de p y ∂_j se pueden generar diferentes soluciones compromiso.

(*) Un interesante desarrollo de las funciones de distancia en el campo de la Teoría Económica se debe a Ballestero & Blanco (1984). Estos autores, recurriendo a la programación por puntos ideales formulan una nueva teoría del consumo no paretiana exenta de supuestos utilitarios.

En nuestro ejemplo se han calculado las tres medidas de distancia (L_1, L_2 y L_∞) para diferentes estructuras de los coeficientes de ponderación, tal como vienen representados en el Cuadro 4. De la observación de dichas cifras se deduce que para la estructura de pesos considerada de los tres puntos extremos eficientes el punto B' es el que se encuentra más próximo al punto ideal, sea cual sea la función de distancia utilizada. Dicho con otras palabras, el punto B' en el espacio de los objetivos o el punto B en el espacio de las variables de decisión constituyen el compromiso eficiente óptimo, obtenido por medio de una aproximación discreta.

La programación compromiso puede ganar en eficiencia y flexibilidad si se operativiza dentro de un enfoque de tipo continuo en vez de discreto como acabamos de hacer. Así, cuando se utiliza un enfoque continuo, no es necesario calcular previamente el conjunto eficiente, pues las diferentes soluciones compromiso se obtienen directamente resolviendo problemas de programación matemática. Así, para la métrica L_1, esto es, para $p = 1$, el compromiso eficiente óptimo se obtiene resolviendo el siguiente programa lineal (véase, por ejemplo Cohon 1978, página 185).

$$\text{Min } L_1 = \partial_1 \frac{[166.775 - Z_1(x)]}{166.775 - 62.500} + \partial_2 \frac{[Z_2(x) - 4.000]}{11.893 - 4.000}$$

sujeto a $x \in F$ [restricciones técnicas del modelo (2)] (8)

La solución óptima del problema (8) para $\partial_1 = \partial_2$ (esto es, suponiendo que los dos objetivos son igualmente importantes) viene dada por el punto B' de la figura 2. Es decir, el punto B' es el compromiso eficiente óptimo, lo que significa que el punto B' es la solución eficiente más próxima al punto ideal cuando se utiliza la métrica L_1.

Para la métrica L_∞, esto es, para $p = \infty$, se procede a minimizar la máxima desviación individual. Esto es, cuando $p = \infty$ sólo la mayor desviación se toma en consideración. Para esta métrica, la mejor solución compromiso se obtiene resolviendo el siguiente programa lineal (véase, por ejemplo, Cohon 1978, páginas 185-187):

$$\text{Min } L_{\infty} = d_{\infty}$$

sujeto a:

$$\frac{\partial_1 \, [166.775 - Z_1(x)]}{166.775 - 62.500} \leq d_{\infty}$$

$$\frac{\partial_2 \, [Z_2(x) - 4.000]}{11.893 - 4.000} \leq d_{\infty} \qquad (9)$$

$x \in F$ [restricciones técnicas del modelo (2)]

donde d_{∞} es la desviación máxima. La solución óptima del problema (9) suponiendo nuevamente que $\partial_1 = \partial_2$, viene dada por el punto H' de la figura 2. Por tanto, para la métrica $p = \infty$ el compromiso eficiente óptimo viene dado por el punto H', al que corresponde un VAN de 119.000 £ y una contratación de mano de obra eventual de 7.616 horas. El punto H es la imagen del punto H' en el espacio de las variables de decisión, correspondiéndole unas coordenadas de $x_1 = 19{,}04$ $x_2 = 0$. Es decir, el compromiso eficiente óptimo para $p = \infty$ consiste en plantar 19,04 hectáreas de perales, y nada de melocotoneros.

Yu (1973) demostró que las métricas L_1 y L_{∞} definen un subconjunto del conjunto eficiente al que Zeleny (1974, página 488) denominó el *conjunto compromiso. Las otras «mejores» soluciones compromiso (para 1* $\leq p \leq \infty$) están situadas entre las métricas L_1 y L_{∞}. Por consiguiente, los segmentos B'H' en el espacio de los objetivos y BH en el espacio de las variables de decisión representan el conjunto-compromiso.

Si los coeficientes de ponderación ∂_1 y ∂_2 fueran diferentes de los valores que acabamos de considerar, entonces la estructura del conjunto compromiso quedaría modificada. La realización de un análisis de sensibilidad con los pesos ∂_j puede proporcionar al centro decisor una información valiosa referente al intervalo en el que se puede definir el conjunto compromiso.

CUADRO 4

Programación compromiso (enfoque discreto)

	A'	B'	C'	Z_j^*
VAN (Z_1)	62.500	163.625	166.775	166.775
Mano de obra eventual (Z_2)	4.000	10.472	11.893	4.000
d_1	0,892	0,027	0	
d_2	0	0,820	1	
L_1 $\alpha_1 = 1$	0,892	0,847	1	
L_2 $\alpha_2 = 1$	0,892	0,820	1	
L_∞	0,892	0,820	1	
L_1 $\alpha_1 = 2$	1,784	0,874	1	
L_2 $\alpha_2 = 1$	1,784	0,882	1	
L_∞	1,784	0,820	1	
L_1 $\alpha_1 = 3$	2,676	0,901	1	
L_2 $\alpha_2 = 1$	2,676	0,824	1	
L_∞	2,676	0,820	1	
L_1 $\alpha_1 = 4$	3,568	0,928	1	
L_2 $\alpha_2 = 1$	3,568	0,827	1	
L_∞	3,568	0,820	1	
L_1 $\alpha_1 = 5$	4,460	0,955	1	
L_2 $\alpha_2 = 1$	4,460	0,831	1	
L_∞	4,460	0,820	1	

5. ANALISIS DEL RIESGO Y LA INCERTIDUMBRE EN UN MARCO MULTICRITERIO

En esta sección vamos a analizar cómo los métodos usuales de tratar el riesgo y la incertidumbre en los modelos de planificación agraria se pueden incorporar dentro de un marco multicriterio sin demasiadas dificultades. También demostraremos cómo las técnicas de programación bajo condiciones de riesgo más conocidas, pueden considerarse hasta cierto punto como una especie de híbrido entre la programación multiobjetivo y la programación por metas.

En primer lugar, vamos a demostrar cómo el enfoque basado en los juegos contra la naturaleza puede acomodarse en un modelo de programación por metas. Con este propósito nos referimos nuevamente a nuestro ejemplo de partida, así en el Cuadro 5 figuran recogidos los hipotéticos márgenes brutos de los perales y de los melocotoneros durante el período de plena producción para los cuatro estados que suponemos puede presentar la naturaleza. En la última columna de dicho Cuadro figuran recogidos los márgenes brutos medios.

CUADRO 5

MARGENES BRUTOS (LIBRAS POR HECTAREA)

Especie / Estados de la naturaleza	E_1	E_2	E_3	E_4	Margen bruto medio
Perales	700	500	850	400	612,5
Melocotoneros	500	600	400	700	550

Supongamos ahora que el objetivo o meta VAN es omitido de nuestro análisis y sustituido por los márgenes brutos recogidos en el Cuadro 5. Supongamos asimismo que el centro decisor tiene como metas: a) no contratar más de 4.000 horas de mano de obra para las operaciones de recolección (se recuerda que la disponibilidad de mano de obra fija se estima en 2.000 horas), b) no alquilar tractores; esto es, no establecer un plan de cultivos que demande más de 1.000 horas de tractor que como sabemos constituyen la disponibilidad de tracción propia, c) asegurar un margen bruto mínimo que sea máximo (esto es, se supone que el agricultor sigue una estrategia del tipo maximin)*.

(*) La explicación que se desarrolla a continuación es válida para cualquier otra estrategia como la contenida en el método de los *regrets* de Savage, en el criterio del beneficio de Agrawal-Heady, etc.

Recurriendo a la metodología clásica de juegos contra la naturaleza (McInerney 1967, 1969), se introducen las siguientes metas y restricciones en la estructura de un modelo de programación por metas:

Restricciones:

$$
\begin{aligned}
1.375\, x_1 + 1.025\, x_2 &\geq 36.000 \\
x_1 + x_2 &\geq 10 \\
120\, x_1 + 180\, x_2 &\leq 4.000 \\
x_1 + x_2 &\leq S
\end{aligned}
$$

Metas:

$$
\begin{aligned}
g_1 &: 400\, x_1 + 450\, x_2 + n_1 - p_1 = 6.000 \\
g_2 &: 35\, x_1 + 35\, x_2 + n_2 - p_2 = 1.000 \\
g_3 & \quad V + n_3 - p_3 = K \\
g_4 &: 700\, x_1 + 500\, x_2 + n_4 - p_4 = V \\
g_5 &: 500\, x_1 + 600\, x_2 + n_5 - p_5 = V \\
g_6 &: 850\, x_1 + 400\, x_2 + n_6 - p_6 = V \\
g_7 &: 400\, x_1 + 700\, x_2 + n_7 - p_7 = V
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

donde: V es el valor del juego, S representa la superficie total de la finca que puede plantarse con perales o melocotoneros y K es un nivel de aspiración artificialmente alto para el margen bruto que es imposible de alcanzar, dados los recursos que se suponen disponibles en nuestro ejemplo. Por ejemplo, como 850 £ es el máximo margen bruto del Cuadro 5, entonces K podría hacerse igual a dicha cifra. Este nivel de aspiración artificialmente alto simplemente indica que el modelo formulado busca maximizar el valor del juego V.

Las variables de desviación contenidas en (10) pueden minimizarse de diferentes maneras de acuerdo con las preferencias del centro decisor. Supongamos que para el centro decisor la Prioridad Q_1 está formada por las metas g_1 y g_2, siendo la meta g_2 (contratación de mano de obra eventual para la recolección) el doble de importante que la meta g_2 (uso de tractores alquilados); la prioridad Q_2 comprende las metas g_4, g_5, g_6 y g_7 que pretenden satisfacer un margen bruto mínimo, que sea máximo (esto es, maximin) y finalmente la prioridad Q_3 comprende la meta g_3 que pretende maximizar el valor del maximin. De acuerdo con estas consideraciones la función de logro del modelo de programación por metas vendría dada por:

$$\text{Min } a = \left[(2p_1 + p_2), (n_4 + n_5 + n_6 + n_7), (n_3) \right] \quad (11)$$

Obviamente, existen alternativas a la minimización lexicográfica dada por (11). Así, entre otras se pueden citar las siguientes posibilidades a título de ejemplo indicativo: la meta g_3 y las metas g_4, g_5, g_6 y g_7 podrían especificarse como dos submetas en el mismo nivel de prioridad; el proceso de minimización de las variables de desviación podría realizarse recurriendo a un modelo de programación por metas ponderadas, etc.

El paso siguiente en nuestro análisis consiste en estudiar cómo los métodos más conocidos de programación de cultivos bajo condiciones de riesgo pueden acomodarse dentro de una estructura multicriterio. Así, es casi inmediato demostrar que el enfoque clásico de Markowitz (1952) corresponde a un modelo multiobjetivo. En efecto, de acuerdo con los planteamientos de Markowitz se introducen dos objetivos en el modelo de decisión: maximizar la esperanza y minimizar la varianza de los rendimientos. La definición de Markowitz de soluciones eficientes (las de varianza mínima para una esperanza de rendimiento dada o viceversa) coincide con la definición de eficiencia de la programación multiobjetivo y dicho conjunto es generado según Markowitz de acuerdo con lo que en la literatura multicriterio se denomina método de las restricciones (definido en la sección 3 de este trabajo). En efecto, la varianza es minimizada mientras que la esperanza de los rendimientos se establece como una restricción paramétrica.

Como es bien sabido Hazell (1971), por razones operativas, ha propuesto sustituir la minimización de la varianza (que conduce a programas cuadráticos) por la minimización de la desviación absoluta-media (que conduce a programas lineales). Este enfoque, muy popular en la literatura sobre economía agraria, se conoce con el nombre de método MOTAD. La propuesta de Hazell significa definir la eficiencia en términos de esperanza de los rendimientos y desviación absoluta de los mismos. Por consiguiente, el método MOTAD por las mismas razones que el enfoque de Markowitz, se puede considerar que es un problema multiobjetivo con dos criterios, pero además debido a su peculiar estructura el enfoque MOTAD se puede considerar también un modelo de programación por metas. En efecto, Hazell introduce variables de desviación negativas y positivas para medir tanto la falta como el exceso de logro con respecto a una desviación nula en cada uno de los períodos de tiempo considerados.

Con objeto de ilustrar estas ideas permítasenos substituir, en nuestro ejemplo previo, las metas que miden la incertidumbre en un sentido maximin, por las metas que miden el riesgo en un sentido MOTAD. Operando de tal manera se obtiene el siguiente conjunto de metas:

$$\begin{aligned}
g_1 &: 400\, x_1 + 450\, x_2 + n_1 - p_1 = 6.000 \\
g_2 &: 35\, x_1 + 35\, x_2 + n_2 - p_2 = 1.000 \\
g_3 &: 87{,}5\, x_1 - 50\, x_2 + n_3 - p_3 = 0 \\
g_4 &: -112{,}5\, x_1 + 50\, x_2 + n_4 - p_4 = 0 \\
g_5 &: 237{,}5\, x_1 - 150\, x_2 + n_5 - p_5 = 0 \\
g_6 &: -212{,}5\, x_1 + 150\, x_2 + n_6 - p_6 = 0 \\
g_7 &: 612{,}5\, x_1 + 550\, x_2 + n_7 - p_7 = K'
\end{aligned} \qquad (12)$$

donde K' es un nivel de aspiración para el margen bruto artificialmente alto como puede ser por ejemplo 612,5£. De igual manera a como se hizo con el enfoque de juegos contra la naturaleza las variables de desviación de (11) se pueden minimizar de diferentes maneras. Así, manteniendo la prioridad Q_1 como antes, supongamos ahora que la prioridad Q_2 está formada por las metas g_3, g_4, g_5, g_6 y g_7 (margen bruto), siendo la meta g_7 W veces más importante que las metas referentes a la desviación absoluta media. En tal caso, la función de logro correspondiente a la estructura dada por (11) viene dada por:

$$\text{Min } a = [\, (2p_1 + p_2),\ (n_3 + p_3 + n_4 + n_5 + p_5 + n_6 + p_6 + Wn_7) \,] \qquad (13)$$

dando diferentes valores al coeficiente de ponderación W se puede generar el conjunto eficiente en términos de margen bruto y desviación absoluta media*.

Finalmente, vamos a demostrar cómo uno de los métodos más recientes de planificación agraria en contextos de riesgo, el *Target* MOTAD (Tauer, 1983) es realmente un híbrido entre un modelo multiobjetivo y un modelo de metas múltiples, pudiéndose acomodar fácilmente dentro de un modelo de programación por metas. Este enfoque establece un nivel de aspiración T para los rendimientos, permitiendo que se produzca una desviación Y_r por debajo del nivel T en el estado de la naturaleza correspondiente al período r-ésimo. Tauer considera en su método dos objetivos: la maximización del margen bruto esperado y la minimización de las desviaciones agregadas. El conjunto de soluciones eficientes o Pareto óptimos se establece recurriendo al método de las restricciones; esto es, se procede a maximizar el margen bruto mientras que la desviación agregada se trata como una restricción paramétrica.

Para ilustrar cómo un modelo *Target* MOTAD puede acomodarse dentro de un modelo de metas múltiples, permítasenos sustituir las metas MOTAD de (11) (esto es, de la meta g_3 a la g_6) por las correspondientes metas cuando el nivel de aspiración del margen bruto se estima en 14.000 £. De esta forma se obtiene el siguiente nuevo conjunto de metas:

(*) En efecto, como K' es un nivel de aspiración artificialmente alto y por tanto inalcanzable la variable p_7 será igual a cero, entonces despejando n_7 de la ecuación g_7 en (11) tenemos: $n_7 = K' - 612{,}5\ x_1 - 437{,}5\ x_2$. Pero como WK' es una constante, la minimización de Wn_7 es equivalente a la maximización de $W\,(612{,}5\ x_1 + 437{,}5\ x_2)$. Así, dando diferentes valores al coeficiente de ponderación W estamos usando el método de las ponderaciones que desarrollamos en el apartado 4 para generar el conjunto eficiente. Debe indicarse que en este ejemplo, como en la mayor parte de las aplicaciones del MOTAD, se supone que todos los estados de la naturaleza tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Si se dispusiera de estimaciones probabilísticas fiables, estas probabilidades deberían asociarse a las variables de desviación $n_3,\dots,n_6$.

$$
\begin{aligned}
g_1 &: 400\ x_1 + 450\ x_2 + n_1 - p_1 = 6.000 \\
g_2 &: 35\ x_1 + 35\ x_2 + n_2 - p_2 = 1.000 \\
g_3 &: 700\ x_1 + 500\ x_2 + n_3 - p_3 = 14.000 \\
g_4 &: 500\ x_1 + 600\ x_2 + n_4 - p_4 = 14.000 \\
g_5 &: 850\ x_1 + 400\ x_2 + n_5 - p_5 = 14.000 \\
g_6 &: 400\ x_1 + 700\ x_2 + n_6 - p_6 = 14.000 \\
g_7 &: 612{,}5\ x_1 + 550\ x_2 + n_7 - p_7 = K'
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Manteniendo la prioridad Q_1 como en los casos nateriores la función de logro correspondiente a la estructura (13) es:

$$\text{Min } a = \left[(2p_1 + p_2), (n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + Wn_7) \right] \quad (15)$$

La expresión (14) puede utilizarse para generar el conjunto eficiente (en términos de margen bruto y valor de las desviaciones agregadas con respecto al nivel de aspiración de 14.000 £) por medio de variaciones paramétricas del coeficiente de ponderación W.

Bibliografía

AMADOR, F., BARCO, A., ROMERO, C. (1985). Labour stability Vs business profitability within an agrarian reform programme in Andalusia (Spain): A compromise programming application. *Investigação Operacional*, 5, 67-81.

BALLESTERO, E., BLANCO, V. (1984). A socio-cultural model of consumption, en *Developments in marketing science*, Lindquist, J. D. (Ed.). Academy of Marketing Science, 134-139.

COHON, J.L. (1978). *Multiobjetive programming and planning*. Academic Press, New York.

HAZELL, P.B.R. (1971). A linear alternative to quadratic and semivariance programming for farm planning under uncertainty. *American Journal of Agricultural Economics*, 53, 53-62.

HWANG, C.L., MASSUD, A.S.M., PAIDY, S.R., YOON, K. (1979). *Multiple objective decision-making-methods and applications: a state-of-art survey*. Springer-Verlag, New York.

MARGLIN, S. (1967). *Public investment criteria*. Allen & Unwin, London.

MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7, 77-91.

McINERNEY, J.P. (1967). 'Maximin programming'-an approach to farm planning under uncertainty. *Journal of Agricultural Economics*, 18, 279-289.

Mc Inerney, J.P. (1969). Linear programming and game theory models — some extensions. *Journal of Agricultural Economics*, 20, 269-278.

Philip, J. (1972). Algorithms for the vector maximisation problem. *Mathematical Programming*, 2, 207-229.

Romero, C., Rehman, T. (1984). Goal programming and multiple criteria decision-making in farm planning: an expository analysis. *Journal of Agricultural Economics*, 35, 177-190.

Romero, C., Rehman, T. (1984). Planificación agraria en contextos de metas múltiples: Un análisis expositivo. *Agricultura y Sociedad*, nº 33, 87-122.

Romero, C., Rehman, T. (1985). Goal programming and multiple criteria decision-making in farm planning: Some extensions. *Journal of Agricultural Economics*, 36, 171-185.

Romero, C., Amador, A., Barco, A. (1987). Multiple objectives in agricultural planning: A compromise programming application. *American Journal of Agricultural Economics*, 69.

Steuer, R.E. (1976). Multiple objective linear programming with interval criterion weights. *Management Science*, 23, 305-316.

Steuer, R.E., Harris, F.W. (1980). Intra-set point generation and filtering in decision and criterion space. *Computers & Operations Research*, 7, 41-53.

Tauer, L.W. (1983). Target MOTAD. *American Journal of Agricultural Economics*, 65, 606-610.

Yu, P.L. (1973). A class of solutions for group decision problems. *Management Science*, 19, 936-946.

Zadeh, L. (1963). Optimality and non-scalar-valued performance criteria. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-8-59, 60.

Zeleny, M. (1973). Compromise programming. In *Multiple criteria decision-making*. Cochrane, J.L. and Zeleny, M. (Eds.) University of South Carolina Press, 262-301.

Zeleny, M. (1974). A concept of compromise solutions and the method of the displaced ideal. *Computers and Operations Research*, 1, 479-496.

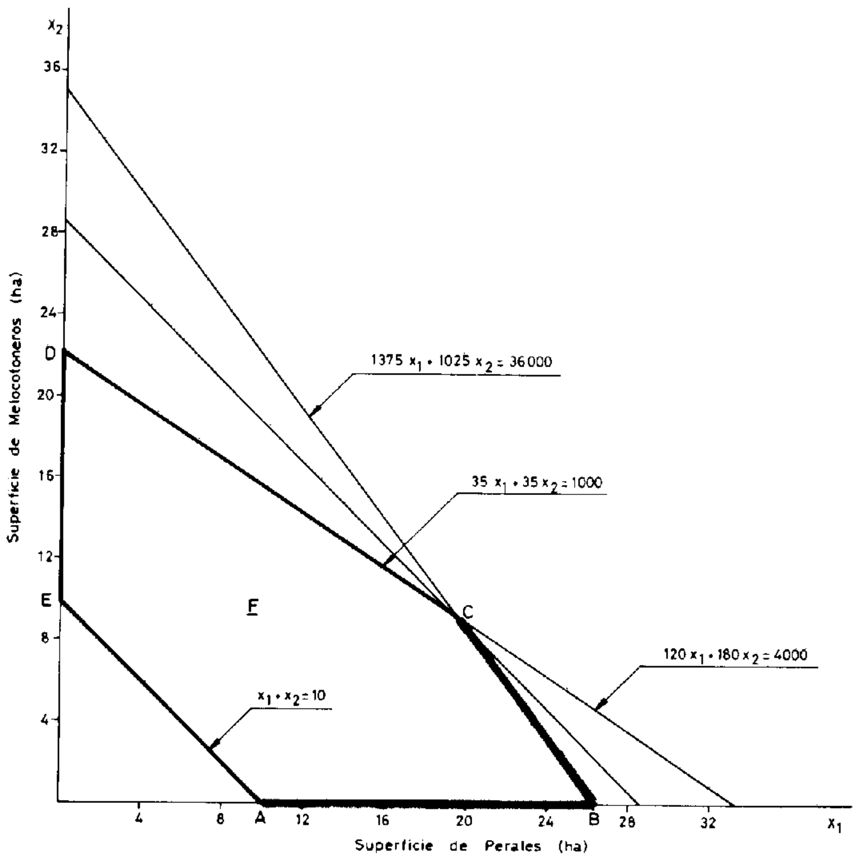
x_2
36
32
28
24
D
20
16
12
E
8
4
Superficie de Melocotoneros (ha)
$1375\ x_1 + 1025\ x_2 = 36000$
$35\ x_1 + 35\ x_2 = 1000$
C
F
$120\ x_1 + 180\ x_2 = 4000$
$x_1 + x_2 = 10$
4
8
A
12
16
20
24
B
28
32
x_1
Superficie de Perales (ha)

Figura 1

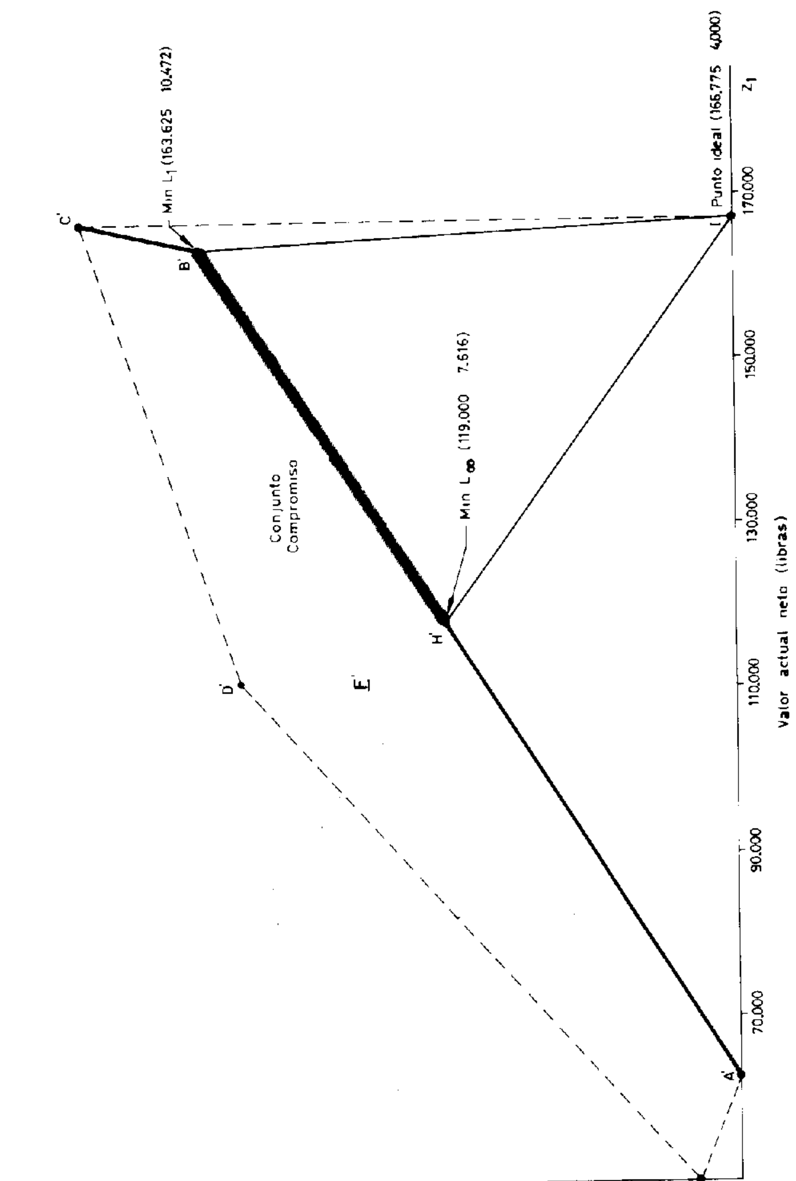
Z2
12.000
11.000
10.000
9.000
8.000
7.000
6.000
5.000
Mano de obra eventual para la recolección (horas)
C'
B'
D'
E'
H'
A'
E'
Conjunto Compromiso
Min L1 (163.625 10.472)
Min L∞ (119.000 7.616)
Punto ideal (166.775 4.000)
I
Z1
70.000
90.000
110.000
130.000
150.000
170.000
Valor actual neto (libras)

Figura 2

RESUMEN

Este trabajo puede considerarse una continuación de un artículo previo publicado por Romero y Rehman en esta revista, en el que se analizaban las posibilidades de las técnicas de programación multicriterio, particularmente la programación por metas, en el campo de la planificación agraria. Esta evaluación de la utilidad potencial del paradigma multicriterio en planificación agraria se desarrolla un paso más en este trabajo, analizando otras metodologías relacionadas con la programación por metas como la programación multiobjetivo y la programación compromiso. La parte final del artículo está dedicada al tema de la incorporación de la incertidumbre y del riesgo en los modelos de planificación agraria, demostrándose cómo los modelos de juegos contra la naturaleza así como el enfoque MOTAD (con su principal variante, el target *MOTAD) pueden acomodarse dentro de una estructura multicriterio.*

RÉSUMÉ

Ce travail peut être considéré comme la continuation d'un article publié par Romero et Rehman dans cette revue dans lequel étaient analysées les applications des techniques de programmation multicritère, en particulier le «goal programming» dans le domaine de la planificacion agraire. Cette évaluation de l'application potentielle du paradigme multicritère dans la cadre de la planification agraire est poursuivi dans cet article tout en analysant d'autres méthodologies qui sont en relation avec le «goal programming» comme c'est le cas de la programmation multiobjetif et de la «compromise programming». La dernière partie de l'article étudie l'incorporation de l'incertitude y du risque aux modèles de planification agraire en démontrant que les modèles de jeux contre nature ainsi que l'approche MOTAD (avec sa principale variante, le target MOTAD) peuvent être incorporés à une structure multicritère.

SUMMARY

This paper is the sequel to a previous article by Romero and Rehman on the role of multiple criteria decision-making techniques, particularly goal programming, in agricultural planning. This assessment of the potential usefulness of the multiple criteria decision-making paradigm is carried further covering other related methodologies such as multiobjective programming and compromise programming. Later analysis is focused on methods of dealing with uncertainty and risk in agricultural planning, models, by demonstrating how game theoretic principles and the MOTAD approach (along with its variant, target MOTAD) can be incorporated within the multiple criteria decision-making framework.