XXXVII

Causas que influyen en la intensidad del rozamiento. —Medios de aumentar su intensidad.—Aplicacion á los carruajes.—Tornos, galgas, planchas.—Medios de disminuirlo.

Causas que influyen en la intensidad del rozamiento.—La intensidad del rozamiento se mide por la fuerza que es preciso emplear para vencerlo. Si colocamos un cuerpo sobre un plano horizontal, y en uno de sus extremos se le ata un hilo que pasa por una polea, y por el otro extremo se le une un platillo cuyo peso se conoce; si se carga este platillo con pesos conocidos hasta que el cuerpo se ponga en movimiento, la suma de los pesos del platillo y de los que se le han añadido da la intensidad de la fuerza del rozamiento, que obrando paralelamente al plano, se opone al movimiento.

Si se coloca un cuerpo C sobre un plano inclinado AB (fig. 69), al cual se puede dar una inclinacion conveniente, la que se mide por un arco graduado D, y se aumenta lentamente la inclinacion del plano hasta que el cuerpo C empiece á resbalar, se verificará que, estando éste solicitado por su propio peso CP, éste se descompone por la regla del paralelógramo de las fuerzas en dos componentes, una CG paralela al plano, que es la que determina el movimiento, y otra CF perpendicular al plano, la cual es destruida por la resistencia de éste.

Comparando los triángulos semejantes *CPG* y *BAE*, se tienen las proporciones

$$\frac{GP=CF}{CP}=\frac{BE}{BA}\quad \frac{CG}{CP}=\frac{AE}{BA}\quad \frac{CG}{CF}=\frac{AE}{BE}$$

que pueden enunciarse: la primera diciendo que la presion del cuerpo contra el plano es á su peso como la base del plano es á su longitud; la segunda, que la fuerza con que el cuerpo tiende á resbalar es á su peso como la altura del plano es á su longitud; y la tercera, que la fuerza que tiende á hacer resbalar al cuerpo es á la presion que ejerce sobre el plano como la altura de éste es á su base.

En la última proporcion vemos que la relacion del rozamiento á la presion depende del ángulo *B*, y este ángulo se observa que no varía, cualquiera que sea el peso del cuerpo; luego la relacion del rozamiento á la presion es constante: este cociente es lo que se llama *coeficiente de rozamiento.*

Hemos visto que los rozamientos proceden siempre de las desigualdades ó asperezas que presentan los cuerpos; se ve, pues, que *cuanto mayores sean las superficies en contacto, mayor será el rozamiento.*

Tambien se comprende que mientras más íntimo sea el contacto entre las dos superficies, mayor será el rozamiento; y como este contacto puede producirse ejerciendo una presion el cuerpo sobre la mesa, se deduce que *el rozamiento es proporcional á la presion que el cuerpo ejerce sobre la superficie que frota.*

Otra de las causas que influyen en el razonamiento es la naturaleza química de los cuerpos en contacto, observándose que aumenta á medida que son más afines los cuerpos, siendo mayor cuando son de la misma naturaleza.

Medios de aumentar su intensidad.—Para aumentar la intensidad del rozamiento, no hay más medios que favorecer las resistencias pasivas, unas veces aumentando la extension de las superficies en contacto, otras haciendo que sean estas superficies lo más homogéneas posible, ó que presenten bastantes asperezas, con objeto de favorecer las adherencias de sus moléculas, y por último, trasformando el rozamiento por rodadura en rozamiento por deslizamiento.

Aplicacion á los carruajes.—Sabemos que los carruajes al ir por los caminos experimentan un rozamiento por rodadura, puesto que las ruedas, al girar alrededor del eje, van presentando sucesivamente todos sus puntos en contacto con el camino; pero pudiera suceder que, á consecuencia de la pendiente de éste, estuviera favorecida la fuerza que lo mueve hasta el extremo de temerse que arrastre en su marcha á la caballería que lo conduce, áun disminuyendo la velocidad; en este caso es preciso favorecer las resistencias pasivas, las cuales, tendiendo, como sabemos, á hacer perder intensidad á las fuerzas que producen el movimiento, pueden por su presencia neutralizar el efecto pernicioso de un tal desarrollo de velocidad; así es que los elementos para desarrollar las resistencias pasivas son de una gran importancia y aplicacion en los carruajes, siendo los más usuales aquellos que trasforman el rozamiento por rodadura en el de deslizamiento.

Tornos, galgas, planchas.—Con objeto de trasformar el rozamiento de rodadura que experimentan los carruajes al marchar por un camino, en rozamiento por deslizamiento, se emplean los *tornos* ó *frenos*; los hay de diversas especies, pero los más comunmente usados son de dos: unos que se emplean en los carruajes, y consisten en un sistema de dos palancas, una de ellas horizontal y colocada paralelamente al eje de las ruedas, y lleva en sus dos extremos, ó por lo, ménos en uno de ellos, dos placas de hierro fundido; á esta palanca está articulada una segunda, la cual llega al pescante, teniendo el extremo que va á este lugar roscado, lo cual hace que por medio de una manivela se la pueda hacer avanzar ó retroceder en una tuerca, consiguiéndose así que la palanca horizontal separe ó aproxime las placas de hierro á las llantas de las ruedas, trasformando así el rozamiento de rodadura en rozamiento por deslizamiento, pues las placas impiden á ésta rodar cuando están en contacto con ellas.

Otros frenos consisten en unos trozos de madera unidos á una vigueta escuadreada, la cual va atravesada por un tornillo cuya tuerca se halla en el eje de las ruedas, estando el tornillo atravesado en su extremo por una chabeta, con objeto de que cuando vaya flojo no se salga; esta vigueta lleva unas cuerdas con objeto de impedir su caida: esta clase de freno, su uso frecuente es en los carros, como las *galgas*, que consisten en un grueso tronco de madera, el cual se apoya contra las mazas de las ruedas y el eje: en los extremos de los brancales del carro hay dos poleas por donde pasan unas cuerdas, las cuales á su vez envuelven los extremos del tronco: apretando las cuerdas, oprimen á éste contra las ruedas, y el tiro se hace con más facilidad, pues impide que el carro arrastre á las caballerias.

El frotamiento producido por los frenos y las galgas es más ó ménos fuerte, segun que opriman más ó ménos á las ruedas de los vehículos; pero esta presion no puede pasar de ciertos límites, porque si se apretasen mucho, sus adherencias con las ruedas les impediria girar, y las ruedas resbalarian sobre el camino como si estuviesen invariablemente unidas al eje; el rozamiento adicional que resulta de las presiones de los frenos y las galgas contra las ruedas no puede, pues, llegar á ser mayor que el rozamiento de las ruedas mismas sobre el camino cuando ellas no giran. Hay otro inconveniente en apretar demasiado los frenos y las galgas, y es que entonces las ruedas resbalan en lugar de girar, lo cual da lugar á un mayor desgaste en un punto de su contorno, y por consiguiente, éste llega á ser un poco irregular, lo cual perjudicaria despues á la marcha general del carruaje.

Para impedir que este desgaste se produzca, en el caso en que sea preciso reemplazar la rodadura por el deslizamiento, se hace uso de unas piezas llamadas *planchas*, las cuales se colocan debajo de las ruedas, de manera que ellas experimenten todo el desgaste que pueda ser ocasionado por el deslizamiento. Para colocarlas, basta poner la plancha delante de la rueda, de tal modo que ésta venga á colocarse encima de ella al rodar. Una cadena de una longitud conveniente une la plancha al brancal del carruaje, y se encuentra tendida en el momento en que la rueda se apoya en el medio de su cara superior. El carruaje al seguir moviéndose arrastra consigo la plancha, que soporta entonces á la rueda; ésta no gira ya, sin que sea preciso emplear un freno ó galga para impedirle rodar.

Medios de disminuirlo.—Para poder conseguir la disminucion del rozamiento, se emplean varios procedimientos que sucintamente vamos á exponer.

El trabajo debido al rozamiento de dos piezas que resbalan la una sobre la otra, depende á la vez de la magnitud de la fuerza de rozamiento y de la magnitud del camino recorrido por el punto de aplicacion, es decir, de la extension del deslizamiento.

Para disminuir este rozamiento, se podrá obrar sobre cada uno de los dos elementos que lo componen. Se disminuirá desde luego la magnitud del rozamiento, eligiendo convenientemente las materias de que se deberá formar las piezas destinadas á resbalar la una sobre la otra, pulimentando las superficies de estas piezas y conservándolas constantemente engrasadas. Tambien puede disminuirse el rozamiento adoptando formas convenientes para las piezas entre las cuales este rozamiento ha de producirse.

En la disminucion de la extension de las superficies que están en contacto, ha de tenerse presente que no se disminuya una de ellas tanto que por su pequeña magnitud llegue á rayar á la otra, porque en este caso, no sólo se aumenta el rozamiento, sino que se destruye la superficie mayor.

En la eleccion de las materias, la experiencia enseña que mientras más diferencia haya entre las naturalezas de dos superficies en contacto, menor es el rozamiento.

El pulimento tampoco puede pasar de un cierto límite, pues se favorece la adherencia entre dos superficies cuanto más pulimentadas están.

Por último, reemplazando el rozamiento de deslizamiento por otro de rodadura, disminuye el primero.

XXXVIII

Trabajo motor, resistente y útil.—Relacion entre el primero y el último.

Trabajo motor, resistente y útil.—Hemos dicho que el trabajo de una fuerza se medía por el producto de su intensidad por el camino recorrido por su punto de aplicacion; pero debe sobreentenderse que este camino ha de ser recorrido por el efecto mismo de la fuerza; así, por ejemplo, un hombre que, yendo en un barco, ejerciera en el sentido del movimiento un esfuerzo sobre un objeto, el cual no recibiera movimiento relativo, no produciria ningun trabajo, áun cuando por el efecto del movimiento del trasporte general el cuerpo se moviese en la direccion del esfuerzo.

Lo mismo sucede en el caso en que el esfuerzo fuese perpendicular á la direccion del camino recorrido, porque entonces si hay una presion, pero no trabajo producido por este esfuerzo, toda vez que por él el cuerpo no se mueve en el sentido de la fuerza que produce el movimiento general.

Debemos hacer observar que en la definicion del trabajo de una fuerza no hemos hecho ninguna hipótesis respecto al sentido del movimiento del punto de aplicacion; así es que lo mismo conviene para el caso en que el camino recorrido por el punto de aplicacion esté dirigido en el sentido de la fuerza, ó que esté dirigido en sentido contrario.

En el primer caso, en que el punto de aplicacion cede y marcha en el sentido de la fuerza, se dice que ésta desarrolla un *trabajo motor*; en el caso en que el punto de aplicacion se mueve en un sentido contrario al de la fuerza, se dice que el trabajo de ésta es un *trabajo resistente*.

Cuando dos fuerzas se equilibran sobre una máquina en movimiento, el trabajo motor producido durante un tiempo cualquiera es igual al trabajo resistente producido durante ese mismo tiempo.

Si una máquina está animada de un movimiento uniforme y está sometida á la accion de una sola fuerza motriz y á varias fuerzas resistentes, la fuerza motriz por sí sola deberá equilibrar á todas las resistencias. Podemos suponer que esta potencia única sea descompuesta en varias potencias parciales aplicadas al mismo punto, segun la misma direccion, y que cada una se equilibre con una de las resistencias. En cada uno de los grupos así formados, de una porcion de la potencia y de una de las resistencias, se encontrará que el trabajo motor es igual al trabajo resistente; luego reuniendo todas las cantidades de trabajos correspondientes á estos diversos grupos, se verá que la suma de los trabajos motores desarrollados por las diversas porciones de la potencia, ó lo que es lo mismo, el trabajo motor desarrollado por la potencia entera, es igual á la suma de los trabajos resistentes producidos por las diversas resistencias.

La suma de los trabajos motores producidos por las diversas fuerzas que actúan sobre una máquina se llama por abreviar *trabajo motor total*, y la suma de los trabajos resistentes, *trabajo resistente total*.

Si fueran varias las fuerzas motrices y varias las resistentes, se demostraria de una manera análoga que el trabajo motor total era igual al resistente total, pues no habria más que hallar la resultante de todas las fuerzas motrices y la de las resistentes, y nos encontrábamos en el caso anterior.

El trabajo resistente se divide en dos partes, una el producido por el operador, y otra destinada á vencer las resistencias pasivas producidas por los rozamientos, peso de los elementos de las máquinas, etc.; de donde vemos que el trabajo del operario es menor que el trabajo motor: á la relacion entre el trabajo del operario y el motor es lo que se llama *trabajo útil.*

Relacion entre el primero y el último.—En virtud de la composicion del trabajo resistente y de su igualdad con el trabajo motor, podemos establecer la igualdad

$$\text{Trabajo motor} = \text{Trabajo útil} + \text{Trabajo resistente},$$

de donde

$$\text{Trabajo útil} < \text{Trabajo motor}$$

y por lo tanto

$$\frac{\text{Trabajo motor}}{\text{Trabajo útil}} < 1$$

XXXIX

Máquinas simples.—Nociones elementales relativas al equilibrio de las mismas.

Máquinas simples.—No siempre es posible aplicar directamente una fuerza al obstáculo ó punto material que con ella deseamos remover, sino que es preciso hacer intervenir obstáculos fijos, que equivalgan á fuerzas indefinidas, entre las fuerzas de que disponemos, llamadas *potencias*, y las que nos proponemos vencer, ó *resistencias*; estos obstáculos modifican las condiciones de equilibrio, pues unas veces cambian la intensidad, otras la direccion de las fuerzas, otras la velocidad del punto de apoyo.

Se llama *máquina* á todo aparato destinado á trasmitir la accion de una fuerza, modificando una ó varias de las tres circuntancias anteriores. En toda máquina actúan tres sistemas de fuerzas.

Las unas son las destinadas á producir un efecto dado, y se llaman *potencias*, *fuerzas motrices*, etc.; las otras son las fuerzas que han de vencerse, y toman los nombres de *resistencias* ó *fuerzas resistentes*; por último, hay además en toda máquina obstáculos fijos, alrededor de los cuales giran ú oscilan ciertos órganos: esos obstáculos se denominan puntos de apoyo y tambien fulcros.

Las resistencias son de dos especies: de primer órden, ó resistencias útiles, y de segundo órden, ó pasivas. Las primeras están representadas en las fuerzas que nos proponemos vencer, y las segundas son las que ofrece toda máquina con su inercia, rozamiento, choque contra órganos fijos, resistencia del aire, etc. etc.

Las máquinas se dividen en *simples* y *compuestas*.

Máquinas simples son aquellas en que la potencia y la resistencia útil se aplican á un mismo cuerpo, ó bien á dos cuerpos diferentes que obran directamente uno sobre otro sin ninguno intermedio.

Tambien pueden definirse las *máquinas simples* diciendo que son las que tienen un solo apoyo: bajo este último concepto se consideran como máquinas simples la palanca, el torno y el plano inclinado.

Máquinas compuestas son aquellas en las cuales existen cuerpos intermediarios entre aquellos en que obran directamente la potencia y la resistencia útil. Se las puede considerar como formadas por varias máquinas simples, iguales ó diferentes y que tienen más de un apoyo: su número es indefinido.

No hay una línea perfectamente divisoria entre unas máquinas y otras, pues al paso que algunos mecánicos aceptan hasta siete simples, á saber: palanca, polea, torno, plano inclinado, rosca, cuña, cuerda, otros dividen las máquinas simples en tres grupos, clasificados segun el obstáculo en que se apoyan, y son: primero, las que insisten sobre un punto, como la palanca: segundo, las que se apoyan en un eje, como el cabrestante, y tercero, las que insisten sobre un plano, como el tornillo.

Nociones elementales relativas al equilibrio de las mismas.—Hemos visto la relacion que existe entre el trabajo motor, el trabajo útil y el trabajo perdido, que era:

Trabajo motor=Trabajo útil+Trabajo resistente

Cualquiera que sea la perfeccion con que se construyan los diversos elementos de una máquina, es imposible el hacer desaparecer las resistencias pasivas, y por lo tanto, el trabajo útil es siempre menor que el trabajo motor, segun tambien hemos visto: es decir, que una máquina trasmite en realidad ménos trabajo que el que recibe: trasmite tanto ménos, cuanto más considerable sea el trabajo de las resistencias. Las mejores máquinas no utilizan más de los tres cuartos del trabajo que han recibido: el mayor número de ellas absorbe en pura pérdida una porcion bastante mayor de este trabajo, y es muy esencial no perder de vista la imposibilidad de construir una máquina que trasmita íntegro el trabajo motor; con más razon, por consiguiente, no debe pensarse en hacer que lo trasmita mayor.

Si en la ecuacion de trasmision del trabajo

$$T_m = T_u + T_r$$

se supone que el término T_r se hace nulo; es decir, que si la máquina, trabajando de vacío y sin ejercer accion alguna sobre cuerpos exteriores, no hubiese resistencia principal, no por eso dejaria de ejercer cierto trabajo motor para conservar el movimiento uniforme del sistema, y este trabajo motor seria precisamente igual al trabajo de las resistencias secundarias, las cuales nunca pueden ser enteramente nulas.

En el estudio del equilibrio de las máquinas simples haremos abstraccion completa de las resistencias secundarias, y por medio de esta hipótesis, no tendremos que considerar más que sistemas en que el trabajo motor sea igual al trabajo resistente; es decir, en los cuales la potencia haga exactamente equilibrio á la resistencia.

Estableceremos, pues, para cada una de las máquinas que estudiemos las condiciones de este equilibrio por consideraciones directas, y demostraremos que estas condiciones conducen siempre á la igualdad del trabajo motor y del trabajo resistente. Esta ecuacion del equilibrio será en todos los casos que estudiemos de la forma $P \times p = Q \times q$, representando por P la potencia, por Q la resistencia, y respectivamente por p y q

los caminos elementales recorridos por los puntos de aplicacion de estas fuerzas, proyectados sobre la direccion de ellas. La relacion fundamental que precede, puesta bajo la forma de $P : Q :: q : p$, nos dice que en toda máquina, la potencia y la resistencia están en razon inversa de los caminos recorridos, estimados en su propia direccion por los puntos á que están aplicadas.

Tambien trataremos de hallar la relacion entre los espacios que recorren realmente los puntos de aplicacion de la potencia y de la resistencia cuando el sistema esté puesto en movimiento.

XL

Definicion de la palanca.—Punto de apoyo.—Brazos de la palanca.

Definicion de la palanca.—Llámase *palanca* á una barra inflexible, recta, curva ó angular AB (figs. 70, 71 y 72), que se apoya sobre un punto fijo O, alrededor del cual tienden á hacerle girar en sentido contrario dos fuerzas paralelas ó concurrentes aplicadas en sus extremos. Una de ellas, la que actúa como motor, se llama *potencia*, y la otra *resistencia.*

Punto de apoyo.—El punto fijo O, que sirve de centro de giro, se llama *punto de apoyo.*

Brazos de la palanca.—Llámase *brazos de la palanca* á las perpendiculares bajadas desde el punto de apoyo á las direcciones de la potencia y de la resistencia, recibiendo respectivamente estas perpendiculares los nombres de *brazo de palanca de la potencia* y *brazo de palanca de la resistencia*.

XLI

Division en palanca de primero, segundo y tercer género.—Condiciones de equilibrio.—En qué caso debe usarse cada una de ellas.—Ejemplos prácticos.

Division en palanca de primero, segundo y tercer género.—Se distinguen tres géneros de palancas, segun la posicion relativa de la potencia, de la resistencia y del punto de apoyo.

La palanca de primer género es aquella en la cual el punto de apoyo O (fig. 73) está situado ente la potencia P y la resistencia R. Las dos fuerzas obrando entonces en el mismo sentido, el punto de apoyo sufre una carga igual á su suma.

La palanca de segundo género se distingue por encontrarse la resistencia R (fig. 74) entre el punto de apoyo O y la potencia P. Entonces la resistencia es mayor que la potencia, están por otra parte dirigidas en sentidos contrarios, y la carga en el punto de apoyo es igual á la diferencias de ellas.

La palanca de tercer género tiene la potencia P (fig. 75) situada entre la resistencia R y el punto de apoyo O.

Condiciones de equilibrio.—Para establecer la condicion de equilibrio de esta máquina, notaremos que todo sistema de fuerzas aplicadas á un cuerpo puede reducirse á dos, no reducibles á una sola, de las cuales una pasa por un punto dado del cuerpo.

Si éste tiene un punto fijo alrededor del cual puede girar libremente, se puede elegir este punto para aplicar en él una de estas dos fuerzas á que es reducible el sistema. Esta fuerza será destruida por la resistencia, supuesta infinita, del punto fijo, y para que el cuerpo sometido á la accion única de la segunda fuerza permanezca en equilibrio, es necesario que esta fuerza sea nula por sí misma, ó venga tambien á pasar por este punto fijo, para ser compuesta con la primera en una resultante única, destruida por el mismo punto. Basta para el equilibrio que el sistema de las fuerzas dadas sea reducible á una resultante única que pase por el punto fijo.

Aplicada al caso presente, esta condicion exige que las dos fuerzas P y Q (fig. 76) estén en un mismo plano con el punto O, y por otra parte, que los momentos de estas dos fuerzas con relacion al punto O sean iguales, es decir, que se tenga $P \times Om = Q \times On$. Es, por otra parte, evidente que las dos fuerzas P y Q deben obrar en sentidos contrarios sobre la palanca, pues de otra manera, en lugar de destruirse sus efectos, se sumarian para imprimirla un movimiento de rotacion.

En resúmen, para el equilibrio de la palanca es necesario y suficiente: primero, que la potencia y la resistencia estén en un mismo plano con el punto de apoyo; segundo, que estas fuerzas tiendan á hacer girar á la palanca en sentidos contrarios, y tercero, que sus intensidades estén en relacion inversa de los brazos de palanca, pues de la igualdad $P \times Om = Q \times On$ se deduce

$$\frac{P}{Q} = \frac{On}{Om}$$

En las palancas de primer género no está favorecida ni la potencia ni la resistencia, sino que segun se ve de la igualdad, para que el equilibrio exista, la potencia ó la resistencia estarán favorecidas, segun que el brazo de palanca correspondiente sea mayor ó menor; mientras mayor sea el brazo de palanca de la potencia, con una fuerza menor correspondiente para ésta, equilibrará una resistencia mayor: de modo que no se puede precisar si la potencia ó la resistencia debe ser la mayor para que exista equilibrio. En la de segundo género, estando la resistencia entre el punto de apoyo y la potencia, vemos que á esta última corresponde mayor brazo de palanca; luego la potencia se halla favorecida, de modo que para el caso de equilibrio bastará con una potencia menor para equilibrar una resistencia mayor.

En las de tercer género, encontrándose la potencia entre el punto de apoyo y la resistencia, corresponde á aquélla un brazo de palanca menor que á ésta; luego para que el equilibrio exista, es necesario que la potencia sea mayor que la resistencia y dirigida en sentido contrario que ésta.

Las condiciones de equilibrio vemos que son las mismas para los tres casos, pues todas ellas se deducen de la igualdad $P \times Om = Q \times On$. Se conserva la distincion de los tres géneros, no porque ésta tenga importancia alguna en la teoría, sino porque designan más brevemente palancas más ó ménos útiles en la práctica, segun los casos.

Se ve que, hecha abstraccion del peso propio de la palanca, la carga soportada por el punto de apoyo es precisamente la resultante de las dos fuerzas concurrentes Q y P. Si éstas son paralelas, la carga del punto de apoyo es igual á su suma, y si ellas son iguales, esta carga es doble que una cualquiera de ellas.

Si ahora suponemos que la máquina haya sufrido un pequeño movimiento angular $\varkappa$, los puntos de aplicacion A y B (fig. 77) habrán recorrido los pequeños arcos AA' y BB', que estarán representados en longitud por $AO\times\varkappa$, $BO\times\varkappa$, y se confundirán sensiblemente con las perpendiculares levantadas en A y B sobre las líneas AO y BO. Sean entonces Aa y Bb las proyecciones respectivas de estos arcos sobre las direcciones de las fuerzas, y el trabajo de la potencia P, ó trabajo motor, estará representado por $P\times Aa$, y el resistente por $Q\times Bb$.

Pero los dos triángulos aAA' y AOm son semejantes, por ser rectángulos y tener los ángulos aAA' y AOm formados por lados respectivamente perpendiculares, y dan:

$$Aa : AA' = AO\times\varkappa :: Om : OA, \text{ de donde } Om = \frac{Aa}{\varkappa}$$

y

$$Bb : BB' = OB\times\varkappa :: On : OB \quad \text{»} \quad \text{»} \quad On = \frac{Bb}{\varkappa}$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion $P\times Om = Q \times On$, que expresa la condicion de equilibrio, resulta

$$P\times\frac{Aa}{\varkappa} = Q\times\frac{Bb}{\varkappa}, \text{ ó } P\times Aa = Q\times Bb$$

es decir, la igualdad de trabajo para que haya equilibrio.

Recíprocamente, si admitimos como demostrada la igualdad $P\times Aa = Q\times Bb$, deduciríamos fácilmente las condiciones de equilibrio reemplazando las cantidades

Aa y Bb por sus valores respectivos $Om \times x$ y $On \times x$, calculados como se acaba de decir, y se tendrá:

$$P \times Om \times x = Q \times On \times x, \text{ ó bien } P \times Om = Q \times On$$

Podemos tambien observar que siendo los arcos proporcionales á los radios, tendríamos:

$$AA' : BB' :: AO : BO$$

de donde se sigue que los espacios recorridos por los puntos de aplicacion de las fuerzas son entre sí como las distancias de estos puntos al fijo. En cuanto á los caminos recorridos, apreciados en la direccion de las fuerzas, la ecuacion del trabajo demuestra que están en razon inversa de las intensidades de estas fuerzas, ó en la relacion directa de sus brazos de palanca Om y On.

Si $On = o$, se tiene $Bb = o$, que demuestra que, si bien con cualquier fuerza se puede vencer una resistencia Q infinita, en cambio, no recibirá ningun movimiento el punto de apoyo, cualquiera que sea el que reciba el punto de aplicacion de la potencia.

En qué casos debe usarse cada una de ellas.—Si se quiere con una potencia dada vencer una resistencia mucho mayor que ella, conviene aplicar la palanca de *primer género*, de brazos desiguales, puesto que en este género de palanca, la fuerza que está favorecida, es decir, la que vence ó equilibra á otra de mayor intensidad, es aquella que está aplicada al brazo mayor de la palanca.

Debemos, sin embargo, hacer observar que lo que se gana en fuerza se pierde en velocidad. En efecto, consideremos una palanca de primer género en la cual el brazo de la resistencia sea 1, y el de la potencia sea

100. Como sabemos que la potencia y la resistencia están en razon inversa de los brazos de palanca, tendremos $\frac{P}{R}=\frac{1}{100}$, de donde $P=\frac{R}{100}$; de modo que con una potencia como *1* se puede equilibrar una resistencia como *100*.

Supongamos que en vez de tener simplemente en equilibrio á la resistencia, se le hace recorrer un camino BB' (fig. 77) en sentido contrario de la direccion de la resistencia; entonces el punto A recorrerá un espacio cien veces mayor, pues los arcos son proporcionales á los radios, y OA es cien veces mayor que OB; luego si la máquina permite con una potencia como *1* vencer una resistencia como *100*, exige, por el contrario, que el punto de aplicacion de la potencia recorra un camino cien veces mayor que el recorrido por el de la resistencia; de suerte que esta palanca conviene su empleo cuando no se exija vencer á la resistencia rápidamente.

Debe, sin embargo, tenerse presente en esta palanca la resistencia del punto de apoyo, es decir, que no podemos aplicar fuerza que pase de cierto límite, pues como en las palancas de este género actúa sobre él una resultante igual á la suma de la potencia y de la resistencia, vemos que si éstas fueran excesivas, la resultante podia hacer que la palanca se rompiese por el punto de apoyo.

En la palanca de *segundo género* tambien se encuentra favorecida la potencia, puesto que el punto de aplicacion de ésta, encontrándose más alejado del de apoyo que el de la resistencia, sigue siendo mayor en este género de palanca el brazo de la potencia que el de la resistencia; de modo que pueden aplicarse estas palancas en los mismos casos que las de primer género, y además el punto fijo sufre una presion menor que en el caso anterior, pues la resultante de estas fuerzas es igual á su diferencia.

En la palanca de *tercer género* el punto de apoyo sigue aún en una de las extremidades, pero el punto de aplicacion de la potencia está más cerca de él que el de la resistencia; luego esta última fuerza se encuentra favorecida, pero este inconveniente está compensado con la circunstancia favorable de que los puntos que hay que mover recorren un gran espacio para un pequeño desplazamiento del punto de aplicacion de la potencia; de manera que esta clase de palanca debemos emplearla cuando dispongamos de una gran potencia y queramos que una resistencia pequeña recorra un gran espacio.

Ejemplos prácticos.—Cuando se trata de que un hombre mueva un gran bloque que exceda mucho en peso al que un hombre puede levantar directamente, sin auxilio de ninguna máquina, y actuando de arriba abajo, se hace uso de la palanca de primer género: en la figura 78 vemos que la potencia está aplicada en *b*, pues es donde el hombre actúa en el sentido de la flecha, para vencer la resistencia aplicada en *a* y producida por el peso de la masa que se trata de levantar, y el punto de apoyo está representado por el cuerpo *o*, donde se apoya la palanca: la potencia y la resistencia obran ambas en el mismo sentido de arriba abajo; luego estamos en el caso de una palanca de primer género, pues el punto de apoyo se encuentra entre la potencia y la resistencia, obrando estas dos fuerzas en el mismo sentido.

Si se quisiera trasportar tierras, por ejemplo, de un punto á otro, haríamos uso de la carretilla (fig. 79); ésta es una palanca de segundo género, puesto que el punto de apoyo se encuentra en el eje de la rueda, la resistencia en la caja de la carretilla, y la potencia está aplicada en los brazos: vemos, además, que puede emplearse para vencer resistencias superiores á la potencia, que es la fuerza del hombre; luego esta máquina favorece á la potencia.

Como ejemplo de palanca de tercer género, tenemos las formadas por los huesos de los animales vertebrados, pues si consideramos el antebrazo en un hombre, vemos que forma una palanca en la cual el punto de apoyo está en la articulacion del antebrazo con el brazo, la potencia la produce uno de los músculos del mismo, y la resistencia se encuentra en el cuerpo que se encuentra en la mano; de modo que la potencia se encuentra entre el punto de apoyo y la resistencia, que, como sabemos, es lo que caracteriza á las palancas de tercer género.

XLII

Nombres y clases de material de las palancas empleadas en las obras.—Palancas.—Espeques.—Perpales.—Palanquetas.

Nombres y clases de material de las palancas empleadas en las obras.—Los nombres de las palancas más generalmente empleadas en las obras dependen de su longitud y del material de que están formadas, y se llaman palancas, espeques, perpales y palanquetas.

El material de que están formadas es la madera y el hierro.

Palancas.—Son unas barras de madera escuadreadas, de unos dos metros de longitud, estando adelgazadas por uno de sus extremos con objeto de poderlas introducir con facilidad debajo del cuerpo que se trata de mover; por el otro extremo están en general labradas en forma cilíndrica, á fin de evitar se lastimen los obreros al hacer fuerza en él.

Espeques.—Son de la misma forma que las palancas, diferenciándose únicamente en su longitud, que varía entre 1^m á $1^m,50$.

Se emplean más bien para introducirlos en los huecos que llevan algunas máquinas para facilitar el movimiento de ellas.

Perpales.—Son unas barras de hierro de forma cilíndrica adelgazadas por uno de sus extremos y de 2 metros de longitud. El uso más frecuente de ellos es en la explotacion de canteras, introduciendo la parte adelgazada entre las hendiduras que presentan las rocas, y hacer saltar trozos de ellas actuando por el otro extremo.

Palanquetas.—Tambien son barras de hierro de forma cilíndrica, terminando por uno de sus extremos en una pirámide cuadrangular y por el otro en un corte. Se emplean en las obras para separar las piedras que forman los muros, golpeando con ellas entre las uniones de los sillares con el extremo que presenta el corte, y tambien para derribar los tabiques, haciendo uso en este caso de cualquiera de sus extremos.

La longitud de las palanquetas varía de 1 metro á $0^m,80$, y la seccion de 3 á 4 centímetros de diámetro.

XLIII

Descripcion, uso y condiciones de equilibrio de las balanzas, romanas y básculas.—Método de las dobles pesadas.

Descripcion, uso y condiciones de equilibrio de las balanzas, romanas y básculas.—Llámase *balanza* á unos aparatos que sirven para determinar el peso relativo de los cuerpos.

La balanza ordinaria consiste en una palanca de primer género *mn* (fig. 80), llamada *cruz de la balanza*, la cual está sostenida por su punto medio; de los dos extremos de la cruz cuelgan los platillos *P* y *Q*, ambos del mismo peso. La cruz se halla atravesada en su mitad por el prisma de acero *OK* (fig. 81) llamado *cuchillo*, y á fin de que tenga muy poco rozamiento la arista viva de este cuchillo, la cual es el *eje de suspension* de la cruz, descansa por sus dos extremos en dos piezas pulimentadas *x* é *y*, de ágata ó de acero, que constituyen la *chapa*.

En sus dos extremos está tambien la cruza travesada por otros dos prismas triangulares, aunque menores, y con la arista viva-puesta hacia arriba (fig. 82); de esta arista cuelgan por medio de unos ganchos los dos platillos *P* y *Q*. Por último, en la parte superior de la cruz, y hacia la mitad de la misma, se halla fija una aguja larga, que oscila delante de un pequeño arco graduado, fijo en una columna de laton que sostiene la chapa sobre la que descansa la cruz; cuando ésta queda horizontal, la punta de la aguja señala el medio del arco; dicha aguja se llama *fiel de la balanza*. La columna suele apoyarse sobre un trípode, y por medio de tres tornillos que hay en él, permiten colocarla en posicion vertical.

Uso de la balanza.—Por la definicion vemos que este aparato sirve para darnos á conocer el peso relativo de los cuerpos. Para ello se coloca en uno de los platillos el cuerpo cuyo peso deseamos saber, y en el otro se van echando pesas conòcidas, hasta que el fiel marque el centro del arco; entonces el valor de estas pesas nos indicará el del cuerpo, pues al señalar el fiel de la balanza el expresado punto, nos indica que las dos fuerzas potencia y resistencia, que son en este caso las pesas y el cuerpo, se han equilibrado; pero por la ecuacion de equilibrio en la palanca de primer género, vemos que esta condicion nos viene expresada por la fórmula $P \times mo = Q \times no$; pero como por construccion $mo = no$, P será igual á Q; es decir, que las pesas empleadas nos dan el peso del cuerpo.

Condiciones de equilibrio de la balanza.—Siendo la balanza una palanca de primer género, vemos que las condiciones de equilibrio de ella han de ser las mismas que las de ésta, únicamente modificadas por las que lleve consigo la construccion del aparato.

Se dice que una balanza está en equilibrio cuando, poniendo en sus platillos pesos iguales, la cruz permanece horizontal; para conseguir este doble objeto, debe cumplir con cuatro condiciones:

1.ª *Los brazos de la cruz deben ser perfectamente iguales.*—Si esto no fuese así, sucederia que, siendo los pesos iguales, la cruz se inclinaria hacia el lado donde estuviera el brazo mayor, pues la ecuacion de equilibrio de la palanca de primer género nos da $P \times om = Q \times on$, y como $P = Q$, si *om* no es igual á *on*, la igualdad anterior no se puede verificar; es decir, que el equilibrio no existe.

Para conocer si la balanza cumple con esta condicion, se colocan dos pesos que se equilibren en una posicion; despues se les cambia de platillos, y si los brazos son iguales, permanecerá en equilibrio la cruz.

2.ª *La balanza debe estar en equilibrio cuando los platillos están vacíos.*—Sin esto, es evidente que los cuerpos cuyos pesos se comparan, debiendo restablecer el equilibrio obrando en las extremidades de brazos iguales, no pesarian lo mismo.

Si las dos condiciones precedentes se cumplen y si se hace abstraccion del peso de la cruz, ó lo que viene á ser lo mismo, si el eje de suspension pasa por su centro de gravedad, el equilibrio tendrá lugar en todas las posiciones de la cruz, porque los pesos iguales estarán siempre aplicados á brazos de palanca iguales. Para que el equilibrio no pueda tener lugar más que en la posicion horizontal es preciso, pues, una nueva condicion, y es la

3.ª *El centro de gravedad de la cruz no debe confundirse con el punto de apoyo, y debe encontrarse con este punto en una misma perpendicular á la longitud de ella.*—En efecto, para que un cuerpo pesado suspendido libremente por un punto fijo *O* (figura 81) esté en equilibrio, es preciso, y basta, que la recta *Og* pase por el punto fijo y por el centro de gravedad, pues considerando, en vez de la accion de la gravedad que obra sobre todas las moléculas del cuerpo, el peso de éste aplicado á su centro de gravedad, esta fuerza estará destruida por la resistencia del punto de apoyo cuando la recta Og es vertical. Si, al contrario, esta recta estuviera dirigida segun Og', la fuerza P podria descomponerse en dos: una segun la prolongacion de Og', que estaria destruida por la resistencia del punto de apoyo, y la otra perpendicular á la direccion de esta recta, y que tenderia á hacer girar al cuerpo alrededor de dicho punto; luego para que el equilibrio de la balanza exista es, pues, necesario que el punto de apoyo y el centro de gravedad se encuentren en una misma vertical; pero entonces la cruz es horizontal.

El centro de gravedad no puede encontrarse en el punto de apoyo, pues entonces la cruz estaria en equilibrio indiferente, y el efecto de la gravedad sobre ella quedaria destruido en todas las posiciones que tomase, y por lo tanto, la cruz no oscilaria, limitándose únicamente á inclinarse por el lado donde hubiera exceso de peso, sin tender á recobrar su antigua posicion de equilibrio; recibiendo en este caso la balanza la denominacion de *perezosa*.

4.ª *El centro de gravedad debe encontrarse debajo del punto de apoyo*, porque de no ser así, la cruz se hallaria en equilibrio inestable, y al menor cambio de posicion tenderia ya á separarse cada vez más de su primitiva posicion de equilibrio, y tendríamos lo que se llama una balanza *loca*; éste es un defecto que debe evitarse al construir la balanza, pero tambien llevan algunas en la cruz un tornillo t (fig. 82) enroscado en una tuerca abierta en el mismo cuchillo, de modo que moviendo el tornillo el cuchillo sube ó baja, y así podemos buscar la distancia más conveniente del centro de gravedad al punto de suspension para que la balanza cumpla.

Cuando las condiciones expuestas se cumplen, la balanza con los platillos vacíos toma por sí misma la posicion horizontal de equilibrio, sucediendo otro tanto cuando los platillos sostienen pesos iguales, porque representando éstos dos fuerzas iguales, aplicadas á brazos de palanca tambien iguales, se produce el equilibrio.

Si los pesos son desiguales, la cruz se inclina hacia el mayor peso, siendo de notar que puede siempre la cruz inclinarse de modo que su peso equilibre la diferencia de los colocados en los platillos.

En efecto, llamemos P uno de los pesos y $P+p$ al otro, Q el peso de los platillos, cadenas, etc., y q el peso de la cruz; sean E', H y F' (fig. 83) las intersecciones de las aristas con un plano vertical, $E'F'$ la posicion de la cruz cuando está horizontal, g la posicion que entonces ocupa el centro de gravedad, EF la nueva posicion de la cruz cuando está en equilibrio, y G la que el centro de gravedad toma al inclinarse la cruz; ésta se halla solicitada en sentidos contrarios por dos pesos, uno la diferencia de los dados $P+p$ y P, y el otro el peso q de ella, cuyos momentos con relacion al punto H son $p\times Ee$, y el otro $q\times Gg$; pero mientras los factores p y q permanecen constantes para todas las inclinaciones, los Ee y Gg varían, decreciendo el Ee desde $E'H$ hasta cero y el Gg creciendo desde cero hasta HG; debe, pues, haber un ángulo de inclinacion EHe, para el cual los dos momentos sean iguales, en cuyo caso habrá equilibrio.

Pasemos á determinar esa posicion, y para abreviar llamemos $HE'=HF'=a$ y $HG=b$.

Supongamos que la cruz haya tomado la posicion de equilibrio EF, en la cual forma un cierto ángulo con la horizontal: el punto G se halla fuera del plano vertical zz', trazado por el eje de suspension H. Las fuerzas que obran en el plano son $Q+P+p$ aplicada al punto E segun la vertical, la $Q+P$ aplicada en F, y el peso q de la cruz aplicado en G, y por último, la reaccion del plano donde se apoya la arista del cuchillo y aplicada en H.

Todas estas fuerzas son verticales, se equilibran, y por consiguiente, la reaccion del apoyo es igual á la suma de los pesos $2Q+2P+p+q$.

Para encontrar la condicion de equilibrio que define la posicion de la cruz, apliquemos el teorema de los momentos tomados con relacion al eje proyectado en H, y tendremos:

$$(Q+P+p)\times Ee=q\times Gg+(Q+P)\times Ff$$

pero la línea EF siendo recta y el punto H su medio, se tendrá $Ff=Ee$, y la ecuacion precedente se reduce á

$$p\times Ee=q\times Gg, \text{ ó bien } \frac{Ee}{Gg}=\frac{q}{p}$$

Ahora bien; los triángulos EeH y GHg son rectángulos en e y en g, y tienen además los ángulos $HEe=GHg$; luego son semejantes y dan la proporcion

$$\frac{He}{Gg}=\frac{HE}{HG}=\frac{a}{b}$$

y dividiendo miembro á miembro estas dos ecuaciones, tendremos

$$\frac{Ee}{He}=\frac{q}{p}\times\frac{b}{a}$$

Esta relacion define el ángulo EHe que debe hacer la cruz con la vertical para que sin ser horizontal esté en equilibrio, porque permite construir un triángulo semejante al EHe, en el cual la hipotenusa EH será la posicion buscada.

En las balanzas, además de sus condiciones de equilibrio, debemos estudiar las de *sensibilidad*, pues llenará tanto mejor su objeto cuanto más sensible sea.

Se dice que una balanza es *sensible* cuando empieza á oscilar á la menor diferencia de peso.

Condiciones de sensibilidad.—Una balanza es tanto más sensible á igualdad de las demás circunstancias:

1.ª *Cuanto más largos son los brazos de la cruz.*

2.ª *Cuanto más ligera es ésta.*

3.ª *Cuanto más cerca se halla el centro de gravedad de la cruz del eje de suspension.*—Estas tres condiciones se reconocen desde luego: en efecto, acabamos de demostrar que la fuerza que inclina á la cruz es el exceso de los pesos que actúa sobre el brazo de palanca Ee; pero siendo éste igual á la proyeccion de EH sobre EH, será tanto mayor cuanto más lo sea el brazo de la cruz; luego á la par que la longitud de ésta crece la accion de p. Además, puesto que la resistencia que se opone á la inclinacion de la cruz es su peso q aplicado al brazo de palanca Hi, siendo ésta la proyeccion de $HG=Hg$, cuanto menores sean las cantidades p y Hg, tanto menor será la resistencia á la inclinacion, lo que demuestran la 2.ª y 3.ª condicion.

4.ª *Los tres puntos de suspension de los platillos y de la cruz deben hallarse en línea recta.*—Para probarlo, supongamos primero que el punto de suspension o de la cruz se halla encima de la recta mn (fig. 84), que une los puntos de suspension de los platillos, y sean P y Q los pesos colocados en éstos, y llamemos p' el exceso del mayor P sobre el menor Q. La resultante R de los dos pesos P y Q equivaldrá á $p' + 2Q$; pero actuando la primera parte p' sobre m, tirará allí de la cruz para inclinarla por ese lado, mientras que obrando la segunda parte $2Q$ sobre K, punto medio de mn, concurrirá con el peso q de la cruz para hacerla oscilar en sentido contrario. La balanza será por lo tanto poco sensible, es decir, *perezosa*.

Si el punto o estuviera debajo de la mn (fig. 85), descompondríase como antes la resultante de los dos pesos P y Q en un peso p' aplicado en m, y en otro $2Q$ aplicado en K, punto medio de la línea mn; pero actuando en este caso uno y otro en el mismo sentido para inclinar la cruz, la balanza ganaria en sensibilidad. Sin embargo, por otro concepto sería desventajosa, porque superando las más veces la suma de los momentos p' y $2Q$ respecto al punto o, al momento de q con relacion al mismo punto, la balanza sería lo que se llama *loca*.

Estos inconvenientes desaparecen hallándose en línea recta los tres puntos m, o y n, porque entonces, actuando el peso $2Q$ sobre el mismo punto o, la resistencia de éste lo destruye y la cruz se inclina sólo por la accion del peso p' que obra sobre m, siendo, por lo tanto, en tal caso independiente la sensibilidad de la balanza de la magnitud de los dos pesos P y Q, prescindiendo por completo del rozamiento del cuchillo contra la chapa, que es tanto mayor cuanto más cargada se encuentra la balanza.

5.ª *Para la carga mayor que la balanza puede* *soportar, la cruz debe ser inflexible*, pues si se doblara, no sólo su centro de gravedad bajaria, sino tambien los puntos de suspension de los platillos.

6.ª *El rozamiento en los puntos de apoyo del cuchillo y en los de suspension de los platillos debe ser el menor posible*, pues sabemos que una de las resistencias pasivas que se oponen al movimiento es el rozamiento.

Descripcion, uso y condiciones de equilibrio de las romanas.—La *romana* es una palanca recta de primer género, de brazos desiguales, con la cual se puede hallar el peso de los cuerpos con un peso único móvil á lo largo del brazo mayor.

La cruz BC es móvil con un eje H (fig. 86) que forma cuerpo con ella, siendo la forma de este eje de una doble cuchilla, para disminuir los rozamientos; este eje atraviesa unas armas que terminan en un gancho, para suspender el instrumento de un punto fijo.

En el extremo B hay uno ó dos ganchos para suspender el cuerpo cuyo peso se desea conocer; en el otro brazo hay un peso P unido á un anillo, el cual puede resbalar á lo largo en la barra graduada HC. El centro de gravedad de la cruz y de todos los accesorios unidos á ella se encuentra, cuando la barra BC es horizontal, en un punto G, situado en la vertical que pasa por H y debajo de este punto.

Cuando se ha obtenido el equilibrio y la barra BC es horizontal, las fuerzas P y Q, el peso q de la cruz aplicado en G y la tension T de la armadura AH, que suspende á la balanza, se equilibran; la tension T es, pues, vertical é igual á la suma $P+Q+q$ de todos estos pesos; además, tomando los momentos con relacion al punto H, tendremos

$$P \times HD = Q \times BH$$

de donde $Q = HD \times \frac{P}{BH}$ (x)

El peso P y la longitud BH son cantidades constantes; el peso buscado Q es, pues, proporcional á la distancia variable HD. Haciendo en la barra HC una graduacion conveniente, se podrá, pues, leer en ella el peso buscado.

Para hacer esta division de la recta HC, se pondrá el cero de la escala en el punto H; despues se dará á Q el valor 1 kg. en la ecuacion precedente, y ella nos dará el valor correspondiente de la distancia HD, ó más bien la relacion de HD á BH. Pero esta manera de proceder exige el conocimiento del peso P. Se evita la determinacion preliminar de este peso buscando empíricamente la posicion que conviene darle para equilibrar un peso Q determinado, 1 kg., por ejemplo. Se conoce entonces dos puntos de la escala, y nada más sencillo ya que terminar su construccion.

Si el centro de gravedad G de la cruz no se encontrase en la vertical que pasa por H, el aparato podrá servir aún para medir pesos, pero será preciso introducir un nuevo término en la ecuacion (x) para tener en cuenta el momento del peso q de la cruz.

Tendremos entonces (fig. 87):

$$Q \times BH = Q \times HL + P \times HD$$

y por consiguiente

$$Q=q\times\frac{HL}{BH}+P\times\frac{HD}{BH}$$

El término $q\times\frac{HL}{BH}$ es constante: el segundo término $P\times\frac{HD}{BH}$, es proporcional á HD; el peso buscado es, pues, una *funcion lineal* de la distancia HD. La graduacion de la barra se hará por los mismos principios anteriormente expuestos, pero el cero de la escala no estará ya en H.

Observaremos que la disposicion que lleva el centro G debajo del punto H aumenta la sensibilidad del aparato, segun vimos al tratar de las balanzas, asegurando además la estabilidad de su equilibrio. Se aumentará aún la sensibilidad de la romana, es decir, la inclinacion tomada por la cruz bajo la accion de una pequeña diferencia entre el peso buscado y el leido en la escala aproximando el púnto G al punto H.

Se ve que la romana puede ser útil en muchas circunstancias en que la balanza ordinaria no sería de uso alguno, puesto que ésta exige diferentes pesos para pesar los diferentes cuerpos, mientras que la romana sólo exige uno.

Tiene tambien la ventaja de que el punto de apoyo ó de suspension sufre ménos por la carga ó presion de los cuerpos que se pesan, porque en la balanza ordinaria esta presion es doble del peso del cuerpo, ó $2Q$; mientras que en la romana es simplemente $Q+p$, ó solamente Q; es decir, la mitad del precedente si se quiere considerar al peso p como formando parte del peso total de la máquina.

Se puede variar esta balanza de diferentes maneras, haciendo móvil, en lugar del peso P, el Q del cuerpo que se trata de pesar, ó bien el punto de suspension de la cruz, lo que daria lugar á diferentes construcciones; pero el principio es siempre el mismo.

Las romanas más usuales tienen en general dos ganchos de suspension y dos graduaciones diferentes, que corresponde cada una á un gancho; de manera que se puede á voluntad valuar pesos más pequeños ó mayores empleando uno ú otro de los ganchos.

Descripcion, uso y condiciones de equilibrio de las básculas.—La *báscula* es una palanca de primer género, de brazos desiguales, y construida de modo que el peso buscado está equilibrado por otro más pequeño, diez veces más pequeño, por ejemplo. La más usada es la de Quintez, y es la que vamos á describir.

Se compone de una plataforma móvil que puede subir y bajar sin dejar de ser horizontal, y que está destinada á recibir los cuerpos cuyos pesos se buscan; de un platillo suspendido de la misma manera que los de una balanza ordinaria, y por último, de un sistema de dos palancas que relaciona una con otra estas dos partes de la máquina, y que giran alrededor de ejes fijos horizontales y paralelos entre sí. El sistema establece ligazones tales, que un desplazamiento vertical infinitamente pequeño comunicado á la plataforma, produce en el platillo otro desplazamiento vertical proporcional. Sea, pues, P el peso, colocado en el platillo, que equilibra al peso Q buscado, colocado en la plataforma (figura 89).

Si se imprime á la plataforma segun la vertical un desplazamiento virtual infinitamente pequeño ε, el platillo experimentará otro desplazamiento vertical en sentido inverso ε', y se tendrá para el equilibrio la ecuacion del trabajo:

$$Q\times\varepsilon=P\times\varepsilon', \text{ ó bien } Q\times\varepsilon-P\times\varepsilon'=0$$

de manera que el peso buscado Q será igual á la fraccion $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ del peso conocido P, que los equilibra. Queda, pues, valuar la fraccion $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$.

Para hacerlo con más claridad, representemos el aparato cortado longitudinalmente por un plano perpendicular á los ejes de rotacion de las palancas móviles (figura 89). LD es la plataforma, y R el platillo; CA es la primera palanca móvil alrededor del eje H, y FE la segunda palanca móvil alrededor del eje F. El platillo R está suspendido en el punto A de la palanca AC. La plataforma está sostenida por dos puntos D y M; uno de éstos, el D, está unido á la primera palanca por una varilla vertical rígida articulada en D y en B; el otro punto M de la plataforma descansa en un punto G de la segunda palanca por una arista de contacto, normal al plano de la figura. En fin, una varilla rígida vertical articulada en E y en C refiere una de las palancas á la otra. Supongamos establecido el equilibrio entre los pesos P y Q, y que en esta posicion las dos palancas AC y FE sean horizontales. Imprimamos á la plataforma, segun la vertical, un desplazamiento infinitamente pequeño ε, que nosotros suponemos que se efectúa de arriba abajo. Para esto es preciso que todos los puntos de la plataforma desciendan á la vez cantidades iguales. Es preciso, pues, que los puntos D y M bajen á la vez la misma cantidad, lo cual impone una condicion á la construccion del aparato. En efecto, el punto D, al descender la cantidad ε, el punto B, unido invariablemente al D por la varilla rígida BD, baja tambien la misma cantidad: el punto M, al bajar la magnitud ε, comunica este mismo descenso al punto G de la palanca FE; la palanca, pues, va á girar alrededor del punto fijo F, y el descenso ε de su punto G llevará consigo otro $\varepsilon \times \frac{FE}{FG}$ de su extremo E. Este descenso se trasmite íntegro al punto C de la palanca CH por medio de la varilla rígida CE; los puntos B y C de la misma palanca CH se bajan á la vez las cantidades ε y $\varepsilon \times \frac{FE}{FG}$; estos dos descensos simultáneos son, pues, proporcionales á las distancias BH y CH al punto fijo H, y por consiguiente la construccion de la báscula debe satisfacer á la relacion

$$\frac{\varepsilon \times \frac{FE}{FG}}{\varepsilon} = \frac{CH}{BH}, \text{ ó bien } \frac{FE}{FG} = \frac{CH}{BH} \quad (1)$$

Cuando esta condicion se cumple, los descensos simultáneos de los puntos D y M de la plataforma son iguales; y por consiguiente, los desplazamientos de ella, á partir de su posicion de equilibrio, se reducen á una traslacion vertical.

El peso Q, al bajar verticalmente la cantidad ε, produce un trabajo positivo $Q\varepsilon$. Pero el peso P sube al mismo tiempo una cantidad positiva ε', que es fácil calcular, porque es la cantidad que se eleva al punto A cuando el punto B de la primera palanca baja ε; luego

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=\frac{HA}{BH}, \text{ de donde } \varepsilon'=\varepsilon\times\frac{HA}{BH}$$

El peso P produce, pues, un trabajo negativo igual en valor absoluto á $P\varepsilon'$, y el equilibrio exige que se tenga

$$P\varepsilon'=Q\varepsilon$$

luego

$$Q=P\times\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=P\times\frac{HA}{HC} \quad (2)$$

es decir, que todo pasa como si el peso Q estuviese todo él enteramente suspendido de l punto B de la palanca.

Si se quiere equilibrar el peso Q con otro P diez veces menor, bastará hacer $HA=HB\times 10$.

En lugar del platillo R suspendido del punto fijo A de la primera palanca, y cargado con pesos variables. se podria no emplear más que un peso único P, que corriese á todo lo largo del brazo HA, como se hacía en la romana, y se puede tambien adoptar una combinacion de estos dos procedimientos.

La estabilidad y sensibilidad del aparato exigen aún que cuando la palanca CA es horizontal, su centro de gravedad esté situado en la vertical que pasa por el punto H, á poca distancia por debajo de este punto.

El desplazamiento vertical de la plataforma LD hace indiferente para la cuestion del equilibrio la posicion del peso Q sobre ella.

En la báscula, tal como se usa, se añade al aparato que acabamos de describir un puño para detener el movimiento cuando la báscula no debe funcionar, y unos indices nn' (fig. 90) que permiten juzgar de la horizontalidad de la palanca CA.

Vamos á tratar por medio del teorema del trabajo virtual la cuestion del equilibrio de la báscula. Trataremos la misma cuestion por las descomposiciones de las fuerzas; volveremos á encontrar las condiciones ya halladas, y además determinaremos las tensiones de las varillas EE y BD, así como las reacciones de los puntos fijos F y H.

El peso Q del cuerpo que se trata de pesar (fig. 91) está aplicado á su centro de gravedad g; descompongámosle en dos fuerzas paralelas q y q', aplicadas una en M y otra en D. La primera q será igual á

$$Q\times\frac{DI}{MD}$$

y la segunda q', á

$$Q\times\frac{MI}{MD}$$

La fuerza q se trasmite al punto g de la segunda palanca, que está por consiguiente en equilibrio bajo la accion de esta fuerza q, de la tension T, de la varilla CE y de la reaccion R del punto F; luego la reaccion del punto F es vertical é igual en magnitud y en signo á $q-T$, y la tension T estará dada por la ecuacion de los momentos tomados con relacion al punto F:

$$q\times FG=T\times EF$$

La fuerza q' se trasmite directamente á la varilla DC y es igual á la tension de esta varilla.

Luego la palanca AC está solicitada por las fuerzas

q', aplicada en B; T, en C; P, en A, y por último, la reaccion R', del punto H; luego

$$R'=q'+T+P$$

y

$$q'\times BH+T\times CH=P\times AH.$$

Reemplacemos á q' por su valor $Q\times\frac{MI}{MD}$ y á T por el suyo $q\times\frac{FG}{FE}=Q\times\frac{DI}{MD}\times\frac{FG}{EF}$ y tendremos

$$Q\times\left(\frac{MI\times BH}{MD}+\frac{DI}{MD}\times\frac{FG}{EF}\times CH\right)=P\times HA$$

ó bien

$$Q\times\frac{MI\times BH\times EF+DI\times FG\times CH}{MD\times EF}=P\times HA \quad (3)$$

ecuacion que da la relacion de Q á P.

Las ecuaciones precedentes dan á conocer las tensiones de las varillas y las cargas R y R' de los puntos fijos. La ecuacion (3) es más general que la (2). Se observará, en efecto, que contiene á las cantidades MI é ID, que definen la posicion del centro de gravedad del cuerpo sobre la plataforma, y que, por el contrario, no hemos tenido en cuenta para nada en este análisis la condicion expresada por la ecuacion (1). Efectivamente, la ecuacion (1) expresa que el solo movimiento posible de la plataforma es una traslacion vertical, y nosotros sabemos que en este movimiento es indiferente para la cuestion del equilibrio la posicion del cuerpo. Si tenemos en cuenta la ecuacion (1), las cantidades MI y DI deben desaparecer de la ecuacion (3). En efecto, la ecuacion (1) nos demuestra que los productos $BH\times EF$

y $FG \times CH$ son iguales entre sí; se puede, pues, reemplazar la fraccion

$$\frac{MI \times BH \times EF + DI \times FG \times CH}{MD \times EF}$$

por esta otra

$$\frac{(MI+DI) \times BH \times EF}{MD \times EF}$$

la cual se reduce á BH suprimiendo el factor comun EF y observando que $MI+ID=MD$. La ecuacion (3) se convierte en

$$Q \times BH = P \times HA$$

que no es otra que la (2).

Los cambios de posicion del cuerpo Q no modifican el equilibrio, una vez establecido, cuando la condicion (1) está satisfecha; pero tienen una influencia sobre los esfuerzos interiores desarrollados por las varillas BD y CE; si se aproxima, por ejemplo, el cuerpo al punto D, se aumenta la tension q' de la varilla BD, se disminuye la carga q del punto g, y por consiguiente, se disminuye la tension T de la varilla BE. Se puede colocar el cuerpo de tal manera que las tensiones T y q' sean iguales: basta para esto que se tenga la relacion $Q \times \frac{MI}{MD} = Q \times \frac{DI}{MD} \times \frac{FG}{EH}$ de donde, suprimiendo factores comunes, se deduce

$$\frac{MI}{ID} = \frac{FG}{EF}$$

Cuanto más se aproxima al punto M el centro de gravedad del cuerpo, más aumenta q, más disminuye T, y por consiguiente, más aumenta la carga R del punto fijo F, siendo $R=q-T$. En cuanto á la carga R' del punto fijo H, es $R'=P+q'+T$.

A medida que se aproxima el cuerpo al punto M, q' disminuye y T aumenta, y no se conoce á primera vista si la suma $P+q'+T$ varía, ni en qué sentido. Ahora bien, esta suma es constante si la condicion (1) está cumplida, porque entonces hemos visto que todo sucede como si el cuerpo Q estuviera suspendido del punto C; en este caso, la carga del punto A es, pues, constante é igual á $P+Q$, cualquiera que sea la posicion del cuerpo.

Método de las dobles pesadas.—Este método, imaginado por Borda, tiene por objeto eliminar los pequeños errores debidos á la construccion del aparato.

Si la balanza fuese perfecta, no se alteraria el equilibrio cambiando las cargas de los platillos; supongamos que esta verificacion no tenga lugar con entera exactitud; es decir, que un cuerpo cuyo peso x se busca, al ser colocado en el platillo de la derecha de la balanza, está equilibrado por un peso P colocado en el de la izquierda; el mismo cuerpo, colocado despues en este último platillo, está equilibrado por un peso P' colocado en el otro platillo. Esto indica que los dos brazos de la balanza no son iguales.

Se tendrá, pues, para el primer equilibrio la ecuacion (fig. 83):

$$P\times HE=x\times HF$$

y para el segundo

$$x\times HE=P'\times HF$$

y dividiendo miembro á miembro estas dos ecuaciones, tendremos

$$\frac{P}{x}=\frac{x}{P'}$$

de donde

$$x=\sqrt{P.P'}$$

El peso buscado es, pues, una media proporcional entre los dos pesos hallados. Estos pesos, siendo muy poco diferentes si la báscula está bien construida, se puede sustituir sin error su media aritmética $\frac{P+P'}{2}$ á la media geométrica hallada.

Tambien puede hallarse por otro método, valiéndose de la doble pesada, el peso de un cuerpo. Para ello se coloca el cuerpo cuyo peso se desea conocer en uno de los platillos, equilibrándole en el otro con arena bien seca ó con perdigones; se quita luego el cuerpo de su platillo, y en su lugar se ponen pesas, hasta que de nuevo se restablezca el equilibrio. El peso así obtenido es igual exactamente al del cuerpo, porque en esta doble pesada el cuerpo y las pesas actúan sucesivamente sobre un mismo brazo de palanca para equilibrar la misma resistencia.

XLIV

Descripcion y condiciones de equilibrio de las diversas clases de poleas.—Combinaciones de poleas y sus leyes de equilibrio.—Poleas diferenciales.—Polipastos.— Uso de estas máquinas en las obras públicas.

Descripcion y condiciones de equilibrio de las diversas clases de poleas.—La polea es una máquina compuesta de un disco circular sujeto á girar alrededor de un eje que lo atraviesa perpendicularmente; el contorno de este disco se halla rebajado, formando una canal que se llama *garganta*, donde se aloja una cuerda sobre la cual actúan inmediatamente las fuerzas.

El eje está generalmente sostenido por una *chapa* que abraza la polea, pudiendo de dos modos encontrarse dispuesto, ó bien formando cuerpo con el disco, en cuyo caso es móvil en agujeros circulares abiertos en la chapa, y giran entonces ambos á la par, ó bien atravesando, sin adherirse, un agujero abierto en el centro del disco, en cuyo caso dicho eje está fijo en la chapa, y únicamente gira el disco.

Cuando la polea está suspendida de un punto fijo y su eje de rotacion no tiene ningun movimiento de traslacion, la polea se dice que es *fija* (fig. 92). La polea *móvil* es aquella que tiene fijo uno de los extremos del hilo, y el eje tiene un movimiento de traslacion (figura 93).

La figura 92 representa una polea fija que supondremos reducida, para encontrar más fácilmente las condiciones de equilibrio, á un círculo ceñido en parte de su contorno por un hilo, sin otra dimension apreciable que su longitud, y perfectamente flexible, sobre el cual actúen dos fuerzas P y Q, una y otra situadas en el plano del círculo. Es evidente que el hilo, puesto tenso sobre el contorno del círculo por la accion de ambas fuerzas, quedará tangente á dicho contorno en los dos puntos en donde de él se desprenda, tomando por cada lado la direccion de la fuerza respectiva que le solicite; de modo que los radios CA y CB serán perpendiculares á las direcciones de las fuerzas P y Q. Mas pudiendo éstas trasladar sus puntos de aplicacion á los de contacto A y B, resulta la polea fija reducida á una palanca angular ACB, cuyos brazos son iguales y perpendiculares á las direcciones de las fuerzas P y Q. Luego para el equilibrio de esta palanca, y por consiguiente de la polea, habrán de ser tambien iguales dichas fuerzas P y Q, y además tender á hacer girar la polea en sentido contrario una de otra.

La carga R sobre el punto C, en el caso de equilibrio, es la diagonal CR del rombo $Cprq$ construido sobre las magnitudes Cp y Cq de las dos fuerzas iguales P y Q trasladadas paralelamente á sí mismas á dicho punto C. Pero siendo Cr bisectriz del ángulo pCq, y siendo además iguales como rectos los ángulos ACp y BCq, la prolongacion de Cr será bisectriz del ángulo ACB, y en su consecuencia perpendicular á la cuerda AB; como por otra parte Cp y pr ó Cq son respectivamente perpendiculares á las direcciones AC y BC, los triángulos Cpr y ACB son semejantes y nos darán

$$P \text{ ó } Q : R :: AC : AB.$$

Luego la ley de equilibrio de la polea fija será que *la potencia* P, *ó la resistencia* Q, *es á la carga que soporta el punto fijo como el radio de la polea es á la cuerda del arco que abraza el hilo.*

Si P y Q fuesen paralelas, el hilo abraza media circunferencia, y su cuerda es, por consiguiente, un diámetro, y como las fuerzas son iguales, la resistencia entonces es doble que la potencia.

Supongamos ahora la polea móvil (fig. 93). Un extremo del hilo se halla fijo; en el otro actúa la potencia P, y sobre el centro de la polea, por el intermedio de la chapa, actúa la resistencia Q: todos estos diversos elementos, círculo, hilo y fuerzas, se hallan contenidos en un mismo plano. Ahora bien; para el equilibrio de la polea, será menester que la fuerza Q sea igual directamente opuesta á la resultante de la fuerza P y de la traccion ejercida por medio del hilo sobre el punto F. Pero al quedar tenso el hilo, resultará como en la polea fija, tangente en los puntos A y B á la circunferencia que en parte abraza, lo cual manifiesta que las direcciones de la fuerza P y de la traccion ejercida en F equidistan del punto C; en su consecuencia, debiendo la resultante de dicha fuerza y traccion, como igual y contraria á la fuerza Q, hallarse dirigida hacia el punto C, la fuerza P y la traccion en F deberán ser iguales, y la fuerza Q estar dirigida segun la bisectriz del ángulo que aquéllas dos formen. Por donde se ve que la polea *móvil* es la misma polea *fija*, sin otra variacion que llamarse en una *resistencia* lo que en la otra se llama *carga*.

Resumiendo: en la polea *fija la potencia es igual á la resistencia, y cualquiera de estas dos fuerzas es á la carga que el punto fijo soporta como el radio de la polea es á la cuerda del arco abrazado por el hilo.*

En la polea *móvil, la potencia es igual á la carga sobre el punto fijo, y la potencia ó la carga es á la resistencia como el radio de la polea es á la cuerda del arco abrazado por el hilo.*

Tambien podíamos haber llegado á establecer las condiciones de equilibrio en la polea móvil, considerando á la potencia P y á la resistencia Q como aplicadas en los puntos A y C de la palanca angular ABC, cuyo punto de apoyo fuera C: la ley de equilibrio sería entonces por la teoría de la palanca

$$\frac{P}{Q}=\frac{CB}{AB}$$

que nos expresa las condicones ya encontradas.

Cuando el arco es igual á la sexta parte de la circunferencia, la cuerda es igual al radio, y la potencia es igual á la resistencia.

Si las dos partes del hilo son paralelas, entonces éste abraza media circunferencia, y la cuerda es el diámetro AB; la potencia en este caso es la mitad de la resistencia. Este es el caso más favorable á la potencia, porque el diámetro es la mayor de todas las cuerdas.

Si llamamos R á la resistencia del punto fijo, y Q la carga sobre el eje, éste será igual á $P+R$, y como son iguales, esta carga será igual á $2P$, ó sea el doble de la potencia.

El teorema del trabajo virtual confirma estos resultados. En el primer caso, cuando la *polea* es *fija*, si se hace recorrer al hilo una longitud ε en el sentido de la fuerza P, el peso Q sube la misma cantidad ε; luego segun la ecuacion del trabajo para el caso de equilibrio, $P\varepsilon=Q\varepsilon$, y por consiguiente, $P=Q$. En el caso de la *polea móvil*, el espacio ε recorrido por el punto de aplicacion de la fuerza P en el sentido de su direccion, equivale á un acortamiento del hilo equivalente á ε; este acortamiento se divide por mitad entre las dos ramas AF y BP, resultando para cada una un acortamiento de $\frac{\varepsilon}{2}$, y ésta es la cantidad que se levantan en su totalidad la polea, la chapa y el peso

Q; la ecuacion del equilibrio es, pues, $Q \times \frac{z}{2} = P \times z$; de donde $P = \frac{Q}{2}$.

Combinaciones de poleas y sus leyes de equilibrio.—Consideremos ahora un sistema de poleas móviles A, A', A'' (fig. 94). La primera A que sostiene un peso P, unido á su armadura, se encuentra rodeada por una cuerda que tiene una de sus extremidades fija en F, y la otra unida á la armadura de la polea siguiente A'; esta segunda polea está asimismo rodeada por una cuerda, la cual tiene una de sus extremidades fija en F', y la otra unida á la armadura de la tercera polea A'', y así sucesivamente hasta la última, cuya cuerda está fija en F'' por uno de sus extremos, y en el otro actúa la fuerza Q. Si todo el sistema está en equilibrio, cada polea lo está tambien en virtud de las fuerzas ó tensiones que obren sobre ella.

Llamando r, r', r'' los radios respectivos de las poleas, c, c', c'' las cuerdas de los arcos abrazados por los cordones, X la tension del primer cordon é Y la del segundo, para el equilibrio de la polea A tendremos

$$X : Q :: r : c$$

se tendrá asimismo para el equilibrio de la polea A'

$$Y : X :: r' : c'$$

para la tercera polea A''

$$P : Y :: r'' : c''$$

y multiplicando ordenadamente estas proporciones, resulta

$$P : Q :: r \times r' \times r'' : c \times c' \times c'' \text{ (b)}$$

es decir, que en la combinacion de las poleas móviles, *la potencia es á la resistencia como los productos de los radios de las poleas es al de las cuerdas de los arcos abrazados por los cordones.*

Si los cordones llegasen á ser paralelos (fig. 95), las cuerdas c, c', c'' se convertirán en los diámetros $2r$, $2r'$, $2r''$, y sustituyendo estos valores en la proporcion (δ), y dividiendo los dos términos de la última relacion por $r \times r' \times r''$, se tendrá

$$P : Q :: 1 : 2 \times 2 \times 2$$

lo que nos dice *que la potencia es á la resistencia como la unidad es al número 2 elevado á una potencia indicada por el número de poleas.*

Este es el caso más favorable para la potencia, porque el producto de las cuerdas $c \times c' \times c''$ es el mayor posible cuando ellas son iguales al diámetro.

Si en cada polea el arco subtendido por la cuerda fuese el tercio de la semicircunferencia, las cuerdas serian iguales á los radios respectivos de las poleas, y en este caso, la potencia sería igual á la resistencia.

Poleas diferenciales.—De estas poleas, la más generalmente usada es la reformada por Weston, y es la que vamos á describir. Se compone de una polea fija (figuras 97 y 98) que tiene dos roldanas de diverso diámetro (fig. 99), pero de eje comun; la mayor, *bb*, tiene en su garganta doce divisiones, y once la menor, *cc*; sujeta al mismo eje hay una armadura, *ddd*, en cuya parte superior se halla el gancho *ee*, que se fija en la pieza de suspension de una cabria ó en cualquier punto fijo. Una rueda *BB*, de brazos ahorquillados, cuyo eje es el de la polea, sirve para poner ésta en movimiento, para lo cual descansa en las horquillas de los brazos una beta *ff* que la hace girar, obrando sobre ella, y con objeto de que tenga siempre la direccion conveniente, pasa por las anillas *g* de dos brazos unidos á la armadura *hh*, sostenida tambien por el eje de la polea, y que tiene un contrapeso *j* para equilibrar el peso de los brazos. De la armadura de una polea móvil *C C* (fig. 100) pende el gancho destinado á sujetar las cuerdas unidas al objeto que se ha de mover; dicha polea *l* se halla suspendida por una cadena que pasa por las gargantas de las roldanas *bb* y *cc* en sentido contrario en ambas; el resto de la cadena queda colgando, como indica la figura. Imprimiendo movimiento á la beta, giran la rueda de brazos *BB* y la polea fija, elevando la móvil *l*, y con ella el objeto que se trata de mover. Un hombre puede elevar un peso de cuatro toneladas.

Vamos á ocuparnos de hallar la ecuacion de equilibrio por medio del teorema del trabajo virtual.

Supongamos (fig. 101) que hacemos descender al punto C la cantidad ε; el punto g del hilo subirá la misma cantidad; luego el punto c subirá la cantidad $\varepsilon \times \frac{Mc}{Mg}$ y esta cantidad medirá el descenso del punto d; luego el hilo que abraza el arco ef se eleva por la parte de f la cantidad ε, y baja por el lado de e, $\varepsilon \times \frac{Mc}{Mg}$; se acorta, por lo tanto, $\varepsilon \left(1 - \frac{Mc}{Mg}\right)$, y en su consecuencia, la polea B sube la mitad de dicha cantidad, ó sea $\frac{1}{2} \varepsilon \left(1 - \frac{Mc}{Mg}\right)$; tal es la cantidad que se eleva el peso Q. La ecuacion de equilibrio es, pues,

$$P\times z = Q\times \tfrac{1}{2} z\left(1-\frac{Mc}{Mg}\right)$$

ó bien

$$P=\tfrac{1}{2}Q\times\frac{Mg-Mc}{Mg} \quad (\gamma)$$

se desprecia el peso del hilo, sin lo que habria que introducir un término para representar el trabajo correspondiente.

Las tensiones de los hilos siendo desiguales en las partes que terminan en la polea superior, se ve que es necesario impedir el deslizamiento del hilo á lo largo de los arcos abrazados en esta polea si el frotamiento no bastase para asegurar este resultado, y por eso se agrega al aparato la rueda BB de brazos ahorquillados.

Además de esta polea diferencial, hay otras que no se diferencian de ella más que, en unas no existe la rueda BB de brazos ahorquillados que se llama *rueda de maniobra*, y éstas sólo requieren una cadena cuya longitud sea triple de la altura á que se sujeta la polea; éstas son más pequeñas que la descrita; en otras, la *rueda de maniobra* es excéntrica á la polea superior, y lleva un piñon que engrana con ella, requiriéndose siempre, en el caso de haber rueda de maniobra, una longitud de cadena cuádruple de la altura á que se coloca. Por lo demás, tanto estas últimamente enunciadas, como la primera descrita, tienen las mismas condiciones de equilibrio, con la única diferencia de llevar á ellas las variaciones de existir ó no la rueda de maniobra y el piñon. Así, pues, para aquella en que no existe rueda de maniobra, si llamamos P á la potencia, Q al peso que hay que levantar, r al radio mayor y r' al radio menor, la ecuacion de equilibrio es

$$P=\tfrac{1}{2}\frac{Q\,(r-r')}{r}$$

cuando existe rueda de maniobra que no es excéncrica, la fórmula es

$$P=\tfrac{1}{2}\frac{Q\,(r-r')}{R}$$

llamando R al radio de la rueda de maniobra, y si ésta es además excéntrica, llamando r_1 al radio del piñon y r_2 á la distancia del centro de aplicacion de ésta al centro de la polea, tendremos

$$P : Q :: r_1 \times \tfrac{1}{2}(r-r') : R\times r_2$$

de donde

$$P=\tfrac{1}{2}\frac{Q(r-r')r_1}{R\times r_2},$$

fórmulas que se pueden deducir por razonamientos análogos á los hechos para obtener la (1); pudiendo tambien ser halladas fundándose en las leyes de equilibrio del torno.

Polipastos.—Antes de pasar á describir estos aparatos, definiremos lo que se entiende por *moton*: éste es un aparato que consiste en un sistema de poleas reunidas en una misma armadura, sobre ejes particulares ó en un mismo eje.

El polipasto no es más que la combinacion de la polea fija con la móvil: en general, está formado por la reunion de dos motones, uno fijo y otro móvil (figuras 96 y 102).

En una armadura sostenida por un punto fijo (figura 102), consideremos tres poleas fijas B, B', B''; una segunda armadura, que sostiene la resistencia R, lleva el mismo número de poleas móviles. La cuerda está atada á la armadura fija, se arrolla sobre la primera polea móvil A, y sube á la primera polea fija B, baja sobre la segunda polea móvil A', sube á la segunda polea fija B', y así sucesivamente. La potencia P tira de la cuerda despues de pasar por la última polea fija.

Si se supone que estas diversas partes de cuerdas son sensiblemente paralelas, podremos establecer la ecuacion de equilibrio del polipasto, diciendo que *la potencia es á la resistencia como la unidad es al número de cuerdas que sostiene la armadura móvil*; porque estando todas las poleas abrazadas por la misma cuerda, y debiendo estar en equilibrio cada una en particular, la tension de la cuerda es la misma en todas ellas. Se puede, pues, considerar al peso R como sostenido por tantas fuerzas iguales y paralelas como cuerdas van directamente de una armadura á otra, y por consiguiente, la tension de una de las cuerdas, ó la potencia P, es á la resistencia R como la unidad es al número de cuerdas.

El teorema del trabajo virtual nos lleva á la misma consecuencia. En efecto, si se imprime al hilo en la direccion de P un desplazamiento ε, este desplazamiento produce un acortamiento igual en los m cordones que reunen los dos *motones*, y hace subir, por consiguiente, al peso Q la cantidad $\frac{\varepsilon}{m}$; luego $P \times \varepsilon = Q \times \frac{\varepsilon}{m}$ ó bien $P = \frac{Q}{m}$.

Esta relacion tambien nos hace ver que la potencia disminuye á medida que m aumenta; es decir, cuanto más poleas haya en cada armadura, lo cual se comprende que sea así, porque la rigidez de las cuerdas y el rozamiento ocasionan mucha pérdida de trabajo.

Uso de estas máquinas en las obras públicas.— El uso de estas máquinas en las obras públicas es para elevar los materiales á alturas algo considerables, empleando esfuerzos bastante inferiores á los pesos que se remueven.

XLV

Descripcion y uso del torno y cabrestante—Condiciones de equilibrio de estas máquinas.—Torno diferencial.

Descripcion y uso del torno y cabrestante.—El *torno* (fig. 103) se compone de un cilindro horizontal A, en cuyas bases hay otros dos BB, con el mismo eje que el anterior, pero de un diámetro menor é igual en ambos; estos dos cilindros se llaman *gorrones* y descansan sobre dos apoyos inmóviles C llamados *cojinetes*. En el cilindro de mayor diámetro se arrolla una cuerda, la cual está fija á él por medio de uno de sus extremos, mientras que en el otro se engancha ó ata el peso que se quiere elevar. Al torno se le da vuelta por medio de palancas fijas ó variables que se van introduciendo sucesivamente en unas cajas abiertas en el cilindro mayor, ó tambien por una cuerda fija en el eje y cuyo plano es perpendicular á él. El único movimiento que el aparato puede recibir, es el de rotacion alrededor del eje comun. Cuando el torno lleva la rueda citada, se le pone en movimiento por medio de una fuerza motriz P obrando tangencialmente á la rueda, valiéndose de una cuerda, clavijas, y más generalmente una manivela.

Esta fuerza motriz, al hacer girar la rueda, arrastra en su movimiento de rotacion al eje, y la cuerda se arrolla en el cilindro, y el peso ú objeto enganchado en el extremo de ella sube; de modo que el uso del torno es elevar pesos ó cuerpos que estén situados bastante inferior al suelo donde se encuentre el aparato.

El torno recibe el nombre especial de *cabrestante* (fig. 104) cuando su eje está colocado verticalmente, en cuya disposicion se le emplea con frecuencia para ejercer poderosas tracciones en sentido horizontal ó casi horizontal; el cilindro descansa sobre el cojinete inferior, y se conserva vertical mediante el superior, por encima del cual sobresale el gorron correspondiente.

En esta prolongacion se adaptan cuatro, seis y á veces ocho palancas dispuestas con regularidad á su alrededor.

Algunas estacas sólidamente clavadas en tierra, afianzan por medio de cuerdas la armadura en que están los cojinetes, á fin de dejarla inmóvil durante la maniobra. Como el cabrestante suele ser de poca altura, mientras el cable que tira del obstáculo es por lo comun muy largo, sería embarazoso irle arrollando en el cilindro, pues pronto unas vueltas se superpondrian á otras, y para evitarlo, se hace que un hombre tenga en sus manos cogida la cuerda por su extremo libre, despues de habérsele dado á ella sólo tres ó cuatro vueltas alrededor del cilindro, porque de esta manera, cuando otros hombres actúan entonces sobre las palancas, haciendo girar el cabrestante, el cable es llevado por él en virtud de la adherencia que entre ambos se produce, y mientras por un lado se arrolla, por el otro se desarrolla, quedando siempre el cilindro ceñido por la misma longitud de cable. Varias estrías practicadas en la superficie del cilindro aumentan su adherencia con la cuerda y dificultan el que pueda deslizarse.

El cabrestante, por lo que llevamos expuesto, se ve que no está destinado á vencer el peso de un cuerpo, sino sólo el rozamiento producido al arrastrarle por el suelo.

Condiciones de equilibrio de estas máquinas.— Sea O (fig. 105) el centro de la rueda y de la interseccion de su plano con el cilindro, O' el centro de otra seccion hecha en el cilindro perpendicular á su eje por la vertical del cordon que contiene la resistencia; en el plano horizontal que pasa por el eje de la máquina, tracemos dos radios paralelos y en sentidos contrarios, OK y $O'B$, y tiremos la KB, que cortará al eje en el punto medio S de OO', pues los triángulos $SO'B$ y SKO son iguales, porque tienen los lados OK y $O'B$ iguales por radios de círculos iguales, los ángulos en B y K iguales por alternos internos entre las paralelas $O'B$ y OK, y los en O y O' iguales por la misma razon; luego $OS = O'S$.

En el punto K apliquemos en sentidos contrarios dos fuerzas Q' y Q'' iguales y paralelas á la Q; el equilibrio, si existe, no se habrá alterado, y puede considerarse establecido entre las cuatro fuerzas P, Q, Q' y Q'' de la manera siguiente: las dos fuerzas Q y Q'', iguales, paralelas y en el mismo sentido, tendrán una resultante $2Q$ aplicada en S y destruida por la resistencia del eje. Queda que considerar las dos fuerzas P y Q' obrando en el mismo plano, en el que se encuentra tambien el punto fijo O. Como en el caso de la polea, este sistema parcial puede compararse á una palanca acodada KOA, cuyo punto fijo es O, y en razon á que los brazos son desiguales, el equilibrio de las dos fuerzas, es decir, el de la máquina misma, exige que se tenga $P \times OA = Q' \times OK$; pero Q' es igual á Q, y designando por R y r respectivamente á los radios de la rueda y del cilindro, la condicion de equilibrio se convierte en $P \times R = Q \times r$, que podremos enunciar diciendo: *para el equilibrio del torno es necesario que la potencia sea á la resistencia como el radio del cilindro es al radio de la rueda.*

Hemos supuesto en lo que precede que las cuerdas arrolladas sobre el cilindro y sobre la rueda fuesen infinitamente delgadas; pero las cuerdas tienen siempre un diámetro finito, cuya mitad, para mayor exactitud, es necesario añadir á los radios R y r en la condicion de equilibrio: si se designan por δ el radio de la cuerda de la rueda, y por δ' el de la rueda del cilindro, la condicion de equilibrio se trasformará en $P \times (R + \delta) = Q(r + \delta')$.

Las fuerzas que en los diferentes puntos ejercen presiones sobre el eje del torno son: primero, la fuerza vertical $2Q$ aplicada en el medio S de la distancia oo', que separa la rueda del punto de aplicacion de la resistencia; y segundo, las dos fuerzas P y Q', cuya resultante pasa necesariamente por el punto O, y pueden considerarse por consiguiente como trasportadas paralelamente á sí mismas á este punto segun OP' y OQ'''.

La fuerza $2Q$ aplicada en S, puede descomponerse en otras dos iguales á Q y aplicadas cada una en los puntos O y O'; la primera de éstas será igual y directamente opuesta á la fuerza $Q'''=Q'$ que hemos trasportado allí, y se destruirán: no queda ya más que las dos fuerzas P y Q trasportadas sobre el eje, paralelamente á sí mismas y en sus planos respectivos.

Si se quiere tener en cuenta el peso π del aparato, es necesario considerar que este peso representa tambien una fuerza vertical y aplicada en un punto G del eje.

Propongámonos encontrar las reacciones: para esto descompongamos la fuerza Q aplicada en la seccion O' en dos fuerzas Q_1 y Q'_1 paralelas y aplicadas en los centros de las secciones medias de los gorrones U y V. La fuerza Q_1 aplicada en V, será igual á $Q\times\frac{MO'}{UV}$, y la Q'_1 aplicada en U, será igual á $Q\times\frac{VO}{UV}$. Podemos asimismo reemplazar á la fuerza P, aplicada al eje en el plano de la rueda, por dos paralelas P_1 y P'_1 iguales respectivamente á $P\times\frac{UO}{UV}$ y $P\times\frac{VO}{UV}$.

Componiendo las fuerzas Q_1 y P_1 aplicadas en V, tendremos por resultante la presion R ejercida por el gorron V sobre el cojinete, y de la misma manera componiendo las fuerzas Q'_1 y P'_1 aplicadas en U, nos dará la presion R' ejercida por el gorron U sobre su cojinete. Las fuerzas R y R' no son paralelas, pero son las dos normales al eje del cilindro.

Se ve que con una fuerza P dada, se puede equilibrar á un peso Q tan grande como se quiera, sirviéndose de un torno en el cual el radio del cilindro sea suficientemente pequeño con relacion al radio de la rueda. Pero es preciso observar que para el torno, como para la palanca y para todas las máquinas análogas, los desplazamientos de los puntos de aplicacion de las fuerzas P y Q que se equilibran están en razon inversa de estas fuerzas. En efecto, supongamos que estando el torno en equilibrio reciba un pequeño movimiento angular G, y proyectémoslo sobre las direcciones de las fuerzas P y Q (figura 106); los arcos elementales AA' y BB', recorridos por los puntos de aplicacion, son entre sí como sus radios R y r.

Los cuadriláteros $oAaA'$ y $OBbB'$, que tienen sus ángulos respectivamente iguales, son semejantes, y por consiguiente tambien los triángulos $AA'a$ y $BB'b$, que dan $Bb : Aa :: BB' : AA' :: r : R$; pero por la ecuacion de equilibrio del torno tenemos $P : Q :: r : R$; luego $P : Q :: BB' : AA'$, lo que demuestra nuestra observacion. De manera que para elevar en una pequeña cantidad al peso Q empleando una fuerza P, es preciso hacer recorrer al punto de aplicacion de esta fuerza un camino tanto mayor cuanto menor es ella.

Siendo el *cabrestante* un torno en el que el cilindro es vertical, las condiciones de equilibrio para uno y otro son idénticas.

Torno diferencial.—Con una fuerza tan pequeña como se quiera, se puede vencer por medio del torno cualquiera resistencia, por grande que sea, en sentido de arriba abajo, reduciendo convenientemente el radio del cilindro ó aumentando el de la rueda; pero esta disminucion ó aumento llega á cierto límite, de que no puede pasarse, porque en el primer caso el cilindro quedaria tan débil que no podria soportar la carga sin romperse, y en el segundo no podria el hombre actuar convenientemente sobre la rueda.

Para lograr el mismo objeto sin estos inconvenientes, se emplea el *torno diferencial*, cuyo carácter distintivo con respecto al torno ordinario consiste en que el cilindro se compone de dos partes, mn y $m'n'$ (fig. 107), de distinto diámetro, en que la resistencia Q está suspendida por una polea móvil y ésta del torno por medio de una cuerda, que despues de dar varias vueltas á la parte de mayor diámetro mn, tiene un extremo fijo en s; da varias otras sobre el de diámetro menor $m'n'$ en el mismo sentido, y se fija en un punto t. De este modo, cuando la cuerda se arrolla sobre el cilindro mayor, se desarrolla en el menor, y como la parte arrollada en el primero es mayor que la desarrollada en el segundo, la resistencia Q sube un espacio medido por la mitad de la diferencia de las longitudes de la cuerda arrollada en el uno y desarrollada en el otro; y reciprocamente, girando en sentido contrario, la resistencia Q desciende la misma cantidad.

Para establecer la ecuacion de equilibrio, observaremos que la carga Q se descompone en dos fuerzas iguales á $\frac{1}{2}Q$, paralelas á ella y dirigidas segun CC', y que tiende á hacer girar la máquina en el sentido de la flecha f, y otra, segun DE, que tiende á hacerla girar en sentido contrario, que es el mismo que el de la potencia P: llamando, pues, R y r los radios oc y OD de los cilindros, y C al oA de la rueda ó manivela, se tiene $P \times C = \frac{1}{2} Q \times R + \frac{1}{2} Q \times r$, que da $P : Q :: R - r : 2l$, y expresa que en el torno diferencial, *la potencia es á la resistencia como la diferencia de los radios es al doble del brazo de la manivela*.

La proporcion anterior da $Q=\frac{P\times 2l}{R-r}$, que expresa que con una fuerza dada P, se puede vencer una resistencia Q, tanto mayor cuanto mayor sea l y menor $R-r$. El valor de l no puede pasar de cierto límite, que suele ser $0,^{m}4$, para aplicar la potencia más favorable; pero $R=r$ puede ser tan pequeña como se quiera.

Si $R=r$, se tiene $Q=\infty$, que expresa que por pequeña que sea la potencia P, se puede vencer con ella una resistencia infinita.

Para deducir la ecuacion del trabajo de la del equilibrio, observaremos que si la potencia describe un ángulo α, los puntos de aplicacion AC y D de la potencia, y componentes de la resistencia, recorrerán los espacios AA', CC' y DD', en la misma direccion de estas fuerzas, que son tangentes á las trayectorias. La cuerda CG se arrollará en la cantidad CC'; la DE se desarrollará en la cantidad DD'; de modo que la resistencia Q habrá subido la cantidad Bb, igual á la diferencia de los arcos CC' y DD'; de modo que se tiene $Bb=\frac{CC'-DD'}{2}$

Los arcos CC', DD' y AA' son del mismo número de grados: de modo que se tiene $CC' : DD' :: R : r$; de donde $CC'-DD' : R-r :: DD' : r$, ó bien $\frac{CC'-DD'}{2} : \frac{R-r}{2} :: DD' : r$; pero $DD' : r :: AA' : l$ y $\frac{CC'-DD'}{2}=Bb$; luego $Bb : \frac{R-r}{2} :: AA' : l$, que queda reducida á $Bb : AA' :: R-r : 2l$, y combinada con la ecuacion de equilibrio, resulta $P : Q :: Bb : AA'$, y por consiguiente, $P\times AA'=Q\times Bb$.

Reciprocamente: de esta ecuacion puede deducirse la de equilibrio, poniendo por AA' su valor deducido de la anterior y se tiene $P\times Bb\times \frac{2l}{R-r}=Q\times Bb$ ó $Q=\frac{P\times Q\times l}{R-r}$

Si $R=r$, se tiene $Q=o$ y $Bb=AA'\frac{R-r}{2l}=o$, cualquiera que sea el espacio AA' recorrido por la potencia.

XLVI

Descripcion y uso de la cuña, plano inclinado y tornillo.—Condiciones de equilibrio.—Tornillo sin fin.

Antes de pasar á describir la cuña, vamos á definir lo que se entiende por *ángulo* y *coeficiente de frotamiento*.

Cuando se hace resbalar un cuerpo sobre una superficie material, la reaccion de la superficie sobre el cuerpo sabemos que no es normal á ella, sino que se descompone en dos, una normal y otra tangencial, y que esta última componente recibia el nombre de *frotamiento por deslizamiento.*

Sea RR' un plano fijo sobre el que resbala en el sentido de la flecha a (figura 108) el cuerpo $ABCD$; el contacto tiene lugar en toda la extension de la cara CD.

La fuerza P es la presion normal ejercida por el cuerpo sobre el plano RR'; una fuerza P' igual y contraria á la P será la reaccion de la superficie sobre el cuerpo.

Las leyes del frotamiento nos enseñan que además de esta fuerza normal P', la superficie ejerce sobre el cuerpo una reaccion tangencial F dirigida en sentido contrario del movimiento, y que á su vez el cuerpo ejerce sobre la superficie en el sentido del movimiento una fuerza F' igual y contraria á la F: estas fuerzas son en realidad las resultantes de otras mutuas repartidas sobre los diversos elementos en contacto en la superficie de resbalamiento CD. Asimismo P y P' son las resultantes de las acciones normales de los mismos elementos.

El frotamiento sabemos tambien que es proporcional á la presion, ó en otros términos, las fuerzas F y P tienen entre sí una relacion que sólo depende de la naturaleza de las superficies de contacto, siendo esta relacion independiente de la extension de las superficies.

La resultante S de las fuerzas P' y F es la reaccion total de la superficie RR' sobre el cuerpo que se desliza: la fuerza S', igual y contraria á la S, es la resultante de las fuerzas P y F', y es la reaccion total del cuerpo que se desliza sobre la superficie RR'.

La relacion $\frac{F}{P}$ siendo constante para los cuerpos de la misma naturaleza, el triángulo IFS, rectángulo en F, es semejante á un triángulo que se puede construir *á priori*, y por consiguiente, los ángulos ISF y FIS son constantes; el primero de estos ángulos, el $ISF = SIP'$, es el ángulo que forma la reaccion total S con la normal P' á la superficie directriz y se le llama ***ángulo de frotamiento***. El ***coeficiente de frotamiento*** es la relacion $\frac{F}{P}=f$ de la fuerza tangencial á la reaccion normal.

Establecidas estas nociones preliminares, pasemos á ocuparnos de la

Descripcion y uso de la cuña.—La cuña no es más que un prisma triangular $ABCDEF$ (fig. 109), que se introduce por una de sus aristas entre dos obstáculos á fin de producir lateralmente dos esfuerzos que tiendan á separarlos; la arista AF, por donde la cuña se introduce, se llama su *filo*; las dos caras $ABFD$ y $CBFE$ que le forman, *caras* de la cuña, y, por último, la cara opuesta al filo llámase la *cabeza*, á la cual por medio de un martillo generalmente se aplica la potencia ó esfuerzo que tiende á hundir la cuña entre los dos obstáculos.

La cuña es un instrumento de gran aplicacion para ejercer una fuerza enorme en un espacio muy reducido.

Se usa principalmente para partir leña, piedras y otros cuerpos. En las fábricas de aceites de semillas tambien suele emplearse la cuña; todos los instrumentos cortantes y punzantes obran á manera de cuña; las hachas, los cuchillos, los clavos, etc., pueden considerarse como cuñas; la agudeza de sus cortes y puntas está limitada por la condicion de conservar el útil una resistencia suficiente.

Las ventajas que presenta la cuña dependen algunas veces de los rozamientos considerables que se producen entre la superficie de la cuña y el cuerpo en el cual penetra.

El rozamiento retiene los clavos y les impide salirse una vez introducidos; sin rozamiento, las cuñas introducidas en la leña á golpes de martillo, se saldrian en el intervalo de un golpe á otro, á consecuencia de la elasticidad de la leña; el rozamiento detiene la cuña, y es tanto más indispensable cuanto los intervalos en que obra la potencia son mayores.

Condiciones de equilibrio de la cuña.—Hemos visto que la cuña era un prisma triangular ABC (figura 110), que una fuerza P introduce entre dos cuerpos E y F que se trata de separar. Se pide la condicion de equilibrio entre la potencia P y la resistencia, que son en este caso las reacciones que los cuerpos E y F ejercen sobre las caras laterales AC y BC de la cuña.

Generalmente la base ABC de ella es un triángulo isósceles, y los cuerpos E y F son de la misma naturaleza; adoptaremos estas hipótesis, que simplifican el problema.

La fuerza P se aplica en el plano medio CD del prisma perpendicularmente á la cara AB.

Busquemos las condiciones de equilibrio en el momento en que el deslizamiento de la cuña va á producirse entre los cuerpos dados. Entonces la reaccion del cuerpo F sobre la cuña será una fuerza R cuya direccion se puede determinar, pues ella forma en efecto con la normal á la cara BC, y en sentido opuesto al movimiento, un ángulo HGR, igual al ángulo φ del frotamiento. El frotamiento siendo el mismo sobre la cara AC, la reaccion R' sobre esta cara forma, en el mismo sentido que la anterior, con la normal LI al plano AC, un ángulo igual á φ.

No se conoce los puntos de aplicacion G y L de estas reacciones, que no son en realidad más que las resultantes de las acciones elementales desarrolladas por el contacto de los cuerpos frotantes, desde M á N y de

M' á N'. Todo lo que se sabe es que la resultante de las dos fuerzas R y R' es igual y contraria á la fuerza P. Las tres fuerzas pasan, pues, por un mismo punto O, y por consiguiente, se tendrá los valores de las fuerzas R y R' tomando sobre la altura CD del triángulo ABC, direccion de la fuerza dada P, un punto O cualquiera; tirar por este punto dos rectas OL y Og que formen con las caras AC y BC ángulos iguales á $90° - \varphi$ y descomponer la fuerza P trasportada á O segun las direcciones OG y OL.

Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente que el ángulo $90° - \varphi$ sea mayor que la mitad del ángulo C del filo de la cuña, ó que se tenga $\varphi + \frac{C}{2} < 90°$.

Para introducir la cuña entre los dos cuerpos, se golpea con un martillo sobre la cabeza de ella.

Cualquiera que sea la direccion del choque, se puede siempre concebir su accion como descompuesta en otras dos; una perpendicular á la cabeza de la cuña, que es la que produce todo el efecto, y la otra paralela, que no le imprime movimiento alguno, porque no puede tender más que á hacer resbalar el martillo sobre la cuña.

Supondremos desde luego que la potencia esté aplicada perpendicularmente á la cabeza de la cuña, y busquemos nada más que los esfuerzos que resultan contra los dos obstáculos perpendicularmente á las caras de la cuña.

Por la direccion de la potencia P y perpendicularmente á las aristas de la cuña, hagamos pasar un plano, el que causará en ella una seccion MNO (fig. 111); la línea MN representará la cabeza de la cuña, y las MO y NO las caras. Desde un punto A tomado en la direccion de la potencia bajemos dos perpendiculares AB y AC á las caras MO y NO; tomemos la parte AD, que represente la magnitud y direccion de la potencia P, y concluyamos el paralelógramo $ABCD$.

La potencia P representada por AD se descompondrá en las dos fuerzas Q y R, representadas por AB y AC, y que expresarán los esfuerzos ejercidos perpendicularmente á las caras MO y NO.

Pero los triángulos ABD y MNO son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares, y nos darán

$$AD : AB : BD :: MN : MO : NO$$

pero

$$AD=P \quad AB=Q \quad BD=AC=R$$

y tendremos

$$P : Q : R :: MN : MO : NO$$

Es decir, que *la potencia y sus dos componentes perpendiculares á las caras de la cuña son entre sí como las partes de la cuña á que respectivamente son perpendiculares.*

Si la potencia está representada por la cabeza de la cuña, las dos fuerzas que resultan perpendicularmente á las caras estarán representadas por estas mismas caras.

Si el triángulo MNO es isósceles, las dos fuerzas Q y R son iguales, y *la potencia* P *es á una de ellas como la cabeza de la cuña es á uno de los lados*, que se le puede en este caso llamar longitud de la cuña, y es la condicion de equilibrio.

Resulta de aquí que una misma potencia trasmitirá por medio de una cuña un esfuerzo, tanto mayor cuanto menor sea la cabeza de la cuña con relacion á su longitud. Esta es la razon por que las hachas y los cuchillos presentan un corte bastante agudo.

Definicion y condiciones de equilibrio del plano inclinado.—Esta máquina consiste simplemente en un plano fijo sobre el cuàl se mueve un cuerpo sólido sometido á fuerzas cualesquiera, ó por cuya resistencia se establece el equilibrio. Vamos á determinar las condiciones que deben existir entre estas fuerzas y la inclinacion del plano, para que esta última condicion quede satisfecha.

Notemos desde luego que cada uno de los puntos de contacto con el plano, supuesto perfectamente pulimentado, es decir, no ejerciendo ningun rozamiento, resiste en una direccion que le es normal; la accion total del plano es, pues, la resultante de muchas fuerzas paralelas, que es igual á su suma, y como ellas, normal al plano. Esta resultante debe destruir la accion de todas las fuerzas dadas, comprendido el peso del cuerpo, si se supone pesado: éstas deben, por consiguiente, ser reducibles á una fuerza única normal al plano y que tienda á apoyar al cuerpo sobre él.

Además, es necesario que estas dos resultantes normales, provenientes, la una de la resistencia del plano, y la otra de las fuerzas aplicadas al cuerpo, se destruyan y sean, por consiguiente, directamente opuestas. Si, pues, el cuerpo se apoya sólo sobre un punto del plano, es necesario y basta que la resultante de las fuerzas dadas sea normal al plano y pase por el punto de contacto.

Si el cuerpo se apoya por dos puntos, es necesario que esta resultante encuentre al plano en uno de los de la recta que une á aquellos; si hay tres puntos de contacto no situados en línea recta, será necesario que la resultante normal encuentre al plano en el interior del triángulo formado por los tres puntos, y en estos dos casos, la presion en cada punto se determinará como se dijo en la leccion XXVIII, al tratar del equilibrio de un cuerpo pesado que insiste sobre una base. En fin, si existiesen más de tres puntos de apoyo, la resultante deberá siempre pasar por dentro del polígono convexo formado por la union rectilínea de los puntos exteriores, polígono que convendremos en llamar polígono de contacto; pero vimos que las presiones en cada punto de contacto quedaban teóricamente indeterminadas.

Limitaremos aquí nuestro exámen al caso particular en que dos fuerzas solamente estén aplicadas al cuerpo sólido.

Para que estas dos fuerzas puedan tener una resultante única, es necesario que estén en un mismo plano; y para que esta resultante sea normal al plano fijo, es necesario que ella, con sus dos componentes, se halle en un plano normal á dicho plano fijo; de aquí el teorema siguiente:

Cuando un cuerpo apoyado contra un plano fijo está solicitado por dos fuerzas, es necesario para el equilibrio que estas dos fuerzas se encuentren en un mismo plano perpendicular al plano dado, y que produzcan una resultante única, normal á este último plano, encontrándole en el interior del polígono de contacto.

Supongamos ahora, para particularizar más la cuestion, que una de las dos fuerzas aplicadas al cuerpo sea su propio peso Q, y que este cuerpo esté colocado sobre un plano inclinado; este peso Q representará la resistencia; y sea P la fuerza ó potencia que debe establecer el equilibrio.

El plano de las dos fuerzas P y Q es á su vez vertical, puesto que contiene la fuerza Q, que por ser el peso su direccion es vertical; este plano es á su vez normal al plano inclinado (fig. 112). Siendo perpendicular al plano horizontal y al plano inclinado, será perpendicular á la interseccion de estos dos últimos y contendrá el ángulo α del plano dado con el horizontal. Sea, pues, O el punto de concurso de la potencia P y de la resistencia vertical Q: estas dos fuerzas, compuestas por la regla del paralelógramo, deberán dar una resultante normal al plano, que caiga en el interior del polígono de contacto; pero si desde el vértice Q se baja Qq perpendicular á la diagonal Or, el triángulo QOq formado será semejante al ABC, por ser rectángulo en q y en B, y tener dos ángulos formados por lados respectivamente perpendiculares, y darán:

$$Qq : Oq :: BC : AC$$

pero Qq es igual á la proyeccion Op de la poteneia P sobre el plano inclinado; luego la condicion de equilibrio particular á este caso puede enumerarse así: *Para que haya equilibrio entre el peso de un cuerpo colocado sobre un plano inclinado y otra fuerza que solicite á este cuerpo, es necesario que la proyeccion de la potencia sobre el plano sea á la resistencia como la altura de dicho plano es á su longitud.*

Corolario primero. Nótese que la condicion enunciada sería la misma para otra fuerza OP' que tuviese la misma proyeccion Op que la fuerza P.

La proporcion anterior da la siguiente igualdad:

$$Q = Qq\frac{AC}{BC}$$

que expresa que Q crece cuando crece AC, ó disminuye BC y que llega á ser infinita para $BC=O$.

Se puede distinguir el caso en que la fuerza P sea paralela al plano inclinado y en el que sea horizontal.

En el primer caso, la proyeccion de la potencia P sobre el plano inclinado es igual á la fuerza misma, y como se demuestra por otra parte la semejanza de los triángulos QOr y ABC (fig. 113), el enunciado del teorema se convierte en: ***para el equilibrio entre el peso de un cuerpo colocado sobre un plano inclinado y una fuerza que solicite á este cuerpo paralelamente al plano, es necesario que la potencia sea á la resistencia como la altura del plano es á su longitud.***

En el segundo caso, los triángulos QOr y ABC (figura 114) dan

$$Qr : OQ :: BC : AB, \text{ ó } P : Q :: BC : AB$$

ó la potencia es á la resistencia como la altura del plano inclinado es á su base.

En el primer caso, resulta $Q=P\frac{AC}{BC}$; en el segundo, $Q=P\frac{AB}{BC}$ que manifiesta, como ya hemos dicho, que la resistencia vencible con una potencia dada es tanto mayor cuanto menor es la altura BC ó pendiente del plano, y que es infinita cuando esta pendiente es cero.

Corolario segundo. La presion sobre el plano ó la resultante Or es igual á $\sqrt{Q^2-P^2 \cos.^2 \alpha - P \operatorname{sen.} \alpha}$ en el caso de una potencia que forma con el plano el ángulo α; á $\sqrt{Q^2-P^2}$ en el caso de una potencia paralela al plano, y á $\sqrt{Q^2+P^2}$ en el de una potencia horizontal.

Si, en la hipótesis de una potencia horizontal, supusiésemos que el plano inclinado se levantase hasta ser vertical, su base vendria á ser nula y la relacion de la potencia á la resistencia sería infinita; lo cual prueba que, hecha abstraccion del rozamiento, no hay fuerza horizontal finita capaz de mantener un cuerpo contra un plano vertical, por pequeño que sea su peso.

Más generalmente: no es posible con una fuerza normal P, por grande que sea, sostener un cuerpo pesado sobre un plano inclinado perfectamente pulimentado. El peso Q del cuerpo puede, en efecto, descomponerse en dos fuerzas, la una normal al plano, que será destruida, así como la misma fuerza P (fig. 115), por la resistencia del plano; la otra paralela á éste, que no estando contrarrestada por nada, producirá su efecto. Se ve, pues, que el equilibrio no puede, en general, tener lugar á no ser que la fuerza P, en lugar de ser normal, estuviese inclinada, para dar una componente paralela al plano capaz de destruir la del peso del cuerpo. Sólo la existencia del rozamiento y una inevitable deformacion en el contacto de los cuerpos viene á desmentir, en apariencia, este resultado de la teoría.

Vamos ahora á establecer directamente, para el caso general y los dos particulares, la igualdad del trabajo motor y del trabajo resistente.

Sea (fig. 112), en el caso de una fuerza cualquiera P, OO' el espacio segun el cual se ha movido el cuerpo paralelamente al plano, y Oa y Ob las proyecciones de este espacio sobre las direcciones de las dos fuerzas P y Q; por las condiciones de equilibrio se tiene:

$$Op : Q :: CB : AC$$

Los triángulos $OO'b$ y ABC son semejantes y dan $CB : AC :: Ob : Oo'$; por consiguiente será:

$$Op : Q :: Ob : OO', \text{ ó bien } Op\times OO'=Q\times Ob.$$

Del mismo modo los triángulos $OO'a$ y OpP, dan $op : P :: Oa : OO'$, de donde $Op\times OO'=P\times Oa$; luego

$$P\times Oa=Q\times Ob.$$

Recíprocamente, para pasar de esta igualdad á la condicion de equilibrio basta poner por $P\times Oa$ su valor $Op\times OO'$ de la anterior, y se tiene $Op\times OO'=Q\times Ob$, que da

$$Op : Q :: Ob : OO'$$

y como los triángulos $OO'b$ y ABC dan

$$Ob : OO' :: BC : AC$$

resulta que $Op : Q :: BC : AC$, que es la condicion de equilibrio.

La penúltima proporcion da $Ob=OO'\times\frac{BC}{AC}$ y manifiesta que si $BC=o$, en cuyo caso $Q=\infty$, el espacio Ob recorrido por la resistencia en direccion de la potencia es cero.

Cuando la fuerza es paralela al plano inclinado (figura 113), el movimiento se verifica segun la misma direccion de la fuerza P, y observando que los triángulos ABC y ObO' son semejantes, resulta:

$$P : Q :: BC : AC :: Ob : OO', \text{ que da } P \times OO' = Q \times Ob.$$

Recíprocamente, esta ecuacion y la proporcion anterior conducen al equilibrio.

En el segundo caso, la potencia es horizontal, y como los triángulos ABC y OaO' (fig. 114) son semejantes, se tiene:

$$P : Q :: AB : O'a, \text{ ú } Ob : Oa, \text{ que da } P \times Oa = Q \times Ob.$$

Por el contrario, de ésta se pasa á la condicion de equilibrio del mismo modo que en el caso anterior.

Nota. El punto de aplicacion de la potencia confundiéndose con el de la resistencia, la relacion entre los espacios recorridos por estos dos puntos es siempre la unidad. Lo mismo sucederia, por otra parte tambien, cuando estos dos puntos no coincidiesen, porque todos los puntos del cuerpo se mueven paralelamente á sí mismos y en la línea recta sobre el plano inclinado.

Definicion y condiciones de equilibrio del tornillo.—Un tornillo está formado de un alma cilíndrica con una parte saliente continua llamada *filete.* Este puede ser cuadrangular (fig. 116), ó triangular (figura 117). Es necesario ante todo dar una descripcion rigorosa del filete. Sean $ABCD$ (fig. 118) un cilindro circular, OO' su eje, AO el radio que designaremos por r. Desarrollemos la superficie cilíndrica abriéndola por AD, segun el rectángulo $AA'DD'$, y dividamos AD en un número cualquiera de partes iguales: por los puntos de division tiremos las líneas EE', FF', etc., paralelas á AA', y en fin, las diagonales AE', EF',

FG', etc., de los rectángulos así obtenidos. Si ahora arrollamos de nuevo el rectángulo AD' sobre el cilindro, cada una de las diagonales formará una porcion llamada *espira*, de una curva continua que lleva el nombre de *hélice*: la distancia constante que separa las extremidades de una misma espira ó la altura de uno de los rectángulos generadores se llama *paso* de la hélice, y le designaremos por h.

Segun la generacion, la hélice tiene necesariamente todos sus elementos igualmente inclinados sobre el plano de la base del cilindro, y esta inclinacion no es otra cosa que el ángulo $E'AA'$ del triángulo rectángulo que tiene por catetos el paso h de la hélice y el desarrollo AA' ó $2\pi r$.

Esto supuesto, supongamos que el cilindro sea vertical, y busquemos desde luego la condicion de equilibrio de un punto material m colocado sobre la hélice, y solicitado de una parte por una fuerza vertical q y de otra por una fuerza horizontal p obrando en la extremidad L del radio Km prolongado y perpendicularmente á este radio: sea, en fin, $KL=R$.

Podemos desde luego reemplazar la fuerza p por una p' paralela á la primera, y aplicada al punto m, con tal que, segun las condiciones de equilibrio de la palanca, determinemos esta nueva fuerza por la relacion

$$p\times KL=p'\times Km, \text{ ó } pR=p'r, \text{ de donde } p'=p\frac{R}{r}.$$

El punto m se encuentra, por otra parte, en las mismas condiciones que si estuviese colocado sobre el plano inclinado $F\ G'$ y solicitado á la vez por la fuerza vertical q y la horizontal p'. Pero hemos visto, al tratar del plano inclinado, que era necesario en este caso que la fuerza horizontal fuese á la vertical como la altura del plano inclinado es á su base, ó lo que es lo mismo, que se tenga p' ó $p\frac{R}{r} : q :: h : 2\pi r$, que equivale á $p : q :: h : 2\pi R$.

Lo que significa que, para que un punto colocado sobre una hélice (en las condiciones indicadas) esté en equilibrio, *es necesario que la potencia horizontal sea á la resistencia vertical como el paso de la hélice es á la longitud de la circunferencia que tiende á describir la potencia.*

Observaremos de paso que el radio r del cilindro no entra ya en esta última proporcion; se tendrá, pues, siempre la misma relacion entre la potencia y la resistencia, cualquiera que sea el cilindro sobre que esté trazada la hélice, con tal que el paso de ésta quede el mismo, así como el brazo de palanca de la potencia. No debe además perderse de vista que sólo por comodidad en el lenguaje se ha supuesto al cilindro vertical; cuanto acaba de decirse y cuanto vamos á decir sobre este particular debe entenderse en general de una resistencia paralela al eje del cilindro y una potencia que obra en un plano perpendicular á este objeto.

Concibamos ahora que un cuadrado ó un rectángulo, teniendo uno de sus lados coincidiendo con una generatriz del cilindro, y uno de los puntos de este lado, por ejemplo, su medio, aplicado sobre la hélice, desciende ó sube á lo largo de la superficie, de manera que su plano contenga siempre al eje y que el punto en cuestion describa la curva; es evidente que en este movimiento todos los puntos del área del rectángulo describirán hélices del mismo paso y eje, pero de radios diferentes.

De este modo habremos engendrado el filete de un tornillo, cuyo paso será el paso comun á todas las hélices.

Imaginemos, en fin, una segunda pieza sólida presentando exactamente en hueco la forma que la primera ofrece en relieve: ésta será la *tuerca* del tornillo, que podrá penetrar en ella exactamente y moverse con un doble movimiento, de rotacion alrededor del eje y de traslacion en el sentido del mismo eje. Recíprocamente, si quien está fijo es el tornillo, la tuerca podrá caminar á lo largo del eje girando al propio tiempo alrededor del mismo, y avanzará en cada vuelta una cantidad igual al paso del tornillo.

Para fijar las ideas, vamos á suponer que la tuerca está inmóvil y que el tornillo está solicitado: 1.°, por una fuerza horizontal P, que obra en un plano perpendicular al eje del tornillo, y que tiende á hacerle subir; 2.°, por una fuerza vertical Q, que del mismo modo que un peso que hubiera que levantar, tiende á oponerse á su ascension. Sea siempre (fig. 116) $KL=R$ la perpendicular bajada desde el eje sobre la direccion de la fuerza P en el plano horizontal que la contiene.

Se comprende que la accion de las fuerzas P y Q se hace sentir exclusivamente sobre cada uno de los dos elementos de la superficie inferior del filete del tornillo, que se apoyan sobre los de la superficie superior de la tuerca.

Sean, pues, m, m', m'', etc., los diversos elementos de contacto, q, q', q'', etc, las componentes ó partes de las fuerzas Q aplicadas respectivamente en ellos; en fin, p, p', p'', etc., los elementos de la P dividida en el punto L en tantas partes como elementos de contacto hay.

Para cada uno de estos elementos, cualquiera que sea su distancia al eje, tendremos la relacion establecida arriba para un punto sobre la hélice, y por consiguiente, deberemos establecer la serie indefinida de proporciones:

Para el elemento $m \ldots\ldots p : q :: h : 2\pi R$
Id. id. $m' \ldots\ldots p' : q' :: h' : 2\pi R$
Id. id. $m'' \ldots\ldots p'' : q'' :: h'' : 2\pi R$
. . . .
. . . .

Notando ahora que $p+p'+p''$, etc. $=P$ y que $q+q'+q''+\ldots$ etc. $=Q$, se deduce fácilmente de la serie de relaciones iguales que precede la proporcion $P : Q :: h : 2\pi R$; es decir, que para el equilibrio de un tornillo es necesario que *la potencia que tiende á hacerle girar sea á la resistencia que obra en el sentido del eje como el paso del tornillo es á la circunferencia que tiende á describir la potencia.*

La proporcion anterior da $Q=P\frac{2\pi R}{h}$ que expresa que para vencer una resistencia Q se necesita una potencia tanto más pequeña cuanto mayor sea el brazo de palanca R, ó cuanto menor sea el paso h del tornillo.

Si $h=o$, resulta $Q=\infty$, es decir, que por pequeña que sea la potencia y con cualquier radio R, se puede vencer una resistencia infinita.

Si el tornillo gira un pequeño ángulo α (fig. 119), el arco elemental Aa, descrito por el punto de aplicacion de la potencia en la direccion misma de esta fuerza, que gira con la máquina, será igual á αR, y la resistencia avanzará una cantidad rectilínea Bb fácil de calcular; en efecto, pues que el tornillo sube h para una vuelta entera $2\pi R$, tendremos la proporcion $2\pi R : h :: \alpha R : Bb$, de donde $Bb = \frac{h\alpha}{2\pi}$ y como $Aa = \alpha R$, resulta $Bb : Aa ::$ $\frac{h\alpha}{2\pi} : \alpha R :: h : 2\pi R$.

Pero la ecuacion de equilibrio es $P : Q :: h : 2\pi R$; luego combinando las dos, se tiene

$$P : Q :: Bb : Aa, \text{ ó bien } P \times Aa = Q \times Bb$$

es decir, el trabajo motor igual al trabajo resistente.

Recíprocamente, la proporcion que expresa la condicion de equilibrio se deduciria fácilmente de la combinacion de las otras dos.

La igualdad $P \times Aa = Q \times Bb$ se extiende á un período finito y determinado del movimiento, aplicando á las dos fuerzas P y Q los principios que expusimos al tratar del trabajo de las fuerzas. La fuerza P, en efecto, es constantemente tangente á la curva descrita por su punto de aplicacion, y su trabajo es, pues, igual á su intensidad P multiplicada por el arco Aa (fig. 119) descrito por su punto de aplicacion; la fuerza Q, que corresponde evidentemente al caso en que la fuerza es constante en intensidad y direccion, da para la expresion del trabajo total la intensidad Q multiplicada por la distancia Bb comprendida ente las proyecciones de las posiciones extremas del móvil.

Corolario. La igualdad anterior demuestra que en el tornillo los espacios Aa y Bb recorridos por los puntos de aplicacion están en razon inversa de las intensidades de dichas fuerzas.

Si $h = o$, la ecuacion de equilibrio da $Q = \infty$ y el espacio recorrido por la resistencia será $Bb=o$, que demuestra que si bien en este caso la resistencia vencible con una fuerza cualquiera P es infinita, en cambio no experimentará ningun movimiento de traslacion, verificándose, lo mismo que en las demás máquinas, que lo que por medio ellas se gana en esfuerzo se pierde en velocidad, y por lo tanto, en tiempo.

Tornillo sin fin.—Consta éste de un tornillo V (figura 120) que gira alrededor de un eje sin avanzar nada en su longitud, por medio de una manivela m; el filete del tornillo va cogiendo sucesivamente los dientes de una rueda R.

El eje de ésta lo es tambien de un cilindro sobre el cual actúa la resistencia representada en la figura por el peso Q, y la potencia se aplica al manubrio. A cada vuelta del manubrio m, sólo pasa un diente de la rueda.

Cuando un tornillo ordinario se introduce en su tuerca, llega un momento en que no puede avanzar más, porque la tuerca se encuentra al final del filete del tornillo; pero en este de que nos ocupamos no sucede lo mismo, se le puede hacer girar indefinidamente, y hará siempre mover á la rueda, y por eso se le llama *tornillo sin fin*.

Llamando U el esfuerzo que como accion en uno y reaccion en otro se ejerza entre el filete del tornillo y el diente de la rueda, al equilibrarse la potencia y la resistencia, h el paso del tornillo, R la longitud del manubrio, R' el radio de la rueda y r el del cilindro, tendremos

$$P : U :: h : 2\pi R$$

y para el torno

$$U : Q :: r : R'$$

y multiplicando ordenadamente estas proporciones, resultará

$$P : Q :: hr : 2\pi R \times R'$$

es decir, que cuando toda la máquina se halla en equilibrio, *la potencia es á la resistencia como el producto del paso del tornillo por el radio del cilindro es al producto de la circunferencia que tiende á describir la potencia por el radio de la rueda.*

XLVII

Conocimiento de las correas sin fin, ruedas dentadas, torno de engranaje, gato ó cric, cabria, grúa, martinetes y malacates.—Ejemplos de su aplicacion en las obras.

Correas sin fin.—Si nosotros suponemos que se unen perfectamente los dos extremos de una correa, resultará que dicha correa forma un cuerpo que no presenta solucion alguna de continuidad, ni principia ni termina en ninguno de sus puntos: á este cuerpo se le da el nombre de *correa sin fin.*

Para trasmitir el movimiento de rotacion de un árbol á otro que sea paralelo al primero, sobre todo no hallándose el uno próximo al otro, se emplea la correa sin fin.

Supongamos que se quiere trasmitir el movimiento del árbol *AB* (fig. 121) á otro árbol que lleve una rueda cualquiera; para eso se hace pasar una correa sin fin desde el tambor que lleva el árbol AB al que lleva el otro árbol; la correa, arrastrada por el movimiento de rotacion del primero, lo comunica al segundo; si se quiere que la rueda no siga moviéndose, se lleva hacia la izquierda la extremidad C de la palanca CDE móvil alrededor del punto D; la horquilla E, en que termina la palanca, coloca á la correa sobre otro tambor que está al lado del primero, cuyo tambor, no estando unido al eje, puede girar sin que éste se mueva, de modo que el movimiento ya no se trasmite al eje, sino á este segundo tambor, que recibe el nombre de *polea loca*.

Para darnos cuenta de cómo por el intermedio de las correas sin fin obran las fuerzas, supongamos (fig. 122) que se quiere elevar un peso Q atado á una cuerda que se arrolla sobre el torno A, y para ello se aplica una fuerza P al manubrio B, con objeto de hacer girar el tambor C, y al mismo tiempo el torno por medio de la correa MN. Esta deberá hallarse tensa en toda su longitud, á fin de que se produzca entre su cara interior y las superficies de los tambores una adherencia que le impida deslizarse sobre ellas; pero la tension no será igual en todos sus puntos, sino mayor en el tirante M, llamado tirante motor. El exceso de su tension sobre la del tirante N será una fuerza que obre tangencialmente sobre el tambor D y que venza el peso Q.

Por otra parte, este mismo exceso de tension obrará como una resistencia aplicada tangencialmente al tambor C, la cual será destruida por la potencia P que actúa sobre el manubrio. Por lo tanto, en el caso de equilibrio, llamando U dicho exceso de tension, r al radio del tambor C, R la longitud del manubrio, r' el radio del cilindro A, R' el del tambor D, tendremos como condicion de equilibrio en el torno AD

$$U : Q :: r' : R'$$

y como condicion de equilibrio en el torno CD

$$P : U :: r : R$$

cuyas proporciones multiplicadas término á término, dan

$$P : Q :: r \times r' : R \times R'.$$

Pueden tambien los tirantes, en vez de ser tangentes exteriormente á los tambores, serlo interiormente; en este caso, las rotaciones de ambos tambores serian inversas.

Ruedas dentadas.—Si suponemos dos tornos (figura 123) dispuestos de tal manera que la rueda de uno esté en contacto con el cilindro del siguiente y enlazada con él por medio de salientes y hendiduras practicadas en aquélla y en éste, de manera que los salientes de la una encajen sucesivamente en las hendiduras del otro, tenemos lo que se llama un *engranaje*; las ruedas de los tornos toman el nombre de *ruedas dentadas*, y los cilindros el de *piñones*.

No habiendo de arrollarse cuerda alguna al cilindro convertido en piñon, no es menester darle gran longitud, sino á lo más, un poco mayor que la rueda que con él engrana. Los dientes de una misma rueda ó piñon son todos iguales y se hallan equidistantes sobre su contorno respectivo; además, el espacio ocupado por un diente y el hueco inmediato, es el mismo en la rueda dentada que en el piñon con que engrana; por lo tanto, la razon de los números de sus dientes es la de sus circunferencias, y en su consecuencia la de sus radios.

La rueda á la cual se aplica directamente la potencia, suele ordinariamente reemplazarse por un manubrio formado por una barra cuyo eje es un radio de dicha rueda.

Se emplea con frecuencia las ruedas dentadas para trasmitir el movimiento de rotacion de un árbol á otro inmediato, ya sean paralelos, ya formen entre sí un cierto ángulo: en este último caso, los dientes de las ruedas, en vez de hallarse trazados en una superficie cilíndrica, lo están sobre una cónica (fig. 124), sin que por esto deje de ser la misma que en el engranaje de ejes paralelos la relacion de los esfuerzos que unas ruedas trasmiten á otras.

Torno de engranaje.—Está formado por dos montantes verticales MM' de hierro fundido (fig. 125), que son los apoyos de la máquina; estos montantes están unidos á una fuerte solera de madera SS, que es su base de sustentacion, y mantenidos á una distancia constante por medio de tres barras T, T', T'', que además sirven para darle solidez. En estos montantes hay unos taladros C donde se alojan los gorrones del cilindro A; formando cuerpo con el eje del cilindro A va una rueda dentada D que engrana con un piñon P, cuyo eje E atraviesa los montantes y lleva unidos invariablemente á él por la parte exterior á ellos dos manubrios B F; además, para impedir el movimiento de retroceso si los operarios soltasen los manubrios, va unida á la varilla T'' una uña H, que sólo permite moverse al piñon en un sentido. Puede detenerse el movimiento cuando se quiera por medio de un freno (fig. 126), que consiste en una chapa de palastro en forma de cinta que abraza al cilindro *A*; uno de sus extremos va unido á uno de los montantes y el otro se mueve por la palanca *g*, apretando ó no al cilindro.

Para usar el aparato se aplican dos fuerzas que obren en sentidos contrarios á las manivelas, cuyas fuerzas hacen girar el árbol *E*; al girar el eje gira el piñon, y, por consiguiente, la rueda dentada *D*, que engrana con él, y, por lo tanto, el cilindro *A*, haciendo que se desenrolle la cuerda unida á él, ó que al arrollarse suba el objeto unido en el extremo P_1. En algunos tornos de engranaje el eje *E* tiene un movimiento de traslacion que hace que el piñon deje de engranar con la rueda *D* y deja libre el movimiento del cilindro *A*; pero en este caso se oprime al cilindro con el freno, con objeto de impedir la presion que el cuerpo suspendido en P_1 ejerce en *D*, y trasmitida á *P*, deje de obrar en el citado piñon *P*, y pueda dársele el movimiento de traslacion al eje *E*; cuando la máquina tiene esta disposicion, no existe la pieza *H*.

Gato ó cric.—Como ejemplo de las ruedas dentadas para ejercer esfuerzos considerables, tomaremos el gato ó cric (fig. 127). Se compone de una barra dentada *A* llamada *cremallera*, la cual engrana con un piñon *C*; en el eje de este piñon está fija una rueda dentada *B*, que gira al mismo tiempo que él, y que engrana con un segundo piñon *D*; por último, el eje de este segundo piñon está provisto de una manivela *E*.

Para usarlo, se introduce la extremidad de la cremallera debajo del cuerpo que se quiere levantar: despues se hace girar la manivela en el sentido que indica la flecha; el piñon *D* trasmite el movimiento de la manivela á la rueda *B*, que hace girar al piñon *C*, y por lo tanto, subir á la cremallera *A*, produciéndose así el efecto que se queria obtener.

El cuerpo del cric es un pedazo de madera con los huecos suficientes para las diversas partes citadas.

Las ruedas están recubiertas por una placa de palastro, atravesada por el eje de la manivela (fig. 128), que recubre el mecanismo. Una uña colocada en la parte exterior de esta placa permite detener la accion de la fuerza que hace girar la manivela, sin que por esto la cremallera ceda bajo el peso que soporta.

Por la forma de los dientes y la disposicion de la uña, se ve que la manivela no puede girar en más sentido que el indicado por la flecha. Mientras gira, la uña está levantada por los diversos dientes de la rueda; despues, en virtud de su peso, cae sucesivamente cada vez que ha pasado un diente. Cuando se quiera hacer entrar á la cremallera dentro del cric, no hay más que levantar la uña *m* haciéndole girar alrededor de *o* para llevarla á la posicion *m'*; entonces no toca ya á los dientes más que por su parte convexa, y la manivela se encuentra en las mismas condiciones que si la uña no existiese.

Cabria.—Para elevar los materiales que sirven para las construcciones se emplea la *cabria*, que es una combinacion del torno y la polea, y algunas veces de las ruedas dentadas.

La más generalmente usada se compone de dos montantes de madera (fig. 129) reunidos entre sí por medio de varios travesaños tambien de madera, ó por cruces de San Andrés; estos montantes sirven de soporte á un torno en la parte inferior, y en la superior á una polea fija por donde pasa la cuerda que va al objeto que se quiera elevar, ó á una polea móvil de la que pende dicho objeto.

La cabria se coloca sobre el suelo directamente, ó tambien puede estar unida á un bastidor con ruedas, que permiten el movimiento de la cabria paralelamente á la fachada de la obra.

Para mantenerla en la posicion inclinada qué debe dársele para que pueda funcionar, se la sostiene por su extremidad *C* con una ó dos cuerdas *CD* llamadas ***vientos***, los cuales se unen á puntos fijos, como árboles, casas, piquetes, etc.

Para servirse de la cabria, se hace girar al torno por medio de palancas que se introducen en unas cajas abiertas en el cilindro; la cuerda se enrolla y el cuerpo sube. La tension de la cuerda unida al torno es igual al peso del cuerpo que sostiene; la fuerza que hay que emplear para subirlo es, pues, la misma que si la polea no existiese y el cuerpo estuviera directamente suspendido del torno.

La tension de la cuerda *CD*, que mantiene á la cabria en una posicion inclinada, puede determinarse por las consideraciones siguientes: Si esta cuerda se quitase, la cabria caeria girando alrededor de la línea *AB*. El peso del cuerpo que se eleva, y que tiende á producir este movimiento de la cabria, está equilibrado por la tension de la cuerda *CD*; las dos fuerzas pueden, pues, ser consideradas como obrando sobre una palanca cuyos brazos serian las distancias de la línea *AB* á sus direcciones; es decir, que ellas deben ser entre sí como la relacion inversa de estas distancias. De aquí se deduce que mientras más vertical esté la cabria, ménos tension experimentará la cuerda *CD*.

Grúas.—Las grúas se componen en su parte esencial de un árbol (fig. 130), y de una pieza inclinada *ab* llamada *árbol*, que puede formar con la primera un ángulo constante ó variable.

Aunque este aparato afecta formas muy diversas, sólo nos ocuparemos aquí de las más generalmente empleadas en la construccion.

La representada en la figura 130 tiene el árbol apoyado en un tejuelo y sostenido superiormente por un collar que une tres piezas *c*, *d*, *e*. El brazo *ab* se une por su pie á una pieza de hierro fija al árbol, de modo que pueda girar, formando con éste un ángulo más ó ménos grande, y se da el movimento por medio de una cadena que despues de pasar por dos polipastos *f* y *g*, baja contigua al árbol, pasando por la polea *h* para terminar en un torno. Otro polipasto *i* fijo al extremo del brazo, sostiene el peso que se trata de subir, siguiendo luego la cadena hasta entrar en el árbol por su parte inferior, que está hueca, y por medio de dos poleas *k* y *m* atraviesa el pivote y el tejuelo para terminar en un torno.

La grúa descrita está fija en un cierto punto, lo cual tiene el inconveniente de tenerse que aumentar mucho el número de estos aparatos, ó de lo contrario, verificar trasportes, siempre costosos, desde los puntos donde la grúa deja el material hasta aquel en que se haya de colocar. Para evitar estos inconvenientes se han construido grúas que, apoyándose en el suelo y pudiendo moverse paralelamente al contorno de la obra, lleven los materiales á su destino.

La figura 131 hace ver la disposicion de uno de estos aparatos.

Consta de dos montantes verticales *aa'*, apoyados en un fuerte bastidor y reforzados por piezas horizontales é inclinadas. En la parte superior de los primeros puede girar en un plano vertical la pieza *bc*, sostenida en su zona central por un eje de hierro y reforzada por la parte superior con una cuerda de alambre *def* bien tensa; el bastidor antedicho insiste sobre cuatro ruedas apoyadas en carriles paralelos á la fachada de la obra. La cadena que sostiene el peso pasa por dos poleas fijas *g* y *h*, y se arrolla en el torno *m*; desde el punto *i* parte una cuerda que despues de apoyarse en las poleas *p* y *q*, va á parar al torno *n*, por cuyo medio se da al brazo móvil la inclinacion conveniente. Esta grúa puede actuar por medio de un motor de vapor.

Las grúas móviles son en general más caras en su construccion, pero su empleo proporciona una notable economía en la ejecucion de las obras, siendo su uso conveniente en las construcciones de importancia.

Martinetes.—Para introducir los pilotes en las construcciones, y en general para ejercer un fuerte choque sobre cualquier objeto, se hace uso de unos aparatos llamados *martinetes*.

Se componen de dos montantes ó grúas *aa* (fig. 132) ensamblados á caja y espiga en una solera *b*, los cuales se mantienen á una distancia de $0^{m},10$ á $0^{m},12$ uno de otro por medio de puntales *cc*, colocándose entre los montantes y en su parte superior una fuerte polea fija *e*.

Este aparato se mantiene en posicion vertical, estableciendo otros puntales *ff* provistos de listones que sirven de peldaños, ensamblándose á los montantes por su parte superior, y por la inferior á una pieza *hh* llamada *cola*, la que á su vez se enlaza con la solera *b* por medio de las piezas *dd*. En algunos martinetes sólo existen las piezas *a*, *b* y *c*, manteniéndose el aparato. bien vertical, ó más ó ménos inclinado, por medio de unos fuertes vientos fijos á piquetes bien clavados. Por la polea pasa una cuerda unida por un extremo á la *maza m*, terminando por el otro en 30 ó 40 cordones de los que tiran los hombres para subirla, ó tambien se arrolla este extremo á un torno de engranaje. Se guia el movimiento ascensional y de descenso de la *maza* por dos espigas *ss* que pasan por el intervalo de los montantes, poniendo una cabilla en el extremo opuesto de la maza; ésta es de madera bien dura reforzada con zunchos de hierro, y su peso depende del efecto que se desee producir.

Cuando los trabajadores actúan directamente sobre la cuerda, el martinete se dice que es *á brazo*, y los hombres suben la maza de $1^m,25$ á 1,50 y dan 30 golpes, lo que constituye una *andanada*.

Si se emplea un torno de engranaje, se dice que el martinete es *de escape*, y puede hacerse uso de él de dos maneras: primera, empleando unas tenazas (fig. 133) cuyos brazos tienen la forma aproximada de un 3, los que se cruzan únicamente por su parte central, uniéndose por un pasador, y á éste se ata el extremo de la cuerda. Estas tenazas están cerradas por un resorte, y para que se desprenda la maza se colocan en los montantes, y á la altura conveniente, dos piezas de madera *aa* que dejan entre sí cierto intervalo, el cual se va estrechando hacia arriba. Al tropezar con estas piezas las tenazas cuando se tira de la cuerda, se cierran por la parte superior y se abren por la inferior, dejando caer la maza: en esta clase de martinete de escape tambien pueden los hombres reemplazar al torno de engranaje. Dicha clase de martinete de escape se conserva mejor que aquel en que se emplea el torno de escape, pues en éste, al bajar la maza, lo hace con una gran velocidad, lo cual hace que se roce la cuerda y sufra todo el aparato.

Cuando no se quieren emplear las tenazas para dejar caer la maza, se puede hacer por medio del torno (figura 134); para conseguirlo, se hace resbalar el eje *B* en sentido de su longitud, de manera que el piñon deje de engranar en la rueda dentada; entonces la maza, no encontrándose detenida, caerá, arrastrando la cuerda y haciendo girar el torno y la rueda en sentido contrario al que se le habia hecho girar precedentemente.

Para producir este desplazamiento longitudinal del eje *B*, que suprime la comunicacion del piñon con la rueda dentada, se obra sobre la palanca *CDE*, que puede girar horizontalmente alrededor del punto *D*. Esta palanca termina en *E* por una horquilla que abraza el árbol *B* y que se introduce entre dos apéndices que este árbol presenta de uno y otro lado.

Haciendo mover la extremidad *C* de la palanca horizontalmente y en cierto sentido, el eje *B* se mueve en sentido contrario, sin cesar por eso de girar, si los obreros siguieran actuando en las manivelas. Una clavija que se coloca cerca de esta palanca, le impide moverse mientras el piñon engrana con la rueda.

Malacates.—Cuando se quiere extraer agua en bastante cantidad de un pozo, ó tierras, se hace uso de un aparato llamado *malacate*; los hay de varios sistemas, y uno de los más usados es el siguiente: se compone (figura 135) de dos poleas colocadas una al lado de la otra y por encima de la boca del pozo; á una pequeña distancia se encuentra un árbol vertical que puede girar sobre sí mismo y que lleva en su parte superior un tambor; una cuerda da dos ó tres vueltas sobre éste, y se separan por una y otra parte de él los extremos de la cuerda, para ir á pasar cada uno á las gargantas de las poleas: en dichos extremos se hallan suspendidos los cubos ó espuertas que han de servir para sacar el agua ó la tierra. Se engancha un caballo en la extremidad de una larga palanca que está fija al árbol; el caballo al tirar mueve el árbol; la cuerda que envuelve al tambor se enrolla por un lado y se desenrolla por el otro, descendiendo así la espuerta vacía y elevándola llena, y así sucesivamente. Otro ejemplo de malacates lo tenemos en las norias.

Ejemplo de su aplicacion en las obras.—Al describir las citadas máquinas, hemos dicho los usos que tienen en las obras; así es que en la citada descripcion están dichos ejemplos; sin embargo, aunque de una manera sumaria, diremos las aplicaciones de ellas. Las correas sin fin, más que en las obras públicas, donde tienen su principal aplicacion es en los talleres, pues al hacer girar la máquina motriz el árbol ó árboles que se extienden en toda la longitud de los talleres, estando colocadas en estos árboles de distancia en distancia las correas sin fin, por el intermedio de éstas se mueven los útiles destinados, ya á trabajar los metales, aserrar maderas, etc., comprendiéndose á primera vista que sin el auxilio de las correas sin fin, se necesitaria tantos motores como máquinas hubiese.

Las ruedas dentadas llevan un gran perfeccionamiento á las máquinas, pues con el auxilio de ellas se disminuyen las resistencias pasivas, consiguiéndose así favorecer la potencia; siendo un ejemplo de esto los tornos, gato ó cric, cabrias y grúas: con estas máquinas se remueven pesadas masas con una potencia muy inferior á la resistencia vencida.

Para clavar los pilotes en el suelo, es preciso ejercer sobre sus cabezas una gran presion, á fin de vencer las resistencias que se oponen á su introduccion.

Sería difícil producir esta presion cargando la cabeza del pilote con una cantidad considerable de cuerpos pesados; así, pues, se ha recurrido á choques, que permiten ejercer la presion de que se tiene necesidad con la ayuda de una masa mucho menor.

Cuando se trata de pilotes de pequeña longitud, se golpea sencillamente sobre sus cabezas con grandes martillos manejados á mano; pero esto no bastaria cuando se quiera hincar los pilotes largos y gruesos que se emplean en los grandes trabajos hidráulicos, tal como la construccion de los puentes. En este caso, se hace uso de los *martinetes* que hemos descrito, por medio de los cuales se puede hacer caer un cuerpo muy pesado sobre la cabeza del pilote, y producir, por consiguiente, un choque cuya intensidad está en relacion con la magnitud de la resistencia que hay que vencer.

Los *malacates* se usan para sacar agua ó tierras desde gran profundidad, haciendo mover la máquina por medio de caballerías, siendo, por lo tanto, más rápida la extraccion que cuando se emplean los tornos, á causa de la mayor potencia que se aplica.

Al concluir las presentes lecciones, réstame únicamente añadir que, habiendo sido escritas con sujecion al programa, han dejado de tratarse algunas teorías, como las referentes al *movimiento de traslacion* y *movimientos compuestos*, tanto por no exigirse á los alumnos el conocimiento de las expresadas teorías, como porque la proximidad de los exámenes no me permite dilatar por más tiempo la publicacion de la obra, habiendo servido de consulta para su redaccion las de Colignon, Ariño, Feliú, Ganot, Rebolledo y un cuaderno que, por ignorarse el nombre del autor, no me es posible citarlo.

FIN

INDICE

Páginas.