Gómez, B. (2018). El uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(1), 11-21.

ISSN: 2603-9982

EL USO DE LA HISTORIA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: EL CASO DE LOS GEMELOS PÓSTUMOS

Bernardo Gómez, Universitat de València

Resumen

Se presenta un estudio exploratorio sobre un tipo particular de problemas verbales descriptivos de larga tradición e importancia en el desarrollo del pensamiento matemático: el problema de los gemelos póstumos.

La metodología que sustenta el estudio tiene dos vertientes complementarias: el análisis histórico epistemológico y el análisis didáctico en los libros de texto y manuales escolares. Con énfasis en la resolución de problemas, se resalta la importancia de integrar la historia y epistemología de las ideas matemáticas en la investigación educativa, para provecho de estudiantes y profesores.

Palabras clave*: Didáctica de la matemática, Historia y Educación Matemática, Problemas descriptivos aritmético algebraicos.*

The use of history in mathematics education: The case of posthumous twins

Abstract

An exploratory study is presented on a particular type of descriptive word problems of long tradition and importance in the development of mathematical thought: the problem of posthumous twins.

The methodology that supports the study has two complementary aspects: the historical epistemological analysis and the didactic analysis in textbooks and school textbooks. With emphasis on problem solving, the importance of integrating the history and epistemology of mathematical ideas into educational research is emphasized, for the benefit of students and teachers.

Keywords*: Didactics of Mathematics, History and Mathematical Education, Descriptive problems algebraic arithmetic.*

Recibido: 20/03/2018; Aceptado: 04/04/2018

LOS PROBLEMAS DESCRITIVOS

En la actualidad, la resolución de problemas emerge con renovado interés en las propuestas curriculares debido a que es considerada una competencia básica en el desarrollo del pensamiento aritmético y algebraico. Ejemplo de ello es que aparece explícitamente en el currículo básico de la Educación Primaria española (MEC 2014).

Aceptar la importancia de la resolución de problemas en la educación escolar matemática implica que los profesores han de tener ideas claras acerca de con qué problemas, con qué métodos y con qué fin deben enseñarlos.

Una manera de contribuir a clarificar estas ideas es mediante el análisis didáctico e histórico epistemológico de los problemas que la tradición escolar nos ha legado. Con este objetivo y. metodología abordamos en este trabajo el estudio de un caso particular de los problemas verbales descriptivos: el de los gemelos póstumos.

Se entiende por problemas verbales descriptivos, aquellos que nos ha legado la tradición de enseñanza de las matemáticas escolares, que en su enunciado se describe una situación o se narra una historieta pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna cuestión práctica, sino ejercitar el ingenio, el razonamiento y la curiosidad matemática. Tal vez por eso a menudo se les ha llamado problemas de matemáticas recreativas.

Los antecedentes de estos problemas se remontan a las antiguas culturas matemáticas y desde entonces han sido parte esencial del contenido de los libros de texto y manuales escolares.

METODOLOGÍA

El estudio, es exploratorio, ya que no pretende confirmar ningún supuesto o hipótesis sino describir cómo se ha configurado un determinado contenido de enseñanza.

La metodología, se estructura por medio de dos vertientes complementarias: el Análisis Histórico y Epistemológico (Gómez, 2003, 2011 a y b) y el Análisis Didáctico (Rico y Fernández, 2013). El primero, porque permite conocer cómo se ha presentado un contenido de enseñanza en diferentes libros de texto y/o manuales escolares en diferentes momentos de la historia; y, el segundo, porque permite delimitar unidades de análisis que den cuenta de esa presentación.

Para el primer análisis se recurre a un enfoque de aproximación global[1], y para el segundo se hace uso de un enfoque “a priori” propio del análisis de textos (Dormolen, 19862)[2]

Las unidades de análisis escogidas para el estudio del problema descriptivo particular seleccionado: el de los gemelos póstumos son el análisis estructural y conceptual, y el análisis procedimental (métodos) y lecturas analíticas de los enunciados que se encuentran recogidas en la literatura (Gómez, 2002; Maz, 2009)

La lectura analítica de un problema, que por su origen suele vincularse al método cartesiano, no debe entenderse como la traducción del enunciado del problema al lenguaje simbólico algebraico; sino, más bien, la reducción del enunciado a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades, transformándolas para dar lugar a partir de esas cantidades y relaciones a una ecuación, a una fórmula o incluso a una regla (Gómez y Puig, 2018).

Fuentes de los problemas descriptivos

Los problemas descriptivos se pueden encontrar en los textos de las antiguas culturas matemáticas china e hindú, y en las primeras colecciones de la Europa medieval como la Antología griega (s. V.) o las *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino (735-804 d. C.).

En Occidente, estos problemas comenzaron a conocerse gracias a la matemática islámica a través de textos como el *Liber abaci* de Fibonacci (1202). Más adelante, tras la introducción de la imprenta, se produjo una eclosión de aritméticas y álgebras impresas que incorporaron problemas descriptivos, a menudo a modo de miscelánea. Es el caso, entre otros, de Pérez de Moya (1562) y Aurel (1552).

A mediados del siglo XVII, estos problemas se incorporan a los primeros textos de matemáticas recreativas, como por ejemplo las *Récreations Mathématiques* de Ozanam (1692)

En el siglo XX, varios de estos problemas aparecen resueltos en los libros “para el maestro”, editados como “Solucionarios” de las “Aritméticas razonadas”, de las editoriales Dalmau y Bruño, múltiples veces reeditadas a lo largo del siglo XX. Actualmente se les puede hallar, aunque de modo disperso en los manuales escolares.

ESTEREOTIPOS

Los enunciados de los problemas descriptivos han evolucionado a lo largo del tiempo, adaptándose a los cambios sociales y a diferentes niveles de complejidad, pero al conservar su estructura y métodos, se han estandarizando bajo una determinada forma que sirve de problema tipo, estereotipo o modelo.

Para referirse a estos estereotipos se han usado denominaciones tomadas de aspectos superficiales del enunciado: contexto, agentes, acciones, etc. El ejemplo escogido a los efectos de ilustrar el presente trabajo, es el que aparece en la cronología de los problemas recreativos de Singmaster (1996) bajo el nombre de los gemelos póstumos. Este problema se encuentra en Alcuino (735-804 d. C.), según la traducción de Burkholder (1993), con el siguiente enunciado:

> *Los gemelos póstumos*. Al morir un padre dejó una esposa embarazada y 960 bezantes de su hacienda. Dispuso que si la mujer tuviera un hijo éste debería recibir tres cuartos de la herencia - es decir, nueve doceavos, y la madre un cuarto, es decir, tres doceavos. Sin embargo, si naciera una hija, ella debería recibir siete doceavos, y la madre, cinco doceavos. Pero como ocurrió que dio a luz a gemelos - ambos un niño y una chica. Hubo que solucionar el reparto como se pudo. ¿Cuánto debería recibir la madre, el hijo y la hija? (ALC, Burkholder, 1993, proposición 35, p. 27).

Smith en su Historia de las matemáticas (1929, vol. II) dice que este problema deriva de la *lex Falcidia* romana (40 a. C.), y que aparece en uno de los textos legislativos escritos por el jurista Juventius Celcus, c .75.

Análisis estructural y conceptual

El término “estructura” es ampliamente usado y la mayoría de las veces sin necesidad de explicar qué se quiere decir con eso. En contextos diferentes el término estructura puede querer decir cosas diferentes para diferentes personas. En este trabajo se usa el término “estructura”, en el sentido de Hoch y Dreyfus (2010), que al aplicarlo a un problema se refiere a dos componentes, una interna y otra externa. Interna por su aspecto o apariencia y externa por las relaciones y conexiones entre cantidades y operaciones.

En el problema de los gemelos la componente externa es la de un reparto no equitativo, esto es en partes desiguales, unas múltiplo o fracción de otras. La componente interna es la del reparto proporcional, que consiste en dividir un número *a*, en tres partes *x*, *y*, *z*, que guarden entre sí la misma razón que tres números dados, *p*, *q*, *r*.

> Repartir un número en partes proporcionales a otros números dados, es dividir dicho número en tantas partes como números dan; de modo que la razón de la primera parte a la segunda sea igual a la razón del primer número al segundo; que la razón de la parte segunda a la tercera sea igual a la razón del segundo número al tercero, y así sucesivamente (Dalmau, 1943, p. 193).

Análisis procedimental del reparto proporcional

Las relaciones entre cantidades de esta estructura son las siguientes:

$$x+y+z=a; \quad \frac{x}{y}=\frac{p}{q} \; ; \quad \frac{x}{z}=\frac{p}{r}.$$

El procedimiento estándar recogido en los libros de texto para hallar el valor de x, y, z, consiste en alternar los medios en cada una de las dos proporciones del párrafo anterior para obtener tres razones iguales, a las que se aplica la propiedad aditiva de las razones para transformarlas en una cadena de igualdades que se desglosan en tres reglas de tres:

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r} \; ; \; \frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\frac{x+y+z=a}{p+q+r},$$

Este proceso, que se conoce como método de las proporciones, es el resultado de una determinada lectura analítica. La lectura comienza siempre con la identificación de las relaciones entre cantidades y sigue con la transformación de esas relaciones hasta llegar al resultado.

Las lecturas analíticas del problema de los gemelos póstumos

En el caso particular de los gemelos póstumos el procedimiento de solución que da Alcuino es el siguiente:

> Solución. 9 y 3 hacen 12 y 12 onzas hacen una libra. Igualmente 7 y 5 también hacen 12; y dos veces 12 son 24. 24 onzas hacen dos libras, que son 40 chelines. Divide 960 bezantes en 24 partes; que es 40. Toma nueve de esas partes de 960; o sea nueve 40s, o 18 libras, o 360 bezantes, que recibe el hijo. Por comparación con el hijo y la hija, la madre toma tres partes de lo que toma el hijo y cinco de lo de la hija, y 3 y 5 hacen 8. Entonces, la madre recibe ocho 40s, o 16 libras, o 320 bezantes. Lo que queda, que son siete 40s, o 14 libras o 280 bezantes, es lo que recibe la hija. Suma 360, 320 y 280, que son 960 bezantes, o 48 libras (traducción libre del texto en inglés de Hadley & Singmaster, 1992, p. 118 y 119).

Para entender el texto conviene tener en cuenta que, según Pérez de Moya (1562/1998), a las herencias se les llamaba *As, libra o pondu*, y que por comodidad los antiguos legislaron dividirlas en 12 partes, porque este número es pequeño y tiene muchas partes alícuotas, lo que facilita las divisiones.

Cada una de las 12 partes de As o libra tenía nombre propio y su equivalencia en onzas:

> Sescuns: onza y media de las 12; sextans, o sexta parte de 12, que son 2 onzas; quadrans, o cuarta parte de 12, que son 3 onzas; triens, o tercio de 12, que son 4 onzas; quincus, que son 5 onzas; semis sis, o semi is, mitad o 6 onzas; septuns, que son 7 onzas; bessis sis o bes sis, o 2 tercios de 12, que son 8 onzas; dodrans, que vale 9 onzas; dextans, que es 10 onzas; deunx, que es por once onzas; As, en que comprehenden todas 12 (Pérez de Moya, 1562/1998, pgs. 240).

De ahí que, como una onza es la doceava parte de una libra, se tiene que 9/12+ 3/12+ 5/12+ 7/12=24/12, son 24 onzas, que hacen 2 libras. Y que un bezante, moneda de la época, valía 1/20 de libra; o sea, 1 libra = 20 bezantes.

La solución que da Alcuino ha sido fruto de controversia ya que la solución: 18, 16 y 14 libras para el hijo, la madre y la hija respectivamente, no cumple con las exigencias del testador; que era que el hijo recibiera el triple que la madre y que la madre recibiera 5/7 de lo de la hija.

La siguiente tabla sintetiza la lectura analítica de los gemelos póstumos que explica la solución de Alcuino

Hijo	Madre	Hija	Total: 960 bezantes
9/12	3/12, un tercio de lo del hijo		
	5/12	7/12	
9 onzas	8 (=5+3) onzas	7 onzas	Suma onzas de la herencia (24=9+8+7)
$\frac{960}{24} \times 9 = 18$ =360 bezantes	$\frac{960}{24} \times 8 = 16$ =320 bezantes	$\frac{960}{24} \times 7 = 14$ =280 bezantes	Los 960 bezantes se han dividir en 24 partes, de las cuales el hijo se lleva 9, la madre 8, y la hija 7

Alcuino suma los números (numeradores) del testamento que son 24=9+8= 5+3+7 y toma ese valor como el número de partes en que se han de dividir los 960 bezantes, para dar al hijo 9 de esas partes, 8 a la madre 8 y 7 la hija. El apoyo tabular permite describir en síntesis la lectura analítica de Alcuino

Este problema aparece muchas veces en las matemáticas medievales, por ejemplo, en Siliceo (1514) se encuentra con el siguiente enunciado:

> Un hombre agonizante, que tenía su esposa embarazada y con un capital que cifraba en 2.000 escudos, dejó este testamento: «Si mi mujer da a luz un niño, para él serán los tres quintos de mis bienes, para mi mujer un quinto, y para la iglesia el resto, es decir un quinto. Pero si da a luz una niña, ésta recibirá dos quintos, mi mujer otros dos y la iglesia el resto». Pero al llegar el momento la mujer dio a luz las dos cosas, es decir, un niño y una niña. Pregunta: cómo se distribuirán los bienes.

La solución de Siliceo sigue la misma pauta que Alcuino

> Respuesta: escríbanse todos los números formulados en el testamento, es decir, 3 del hijo, 2 de la hija, 2 de la madre, y 1 de la Iglesia; súmense y tendremos 8, que es el divisor; el número de escudos 2.000, es el multiplicador por el cual se multiplica cada una de las partes; el producto se divide por 8; y el cociente dará la solución. Esta será: 750 escudos para el hijo; 500 para la hija; 500 para la mujer; y 250 para la Iglesia. De igual forma se operará si la mujer da a luz dos hijos o dos hijas o dos hijos y una hija (Sánchez y Cobos, 1996, p. 265)

La tabla muestra sintetiza la lectura analítica de Síliceo

Hijo	Madre	Hija	Iglesia	Total: 2.000 ducados
3/5	1/5, un tercio de lo del hijo		1/5	
	2/5	2/5	1/5	.
3	2	2	1	Total 8
$\frac{2000}{8} \times 3 = 750$	$\frac{2000}{8} \times 2 = 500$	$\frac{2000}{8} \times 2 = 500$	250	Los 2000 escudos se han de dividir en 8 partes, de las cuales el hijo lleva 2, la madre 2, la hija 2 y la Iglesia 1

Al igual que Alcuino la solución de Siliceo no respeta los deseos del testador, ya que los 750 escudos que se lleva el hijo no son el triple de los 500 que se lleva la madre. Sin embargo, a diferencia de Alcuino no suma todos los numeradores: 3+1+2+2+1=9, y tampoco evita las fracciones. Porque usa “quintos”, en vez de doceavos, que son onzas.

También en la Aritmética de Pérez de Moya (1562) aparece el mismo problema, pero ahí con una solución que sí que satisface lo que prescribe el testador. El enunciado dice así:

> Un testador, dejando su mujer en días de parir, mandó que si pariese hijo que tuviese las 8 onzas de su herencia, y del restante hizo heredera a su mujer; quiso más, que si hija le naciese heredase el triente [nombre del tercio de la herencia] (que son las 4 onzas) y la mujer fuese heredera en lo demás. Parió la mujer hijo e hija, pídese: ¿de 1400 ducados que se estima la herencia, cuánto vendrá a la madre y a cada uno de los hijos, según lo que el testador mandó? (Op. cit. p. 240).

Pérez de Moya resuelve el problema de dos formas, la primera por la regla de compañías:

> Para hacer esta cuenta pondrás 3 números cualesquiera que te pareciere que se excedan en dupla proporción, como 1, 2, 4, o 2, 4, 8, y así, por razón que la voluntad del testador (como se colige del jurisconsulto) fue que la madre oviese de la herencia doblado que la hija y el hijo doblado que la madre. Y porque he dicho que los menores números serán menos embarazosos para tratar con ellos, por tanto toma 1 y 2 y 4 y ordena una regla diciendo: tres hacen compañía, el primero puso 1, el segundo 2, el tercero 4, han de partir 1400, que es la herencia, pido: ¿Qué viene a cada uno? Sigue la regla de compañía sin tiempo que más te agradare, y vendrá a la hija 200, y a la madre 400 y al hijo 800 (Op. cit. pp. 240-241).

Esto es:

Hijo	Madre	Hija	Total: 1400 ducados
$\frac{8}{12}$ doble que la madre	$\frac{4}{12}$		
	$\frac{2}{3}$ doble que la hija	$\frac{1}{3}$	
8 onzas	4	2	14 partes
4	2	1	7 partes
$\frac{x}{4}=\frac{1400}{7}$	$\frac{y}{2}=\frac{1400}{7}$	$\frac{z}{1}=\frac{1400}{7}$	$(x, y, z)=\frac{1400}{7}\times(4, 2, 1)=$ (800, 400, 200)

Dice Pérez de Moya que como quiera que este método de las proporciones o de compañía, se desglosa en muchas reglas de tres, hay una alternativa más breve, que consiste en dividir la herencia en las 7 partes que resultan de sumar los números 4, 2 y 1, que vienen de la razón entre las herencias, para dar a los herederos 4, 2 y 1 de esas 7 partes, que es la proporción que manda el testador.

> Y porque para la regla de compañías por los cuatro modos primeros de los 5 que puse en el segundo c. de este tercero libro requieren muchas reglas, los jurisconsultos, procurando toda brevedad, mandaron dividir o hacer la herencia en 7 partes iguales, porque los números de que se sirven el hijo, y madre e hija montan 7, y después de hechas 7 partes dan las cuatro al hijo, y las dos a la madre y la una a la hija (…). Pues divide los 1400 ducados (que es la estimación de la herencia) en 7 partes (lo cual se hace partiendo por 7) y vendrá a valer cada parte 200 ducados. Ahora, porque al hijo le pusiste un 4, toma 4 partes, que son 800, y a la madre porque tiene un 2 dale 2 partes, que son 400, y a la hija porque tiene una dale una parte (que son 200), que es lo mismo que puede salir por cualquiera regla de compañía (pp. 240 y 241).

En síntesis la lectura analítica del método alternativo de Pérez de Moya es:

Hijo	Madre	Hija	Total: 1400 ducados
$\frac{8}{12}$ doble que la madre	$\frac{4}{12}$		
	$\frac{2}{3}$ doble que la hija	$\frac{1}{3}$	
8 onzas	4	2	14 partes
4	2	1	7 partes
$\frac{1400}{7} \times 4 = 800$	$\frac{1400}{7} \times 2 = 400$	$\frac{1400}{7} \times 1 = 200$	1400 escudos en 7 partes, 4 para el hijo, 2 la madre 2, y 1 la hija.

El método breve, o método "del número de las partes", usado por Pérez de Moya, es de origen desconocido, ya se aplicaba desde tiempos remotos a otros problemas de repartos diversos, y se proyecta hasta nuestros días. El siguiente ejemplo tomado de Bruño, da buena prueba de ello.

> En la puerta de una iglesia se encuentran habitualmente dos mendigos, a saber: un pobre todos los días y alternando un ciego y un cojo. Una persona caritativa manda a su criada con 52 céntimos y le dice: «Si encuentras a la pobre y al ciego, darás a éste los $\frac{3}{4}$ de la suma y $\frac{1}{4}$ a la mujer; pero si está allí el cojo, no le darás más que el $\frac{1}{4}$ de la suma y los $\frac{3}{4}$ a la mujer.» Por casualidad aquel día están los tres mendigos a la puerta de la iglesia. ¿Cuánto dará a cada uno según la mente de su señora? (Bruño, sf., p. 308, nº 1180).
>
> Según la intención de la señora, el cojo ha de recibir el $\frac{1}{3}$ de lo que reciba la mujer, y ésta la $\frac{1}{3}$ parte de lo que reciba el ciego. Por tanto, si el cojo recibe 1 céntimo, a la mujer corresponden 3 céntimos, y al ciego 9 céntimos. Soluc. – Al cojo corresponden $\frac{52}{13} = 4$ céntimos; a la mujer, 12 céntimos, y al ciego, 36 céntimos (p. 308).

La tabla sintetiza la lectura analítica

Ciego	Mujer pobre	Cojo	Total: 52 céntimos
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$ tercio que ciego		
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$ tercio que mujer	
9	3	1	13 partes
$\frac{52}{13} \times 9=36$	$\frac{52}{13} \times 3 = 12$	$\frac{52}{13} \times 1 = 4$	

Aurel (1552), resuelve el problema por medio del álgebra.

> Un hombre enfermo, hace su testamento de esta manera, que si su mujer (que está preñada) pariese un hijo, el cual hubiese, de 3000 ducados que dejo, los 2000 ducados; y la madre 1000 ducados. Y pariendo hija hubiese 1000 ducados, y la madre 2000 ducados. Muerto el marido, parió la mujer 2 hijas y un hijo. Demando, ¿qué viene a cada una hija, e hijos y madre? (Op. cit., fo. 91 dcha.)
>
> La intención del padre fue, que el hijo haya 2 veces tantos ducados como la hija. Por lo cuál pongo que a la una hija venga x ducados, a la otra hija, otro tanto, que es x ducados, a la madre 2 veces tanto como a una hija, y serán 2x ducados, al hijo 2 veces tanto que a la madre, y serán 4x ducados. Súmalo todo junto, y vendrán 8x iguales a 3000 ducados. Parte, y vendrán x a valer 375. Tantos ducados vinieron a una hija, otros tantos 375 ducados a la otra hija, a la madre 2x valen 750 ducados, al hijo 4x que valen 1500 ducados. Serán todos 3000 ducados (Op. Cit., fo. 91 dcha.).

Nota: Aurel no usa "x", sino el signo de "la cosa".

La lectura analítica con apoyo tabular es la siguiente:

Hijo	Mujer	Hija	Hija	Total
2000	1000			
	2000	1000		
4x	2x	x	x	8x=3000;
$375 \times 4=1500$	$375 \times 2 = 750$	$375 \times 1 = 375$	$375 \times 1 = 375$	$x=\frac{3000}{8} = 375$

Otro método, utilizado para resolver problemas con la misma estructura interna que el de los gemelos póstumos es el de igualación, que en el conocido problema de la mula, el caballo y el burro, se puede encontrar con apoyo gráfico en varias páginas "web":

> Un arriero tiene en su cuadra una mula, un caballo y un burro. Cuando lleva a trabajar a la mula y el caballo, pone 3/5 de la carga en la mula y 2/5 en el caballo. Sin embargo, cuando lleva el caballo y el burro, entonces pone 3/5 de la carga en el caballo y 2/5 en el burro. ¿Cómo distribuirá la carga hoy si lleva a los tres animales y tiene que transportar una carga de 190 kg.

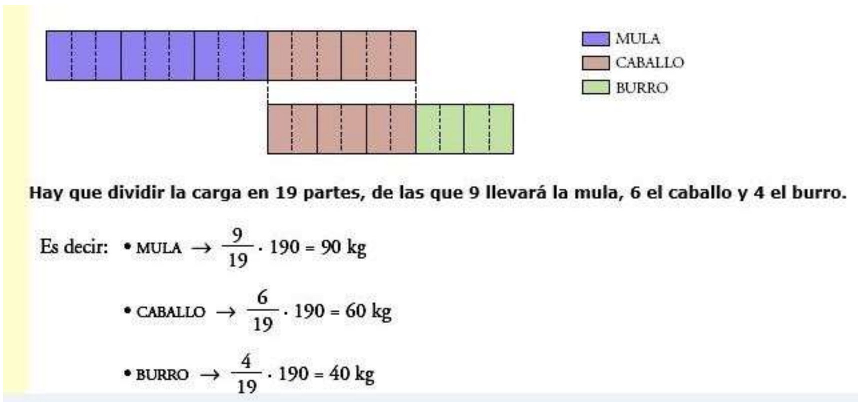

Figura 1. Resolución del problema de la mula, el caballo y el burro (Curso de matemáticas on-line, 2018)

La lectura analítica es la siguiente:

mula	Caballo	Burro		Total
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$		Multiplicando por 3 esta fila se obtienen $\frac{9}{10}$ y $\frac{6}{10}$	
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	Multiplicando por 2 esta fila se obtienen $\frac{6}{10}$ y $\frac{4}{10}$	
$\frac{9}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	De modo que cuando el caballo carga 6 partes, el burro carga 4 y la mula 9	9+6+4=19 partes
$\frac{190}{19} \times 9=90$ kg	$\frac{190}{19} \times 6 =60$ kg	$\frac{190}{19} \times 4 =40$ kg		190 kg

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

Hay una tradición de enseñanza de los problemas aritmético - algebraicos en la que éstos se han usado al estilo de ejercicio y práctica, para consolidar o aplicar los conocimientos adquiridos previamente. Sin embargo, esto no ha sido siempre así, como es el caso de los problemas descriptivos, que se han usado más bien para favorecer la reflexión y el razonamiento matemático.

En el presente trabajo se ha puesto énfasis en este enfoque de la resolución de problemas, mostrando los razonamientos que los grandes matemáticos del pasado y cómo éstos se han transmitido y proyectado en los libros de texto y manuales escolares.

En particular se ha estudiado el caso de uno de los estereotipos de los problemas descriptivos más conocidos: los gemelos póstumos, mostrando sus lecturas analíticas y sus métodos de resolución: proporción o compañías, partes, algebraico e igualación, tal y como han quedado reflejados en los libros de texto que los que autores de diversas épocas han legado.

La metodología utilizada permite ilustrar la importancia de integrar la historia y epistemología en la educación matemática para aportar conocimiento útil para la enseñanza, el aprendizaje y para la investigación educativa. Útil para el alumnado, porque promueve la reflexión y el razonamiento sobre los problemas descriptivos y sus procesos de resolución; y, útil para el profesorado porque permite orientar su enseñanza en un enfoque significativo de resolución de problemas.

En definitiva, es útil para el investigador, porque ofrece conocimientos para dar fundamento racional a los estudios empíricos de tipo cognitivo, en particular para estudiar la relación e influencia de los modelos de enseñanza y aprendizaje de los problemas aritmético - algebraicos en el desempeño de los estudiantes.

Agradecimientos

Este trabajo ha contado con el apoyo de los proyectos concedidos por el Ministerio de Educación de España (EDU2017-84377-R MINECO/FEDER) y la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana (GVPROMETEO2016-143).

Notas

[1] La metodología tradicional de estudiar textos aisladamente, o comparar varios textos entre sí, es insuficiente, en la medida que tiende a desconsiderar las raíces y fuentes de las concepciones vertidas en el texto, su contexto social y cultural, las particularidades propias del sistema educativo (curriculares) o las del estatus profesional de los profesores que los usan (Schubring, 1987).

[2] Dormolen (1986) señala que se pueden hacer tres tipos de análisis en los libros de texto: a priori que consiste en el análisis del texto como medio de instrucción; a posteriori, que es el análisis para comparar el texto con los resultados del aprendizaje; y a tempo, que es el análisis para conocer cómo los estudiantes y profesores usan los libros de texto

REFERENCIAS

Aurel, M. (1552). *Libro primero, de arithmetica algebratica*. Valencia: En casa de Ioan de Mey.

Bruño (s.f.). *Tratado teórico práctico de aritmética razonada. Curso superior. Segunda edición. Solucionario*. Madrid, Barcelona, Valladolid: Ediciones Bruño.

Burkholder, P. J. (Trad.) (1993). Alcuin of York's Propositiones Doctoris Caroli Magni Imperatoris ad acuendos juvenes: Introduction and commentary; Translation. *HOST: An Electronic Bulletin* *for the History and Philosophy of Science and Technology 1, nº. 2* Recuperado de http://www.math.muni.cz/~sisma/alcuin/anglicky1.pdf

Curso de matemáticas on-line (2018). *Problemas de ejercitación con fracciones*. Recuperado de http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas141.htm

Dalmau, J. (1943). *Soluciones analíticas. Nueva edición corregida y aumentada. Libro del maestro*. Gerona: Dalmau Carles Pla, S. A.

Dormolen, J. Van (1986). Chapter 4. Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson, and M. Otte (eds.), *Perspectives on Mathematics Educatio*n (pp. 141-171). D. Reidel Publishing Company

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-292.

Gómez, B. (2003) La investigación histórica en didáctica de las matemáticas. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, & A. Vallecillos A. (eds.). *Proc. VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM): Investigación en Educación Matemática* (pp. 79-85). Granada: U. de Granada.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, *5(2)*, 49-65.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon 28(1)*, 77, pp.9-22.

Gómez, B. (2016). Problemas descriptivos y pensamiento numérico: el caso de las cien aves de corral. *PNA*, *10(3)*, 218-241.

Gómez, B. y Puig, L. (2017). Los problemas descriptivos de fracciones en los "Solucionarios" de Bruño y Dalmau. *Actas de las IV-CIHEM (IV Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática)*. Murcia 15-17/11/2017. Murcia: Centro de estudios sobre la memoria educativa de la universidad de Murcia (En prensa)

Hadley, J. & Singmaster, D. (1992) Problems to Sharpen the Young. *The Mathematical Gazette*, *76*(475), 102-126 Recuperado de http://www.jstor.org/stable/3620384.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2010). Developing Katy's algebraic structure sense. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics* – CERME 6 (pp. 529-538). Lyon, Francia: CERME. www.inrp.fr/editions/cerme6

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En Gonzalez, M., González, M. y Murillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIII* , pp. 5-20. Santander: SEIEM

M.E.C. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. *BOE, 126,* p. 19386.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometría*. León: en casa de Maestro Nicolau de Benedictis: por Joannnes Trinxer librero de Barcelona.

Pérez de Moya, J. (1562/1998). *Arithmetica práctica y speculativa*. Salamanca. Biblioteca Castro. Madrid. Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro.

Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada: Comares.

Sánchez, E. y Cobos, J.M. (Trad. y notas) (1996). *Juan Martínez Silíceo. Ars Arithmética***.** Madrid: Editora Regional de Extremadura y Servicio de Publicaciones de la U. de Extremadura (Original, 1514).

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, *7(3),* 41-51.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation***.** New York: Springer.

Singmaster, D, (1996). Chronology of recreational mathematics. Recuperado de http://www.eldar.org/~problemi/singmast/recchron.html

Singmaster, D. (1998). Chronology of recreational mathematics. Recuperado de http://utenti.quipo.it/base5/introduz/singchro.htm

Smith, D.E. (1958). *History of mathematics*. New York: Dover (1ª ed. 1929)

Bernardo Gómez
Universitat de València.
bernardo.gomez@uv.es