Iglesias, M. y Ortiz, J. (2018). Usos del software de geometría dinámica en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(2), 21-35.

ISSN: 2603-9982

USOS DEL SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Martha Iglesias, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay. Venezuela

José Ortiz, Universidad de Carabobo, Campus La Morita. Venezuela

Resumen

El objetivo de la investigación es describir los usos que le dan los futuros docentes de matemática al software de geometría dinámica. Es una investigación de campo en el paradigma cualitativo interpretativo, realizada mediante un estudio de caso, el cual estuvo focalizado en el análisis de las producciones de un grupo de trece futuros profesores de matemática, quienes participaron en un curso de resolución de problemas geométricos (16 semanas), como parte de su plan de formación docente en una universidad pública venezolana. Los instrumentos utilizados para la recolección de la información fueron: Archivos Cabri, informes de trabajo y grabaciones de audio y vídeo. Respecto al software, se encontró que los futuros profesores le dieron un uso técnico: empleo de las herramientas para seguir procedimientos, verificar conjeturas y mejorar apariencias; y, un uso heurístico: construcción, exploración, formulación de conjeturas y validación.

Palabras clave: *Formación inicial de profesores, software de geometría dinámica, enseñanza y aprendizaje de la geometría.*

Uses of dynamic geometry software in preservice mathematics teachers

Abstract

The objective of the research is to describe the uses that future teachers of mathematics give to the software of dynamic geometry. It is a field research in the qualitative interpretive paradigm, carried out through a case study, which was focused on the analysis of the productions of a group of thirteen future teachers of mathematics, who participated in a course of solving geometric problems (during 16 weeks), as part of their teacher training plan at a Venezuelan public university. The instruments used to collect the information were: Cabri files, work reports and audio and video recordings. Regarding the software, it was found that the future teachers gave it a technical use: use of the tools to follow procedures, verify conjectures and improve appearances; and, a heuristic use: construction, exploration, formulation of conjectures and validation

Keywords: *Pre service mathematics teacher, dynamic geometry software, teaching and learning geometry.*

Recibido: 12/07/2018; Aceptado: 18/09/2018

INTRODUCCIÓN

Desde mediados de la década de los años ochenta, se ha venido incorporando el uso de los llamados software de Geometría Dinámica (SGD) en las clases de Matemática. Entre los más destacados, se encuentran el Cabri - Géomètre (Francia), el Geometer`s Sketchpad (Estados Unidos) y GeoGebra (Austria). Este tipo de software ha favorecido la elaboración de construcciones geométricas y su exploración mediante la técnica de arrastre de un objeto base, permitiendo el reconocimiento de propiedades invariantes cuando un objeto es sometido a una transformación. Esto favorece el descubrimiento de relaciones entre los objetos (iniciales, auxiliares y finales) que conforman una construcción geométrica.

En relación al impacto del uso de los SGD sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, se han realizado diversos comentarios; para Amaral y Cabrita (2017), los SGD han contribuido al desarrollo del sentido geométrico y han jugado un papel fundamental en el estudio de las isometrías en el plano, ya que, le brinden a los estudiantes la posibilidad de trabajar con múltiples representaciones de un objeto geométrico, facilitando así su tránsito por niveles más elevados de generalización y abstracción. En este orden de ideas, Prieto González (2016) señala que:

> Desde una perspectiva del aprendizaje, la integración del GeoGebra a las clases de Matemática ha favorecido el desarrollo de las capacidades de los estudiantes para la experimentación, visualización y reconocimiento de invariantes matemáticas, como consecuencia de la interacción de esos sujetos con los objetos representados en su vista gráfica. (p.11)

Además, los SGD han facilitado la vinculación de la Matemática con otras disciplinas, ya que, por ejemplo, han facilitado el estudio de mecanismos articulados, estableciendo relaciones entre Geometría y Cinemática tal como lo describen Manzano Mozo, Gómez García y Mozo Fernández (2017). Al respecto, Gutiérrez, Prieto y Ortiz (2017) destacan el potencial de los SGD para "desarrollar las capacidades de visualización y experimentación de los estudiantes, a través de la manipulación de las variables y parámetros asociados con los fenómenos de la realidad que son representados por medio de modelos computacionales" (p. 39); de esta manera, se resalta las potencialidades técnicas de los SGD para elaborar simuladores.

Otro asunto clave relacionado con el uso de los software de geometría dinámica(SGD) en las clases de Matemática, es la resolución de problemas que conlleven a la formulación y validación de conjeturas; en este orden de ideas, Cruz y Mantica (2017) expresan que, cuando se trabaje con un SGD, es importante que el profesor proponga problemas que no aseguren la veracidad de las conjeturas, lo deseable es que sean los estudiantes, mediante la elaboración y exploración de las construcciones geométricas y valiéndose de las herramientas disponibles en el software, quienes reconozcan propiedades invariantes, formulen conjeturas e intenten validarlas. No obstante, pareciera existir cierto consenso en cuanto a que la simple incorporación de un SGD no garantiza el aprendizaje significativo de la Geometría, ni el paso inmediato de la conjetura a la demostración (González López, 2001; Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002) y, por ende, es fundamental el papel que juega el docente en el diseño de tareas que favorezcan el acercamiento de los estudiantes a dos aspectos formales del quehacer matemático: las definiciones y la demostración.

Por ello, en el marco de una línea de investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, se ha venido vinculando la investigación sobre la formación inicial de los docentes en Matemática con dos de los asuntos considerados clave de la Educación Matemática: la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría y el uso del software de Geometría Dinámica en las clases de Matemática (Iglesias y Ortiz, 2015).

La relevancia de estos dos asuntos lo demuestran algunas de las actividades realizadas a finales del siglo XX y las primeras dos décadas del siglo XXI: (a) Estudio ICMI dirigido a estudiar las perspectivas sobre la enseñanza de la Geometría para el siglo XXI, a partir de las contribuciones de destacados educadores matemáticos, relacionadas con temas como los siguientes: Razonamiento en Geometría, Tecnología Computarizada y Enseñanza de la Geometría y Calidad del Personal Docente y de la Educación de los Profesores (Mammana y Villani, 1998); (b) organización y realización de eventos sobre el uso de los software de Geometría Dinámica en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, como el Iberocabri y el Congreso Latinoamericano de GeoGebra; y (c) la incorporación de estos temas como asuntos a ser discutidos en las últimas ediciones del ICME, el cual es el evento internacional de mayor importancia para la comunidad mundial de educadores matemáticos.

En este sentido, ante la necesidad de comprender los aspectos cognitivos y didácticos relacionados con los futuros docentes de Matemática cuando abordan la resolución de problemas geométricos usando un SGD, y, en particular, los que están vinculados con el proceso de demostración matemática en ambientes de aprendizaje tecnologizados, en este trabajo se tiene como objetivo describir los usos que le dan los futuros docentes de Matemática al software de Geometría Dinámica.

ABORDAJE METODOLÓGICO

Este estudio ha sido concebido dentro de la modalidad de Investigación de Campo (UPEL, 2006), en la cual se pretendió describir los usos que le dan los futuros docentes de Matemática al software de Geometría Dinámica, en el contexto del curso de resolución de problemas geométricos (RPG_AC); curso que incorpora el uso sistemático de un software de Geometría Dinámica como el Cabri II. Asimismo, este estudio se ubica en el paradigma cualitativo interpretativo (Sabariego Puig, 2012) y, para abordar esta investigación, se acudió a una estrategia de estudio de caso (Yin, 2003), el cual estuvo focalizado en el análisis de las producciones de un grupo de futuros profesores de Matemática, quienes participaron en el curso RPG_AC, como parte de su plan de formación especializada en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara” (UPEL Maracay).

Dado que, en esta investigación se siguió un paradigma cualitativo interpretativo, la misma se desarrolló atendiendo a las fases propuestas por Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999), las cuales se describen más adelante junto los instrumentos empleados para recabar la información requerida por los investigadores.

Cabe señalar que los procedimientos empleados por los participantes en el curso de RPG_AC han podido ser reconstruidos gracias a ciertas herramientas disponibles en los SGD, como la llamada opción “revisar la construcción” o la opción “mostrar la descripción” con las cuales se genera un reporte de los pasos seguidos al realizar una construcción geométrica en Cabri II.

En el análisis realizado se procedió a una triangulación de datos, donde lo obtenido en las producciones orales y escritas – los archivos Cabri, los informes de trabajo y las grabaciones de audio – video – se confrontó, a la luz del objetivo que guió esta investigación, así como los referentes teóricos considerados.

Contexto de actuación e informantes clave

El curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora (RPG_AC) forma parte del componente de formación especializada de la especialidad de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay, Venezuela). Este curso – entendido como una propuesta formativa en el área de Geometría y su Didáctica – ha sido asumido como un escenario para la investigación en el área de la formación inicial de los profesores de Matemática y es, por esto que, esta investigación ha estado dirigida a describir los usos que le dan los futuros docentes de Matemática a los SGD cuando realizan determinadas tareas matemáticas, a partir del análisis de sus producciones (informes de trabajo, archivos .fig. y grabaciones de audio-video de ciertos episodios de enseñanza y aprendizaje).

El curso RPG_AC se llevó a cabo durante un periodo académico, con una duración de 16 semanas. Dado que las clases se desarrollarían en un laboratorio de informática y teniendo en cuenta el número de computadoras disponibles, el cupo se fijó en quince (15) estudiantes; lográndose inscribir un total de trece (13) estudiantes, cuatro (4) hombres y nueve (9) mujeres, quienes se organizaron en pequeños grupos Gi para realizar las tareas planteadas. Para los talleres nº 1 y 2 se conformaron seis (6) grupos, mientras que para el taller nº 3 y el diseño de la unidad didáctica con contenido geométrico, los participantes se reorganizaron en cuatro (4) grupos (ver Tabla 1). Es importante señalar que, atendiendo al plan de estudio de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay, a los participantes les tocaba inscribir un curso optativo de integración y ellos decidieron inscribir el curso RPG_AC; además, algunos de ellos habían cursado los cursos obligatorios de Geometría I y Geometría II y habían mostrado interés hacia el estudio de la Geometría, mediante la disposición a realizar tareas como las descritas en Ortiz, Iglesias y Paredes (2013), en las cuales se utilizaron materiales y recursos tales como: juego geométrico, geoplano, plantillas con diferentes tramas, papel para plegar, tangram chino y SGD; también conocían de la existencia del Cabri II, ya que, en los cursos de Geometría, éste había sido utilizado como pizarra electrónica, para ilustrar cómo realizar algunas construcciones geométricas con regla y compás.

Tabla 1. *Estudiantes participantes en el curso RPG_AC y su organización en pequeños grupos.*

Estudiante	Identificación	Sexo	Taller 1	Taller 2	Taller 3	Diseño UD
1	OB	F	G1	G1	G1	G1
2	ER	F	G6	G6	G2	G2
3	MR	F	G6	G6	G4	G4
4	KV	M	G4	G4	G3	G3
5	ZT	F	G5	G5	G3	G3
6	HB	M	G2	G2	G4	G4
7	WG	M	G2	G2	G2	G2
8	AG	F	G1	G1	G1	G1
9	YC	F	G2	G2	G4	G4
10	AO	F	G3	G3	G2	G2
11	GG	F	G5	G5	G1	G1
12	SR	M	G4	G4	G3	G3
13	CG	F	G3	G3	G2	G2

Procedimiento investigativo organizado por fases

Como hemos dicho, las fases seguidas, se han basado en las propuestas en Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999):

Fase Preparatoria: Se sustentó en la reflexión en y sobre la práctica en torno a la problemática relacionada con la formación docente en el área de Geometría y su Didáctica, así como la revisión de fuentes documentales relacionadas con esta temática. Esta fase abarcó dos etapas no disjuntas: (a) la elaboración del proyecto de investigación, el cual fue revisado y confrontado ante tres investigadores activos en el ámbito de la Educación Matemática, con el propósito de valorar su calidad científica y viabilidad; (b) la planificación de las actividades a ser desarrolladas en el curso RPG_AC.

Fase de trabajo de campo: Representó la ocasión para desarrollar las actividades didácticas planificadas y recabar los insumos necesarios para describir los usos que le dieron los participantes en el curso de RPG_AC a los SGD y clasificar las justificaciones presentadas por ellos cuando realizaron determinadas tareas.

Fase Analítica: Consistió en el análisis cualitativo de las producciones de los participantes en el curso RPG_AC.

Fase Informativa: Abarcó la redacción del reporte de investigación que se da a conocer en este documento.

Instrumentos de recolección de la información

Los instrumentos empleados para recabar la información requerida por los investigadores y posteriormente hacer el análisis cualitativo interpretativo han sido:

Archivos Cabri: Esto permitió llevar un registro de cada una de las construcciones geométricas realizadas por los participantes, en función de las actividades propuestas en cada uno de los tres talleres que formaron parte del curso RPG_AC, haciendo uso del Cabri II Plus. Para cada uno de los tres talleres que conformaron el curso RPG_AC, los participantes realizaron construcciones geométricas con el Cabri II y las guardaron – debidamente identificadas - en un pen drive, quedando a disposición de los investigadores para su posterior revisión y análisis.

Informes de trabajo: Permitieron recoger información acerca del trabajo de cada uno de los participantes cuando resolvieron un problema geométrico o realizaron una demostración. Los informes escritos consistieron en documentos elaborados en Word, siguiendo las actividades propuestas en cada uno de los talleres de RPG. Para la elaboración de los informes escritos se tomó como base las actividades desarrolladas en el aula, discutidas con la facilitadora del curso RPG_AC y los compañeros de clases, y la misma se complementó con el trabajo fuera del aula que realizaron cada uno de los participantes. Cabe decir que, al inicio del curso, cada uno de ellos recibió un CD con el Cabri II Plus, con el propósito de instalarlo en su computadora personal y así facilitarle la familiarización con este SGD y la realización de las tareas propuestas.

Grabaciones de audio y video: Permitieron llevar un registro de las exposiciones realizadas por los participantes cuando presentaron sus producciones ante todo el grupo, como cierre de cada una de las tareas realizadas. Para llevar a cabo tales grabaciones, se contó con la participación de los propios participantes en el curso RPG_AC, bajo la orientación de los investigadores y haciendo uso de una pequeña cámara digital, con el propósito de registrar en audio y video las intervenciones de los profesores en formación cuando mostraban una construcción realizada con el Cabri II y trataban de dar algún tipo de justificación en cuanto a su consistencia o validar alguna conjetura formulada. Cabe señalar la disposición de los participantes a ser grabados, ya que, al inicio del curso RPG_AC, la facilitadora les dio a conocer el proyecto, les explicó como sus producciones serían, a posteriori, objeto de análisis con fines investigativos y ellos aceptaron participar como informantes clave. Estas grabaciones les permitieron a los investigadores complementar la información recabada a través de los informes de trabajo y los archivos Cabri, ya que, en las mismas quedaban registrados comentarios o intercambios de ideas que no se mostraban en las producciones escritas.

En este trabajo se tendrán en consideración las producciones orales y escritas de los participantes en el curso RPG_AC cuando abordaron las actividades propuestas en el taller nº 1 sobre las construcciones con regla y compás en un ambiente de Geometría Dinámica, el cual se organizó en función a seis actividades dirigidas, con la estructura: objetos iniciales y procedimiento dado, objetos finales por construir; y seis actividades libres: objetos iniciales y finales dados, procedimiento por establecer.

Una vez recabada la información correspondiente al taller nº 1, se elaboró un inventario de las actividades dirigidas, en atención a los siguientes aspectos: (a) seguimiento de las instrucciones dadas y aplicación del procedimiento indicado, (b) justificación de las afirmaciones realizadas, y (c) tipo de método de construcción empleado; así como también de las actividades libres, pero, en este caso, el aspecto (a) fue sustituido por descripción del procedimiento empleado para construir la figura. Conocido este inventario, se decidió trabajar con cinco de los seis grupos de trabajo conformados para realizar las actividades propuestas en el taller nº 1; uno de los equipos no fue considerado por no disponerse de algunos archivos .fig. Seguidamente, para cada uno de los cinco grupos de trabajo, se procedió a llevar un registro organizado de la información, según el esquema mostrado en la siguiente tabla:

Tabla 2. *Esquema seguido para organizar la información recabada en el taller nº 1*

Taller nº 1		Integrantes del grupo de trabajo	
Parte 1: Actividades dirigidas		Imagen de la figura construida (copiada con la opción Imprimir pantalla)	
Actividad nº X: Denominación de la actividad.			
Método de construcción empleado			
Instrucciones	*Herramientas empleadas*	*Secuencia*	*Observaciones*
Pasos a seguir para construir una figura geométrica	Haciendo uso de la herramienta "mostrar la descripción", se tiene un registro de cada una de las herramientas empleadas por los participantes cuando efectuaron una construcción con el Cabri II.	Orden de los pasos seguidos	Realizadas por la docente en función a sus intereses investigativos

Dado el volumen de información recabada y teniendo en cuenta el tipo de actividades (dirigidas y libres), el método de construcción empleado (método de los dos lugares, método de la figura auxiliar y método de la figura semejante) y las respuestas dadas por los participantes que involucraran algún tipo de justificación, se acordó trabajar con sólo cuatro de las doce actividades propuestas: (a) Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento. (b) División de un segmento de recta en n partes iguales. (c) Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos. (d) Construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial).

RESULTADOS

Para ilustrar lo aquí planteado, se ha tomado como referencia la actividad dirigida nº 2, *Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento*:

1. Trace un segmento $\overline{AB}$. (Objeto inicial)
2. Con el *compás* teniendo una abertura mayor que la mitad de la longitud de $\overline{AB}$ (aquí es necesario introducir un *segmento auxiliar* cuya longitud representa la abertura del compás), haga centro en los puntos A y B sucesivamente y trace arcos de circunferencia que se corten en los puntos C y D.
3. Trace la recta determinada por los puntos C y D. La recta $\overleftrightarrow{CD}$ se denomina *mediatriz del segmento* $\overline{AB}$. (Primer objeto final)
4. Determina el punto de intersección P de la recta $\overleftrightarrow{CD}$ con el segmento $\overline{AB}$. Tal punto de intersección es el *punto medio del segmento* $\overline{AB}$. (Segundo objeto final)
5. ¿Cómo puedes garantizar que la recta $\overleftrightarrow{CD}$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$? O, en otras palabras, ¿cómo puedes garantizar que P es punto medio del segmento $\overline{AB}$ y que la recta $\overleftrightarrow{CD}$ es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en P?

Una vez analizados los informes escritos y los archivos Cabri, se identificaron las siguientes regularidades:

- Siguen paso a paso el procedimiento indicado, usando las herramientas disponibles en el Cabri II según lo requerido; es decir, se observa una correspondencia entre los pasos del procedimiento de construcción dado y las herramientas empleadas por los participantes en el curso RPG_AC. Introducen un segmento auxiliar, el cual debe tener una longitud r mayor a la mitad de la longitud del segmento $\overline{AB}$; tal longitud r representa la abertura del compás y permitía construir una circunferencia con centro en A (o en B) y radio r. Uno de los equipos (grupo nº 2) trazó el segmento $\overline{AB}$, ubicó el punto P (punto medio del segmento $\overline{AB}$), midió la distancia entre los puntos A y P y, luego, introducen un segmento auxiliar y miden su longitud para garantizar que sea mayor que AP. Los restantes equipos garantizaron esta condición por estimación, sin que mediara la verificación empírica. En esta actividad, el Cabri fue empleado básicamente para efectuar una construcción con regla y compás en un ambiente de geometría dinámica (AGD).

- Parecieran utilizar esquemas de argumentación fácticos, cuando reconocen relaciones existentes entre los diferentes objetos que conforman esta construcción con regla y compás en un AGD: los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son radios de la circunferencia C_1 (A, r); los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ son radios de la circunferencia C_2 (B, r); C_1 (A, r) y C_2 (B, r) son circunferencias congruentes.
- Partiendo de las relaciones previamente establecidas entre distintos objetos geométricos, procuran seguir una cadena lógico-deductiva, sustentada en definiciones y propiedades conocidas, con lo cual, se tendría un predominio de los esquemas de argumentación analíticos.
- Entre las ideas principales para realizar la demostración que la recta $\overleftrightarrow{CD}$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, se destacan: (a) probar que el cuadrilátero ACBD es un rombo, para así establecer que sus diagonales $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan en P y son perpendiculares entre sí; (b) dado que los puntos C y D equidistan de los extremos del segmento $\overline{AB}$, aplican el teorema de caracterización de la mediatriz de un segmento; (c) por congruencia de triángulos.

En las actividades libres correspondientes al taller nº 1, los participantes en el curso RPG_AC tenían que establecer (aplicar y describir) un procedimiento que les permitiera construir con regla y compás cierto objeto, a partir de las condiciones dadas. Por ejemplo, en la actividad libre n° 2, Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos, se establecía lo siguiente: Observa la siguiente figura y describe el procedimiento para construir un triángulo, conocidas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos. ¿Cómo construir el triángulo ABC conocidas las longitudes de los lados AB y AC y la medida del ángulo BAC?

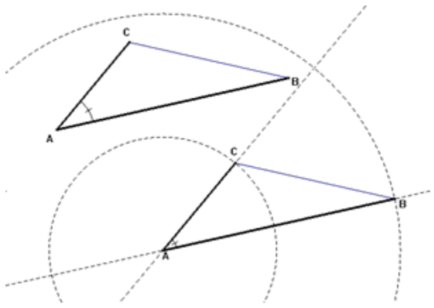

Figura 1.Construcción de un triángulo dadas ciertas condiciones.

La actividad libre nº 2 se realizó por el método de la figura auxiliar, ya que, la idea principal es construir un triángulo A'B'C' congruente con el triángulo ABC (dado como figura auxiliar), destacando la información conocida: las longitudes de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la medida del ángulo BAC. Al revisar los insumos disponibles (informes y archivos .fig.), se observó que:
En la descripción del procedimiento empleado para construir el triángulo A'B'C' (independientemente de la consistencia de la construcción realizada), se considera que los cinco

grupos G_i usaron un vocabulario apropiado y acorde con los contenidos geométricos como se ilustra a continuación:

- G_1: Deseamos copiar un triángulo conociendo la longitud de dos lados y el ángulo que forman dichos lados. Para ello debemos tomar un punto A' por el cual trazamos una paralela al segmento AB del triángulo original. Luego, con el compás tomamos la longitud del segmento AB y haciendo centro en A' trazamos el arco de circunferencia que corta a la recta determinado en B'. Seguidamente, trazamos una recta paralela al segmento AC que pase por el punto A', con el compás, tomando la longitud AC y haciendo centro en A' trazamos el arco de circunferencia donde se intersecte con la recta A'C'. Por último, trazamos el segmento B'C', y así hemos logrado construir el triángulo A'B'C' que es congruente con el triángulo ABC.
- G_2: (1) Se forma el ángulo con vértice en A, Llamaremos L1 y L2 a las semirrectas para diferenciarlas. (2) Utilizando el compás, con abertura AB y haciendo centro en A se traza la circunferencia que corta a la semirrecta L1 en el punto B. (3) Utilizando nuevamente el compás ahora con abertura AC y haciendo centro en A se traza la circunferencia que corta a la semirrecta L2 en el punto C. (4) Por último se trazan los segmentos AC, AB y CB para obtener el triángulo.
- G_3: (1) Marcar un punto A cualquiera y trazar una recta paralela de cada uno de los segmentos dado interceptándose en dicho punto A obteniéndose así la misma abertura del ángulo dado. (2) A continuación, con el compás marca en cada uno de los lados del ángulo dado las medidas de los dos lados conocidos (uno en cada lado) y traza las circunferencias respectivamente haciendo centro en A, hallándose los puntos C y B. (3) Luego une los puntos de intersección de la circunferencia con la recta y se obtiene el ΔABC.
- G_4: Para esta construcción, tomemos primeramente la longitud de cualquier segmento, en este caso tomaremos la longitud del AB y trazaremos la circunferencia determinada por este segmento, ahora determinemos la recta paralela al AB que pase por el centro de la circunferencia, luego denote el radio AB coincidente con la recta paralela; traslade la longitud del AC para realizar una circunferencia con centro en el punto A, ahora determine la recta paralela al AC y denote el radio AC coincidente con la recta paralela al AC. Por último, al unir los puntos B y C, se tiene el triángulo ABC construido dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.

Los grupos nº 1, 3, 4 y 5, inician la construcción construyendo la figura auxiliar (Δ ABC) y resaltan las condiciones lado – ángulo – lado; sin embargo, el grupo nº 2 no toman en cuenta la figura auxiliar, ya que, trazan los segmentos AB y AC, pero no toman en cuenta la medida del < BAC. Al seguir el procedimiento abajo indicado fue posible construir un triángulo A'B'C' que satisfacía sólo dos de las tres condiciones requeridas: AB = A'B' y AC = A'C'. Cabe preguntarse ¿cómo se garantiza que < B'A'C' es congruente con < BAC? Por ende, esta construcción con regla y compás es inconsistente, porque no permite "copiar" al ángulo comprendido entre los lados AB y AC.

Los grupos nº 1, 3 y 4 realizaron construcciones consistentes con regla y compás, debido a que copiaron el ángulo dado (< BAC), trazando, por el punto A', rectas paralelas a los segmentos AB y AC. Cabe señalar que, durante el desarrollo de este taller, se había discutido cómo copiar un ángulo haciendo uso de las propiedades de las rectas paralelas cortadas por una secante.

El grupo nº 5 realizó una construcción inconsistente, a pesar que la inició tomando en cuenta la figura auxiliar (ver Figura 2): ubican un punto A' y un punto P y trazan el segmento AP y trazan una circunferencia con centro en A' y radio AB que corta al segmento A'P en un punto O. Así, A'O = AB. Luego trazan una circunferencia con centro en O y radio arbitrario r y determinan el punto D de intersección de ambas circunferencias. De esta manera, se cumple que: A'D = A'O = AB y OD = r. Proceden a marcar al ángulo DA'O. ¿Cómo con está construcción garantizan que el ángulo DA'O es congruente con el ángulo CAB? Trazan otros segmentos A'C' y A'B' no necesariamente congruentes con AC y AB respectivamente y proceden a copiarlos sobre los lados del ángulo DA'O.

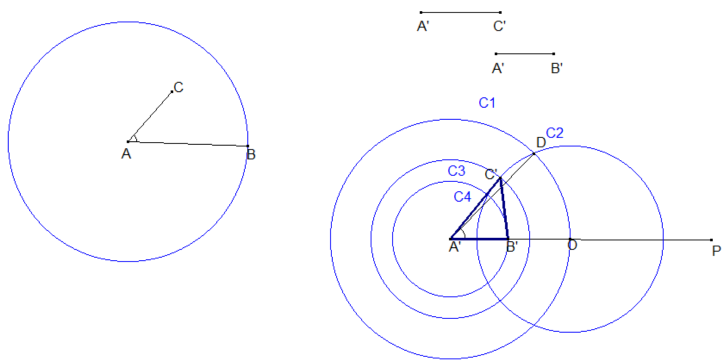

Figura 2. Construcción inconsistente realizada por el grupo nº 5

Los cinco grupos describen el procedimiento de construcción empleado y utilizan el Cabri II Plus, pero no dan justificación alguna del por qué el triángulo A'B'C' es congruente con el triángulo ABC; para los investigadores posiblemente los estudiantes se limitaron a efectuar lo establecido en el enunciado de la actividad: ¿Cómo construir el triángulo ABC conocidas las longitudes de los lados AB y AC y la medida del ángulo BAC? Es preciso tener en consideración que, en las actividades dirigidas, se formulaban ciertas preguntas que exigían a los profesores en formación establecer relaciones entre los objetos geométricos que intervenían en cada uno de las construcciones y dar algún tipo de justificación: ¿Cómo garantizar que el objeto construido, a partir de las condiciones iniciales y el procedimiento de construcción empleado, es el esperado? Pareciera que esta manera de entender las construcciones con regla y compás – como medio para sustentar la demostración de propiedades geométricas – no fue asumida en cualquier caso por los participantes en el curso de RPG_AC o, por lo menos, cuando no fue requerido en forma explícita en el curso.
Una vez realizadas las actividades dirigidas y libres que conformaban el taller nº 1, cada uno de los grupos – a solicitud de la facilitadora – seleccionó dos construcciones, las cuales deberían elaborar, describir y presentar en una próxima sesión de clases (actividad extra). Con esta actividad, se pretendía que los profesores en formación gestionaran una actividad dirigida a la construcción consistente con regla y compás de una figura geométrica, lo cual significaba describir el procedimiento empleado, utilizar las herramientas disponibles en el Cabri II y dar una justificación que convenciera a la audiencia sobre la consistencia de la construcción seleccionada; para los fines investigativos, se decidió analizar una sola construcción por equipo de trabajo. Además, cabía la posibilidad que, en el proceso de búsqueda de información sobre las construcciones con regla y compás, indagaran sobre el procedimiento a seguir para construir la figura seleccionada; por ello, en esta actividad se valoró la justificación dada en forma escrita u oral.
Dado que los equipos nº 1 y 2 seleccionaron la construcción de un trapecio isósceles, lo cual permitió contrastar el procedimiento empleado, las herramientas empleadas y las justificaciones dadas, se tendrán en cuenta para ilustrar el análisis llevado a cabo de tales construcciones extras (Tablas 3 y 4).

El grupo nº 1 no presentó por escrito la justificación; durante la exposición, teniendo ya construida la figura, utilizando la opción "revisar la construcción", mostró, paso a paso, el procedimiento empleado; sin embargo, en forma oral y ante la pregunta ¿cómo garantizas que el cuadrilátero AFCB es un trapecio isósceles? Reconocieron que, por construcción, el segmento $\overline{AF}$ está contenido en la recta L_3 y está es paralela al segmento $\overline{BC}$ y, por ello, los lados opuestos $\overline{AF}$ y $\overline{BC}$ del cuadrilátero

AFCB son paralelos y, por definición, es un trapecio. Faltaba probar que los lados no paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{FC}$ eran congruentes. Para probarlo establecieron por el criterio de congruencia de triángulos LAL que los triángulos ABD y FCE son congruentes, ya que, por construcción, se tiene que BD = CE y < ADB y < FEC son rectos; además, AD = FE (distancia entre rectas paralelas). Y, por PCTC, establecieron que AB = FC (ver Figura 3).

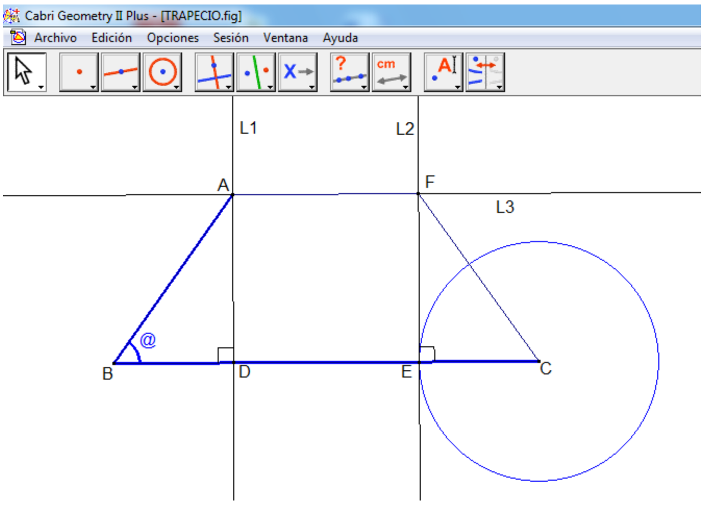

Figura 3. Trapecio isósceles construido por el grupo n° 1

Tabla 3. *Actividad extra realizada por el grupo nº 1: Construcción de un trapecio isósceles*

Procedimiento de construcción	**Herramientas empleadas**
1. A, B y C son tres puntos distintos no alineados. Se trazan los segmentos AB y BC y luego se marca el ángulo ABC.	A Punto B Punto Segmento: A, B C Punto Segmento: B, C @ ángulo: A, B, C
2. Desde el punto A se traza una recta perpendicular al segmento BC que lo corta en el punto D. Se traza el segmento BD.	L_1 Recta (Recta perpendicular): A, BC D Punto (Punto(s) de intersección): L_1, BC Segmento: B, D
3. Con el compás, se traza una circunferencia con centro en C y radio BD que corta al segmento BC en el punto E.	C_1 Círculo (Compás): C, BD E Punto (Punto(s) de intersección): C_1, BC
4. Por E se traza una perpendicular al segmento BC	L_2 Recta (Recta perpendicular): E, BC
5. Por el punto A se traza una paralela al segmento BC que corta a L_2 en F	L_3 Recta (Recta paralela): A, BC F Punto (Punto(s) de intersección): L_2, L_3
6. Se traza el segmento FC y se marcan los ángulos ADB y FEC. El cuadrilátero AFCB es un trapecio.	Segmento: F, C ángulo: A, D, B ángulo: F, E, C Polígono: A, F, C, B

El grupo nº 2 utilizó la opción “revisar la construcción” para dar a conocer, paso por paso, el procedimiento empleado; seguidamente, usando el esquema de afirmaciones y razones, presentó la siguiente justificación (tomada del informe escrito):

1. Los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ son congruentes; por ser E punto medio.
2. C3 y C4 son congruentes; por ser circunferencias de radios congruentes, afirmación 1.
3. $\overline{AG}$ y $\overline{AE}$ son congruentes; por ser radios de C3.
4. $\overline{BF}$ y $\overline{EB}$ son congruentes; por ser radios de C4.
5. $\overline{AG}$ y $\overline{BF}$ son congruentes; afirmaciones 2, 3 y 4.
6. El ángulo HEB es recto (mide 90º); por ser la recta la mediatriz del segmento $\overline{AB}$
7. El ángulo DHF es recto (mide 90º); por ser la recta la mediatriz del segmento $\overline{GF}$.
8. Los segmentos $\overline{GF}$y$\overline{AB}$ son paralelos; si en dos rectas cortadas por una secante los ángulos alternos externos son congruentes, entonces las rectas son paralelas, afirmación 6 y 7.
9. El cuadrilátero ABFG es un trapecio isósceles; afirmaciones 5 y 8 (Ver Figura 4).

Tabla 4. *Actividad extra realizada por el grupo nº 2: Construcción de un trapecio isósceles*

Procedimiento de construcción	**Herramientas empleadas**	
1. Se traza el segmento AB	A B	Punto Punto Segmento: A, B
2. Trazar una circunferencia con centro en A y abertura AB (C1)	C1	Círculo: A, B
3. Trazar una circunferencia con centro en B y abertura AB (C2)	C2	Círculo: B, A
4. Marcar los puntos de intersección entre C1 y C2 (puntos C y D)	D C	Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2 Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2
5. Se traza la recta que pasa por los puntos C y D (mediatriz del segmento AB)		Recta: D, C
6. Marcar el punto de corte entre la recta y el segmento AB (PUNTO MEDIO “E”)	E	Punto (Punto(s) de intersección): _, _
7. Trazar una circunferencia con centro en A y abertura AE (C3)	C3	Círculo: A, E
8. Trazar una circunferencia con centro en A y abertura BE (C4)	C4	Círculo: B, E
9. Marcar los puntos de corte de C3 con C2 y de C4 con C1 respectivamente (superiores en este caso) punto G y F	G F	Punto (Punto(s) de intersección): C2, C3 Punto (Punto(s) de intersección): C1, C4
10. Trazar los segmentos GF, FB, AG y de esta manera se obtiene el trapecio isósceles ABFG.	 H	Segmento: G, F Segmento: F, B Segmento: A, G Punto (Punto(s) de intersección): CD, GF ángulo: H, E, B Punto (Punto(s) de intersección): C2, C3 Punto (Punto(s) de intersección): C1, C4

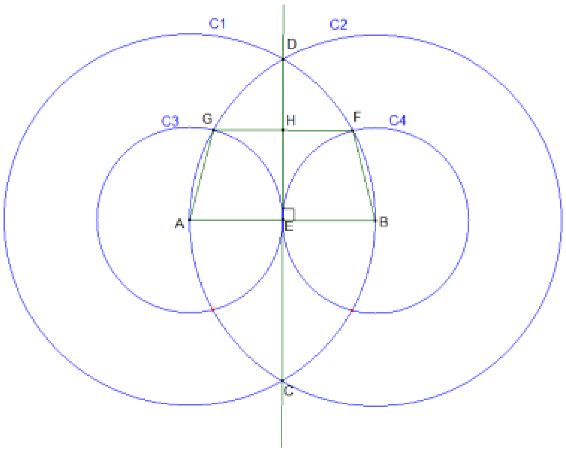

Figura 4. Trapecio isósceles construido por el grupo n° 2

Nótese que, dada una de las bases del trapecio (el segmento $\overline{AB}$), aplican lo visto en la construcción dirigida nº 2 y trazan su correspondiente mediatriz (la recta $\overline{CD}$) y ubican su punto medio (el punto E) y, partiendo de este hecho, inician la demostración (ver afirmación nº 1). Además, utilizan relaciones existentes entre los objetos que conforman esta construcción: dos segmentos son congruentes por ser radios de una misma circunferencia o dos segmentos son congruentes por ser radios de circunferencias congruentes (afirmaciones 2, 3 y 4); esto les permite asegurar que AG = BF en (5). Seguidamente, afirman en (7) que la recta $\overleftrightarrow{CD}$ también es la mediatriz del segmento $\overline{GF}$ y, por ello, < DHF es recto. Sin embargo, cabe preguntarse lo siguiente: dado que H es el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{CD}$ con el segmento $\overline{GF}$, H pertenece a la recta $\overleftrightarrow{CD}$ y, por tanto, aplicando el teorema de caracterización de la mediatriz de un segmento, H equidista de los puntos A y B ¿cómo garantizan que el punto H también equidista de G y F? Esto no ha sido demostrado, pero sirve de sustento para aplicar el teorema ACP y demostrar que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{GF}$ son paralelos: “Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces dos ángulos alternos externos son congruentes y las rectas son paralelas”. Posiblemente la convicción que la recta $\overleftrightarrow{CD}$ es también mediatriz del segmento $\overline{GF}$ los lleva a asumir esta proposición y seguir la demostración.

Se considera que los grupos nº 1 y 2 describen el procedimiento con un vocabulario apropiado y emplean las herramientas que se corresponden con cada uno de los pasos indicados; dado que elaboran una cadena lógico-deductiva, a partir de las relaciones existentes entre los objetos geométricos que intervienen en la construcción, pudiera decirse que los integrantes de ambos grupos siguen un esquema de argumentación analítico, apoyado en un esquema de argumentación fáctico.

LOGROS Y HALLAZGOS

Considerando las producciones de los equipos en el Taller nº 1 sobre construcciones con regla y compás en ambientes de geometría dinámica (AGD) y el objetivo de esta investigación, seguidamente se presentarán algunos hallazgos preliminares; así, como se presenta en la Tabla 5, en cuanto al uso técnico (UT) del Cabri II, los profesores en formación emplearon las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás (UT.1), así como para mejorar la apariencia de la figura en pantalla (UT.3). En cuanto al empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman una construcción (UT.2), se limitaron a medir ángulos o la longitud de un segmento; el menú propiedades no fue empleado.

Tabla 5. *Usos que los profesores en formación le dieron al Cabri II en el Taller nº 1*

Usos del Cabri II	Indicadores	G1	G2	G3	G4	G5	(*)
Uso Técnico (UT)	1. Empleo de las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás.	3	3	3	3	3	AD
		3	3	3	3	3	
		3	1	3	3	1	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
	2. Empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman tal construcción.	1	2	1	1	1	AD
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	AL
		2	2	1	1	1	
		2	2	3	2	1	AE
	3. Empleo de herramientas para mejorar la apariencia de la figura en pantalla.	3	3	3	3	3	AD
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
Uso Heurístico (UH)	1. Construcción	3	3	3	3	3	AD
		3	3	3	3	3	
		3	1	3	3	1	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
	2. Exploración	3	3	3	3	3	AD
		3	1	3	3	3	
		3	1	3	3	1	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
	3. Formulación de conjeturas	1	1	1	1	1	AD
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	AL
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	AE
	4. Validación	2	3	2	3	2	AD
		2	2	1	3	3	
		1	1	1	1	1	AL
		2	2	1	1	3	
		3	3	3	3	2	AE

Nota: (*) AD: Actividad dirigida; AL: Actividad libre; AE: Actividad extra

Posiblemente, esto se haya debido a que, en las actividades planteadas en el Taller nº 1, en el procedimiento dado en el curso (actividades dirigidas) o el descrito por los participantes (actividades libres y actividad extra) quedaban establecidas estas relaciones o estaban garantizadas por las herramientas de construcción empleadas. Se ha empleado una escala cualitativa de alto (3), medio (2) y bajo (1) para valorar el uso técnico del Cabri II en función de los tres indicadores establecidos, es decir: UT.1, UT.2 y UT.3. En el cuadro 8 se aprecia que el uso menos frecuente en los grupos de futuros profesores fue el uso referido a la verificación de relaciones (UT.2), lo cual coincide con lo encontrado por Cruz y Mantica (2017).

En relación con el uso heurístico, los cinco grupos lograron construir la figura solicitada, a partir de las condiciones iniciales (UH.1), así como reconocer relaciones entre los objetos que la conformaban, especialmente establecieron relaciones de congruencia entre radios de una misma circunferencia o entre radios de circunferencias congruentes (UH.2). No formularon de forma explícita conjetura alguna (UH.3), se considera que sí lo hicieron en forma implícita porque asumieron ciertas propiedades que satisfacían las figuras, sin aún haber sido validadas, para avanzar en las justificaciones dadas (UH.4). Es decir, los participantes estuvieron ubicados en las acciones heurísticas propuestas por Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), aunque los usos de formulación de conjeturas y validación estuvieron relativamente débiles.

Estos dos diferentes tipos de uso de un SGD se complementan entre sí; por ejemplo, el uso de las herramientas de verificación de relaciones y medidas resulta útil en la exploración de una construcción geométrica y la identificación de patrones y regularidades (las llamadas características geométricas invariantes). Por ende, se considera que es clave que los usuarios de un SGD estén familiarizados con el entorno informático y conozcan las herramientas disponibles y sus utilidades, para así centrar su atención en las acciones heurísticas (construir, explorar, formular conjeturas y validarlas), las cuales están estrechamente vinculadas con el proceso de resolución de problemas geométricos.

Finalmente, se debería reflexionar sobre la necesidad de propiciar en el aula los intercambios profesor-estudiantes y estudiantes-estudiantes, con el propósito de crear un ambiente que incentive los usos heurísticos del software de geometría dinámica, lo cual podría incidir en un fortalecimiento del esquema construir →explorar→ conjeturar→validar con más provecho para la formación matemática y didáctica de los futuros profesores y sus potenciales estudiantes.

REFERENCIAS

Amaral, M.E.y Cabrita, I. (2017). Umaabordagem interdisciplinar para a apropriação das isometrías. *Campo Abierto*, 36 (1), 109-136.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZentralblattfürDidaktic der Mathematik*, 34 (3), 66 – 72.

Cruz, M.F. y Mantica, A.M. (2017). El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51,69-72.

González López, M.J. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro* (pp. 277 – 290). Granada: Universidad de Granada.

Gutiérrez, R. E.; Prieto, J. L. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática*, 29 (2), 37-68.

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2015). La Investigación en Pensamiento Geometrico y Didáctica de la Geometría. En J. Ortiz y M. Iglesias (Eds.*), Investigación en Educación Matemática. Aportes desde una Unidad de Investigación*. La Morita: Universidad de Carabobo. Disponible: http://funes.uniandes.edu.co/8365/

Mammana, C. y Villani, V. (1998). Introduction. En C. Mammana y V. Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study* (pp. 1 – 8). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Manzano Mozo, J.; Gómez García, M. y Mozo Fernández, J. (2017). Mecanismos articulados: Geometría Dinámica y Cinemática en un entorno educativo STEM. *Innoeduca*, 3 (1), pp. 15-27.

Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 293 – 308). Granada: Comares.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Prieto González, J. L. (2016). GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. *Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC)*, Nro 14, Año 7, 9-23.

Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Sabariego Puig, M. (2012). La Investigación Educativa: Génesis, Evolución y Características. En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la Investigación Educativa* (pp. 51 – 87). Madrid: La Muralla.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). (2006). *Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales*. Caracas: FEDEUPEL.

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research. Design and Methods*. Thousand Oaks, United States of America: Sage.

SOFTWARE

Cabri – Géomètre II. Copyright Laboratorio de Estructuras Discretas y de Didáctica (IMAG) de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, 1997 – 1999. Editor: Texas Instruments.

Martha Iglesias
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, Venezuela
mmiglesias@gmail.com

José Ortiz
Universidad de Carabobo, Campus La Morita. Venezuela
ortizbuitrago@gmail.com