Teófilo de Sousa, R., Vieira Alves, F. R. y Araújo Souza, M. J. (2022). La Teoría de los Conceptos Figurativos y GeoGebra: el concepto y la visualización en geometría dinámica. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *5*(1), 1-17

ISSN: 2603-9982

LA TEORÍA DE LOS CONCEPTOS FIGURATIVOS Y GEOGEBRA: EL CONCEPTO Y LA VISUALIZACIÓN EN GEOMETRÍA DINÁMICA

Renata Teófilo de Sousa, Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil

Francisco Régis Vieira Alves, Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil

Maria José Araújo Souza, Universidade Estadual Vale do Acaraú, Brasil

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar la resolución de una pregunta de Olimpiada Matemática sobre el área de figuras planas utilizando el software GeoGebra, observando el razonamiento geométrico y las relaciones establecidas entre concepto e imagen por los estudiantes, con base en la Teoría de los Conceptos Figurativos. La metodología utilizada en este trabajo fue el estudio de caso, buscando observar y describir las estrategias y dificultades de los estudiantes en su resolución. Para este estudio se realizó una reunión virtual en la plataforma Google Meet, debido a la pandemia COVID-19, con un grupo de 20 estudiantes de segundo año de secundaria. Como resultado, el problema planteado en el estudio se logra resolver mediante la exploración de la visualización y manipulación dentro del entorno del software GeoGebra.

Palabras clave: *Teoría de los Conceptos Figurativos; Geometria Plana; GeoGebra; Razonamiento geométrico; Visualización.*

The Theory of Figural Concepts and GeoGebra: concept and visualization in Dynamic Geometry

Abstract

The objective of this work is to present the resolution of a Mathematical Olympiad question on the area of flat figures using the GeoGebra software, observing the geometric reasoning and the relations established between concept and image by the students, based on the Theory of Figural Concepts. The methodology used in this work was the case study, seeking to observe and describe the strategies and difficulties of students in their resolution. For this study, a virtual meeting was held on the Google Meet platform, due to the COVID-19 pandemic, with a group of 20 students from 2nd year high school. As a result, the problem raised in the study is solved by exploring visualization and manipulation within the GeoGebra software environment.

Keywords: *Theory of Figural Concepts; Flat geometry; GeoGebra; Geometric reasoning; Visualization.*

Recibido: 22/07/2021; Aceptado: 13/12/2021

INTRODUCCIÓN

La geometría, como rama de las matemáticas, también utiliza el razonamiento lógico-deductivo. Sin embargo, en diversas situaciones que conciernen a la comprensión de sus conceptos, aspectos cognitivos como la intuición, la imaginación creativa e incluso el uso de herramientas gráficas y digitales que abordan sus características no son adecuadamente explorados en el proceso de construcción del conocimiento, aun sabiendo que el tratamiento de las figuras geométricas obedece a un sistema axiomático previamente establecido.

La visualización geométrica y comprensión de las entidades geométricas con el fin de relacionarlas con el mundo que nos rodea, así como las dificultades que presentan los estudiantes, ha sido objeto de estudios y varios autores ya han desarrollado trabajos sobre el tema, como Fischbein (1993), País (1996), Gutiérrez (1992), Alves, (2019), Costa (2020), entre otros.

Fischbein (1993), en su trabajo *The Theory of Figural Concepts* (La Teoría de los Conceptos Figurativos) señala que la geometría utiliza entidades mentales, las llamadas figuras geométricas, que tienen características conceptuales y figurativas. Es decir, para entender la Geometría a partir de estas entidades mentales, uno debe entender la asociación entre tales características. Costa (2020, p. 153) refuerza que "el elemento de la imagen estimula nuevas orientaciones del pensamiento geométrico, pero existen restricciones lógicas y conceptuales que controlan el rigor formal del proceso".

Es un hecho que muchos estudiantes, al enfrentarse a problemas de Geometría, en general, presentan dificultades, ya que la construcción del razonamiento geométrico requiere que se establezca una relación entre definición e imagen mental a varios conceptos previos, y no de manera fragmentada, con el mero uso de fórmulas, algoritmos o teoremas prefabricados y retenidos en la memoria del individuo (Becker, 2009; Leivas y Cury, 2010; Lorenzato, 1995; Pavanello, 1993; Fonseca et al., 2001). La relación entre concepto e imagen, en este punto, se vuelve fundamental para la construcción del razonamiento en Geometría.

En este sentido, se buscó desarrollar habilidades para la construcción del razonamiento geométrico de los estudiantes, a través del aporte del software GeoGebra como facilitador del proceso de comprensión de la Geometría, siendo un aporte a la visualización y percepción.

GeoGebra es un *software* de acceso libre y es un recurso que se suma al aprendizaje del alumno y a la metodología del docente, siendo eficiente en la presentación de contenidos de asimilación compleja. El entorno GeoGebra permite la visualización y manipulación de sus elementos y construcciones. Según Alves y Borges Neto (2012), la exploración de GeoGebra como instrumento tecnológico permite visualizar situaciones inimaginables, cuando se restringe al lápiz y el papel. Por lo tanto, el software tiene el potencial de estimular la intuición y el razonamiento geométrico del estudiante, permitiendo la deducción y la interacción a través de la experimentación del contenido.

De lo anterior, la pregunta es: ¿cómo podría GeoGebra posibilitar la comprensión de cuestiones relacionadas con la geometría plana, trabajando la relación entre concepto, imagen y concepto figurativo para el desarrollo de la visualización geométrica en el alumno?

Para responder a esta pregunta, el objetivo de este trabajo es presentar la resolución de una pregunta de Olimpiada Matemática sobre el área de figuras planas utilizando el software GeoGebra, observando el razonamiento geométrico y las relaciones establecidas entre concepto e imagen por los estudiantes, con base en la Teoría de los Conceptos Figurativos, para ayudarlos a desarrollar una visión más amplia de la geometría, en un enfoque no tradicional.

Para lograr el objetivo de este trabajo, la metodología adoptada fue la investigación cualitativa, del tipo estudio de caso, con el fin de observar los experimentos y analizarlos desde la perspectiva de la Teoría de los Conceptos Figurativos, de Efraim Fischbein. Según Yin (2001), los resultados de un estudio de caso poden ser utilizados para probar una teoría bien formulada, ya sea para confirmarla, para refutarla o incluso para ampliar las discusiones sobre esta teoría.

La observación se realizó con un grupo de veinte estudiantes de segundo año de secundaria (16-17 años) de una escuela pública en el estado de Ceará, Brasil, en un encuentro virtual sincrónico, utilizando la plataforma Google Meet, debido al escenario de la pandemia del Nuevo Coronavirus (COVID-19). La recolección de datos se realizó a través de registros fotográficos de los estudiantes, grabación de la reunión y grabación de los diálogos que tuvieron lugar en la plataforma de chat.

Con base en lo anterior, los siguientes apartados traen la relación entre la visualización geométrica desde la perspectiva de los autores antes mencionados y GeoGebra, una profundización de la Teoría de los Conceptos Figurativos, los procedimientos metodológicos, resultados y discusión, así como las consideraciones de los autores.

MARCO TEÓRICO

Visualización geométrica y GeoGebra

En este apartado se discute el punto de vista de los autores que sustentan el marco teórico de este trabajo, siendo estos Fischbein (1993), Piaget e Inhelder (1993), Pais (1996), Gutiérrez (1992), Kaleff (2003), Leivas y Cury (2010), Jeannotte y Kieran (2017) y Costa (2020), reforzando aspectos de visualización geométrica y pensamiento matemático y geométrico, así como Iglesias y Ortiz (2018), Alves (2019), Santiago, Alves y Maia (2021), trayendo los beneficios de su desarrollo con el aporte del software GeoGebra.

Jeannotte y Kieran (2017, p. 7), con respecto al razonamiento matemático, lo definen "como un proceso de comunicación con los demás o con uno mismo, que permite inferir enunciados matemáticos a partir de otros enunciados matemáticos". Así, se tiene en cuenta que un aspecto estructural organiza la línea de pensamiento lógico-matemático formal a partir de estructuras lógicas como la deducción, inducción, analogía, generalización, entre otras.

Sobre el razonamiento en geometría, Piaget e Inhelder (1993) afirman que consiste en un conjunto de procesos cognitivos en los que se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales. La representación espacial, por ejemplo, constituye un sistema complejo de concepciones, que van más allá de la percepción del individuo en general, siendo el espacio algo subjetivo, una interpretación de la realidad y no necesariamente una reproducción de esta.

Sin embargo, el pensamiento geométrico no se forma de la misma manera en todas las personas. Según las ideas de Van Hiele, existe una jerarquía de cinco niveles de comprensión de las ideas espaciales, que describen los procesos de pensamiento utilizados en contextos geométricos: visualización, análisis, deducción informal, deducción y rigor (Van de Walle, 2009, como citado en Leivas y Cury, 2010).

Ya para Pais (1996) hay cuatro elementos considerados fundamentales y que influyen directamente en el aprendizaje de la Geometría Euclidiana, ya sea plana o espacial, que son el objeto, el concepto, el dibujo y la imagen mental. Respecto a estos cuatro elementos, es crucial agregar la semántica presente en el lenguaje geométrico dentro de los problemas. Así, todavía según el autor, tales objetos y sus respectivas representaciones dibujadas interfieren en el razonamiento procedimental y en la construcción del conocimiento geométrico del alumno.

Fischbein (1993) reitera que los objetos geométricos tienen dos componentes esenciales, el concepto y la imagen, que conciben el aprendizaje de la geometría de manera significativa. Además, el paso de la etapa de experimentación a la abstracción requiere un equilibrio entre dichos componentes, que a su vez puede ser proporcionado por el uso de softwares matemáticos, como es el caso de GeoGebra, presentado en este trabajo.

Aún en la perspectiva de Fischbein (1993), las figuras geométricas constituyen una entidad mental, elaborada a partir de un razonamiento geométrico, en la que una figura es diferente tanto de su definición formal como de su imagen mental y a su vez se sustenta en una percepción sensorial de una determinada representación particular.

En cuanto a Gutiérrez (1992), él considera que la visualización en Geometría es fundamental, ya que dicha habilidad, cuando no se desarrolla, genera dificultades para que el alumno exprese su pensamiento geométrico, incluso para comprender situaciones que se presentan en temas de libros de texto, entre otras situaciones. En este sentido, Kaleff (2003, p. 14) cita también los estudios de Van Hiele en que “la visualización, el análisis y la organización informal (síntesis) de las propiedades geométricas relacionadas con un concepto geométrico son pasos preparatorios para comprender la formalización del concepto”. La preocupación por la visualización en geometría es citada por la autora, a partir de una investigación en Educación Matemática que "(...) señaló la importancia de fomentar el desarrollo de las habilidades visuales en los entornos educativos" (Kaleff, 2003, p. 15).

Costa (2020), a partir de su análisis de los estudios de los autores Fischbein, Duval y Pais, señala que el pensamiento geométrico es una habilidad mental en la construcción del conocimiento geométrico, con el fin de aplicar coherentemente la geometría en la resolución de problemas. Así, el autor reitera que el pensamiento geométrico es fundamental "para comprender la naturaleza de los fenómenos e inferir sobre ellos, para identificar y percibir la Geometría como herramienta para comprender el mundo físico y como modelo matemático para comprender el mundo teórico" (Costa, 2020, p. 177).

Con respecto a esta comprensión del mundo que nos rodea a partir de la visualización geométrica, Alves (2019) afirma que con el *software* GeoGebra, los estudiantes pueden desarrollar una capacidad de análisis global y local de propiedades extraídas del entorno computacional y geométrico. El mismo autor también reitera que en base a las potencialidades del GeoGebra, el docente, al utilizarlo, puede incentivar la implicación del alumno en una exploración dinámica de propiedades numéricas y geométricas, desarrollando la visualización, percepción e intuición, imprescindibles para la evolución del aprendizaje del alumno (Alves, 2019).

Los autores Santiago, Alves y Maia (2021) argumentan que el GeoGebra como recurso didáctico es capaz de proporcionar al alumno la asimilación de nuevas estrategias en cuanto a la resolución de problemas geométricos, en particular de las pruebas de Olimpiadas Matemáticas, a través del modelado de situaciones-problema y su respectiva visualización y manipulación dentro del entorno del *software*.

Para Iglesias y Ortiz (2018), los *softwares* de Geometría Dinámica, incluido GeoGebra, favorecen la elaboración de construcciones geométricas, así como su exploración a través de la herramienta “mover un objeto”, entre otras posibilidades de manipulación dentro del *software*, permiten el reconocimiento de propiedades invariantes cuando un objeto sufre una transformación, ya que el *software* permite descubrir relaciones entre los objetos que componen una construcción geométrica.

Así, la Geometría Dinámica tiene un gran impacto en el papel que juega para las demostraciones en Matemáticas, especialmente en Geometría, como la verificación, ya que una proposición dada, cuya veracidad no es obvia a partir de unas pocas figuras estáticas, puede ser verificada mediante una variedad de representaciones obtenidas por la computadora (King y Schattschneider, 2003).

Sobre la base de lo que se ha dicho sobre visualización geométrica, pensamiento geométrico, así como el uso del *software* GeoGebra en el desarrollo de los estudiantes, la siguiente sección analiza la Teoría de los Conceptos Figurativos, que muestra cómo el concepto y la imagen se relacionan dentro del dominio de la Geometría, como, así como la comprensión de la definición del concepto figural, en la perspectiva de Fischbein (1993).

La Teoría de los Conceptos Figurativos

Fischbein (1993), al abordar la Teoría de los Conceptos Figurativos en su tesis, afirma que en Geometría existen relaciones que, de hecho, no dependen de dibujos esquemáticos, sino que vienen impuestas por teoremas y definiciones lógicas. El autor destaca que las propiedades de las figuras geométricas se imponen o derivan de definiciones dentro del dominio de un sistema axiomático, siendo una figura geométrica de carácter conceptual.

Bishop (1983) aporta una idea que complementa la de Fischbein, cuando sugiere dos componentes espaciales que serían especialmente relevantes para el aprendizaje de la geometría. El primero es la capacidad de interpretar la información figurativa, lo que implica la comprensión de representaciones visuales. El segundo se refiere a la capacidad de procesamiento visual. Implica la manipulación y transformación de representaciones e imágenes visuales, además de la traducción de relaciones presentes en las representaciones visuales observadas.

La imagen que el sujeto extrae de un objeto es lo que se puede construir a partir de sus propias acciones realizadas sobre el objeto. Para formas complejas, la percepción puede fallar en realizar una síntesis y coordinación de datos perceptuales que se basa en el razonamiento. Para construir una imagen mental, es necesario anticipar posibles características del objeto observado, como líneas, curvas, ángulos, congruencias, entre otras (Piaget e Inhelder, 1993; Mariotti, 1992).

Hershkowitz (1998) afirma que, al pensar, las personas no usan definiciones de conceptos, sino imágenes conceptuales, una combinación de todas las imágenes y propiedades mentales que se han asociado con el concepto. Sin embargo, un estudiante que enfrenta un problema geométrico es inducido por características figurativas en detrimento de las definiciones y restricciones formales. Pero inconscientemente y en diversas situaciones, los conceptos formales están determinados por la imagen mental construida. Por lo tanto, es importante que el estudiante comprenda la diferencia entre la definición formal, la imagen y el concepto figurativo, ya que estos consisten en tres categorías distintas de entidades mentales.

Según Fischbein (1993), lo que caracteriza a un concepto es el hecho de que expresa una idea, una forma de representación ideal de una clase de objetos que tienen características comunes. Por otro lado, una imagen (entendida aquí como una imagen mental) se refiere a una representación sensorial de un objeto o fenómeno.

Mientras tanto, el concepto figurativo expresa una realidad mental, siendo una construcción tratada por el razonamiento matemático en el dominio de la Geometría. Así, el concepto figurativo está totalmente desprovisto de propiedades concretas como peso, color, densidad, etc., sin embargo, presenta las propiedades figurativas, como lo explica Fischbein (1993):

> Los objetos de manipulación en el razonamiento geométrico son entidades mentales, llamadas conceptos figurativos, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, magnitud) y, al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalización, perfección. (Fischbein, 1993, p. 143).

En el fragmento señalado y desde la perspectiva del autor, se entiende que, a través de la dualidad de concepto e imagen, se construye una imagen mental basada principalmente en conceptos previamente establecidos y formalizados. Por ejemplo, la imagen de un cuadrado no consiste en una mera imagen dibujada en una hoja de papel de manera arbitraria, sino que su concepción, aunque puede estar influenciada por un objeto real, es parte de una definición formal dentro de un sistema axiomático que impone que *un cuadrado es un rectángulo con todos los lados iguales*.

En general, las imágenes están controladas por conceptos. Sin embargo, hay situaciones en las que los conceptos no pueden controlar las imágenes, como en el siguiente ejemplo (Figura 1):

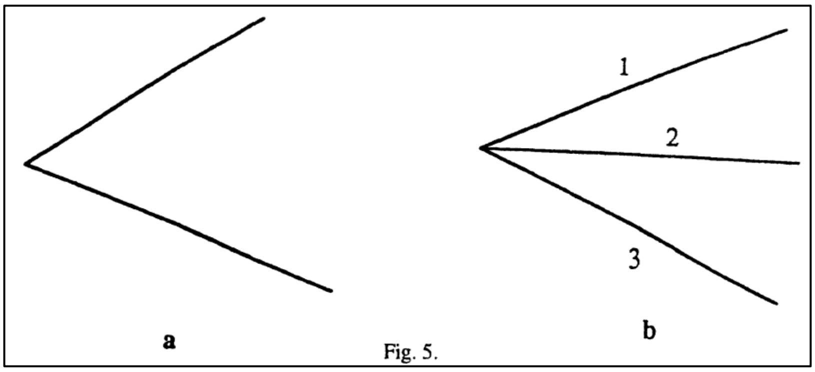


Figura 1. Ejemplo de un concepto que no controla la imagen. Fuente: Mariotti (1992, citado por Fischbein, 1993, p. 152).

La pregunta con respecto a la Figura 1 fue: *¿Cuántos ángulos ves en las figuras a y b?* dirigido a un estudiante de 16 años, que en nuestro sistema educativo probablemente sería un estudiante de secundaria. La respuesta obtenida fue:

> Siempre que veo dos líneas que se cruzan, sé que el espacio entre las dos líneas forma un ángulo. Creo que en ambas figuras solo hay un ángulo, aunque al principio pensé que en la segunda figura había dos ángulos. Puedo explicar mi suposición. Primero, pensé que, en esta representación, la línea 1 y la línea 2 forman un ángulo, y la línea 2 y la línea 3 forman un segundo ángulo. Pero ahora creo que solo hay un ángulo formado por las líneas de cruce (1, 3) y esa línea 2 es la bisectriz de ese ángulo. (Mariotti, 1992, citado por Fischbein, 1993, p. 151).

Tenga en cuenta que, a partir de la respuesta del estudiante, el concepto no tenía control sobre la imagen, por lo que hubo confusión mental por parte del estudiante. Este último, incluso en posesión de la imagen, no pudo relacionar el concepto de ángulo con una respuesta correcta e inmediata. Esto se debe a que "la figura todavía tiene características de la Gestalt[1] inspirada en la práctica". (Fischbein, 1993, p. 152). Así, el concepto de ángulo no controla completamente la figura y su interpretación depende, en parte, de restricciones formales.

Según Costa (2020), la diferenciación existente entre el objeto geométrico (construcción mental) y su representación (objeto físico) tiene un papel destacado en el desarrollo del pensamiento geométrico. Alguien que lucha con esta distinción generalmente no ha alcanzado un nivel más avanzado de este tipo de razonamiento. "En esta dirección, el campo geométrico se considera una herramienta para comprender el mundo físico. Por tanto, la geometría no se ve como un modelo teórico para el estudio de objetos matemáticos en el mundo platónico" (Costa, 2020, p. 155).

Por lo tanto, de esta manera Fischbein (1993) la integración de propiedades conceptuales y figurativas en estructuras mentales unitarias, dado el predominio de restricciones conceptuales sobre figurativas, no consiste en un proceso natural o un efecto espontáneo de los cursos habituales de Geometría en la mente del estudiante. Por tanto, esta debe ser una preocupación continua y sistemática del docente.

Muchas veces, la enseñanza de la Geometría parte del uso de algoritmos y técnicas que privilegian la presentación de conceptos a través de definiciones formales, demostraciones y ejercicios que no proporcionan, en un principio, un desarrollo cognitivo del razonamiento geométrico del alumno. El uso recurrente de analogías y una inadecuada exploración de la intuición en la construcción del conocimiento, acompañada de varios ejemplos y contraejemplos hasta que existe una demostración formal y generalizada, es el formato de enseñanza de los conceptos fundamentales de esta asignatura / disciplina.

METODOLOGÍA

Para la realización de este trabajo se adoptó como metodología el estudio de caso, ya que, según Yin (2001), el estudio de caso es un método de investigación amplio sobre un tema específico, que permite un conocimiento más profundo del mismo y, por lo tanto, ofrece subsidios para futuras investigaciones sobre el mismo tema. Aún en el enfoque de Yin, el Estudio de Caso como herramienta de investigación científica se utiliza para comprender los procesos en la complejidad social en los que se manifiestan: ya sea en situaciones problemáticas, para analizar obstáculos, o en situaciones exitosas, para evaluar copias de modelos.

La investigación se elaboró a partir de estudios que involucraron los temas más recurrentes en la prueba de la Olimpiada de Matemáticas de las Escuelas Públicas de Brasil (OBMEP)[2]. Entre las temáticas seleccionadas, la temática "área de figuras planas" fue escogida por ser muy recurrente tanto en la 1ª como en la 2ª fase de esta Olimpiada, además de formar parte de la Geometría en la que los alumnos aún enfrentan dificultades de aprendizaje.

[1] La Gestalt es una doctrina de la psicología que, inspirada en la obra de Max Wertheimer, tiene como principio rector que el todo es mayor que la suma de sus partes. Es decir, se considera que un conjunto de información es más relevante que un extracto y la idea de totalidad debe entenderse para que las partes la perciban (Piaget, 1983).

[2] Para obtener más información sobre OBMEP, visite http://www.obmep.org.br/.

La encuesta se realizó en una reunión virtual a través de la plataforma Google Meet, debido al escenario de la pandemia COVID-19. El público objetivo de este trabajo fue un grupo de veinte estudiantes de segundo año de secundaria, con edades entre 16 y 17 años, de una escuela pública en el estado de Ceará, Brasil. Estos estudiantes forman parte de un grupo de estudio con clases preparatorias para el OBMEP y fueron invitados a participar en el experimento.

El encuentro tuvo una duración de dos horas / clase, donde se repasó el tema de área y perímetro de figuras planas y se enfatizó que muchos ejercicios sobre este tema requieren conocimiento de temas de geometría estudiados de manera preliminar, tales como relaciones métricas, propiedades de triángulos, similitud de figuras y el uso de mallas cuadriculadas, por ejemplo.

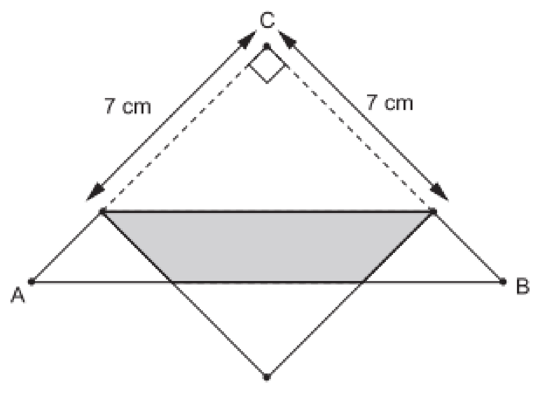
Se trabajaron algunas preguntas extraídas de pruebas OBMEP anteriores, donde se explora la resolución de situaciones problemáticas en geometría plana, buscando desarrollar el razonamiento geométrico del alumno. Sin embargo, entre las preguntas, solo se seleccionó una para componer el análisis de los resultados del estudio de caso de este trabajo, tanto por tratarse de un estudio inicial en el área de la Teoría de los Conceptos Figurativos por parte de los autores, como por la extensión que tendría el trabajo, si se analizan todas las cuestiones.

Dentro de la Teoría de los Conceptos Figurativos, se analizaron los datos (las respuestas de los estudiantes) a partir de sus manifestaciones (correctas o no) sobre la relación entre el concepto y la imagen relativa al tema estudiado, buscando verificar si el proceso de visualización, construcción y razonamiento utilizando el software GeoGebra permitió a los estudiantes teorizar las representaciones figurativas del objeto y el significado del concepto.

En el Cuadro 1 se muestra la pregunta que origina el análisis de los resultados de esta investigación:

(OBMEP 2013 - Nivel 3, Pregunta 4 - Segunda fase - adaptado)

La figura muestra un triángulo de papel ABC, rectángulo en C y cuyos lados miden 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, los puntos que están a x cm del punto C están marcados en los catetos y el triángulo se pliega a lo largo de la línea recta determinada por estos puntos. Indicamos con f(x) el área, en cm², de la región donde se produce la superposición del papel. Por ejemplo, en la figura del lado, el área de la región gris, en cm², es f (7).



Calcular *f(2), f(5)* y *f(7).*

Cuadro 1. Tema trabajado en el encuentro. Fuente: OBMEP (2013).

La resolución de la pregunta se estructuró a partir de una construcción en el *software* GeoGebra, en la que los estudiantes buscaron formas de resolverla a partir de la movilización del razonamiento geométrico a través de la visualización y manipulación dentro del entorno del *software*. Los estudiantes ya conocían el software de clases anteriores y algunas de sus herramientas, pero no lo suficiente para completar la construcción de manera oportuna. Además, el foco fue observar la manipulación de la construcción.

La recolección de datos para este trabajo se realizó a través de registro fotográfico de los estudiantes, registro fotográfico del docente, grabación de video del momento del encuentro y grabación de conversaciones vía chat en la plataforma Google Meet. Se utilizó un análisis cualitativo de los datos, según Kuckartz (2014), realizándose un análisis del discurso como forma de obtener una explicación, comprensión o interpretación de los fenómenos manifestados por el grupo participante y su relación con lo expuesto en el marco teórico de este trabajo. Para preservar la identidad de los estudiantes, sus nombres se han ocultado y reemplazado en el cuerpo del texto como Estudiante A, Estudiante B, etc.

En la siguiente sección, traemos como resultado las notas sobre las observaciones presentadas por los estudiantes, así como algunos extractos de la construcción realizada en GeoGebra, como registros que respaldaron la solución de los estudiantes.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Como resultado de esta investigación, analizamos las observaciones de los estudiantes sobre la pregunta presentada y su respectiva construcción en el *software* GeoGebra, con base en la Teoría de los Conceptos Figurativos. La construcción se proporcionó a los estudiantes como una forma de optimizar el tiempo de reunión. En la Figura 2, hay un registro de la reunión en la plataforma Google Meet.

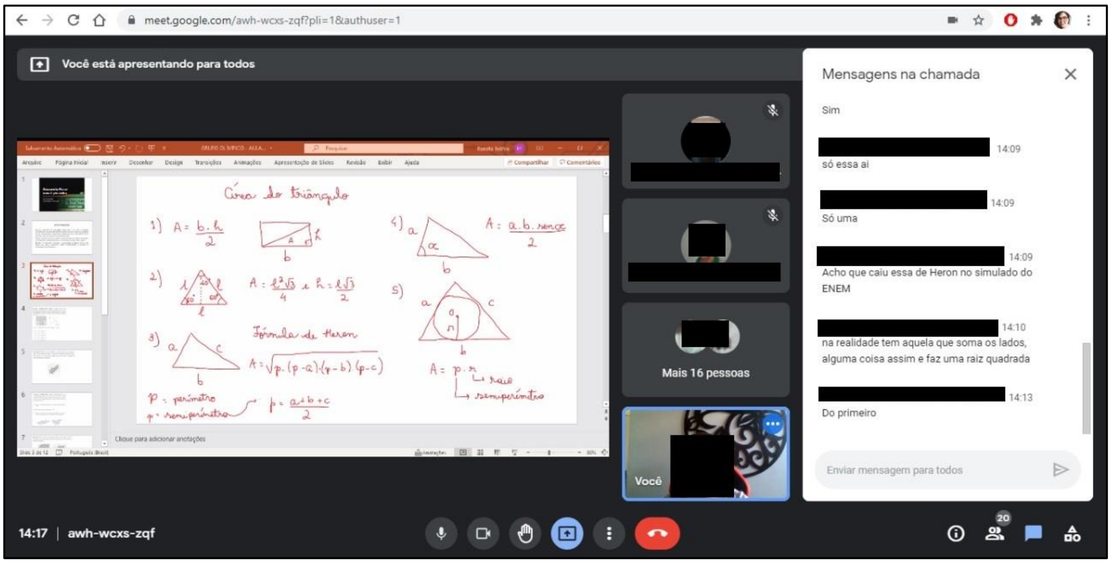


Figura 2. Registro de la reunión en la plataforma Google Meet. Fuente: Registro de autor.

Como se ilustra en la Figura 2, en un primer momento se realizó una revisión y, a partir de ésta, un relevamiento de los conocimientos previos de los estudiantes sobre el área y perímetro de figuras planas. Los apuntes realizados por el docente se originaron a partir de los recuerdos hablados por los alumnos sobre fórmulas matemáticas para el cálculo de áreas. En el caso de este registro, estas fueron las diferentes formas que los estudiantes reportaron haber visto en algún momento, como método para calcular el área de un triángulo.

Una observación es que la mayoría de los estudiantes memorizan muchas fórmulas y algoritmos matemáticos para resolver problemas y usan estos métodos en muchas preguntas, que de alguna manera pueden no estimular la comprensión de la geometría a partir de las percepciones visuales. Kaleff (2003) afirma que la capacidad de visualizar no es innata a todos los individuos. Así, encontramos individuos que visualizan y otros que no visualizan. Aquellos que tienen dificultad para visualizar la geometría prefieren recurrir a fórmulas.

En la pregunta dada, se pidió a los estudiantes que manipularan la construcción proporcionada en https://www.geogebra.org/m/t5mxxwya, haciendo preguntas como: ¿Qué le sucede a la figura al manipular punto P? ¿Qué características se pueden notar en la figura sombreada? ¿Qué sucede con el área gris al manipular punto P?

Los registros de manipulaciones del punto P se presentan en las Figuras 3, 4 y 5, como una forma de orientar mejor la comprensión de las respuestas presentadas por los estudiantes:

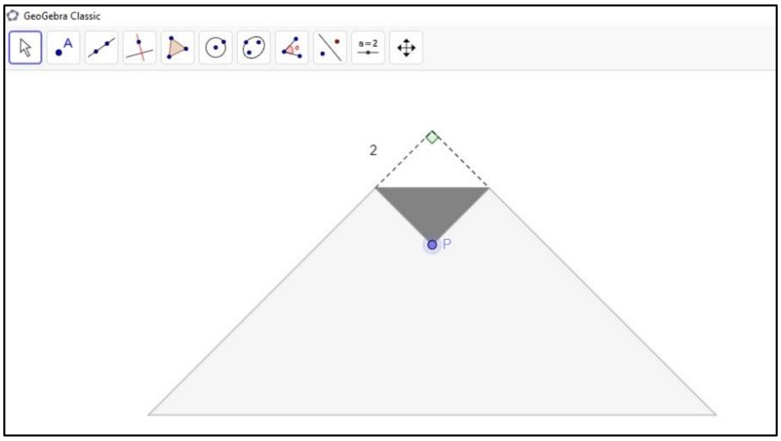


Figura 3. Manipulación desde el punto P a f(2). Fuente: Registro de autor.

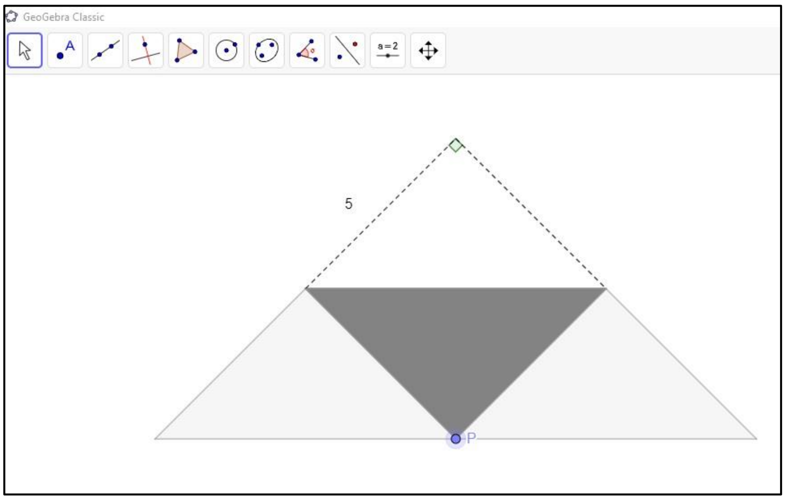


Figura 4. Manipulación desde el punto P a f(5). Fuente: Registro de autor.

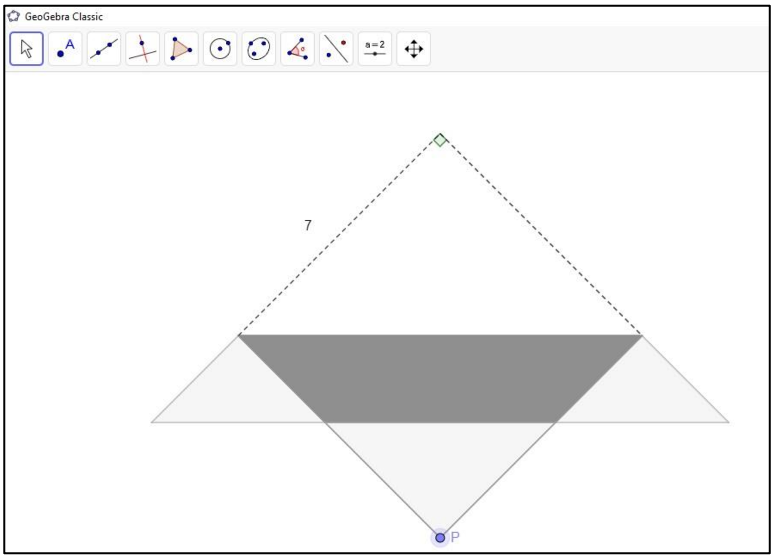


Figura 5. Manipulación desde el punto P a f(7). Fuente: Registro de autor.

A partir del movimiento del punto P, como se ilustra en la secuencia de movimientos de las Figuras 3, 4 y 5, algunas de las respuestas de los estudiantes a las preguntas formuladas por el profesor fueron transcritas de la grabación en video del encuentro en el fragmento:

> *"Sabemos que el triángulo blanco encima de la parte gris oscura es siempre isósceles, porque los dos lados son iguales" (Estudiante A).*
> *"Creo que cuando arrastramos el punto P, la zona gris siempre aumenta" (Estudiante B).*
> *"Cuando el punto P toca la base del triángulo más grande, la figura se divide en cuatro triángulos iguales" (Estudiante C).*

Nótese que el comentario del Estudiante A se basa en el concepto figurativo, a partir de una relación entre la definición de un triángulo isósceles, como un triángulo que tiene dos lados de la misma medida, que termina de alguna manera "confirmado" a partir de la imagen que visualiza al manipular punto P. Desde la perspectiva de Fischbein (1993), cuando se opera directamente con una figura geométrica, es común actuar como si no importara ninguna otra cualidad o restricción, teniendo en cuenta solo el atractivo visual que transmite la imagen. Esta línea de razonamiento también se puede observar en el discurso del Estudiante C, cuando afirma que el punto P, al llegar a la base del triángulo ABC, divide la figura en cuatro triángulos iguales. Esta fue una afirmación basada únicamente en lo que se muestra en la pantalla del estudiante, sin tener en cuenta una prueba matemática formal.

El Estudiante C fue más allá, señalando una característica de la construcción al afirmar que *"la base del triángulo gris oscuro es como la diagonal de un cuadrado".* Señaló como observación que al arrastrar el punto P, como el triángulo formado siempre es isósceles, y los lados iguales forman un ángulo recto, entonces la línea correspondiente a la base del triángulo gris en cuestión representa la diagonal de un cuadrado. A partir del enunciado del alumno C, podemos ver lo que señalan Leivas y Cury (2010) sobre la visualización, considerándola como un proceso de formación de imágenes mentales, con el fin de construir y comunicar un determinado concepto matemático, con miras a ayudar en la resolución de problemas analíticos o geométricos.

Por otro lado, el Estudiante B, al señalar que el área gris siempre aumenta, fue cuestionado por otro colega (Estudiante D) quien, al arrastrar el punto P al límite máximo, mostró que el área de la figura "suma". Tenga en cuenta esta situación ilustrada en la Figura 6:

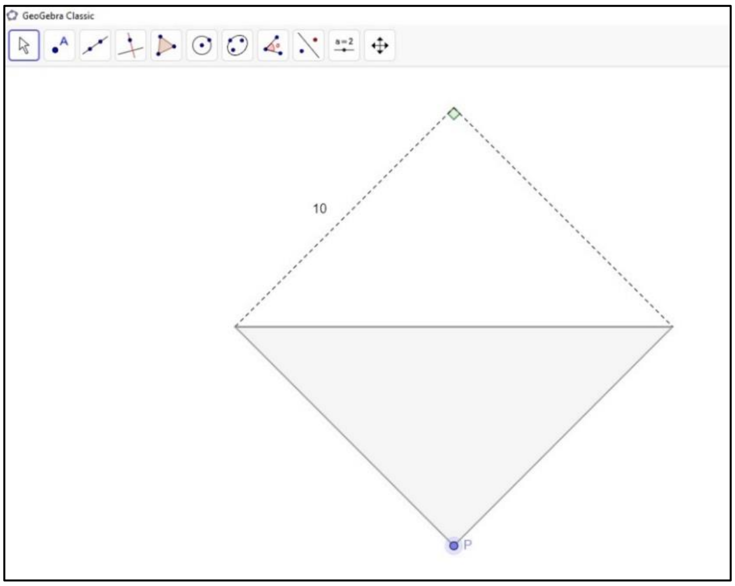


Figura 6. Notas del alumno D. Fuente: Registro de autor.

Al estudiante B se le deshizo su argumento, sin embargo, podemos ver, a partir de la situación presentada en la Figura 6, que el discurso del estudiante C tenía sentido. En realidad, la base del triángulo gris correspondía a la diagonal de un cuadrado. El error del Estudiante B puede justificarse según Fischbein (1993) por el hecho de que las imágenes están controladas por conceptos, pero no siempre es así. Hay situaciones en las que los conceptos no controlan las imágenes y son estas situaciones las que provocan malas interpretaciones en Geometría.

Otra observación respecto a las respuestas de los estudiantes es que las áreas *f(2)* y *f(5)* fueron resueltas esencialmente a partir de la visualización en GeoGebra, sin recurrir al uso de cálculos manuales. De la manipulación de la construcción y enunciados junto con sus compañeros, los estudiantes llegaron a la conclusión de que el área *f(2)* corresponde a la mitad del área de un cuadrado de lado 2, es decir, $f(2) = \frac{2^2}{2} = 2$. De manera similar, el área *f(5)* corresponde a la mitad del área de un cuadrado con lado 5, es decir, $f(5) = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$.

Sin embargo, en el área *f(7)*, los estudiantes sintieron la necesidad de esbozar en papel y luego calcular su valor, buscando, a partir de la visualización de datos con la manipulación de la figura, armar un esquema que organizara las ideas, como se ilustran en las Figuras 7 y 8:

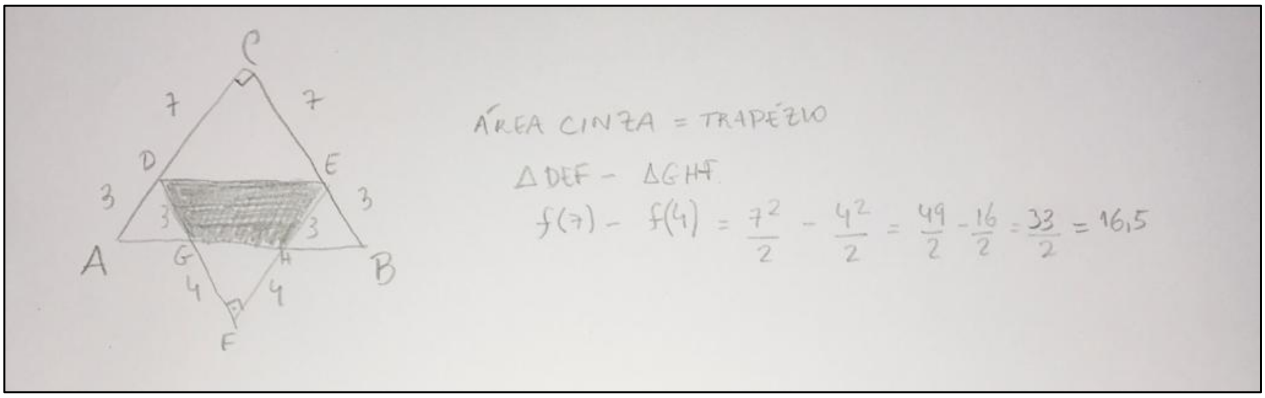


Figura 7. Cálculo manuscrito del Estudiante C. Fuente: Registro del Estudiante C.

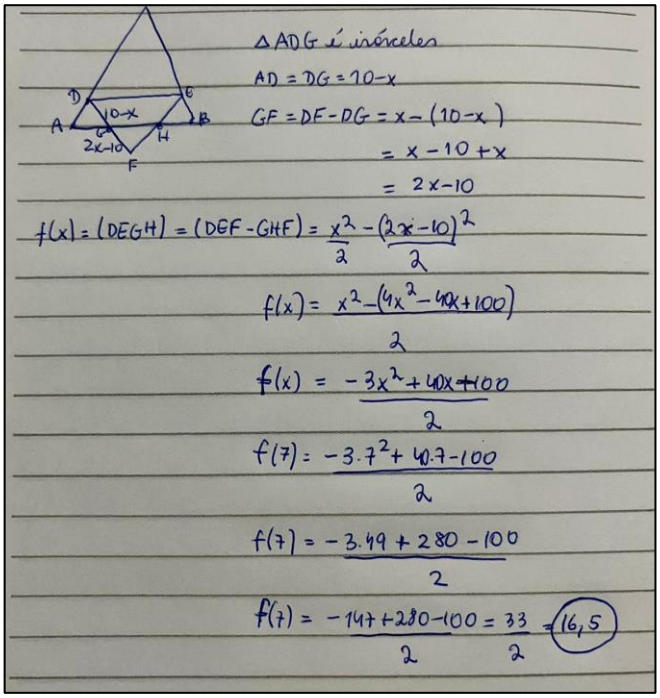


Figura 8. Cálculo manuscrito del Estudiante G. Fuente: Registro del Estudiante G.

Nótese la diferencia entre las respuestas de los estudiantes C y G en las Figuras 7 y 8. Aunque ambos dieron la respuesta correcta, el estudiante C la obtuvo con cálculos más simples, a través de la manipulación con GeoGebra y también de una manera más rápida. El estudiante G, por otro lado, usó más álgebra en la solución, tomó más tiempo y cometió algunos errores, como en la parte del producto notable $(2x - 10)^2$, en la que no vio el signo en el producto. Sin embargo, al enviar la foto de la respuesta, no envió con los errores, sino una versión corregida, luego de comparar su respuesta con colegas y notar el error. En el caso del alumno G, utiliza con más fuerza la parte conceptual y algebraica, que exige más atención.

Para resolver los ítems *a* y *b* de la pregunta, los estudiantes no presentaron grandes dificultades, sin embargo, la mayoría recurrió al uso de lápiz y papel para resolver el ítem *c*. Algunos no lo intentaron porque dijeron que no sabían cómo empezar y se sentían inseguros. La distancia física entre el profesor y el alumno en este momento fue un factor de dificultad, ya que el profesor tuvo dificultades para ayudar a los alumnos con menos habilidades geométricas por teléfono celular.

En este caso, ocurre lo que Fischbein (1993) señala como la necesidad de una demostración lógica y matemáticamente válida para llegar a una conclusión aceptable. Sin embargo, debe enfatizarse que toda prueba fue producto de la lógica del razonamiento geométrico, desarrollada específicamente a partir de este problema. El autor señala que:

> El matemático, como el físico, el biólogo, utiliza la observación, la experimentación, la inducción, las comparaciones, las generalizaciones, pero los objetos de su investigación son puramente mentales. Su laboratorio está, en principio, confinado a su mente. Sus pruebas nunca son de naturaleza empírica, solo lógicas. (Fischbein, 1993, p. 149).

Nótese que Fischbein (1993) es enfático al afirmar que la evidencia es de naturaleza lógica. Esto reafirma el concepto figurativo como realidad mental, a partir del razonamiento geométrico del alumno, es decir, la comprensión global de las tres entidades de categorías mentales necesarias para su desarrollo en el campo de la Geometría, que son la definición, la imagen y el concepto. en sí mismo figurativo. En línea con Fischbein (1993), los autores Jeannotte y Kieran (2017) afirman que, contrariamente a la prueba por mera justificación, la prueba formal trata de una teoría matemática construida a priori y con resultados formalizados, los llamados axiomas y teoremas. En otras palabras, la demostración formal genera resultados matemáticos a partir de demostraciones sistematizadas aceptadas por la comunidad científica.

Esta necesidad de pruebas formales y algebraicas, como lo demostró el estudiante G, es cultural en las clases de Matemáticas. Según Leivas y Cury (2010, p. 80):

> Nos parece que, efectivamente, existe una tendencia a asociar el Álgebra con la Geometría, tratando de obtener fórmulas que puedan justificar afirmaciones y no utilizando los niveles más elementales del pensamiento geométrico, especialmente visualización que, al permitir la formación de imágenes mentales, ayudaría a resolver problemas geométricos.

Según Alves (2019) se puede incentivar a los estudiantes a investigar y determinar propiedades extraídas de la geometría a partir de las configuraciones de la construcción realizada en GeoGebra. En el caso específico de resolver el área de *f(7)*, los estudiantes recurrieron al cálculo formal. Sin embargo, destacamos que se utilizaron valores numéricos y no variables *x*, *y*, *z* ..., como se muestran en la Figura 7, lo cual se debe a que los estudiantes percibieron estos valores a partir de la visualización y manipulación de la construcción dada en el entorno GeoGebra.

Prieto González (2016, citado por Iglesias y Ortiz, 2018) señala que, desde el punto de vista del aprendizaje, la integración de GeoGebra en las clases de Matemáticas ayuda al desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes, basado en la experimentación, visualización y reconocimiento de elementos matemáticos o geométricos, como consecuencia de la interacción del alumno con los objetos representados en su visión gráfica.

Por tanto, con esta actividad podemos ver que el GeoGebra puede potenciar la comprensión de la geometría – no solo la geometría plana, sino espacial, analítica, entre otras áreas de conocimiento –, a partir de las posibilidades de percepción geométrica, manipulación e interacción que ofrece el software como recurso, siendo la visualización la principal, explorada en este trabajo. El alumno, a partir de la visualización, puede realizar la investigación de propiedades geométricas y la formulación de ideas, desarrollando su razonamiento geométrico, tal como se presenta en el cuerpo de estos resultados.

CONSIDERACIONES FINALES

La Teoría de los Conceptos Figurativos señala una forma de entender la relación entre definición, imagen y el concepto figurativo en sí mismo dentro del campo de la geometría, en el que los conceptos y las imágenes se consideran dos categorías distintas de entidades mentales. En este estudio de caso, se buscó analizar, desde la perspectiva de esta teoría, la resolución de una pregunta de geometría plana, involucrando el software de geometría dinámica GeoGebra, tomando en cuenta la visualización como premisa para el desarrollo del razonamiento geométrico del estudiante.

A partir de los análisis realizados, identificamos que los procesos de aprendizaje se dan cuando el alumno es capaz de asignar sentidos y significados a su pensamiento y en la formación de conceptos, estableciendo relaciones que le permiten analizar, discutir, confirmar y refutar hipótesis, lo que se percibió con base en la teoría adoptada y en el uso del software, alcanzando el objetivo del trabajo.

Con la Teoría de los Conceptos Figurativos y su asociación con el software GeoGebra, fue posible tener una noción preliminar de cómo funciona el proceso de construcción del razonamiento geométrico de los estudiantes y sus dificultades. El dinamismo y la posibilidad de movimiento dentro del software tiene un gran potencial para ayudar en el desarrollo del razonamiento del alumno a través de la manipulación y visualización, siendo una forma de ayudar al alumno a conjeturar y comprender propiedades geométricas.

Los principales obstáculos de este estudio fueron las dificultades de algunos estudiantes para acceder a Internet y computadoras, la distancia social entre estudiantes y el docente, dificultades de visualización de algunos estudiantes y la escasez de referencias bibliográficas sobre la Teoría de Conceptos Figurativos. En cuanto al uso de GeoGebra, como los estudiantes solo manipularon la construcción terminada, no hubo mayores dificultades, solo casos ocasionales con estudiantes que accedieron a la construcción a través de su teléfono celular.

Según Fischbein (1993), los docentes conocen muchas implicaciones didácticas en base a su experiencia empírica en el aula, sin embargo, no existe una relación formal con una teoría general. Así, este trabajo puede colaborar con el docente, como docente, a la hora de analizar esta teoría, así como sus implicaciones didácticas, tiene la posibilidad de dirigir una mirada más reflexiva al campo de la Geometría y sus matices, así como mejorar el uso de GeoGebra en sus clases, o incluso otro *software* de geometría dinámica.

Finalmente, en una perspectiva futura, esperamos desarrollar más trabajos con esta teoría, ya que este es un estudio inicial, reforzando su importancia, abordando otros temas en geometría y desarrollando actividades en otros niveles escolares, recopilando datos y ampliando su discusión.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el apoyo financiero otorgado por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico - CNPq para el desarrollo de esta investigación en Brasil.

REFERENCIAS

Alves, F. R. V. (2019). Visualizing the Olympic Didactic Situation (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Napocensia*, 12(2), 97-116. doi: 10.24193/adn.12.2.8.

Alves, F. R. V. y Borges Neto, H. (2012). Engenharia Didática para a exploração didática da tecnologia no ensino no caso da regra de L'Hôpital. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 337 – 367. Recuperado en 15 octubre, 2020, de: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/9445

Becker, M. (2009). *Uma alternativa para o ensino de Geometria: Visualização Geométrica e representações de sólidos no plano*. Dissertación de Maestria, Universidade Federal do Rio Grande do Sul: Porto Alegre.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Costa, A. P. (2020). Pensamento Geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 9(18), 152-179. Recuperado en 01 mayo, 2021, de: http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/651

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162. Recuperado en 05 noviembre, 2020. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/3482943

Fonseca, M. C. F. R., Lopes, M. P., Barbosa, M. G. G., Gomes, M. L. M. y Dayrell, M. M. M. S. S. (2001). *O ensino de Geometria na Escola Fundamental: Três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais*. Belo Horizonte: Autêntica.

Gutiérrez, A. (1992). *Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional Geometry.* Departamento de Didática de las Matemáticas, Universidad de Valencia, Spain.

Hershkowitz, R. (1998). Reasoning in Geometry. In Hershkowitz, R., Duval, R., Bussi, M. G., Boero, P., Leher, R., Romberg, T., Berthelot, R., Sain, M. H., Salin, K. J. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Volume 5 of the series New ICMI Study Series (pp. 29-83).

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2018). Usos del software de geometría dinámica en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(2), 21-35. Recuperado en 01 julio, 2021, de https://www.uco.es/ucopress/ojs/index.php/mes/article/view/12834

Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16. doi: 10.1007/s10649-017-9761-8

Kaleff, A. M. M. R. (2003). *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos*. Rio de Janeiro, Niterói: EdUFF.

King, J. y Schattschneider D. (2003). *Geometry turned on! Dynamic software in teaching, learning & research*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Text Analysis: A Guide to Methods, Practice and Using Software*. London: SAGE Publications.

Leivas, J. C. P. y Cury, H. N. (2010). Análise de Erros em Soluções de um Problema de Geometria: uma Investigação com Professores em Formação Continuada.

REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 5(1), 71-83. doi: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2010v5n1p71

Lorenzato, S. (1995). Por que ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista*, SBEM, São Paulo, 3(4), 1-64.

Mariotti, A. (1992). Imagini e concetti in geometria. *L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrata*, 15(9), 863-885.

Obmep. (2013). Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Prova da OBMEP 2013/Nível 3, 2013. Recuperado en 06 mayo, 2021 de http://www.obmep.org.br/provas.htm.

Pais, L. C. (1996). Intuição, experiência e teoria geométrica. *Revista Zetetiké*, 6. doi: https://doi.org/10.20396/zet.v4i6.8646739.

Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, 1(1). doi: https://doi.org/10.20396/zet.v1i1.8646822.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1993). *A Representação do Espaço na Criança*. Artes Médicas: Porto Alegre.

Prieto González, J. L. (2016). GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. *Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento* (CLIC), Nro 14, Año 7, 9-23.

Santiago, P. V. S., Alves, F. R. V. y Maia, B. M. P. (2021). Sobre a noção de Situação Didática Olímpica aplicada ao contexto das Olimpíadas Internacionais de Matemática. *Remat – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, São Paulo, 18, 1-20. doi: https://doi.org/10.37001/remat25269062v18id533.

Van de Walle, J. (2009). *A Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Yin, R. K. (2001). *Estudo de Caso, planejamento e métodos*. São Paulo: Bookman.

Renata Teófilo de Sousa
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
rtsnaty@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
fregis@ifce.edu.br

Maria José Araújo Souza
Universidade Estadual Vale do Acaraú, Brasil
mazesobral@yahoo.com.br