Vega-Castro, D. (2022). Caracterización de funciones lineales inversas. Un estudio de casos basado en una experiencia de aprendizaje. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *5*(1), 38-57

ISSN: 2603-9982

# CARACTERIZACIÓN DE FUNCIONES LINEALES INVERSAS. UN ESTUDIO DE CASOS BASADO EN UNA EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE

Danellys Vega-Castro, Universidad de Panamá, Panamá

***Resumen***

*Este es un estudio exploratorio con enfoque metodológico, centrado en la caracterización de las funciones lineales inversas, como funciones biunívocas e invertibles. El objetivo propuesto consistió en identificar algún tipo de dificultad estructural en estudiantes de primer ingreso universitario al trabajar con propiedades de una función lineal inversa con estructura algebraica distinta a la estructura de funciones propuestas en los libros de texto asignados en la carrera. Los resultados de esta experiencia condujeron a la generalización de patrones algebraicos y geométricos, que permitieron establecer características subyacentes en las funciones lineales inversas. A su vez conllevó a diseñar una teoría metodológica basada en el manejo didáctico de contenidos matemáticos.*

***Palabras clave***: *función lineal inversa; estructuras; patrones; generalización; didáctica de contenidos*

## Characterization of inverse linear functions. A case study based on a learning experience

***Abstract***

*This is an exploratory study with a methodological approach, focused on the characterization of inverse linear functions as biunivocal and invertible functions. The proposed objective consisted of identifying some type of structural difficulty in first-year undergraduate students when working with properties of an inverse linear function with an algebraic structure different from the structure of functions proposed in the textbooks assigned in the course. The results of this experience led to the generalization of algebraic and geometric patterns, which allowed establishing underlying characteristics of inverse linear functions. It also led to the design of a methodological theory based on the didactic management of mathematical contents.*

***Keywords***: *inverse linear function; structures; patterns; generalization; content didactics.*

Recibido: 11/02/2022; Aceptado: 29/03/2022

## INTRODUCCIÓN

Muchos investigadores se han preocupado en estudiar las dificultades que confrontan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. A través de sus investigaciones han proporcionado aportes para mejorar el proceso de enseñanza (por ej. Arcavi, 2006; Hoch y Dreyfus, 2006; Kieran, 2007; Rico-Romero y Lupiáñez-Gómez, 2008; Radford, 2010; Molina, 2010; Castro, 2012; Vega-Castro, Molina y Castro, 2012; Socas, Hernández y Palarea, 2014). En este trabajo centramos nuestra atención en un tópico específico que hace referencia a las dificultades de los estudiantes al trabajar con funciones lineales inversas. El objetivo de este estudio consistió en identificar dificultades estructurales en estudiantes de primer ingreso universitario al trabajar las propiedades de una función lineal inversa con estructura algebraica distinta a la estructura de funciones propuestas en libros de texto de la carrera.

Dubinsky y Harel (1992) expresan que las funciones representan el concepto matemático más importante estudiado desde el jardín de infancia hasta niveles superiores, mientras que Bernal (2020) expresa que es un contenido relacionado con el último grado de Educación Secundaria y el primero de Universidad, que provoca opiniones encontradas entre los profesores de Colegios, quienes indican que no se cuenta con el tiempo necesario para profundizarlo. Por otro lado, Welder (2006) indica que el concepto de función dificulta su comprensión a muchos estudiantes y que la notación formal que es un compendio de informaciones, tiene poco significado incluso para algunos estudiantes avanzados. Al respecto, Puig y Monzó (2013), desarrollan un modelo de enseñanza de la familia de funciones con el objetivo de que los estudiantes puedan dotar de sentido al uso de las transformaciones de las expresiones algebraicas, indicando en el estudio que, en la enseñanza tradicional a menudo, los estudiantes aprenden estas transformaciones de forma mecánica y terminan ejecutándolas sin sentido.

Profundizando un poco más en el tópico de funciones, dado nuestro interés como tema de estudio, la literatura conduce a indagar en estudios realizados por Even (1992) quien centra sus investigaciones en las funciones inversas e indica que los estudiantes presentan una concepción ingenua de la esencia del concepto de función inversa ante la falta de una adecuada relación entre conocimiento conceptual y procedimental e indica que los estudiantes muestran dificultades para distinguir entre una función exponencial y una función potencia. Wilson et al. (2011) señalan que los estudiantes entienden mejor el concepto de función inversa cuando se presenta en un contexto familiar del mundo real. Por otro lado, Paoletti et al. (2017) luego de realizar una caracterización de los significados de función inversa emitidos por 25 profesores en formación, comentan el señalamiento realizado por algunos investigadores de que profesores y estudiantes no perciben el sentido que conllevan las funciones inversas, por lo que requieren una mayor profundización del tema.

En esta misma línea, Okur (2013) trabaja con una muestra de 137 estudiantes de primer grado universitario matriculados en el programa de enseñanza de las matemáticas elementales en la Universidad de Anatolia Oriental en Turquía. Los resultados informan que aproximadamente un 60 por ciento de los estudiantes experimentaron dificultades para demostrar la suryección de una función al determinar la inversa de una función dada. Y en una escuela secundaria integral urbana en California, Nolasco (2018), realiza un estudio con 80 estudiantes, examina el por qué tienen dificultades con las funciones inversas y qué hacer para apoyar este aprendizaje. Este autor sugiere a docentes y educadores reconocer que la enseñanza conceptual proyecta mejores resultados que la instrucción memorística. Estos aportes sugieren que como educadores se requiere tratar de impregnar de sentido los conceptos enseñados, específicamente allí donde hay dificultades.

Breen et al. (2015) analizan los datos de dos sistemas educativos diferentes, Irlanda y Suecia, relacionados al concepto de función inversa. Las tareas planteadas en ambos estudios abordaban el mismo contenido, pero diferían en varios aspectos. A pesar de ello, las respuestas revelaron componentes similares de las imágenes conceptuales evocadas tales como las nociones de reflexión, inversión e inyectividad. Observaron que muy pocos alumnos de ambos estudios dieron una explicación completa o una definición formal de una función inversa en respuesta a las tareas asignadas. En esta línea, Attorps et al. (2013) realizan un estudio con un grupo de 17 estudiantes de ingeniería sobre funciones y funciones inversas con la ayuda de GeoGebra, donde plantean como contribuye el uso de la tecnología como herramienta pedagógica a la comprensión del concepto de función inversa. El experimento reveló que las imágenes conceptuales de los estudiantes en el postest estaban más desarrolladas en comparación con los resultados del pretest. De acuerdo al estudio de los autores la enseñanza de las funciones y funciones inversas sin el uso de la tecnología, induce muchas veces a resultados no satisfactorios y conlleva a dificultades en el trabajo de los estudiantes.

Atendiendo los aportes presentados en las distintas investigaciones vemos que existe una diversidad de dificultades. Según Vincent, Pierce y Bardini (2017) algunas dificultades confrontadas por los estudiantes pueden residir, no en conceptos nuevos, sino en fundamentos poco sólidos y en comprensiones estructurales limitadas e inflexibles de las matemáticas establecidas con anterioridad en su experiencia de las matemáticas. Rico (2003) expresa que las dificultades presentadas por los estudiantes deben ser consideradas como interrogantes, a las cuales como docentes de matemáticas se requiere la búsqueda de una respuesta. Indica que las dificultades son estímulos para diseñar estrategias de superación, retos para reflexionar y comprender las distintas variables que intervienen en aquellos procesos de enseñanza cuyo control parece que se nos escapa. Una alternativa para reducir las dificultades presentadas por los estudiantes consiste en cambiar la forma en la cual se presenta el Álgebra en libros de texto y *páginas web*[i], el cual es un factor determinante del currículo para una mayoría de profesores, quienes tienen la tendencia a enseñar álgebra estrictamente como está en los textos (Kieran, 1992). En este sentido, una enseñanza de la Matemática basada en la reproducción de modelos dados por el profesor o presentados en los libros de texto y páginas web, induce a que los estudiantes aprendan repitiendo conceptos y proposiciones hasta memorizarlos, asimilando fórmulas y algoritmos a partir de ejercicios rutinarios, careciendo de estímulos de reconocimiento, creación e invención de nuevas estructuras. En esta misma línea, Vega-Castro, Molina y Castro (2012) señalan que para atenuar las dificultades en los estudiantes son necesarios trabajos que informen acerca de cómo promover el sentido estructural en la educación obligatoria. Indican que se requiere que los profesores consideren tipos de contextos y tareas, donde las expresiones se consideren como objetos, analizando sus estructuras, con el propósito de evitar la influencia de la fluidez de los estudiantes en la ejecución de operaciones con expresiones algebraicas.

Considerando los señalamientos metodológicos establecidos por Rico (2003), Kieran (1992) y Vega-Castro, Molina y Castro (2012), y persiguiendo los intereses de este estudio, la literatura expresa a través de Castro, Rico y Castro (1995) que una estrategia importante en la resolución de problemas matemáticos es la creación y el reconocimiento de patrones, examinando casos especiales, organizando a continuación los datos sistemáticamente, determinando un patrón y usándolo para obtener la respuesta. Señalan como ejemplo el caso de hacer generalizaciones con expresiones algebraicas que implican patrones de tipo lineal o cuadrático, trabajo éste que debe ser parte integrante del currículo de matemáticas. En esta vía, Radford (2010) propone la siguiente definición:

> Generalizar un patrón algebraicamente se basa en la capacidad de captar algo en común observado en algunos elementos de una secuencia S, siendo conscientes de que esta similitud se aplica a todos los términos de S y ser capaz de usarlo para proporcionar una expresión directa cualquiera que sea su término de S. Expresado en otra forma, la generalización algebraica de un patrón se basa en el darse cuenta de algo en común que luego es generalizado a todos los términos de la secuencia y que sirve como una orden para construir expresiones de elementos de la secuencia que quedan fuera del campo de percepción. (p. 42)

Preocupados por los resultados presentados por el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA) y conocedores de las dificultades de nuestros estudiantes al trabajar con estructuras algebraicas se tomó como fundamento de motivación las consideraciones, aportes y señalamientos presentados por investigadores matemáticos que hacen referencia al estudio de nuestro interés. Estos aportes condujeron a una experiencia de aprendizaje que consideramos ayudará a mejorar nuestro sistema de enseñanza. La experiencia de aprendizaje fue desarrollada dentro del tópico funciones lineales inversas en un curso de matemáticas para ingeniería informática.

## Generalidades de las Funciones Lineales Inversas (*FLI*)

En la actualidad el concepto de función es de suma importancia en el ámbito de las matemáticas y suele ser muy utilizado para representar e interpretar modelos matemáticos en la resolución de problemas de la vida real. Esta sección del trabajo se centra en describir características específicas de las funciones lineales de la forma $f(x) = mx + b$ y sus inversas. Con respecto a los parámetros (pendiente m y ordenada al origen b) que intervienen en la estructura de la función lineal dada, se presenta la restricción que el valor de estos parámetros debe ser distinto de cero, considerando que para $m = 0$, la función toma la forma $f(x) = b$, dando lugar a una función constante, cuya gráfica es una recta paralela al eje x, que no cumple la propiedad de una ***FLI***. En este tópico encontramos también la función identidad, función lineal de la forma $y = x$, con $m = 1$ y $b = 0$, función que tiene la propiedad de bisecar el primer y tercer cuadrante de R-cuadrado en ángulos exactamente iguales y que ejerce notable influencia en el trazado de la gráfica para las funciones inversas.

En relación a la definición de este concepto son muchas las coincidencias en libros de texto por diversos autores. Por ejemplo, en la literatura presentada por Pestana et al. (2007) señala que: "Una función es una regla cualquiera que hace corresponder un número real y sólo uno a cada número de un cierto conjunto, es decir, $f(x)$ es el valor de la función f en el punto x" (p.127). Según Swokowski y Cole (2012), para definir la función inversa de una función es esencial que la función sea biunívoca, la cual definen como sigue:

> Una función $f$ con dominio $D$ y rango $R$ es una función biunívoca si cualquiera de las dos condiciones equivalentes se satisface:
>
> 1. Siempre que $a \neq b$ en $D$, entonces $f(a) \neq f(b)$ en $R$.
> 2. Siempre que $f(a) = f(b)$ en $R$, entonces $a = b$ en $D$. (p.294)

Estos autores señalan la existencia de la prueba gráfica de la recta horizontal: "Una función $f$ es biunívoca si y sólo si toda recta horizontal cruza la gráfica de $f$ a lo más en un punto" (p. 294). Posteriormente, plantean el siguiente teorema que atiende parte específica de este trabajo: "Las funciones crecientes o decrecientes son biunívocas

1. Una función que es creciente en todo su dominio es biunívoca.
2. Una función que es decreciente en todo su dominio es biunívoca" (p.295).

Swokowski y Cole (2012) definen una función inversa de la siguiente forma:

> Sea $f$ una función biunívoca con dominio D y rango R. Una función g con dominio R y rango D es la función inversa de $f$, siempre que la condición siguiente sea verdadera para toda x en D y toda y en R: $y = f(x)$ si y sólo si $x = g(y)$. (p.296)

En referencia a las funciones inversas otras definiciones encontradas son las siguientes: "La función inversa de una cierta $f$ dada es (si es que existe) otra función llamada $f^{-1}$, tal que $(f \circ f^{-1})(x) = x = (f^{-1} \circ f)(x)$ cuando estas composiciones tienen sentido" (Pestana et al., 2007, p.134). Otra definición la encontramos en Aguilar et al. (2016) quienes definen las funciones inversas como sigue: "Sea $f$ una función inyectiva con dominio $A$ y contradominio $B$; la función $g$ que satisface $f(g(x)) = x$, se llama función inversa de $f$ y se denota $f^{-1}(x)$ con dominio $B$ y contradominio $A$" (p.45). Posterior a esta definición Aguilar et al. (2016) señalan las siguientes propiedades:

> Si $f$ es una función con inversa $f^{-1}$, entonces:
>
> 1. El dominio de $f^{-1}$ es el rango de $f$ y el rango de $f^{-1}$ es el dominio de $f$.
> 2. $(f \circ f^{-1})(x) = x, \ (f^{-1} \circ f)(x) = x$
> 3. $f^{-1}$ es invertible y su inversa es $f$
> 4. Si $f$ es una función real entonces la gráfica de $f^{-1}$es el reflejo de $f$ sobre la función $y = x$. (Aguilar et al., 2016, p. 46)

Considerando que este trabajo está enfocado en las ***FLI*** identificadas como funciones invertibles, y dado que en el estudio sale a relucir la terminología reversible, indagamos en el Diccionario de la Real Academia Española (s.f.) para clarificar estos términos. Señala que el término invertible presenta como significado que se puede invertir, cambiar, sustituyendo por su contrario, la posición, el orden o el sentido de las cosas. Mientras que el término reversible proviene del latín reversus, el cual significa que puede volver a un estado o condición anterior, refiere a los pasos que se siguieron en un sentido y como serían en el orden inverso, por ejemplo, entrar y salir de una ciudad realizando el mismo recorrido en ambos sentidos.

## MÉTODO

Este es un estudio exploratorio basado en una experiencia de aprendizaje. El estudio se realizó con un grupo de 17 estudiantes de primer nivel universitario de la Universidad de Panamá, en la asignatura de Matemáticas del periodo correspondiente al primer semestre de 2019. Se asignó una tarea en un instrumento de Evaluación individual cuya pretensión estuvo basada en detectar alguna situación de dificultad en los estudiantes de la carrera al trabajar las propiedades de las funciones lineales inversas empleando una estructura algebraica distinta a las estructuras estudiadas en clases. En el estudio se presentaron respuestas no satisfactorias en 15 de los 17 estudiantes. No obstante, el trabajo realizado por dos estudiantes, Tomás y Santiago[ii], induce a la labor de investigación, realizando un análisis profundo de la dificultad encontrada y que condujo a emplear como técnica un caso de estudio intrínseco (Stake, 1998). A su vez, dadas las cualidades de la resolución presentada por ambos estudiantes conllevó a establecer una teoría metodológica para la enseñanza del tópico en mención.

## Diseño

El diseño de esta experiencia estuvo orientado por tres señalamientos metodológicos y el uso de los descriptores del sentido estructural propuestos por Vega-Castro (2013, pp.88-90). Los señalamientos metodológicos considerados fueron tres. Primero: Considerar dificultades mostradas por estudiantes como interrogantes a resolver, propuesto por Rico (2003). Segundo: El señalamiento presentado por Kieran (1992), acerca del currículo en matemáticas, indicando que el primer paso para cambiar la forma de enseñar álgebra es cambiar la forma en que se presenta el álgebra en los textos. Tercero: la invitación de Vega-Castro, Molina y Castro (2012) a atenuar las dificultades de los estudiantes considerando tipos de contextos y tareas, que requieran la consideración de expresiones como objetos, analizando la implicación que conllevan sus estructuras.

## Desarrollo del diseño

El diseño consistió en añadir a un problema 4, de un Instrumento de Evaluación Individual, una tarea con la estructura de un patrón algebraico modificado, el cual contenía la estructura de una función lineal algebraica no común a las propuestas en los libros de texto sugeridos en la asignatura de la carrera cursada por el grupo de estudiantes.

En clases los estudiantes habían trabajado el tema de relaciones y funciones, y dentro de este último, habían estudiado la definición, la composición, tipos especiales de funciones (biyectivas o biunívocas) y la verificación de la inversa de diversos tipos de funciones (lineales, cuadráticas, cúbicas, y otros). Para la construcción de las gráficas de las funciones lineales y sus inversas, trabajaron primeramente en sus cuadernos de apuntes. Posteriormente, se realizaba el mismo trabajo con ayuda del software GeoGebra. Sin embargo, el día de la aplicación del Instrumento de Evaluación se solicitó a los estudiantes realizar la construcción de las gráficas a mano alzada. Primeramente, se realizó una breve búsqueda de problemas propuestos (Kieran, 1992) y se detectó dos tipos de patrones algebraicos de función lineal y su función inversa (ver Tabla 1). El primer ejemplo de la Tabla 1 conlleva un tipo de patrón algebraico para la función lineal, donde la estructura de la función algebraica es de la forma $f(x) = mx + b,$ y el segundo ejemplo conlleva un segundo tipo de patrón algebraico con estructura de la forma $f(x) = x + b$.

**Tabla 1.** *Tipos de ejemplos propuestos en libros de texto de la asignatura*

| *Ejemplo* | *Función lineal* | *Función Inversa* |
|---|---|---|
| 1 | $f(x) = 3x - 5$ | $f^{-1}(x) = (x + 5)/3$ |
| 2 | $f(x) = x - 4$ | $f^{-1}(x) = x + 4$ |

En función de los patrones encontrados y buscando indagar en el proceso de enseñanza basado en el manejo didáctico de estructuras dentro del proyecto de Sentido Estructural en el cual se desarrolla el estudio, se consideró observar detenidamente los descriptores del sentido estructural planteados por Vega-Castro (2013, pp. 88-90). A raíz de esta observación, surge la interrogante: ¿Qué sucedería si se realiza una modificación a la estructura de la función lineal del segundo ejemplo, esto es, si se invierte el orden y forma de la estructura de la función originalmente dada? En este caso, sucedería que el valor del coeficiente de $x$ como pendiente de la recta pasaría a ser negativo y el valor de la ordenada al origen pasaría a ser positivo. Se optó por invertir el orden en los términos de la estructura y cambiar el valor de la ordenada al origen, quedando el segundo patrón algebraico expresado como $f(x) = 3 - x$. A partir de esta estructura, el problema que permitiría analizar el desempeño de los estudiantes con respecto a las ***FLI*** fue redactado mediante cuatro ítems de la siguiente forma:

Dada la función lineal $f(x) = 3 - x$.

1. Dibuje la gráfica
2. Analice si la función es biyectiva. Justifique su respuesta.
3. Pruebe analíticamente que $f(x)$ es invertible
4. Construya la gráfica para $f^{-1}(x)$.

Considerando que dentro del proceso de enseñanza se busca presentar pequeños retos a los estudiantes, en este sentido, realizar una modificación a la función propuesta en el libro de texto a través de la inversión de la estructura de la función algebraica dada, es de considerar, ayudaría a observar la presencia de alguna dificultad en el trabajo de los estudiantes.

**Análisis preliminar de las experiencias**

En esta sección presentamos el análisis del desempeño de Tomás, al verificar el trazado de la gráfica para la ***FLI*** propuesta. Durante el desarrollo del Instrumento de Evaluación, sólo Tomás, interroga a la Investigadora. En ningún momento estuvo satisfecho de los resultados obtenidos al trazar la gráfica. En lo siguiente, se detalla las interrogantes de Tomás desde su mesa de trabajo en el aula de clases:

-. Tomás: Profesora, no me sale la construcción de la gráfica del problema 4. ¿Es posible que haya algún error en el problema?

-. Profesora: No, el problema 4 no tiene errores.

Tomás no conforme con las respuestas de la Profesora, se levanta y camina hasta el escritorio e indaga a la Profesora.

-. Tomás: Profesora, podría indicarme donde tengo el error, las gráficas me coinciden una sobre la otra.

La Profesora observa rápidamente la resolución planteada por Tomás.

-. Profesora: Tomás, construya las gráficas de las funciones en un sólo plano.

## RESULTADOS

En esta sección, se presenta el trabajo realizado por Tomás y Santiago para probar que efectivamente la función lineal $f(x) = 3 - x$ es inversa.

**Enunciado 1**. *Dibuje la gráfica de* $f(x) = 3 - x$

***Resolución de Tomás:*** Primeramente, en la Figura 1, a la izquierda, se observa la tabla de valores para la función $f(x)$ y a la derecha, la construcción de la gráfica de la función lineal que confecciona. Tomás coloca los pares ordenados $(-2, 5)$, $(-1, 4)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ y $(2, 1)$ en el plano dibujado, no enumera las coordenadas del plano cartesiano, ni coloca el sentido a la recta trazada. Aunque se sobreentiende que la recta desciende a la derecha de acuerdo a los valores de los pares ordenados de la Tabla de valores.

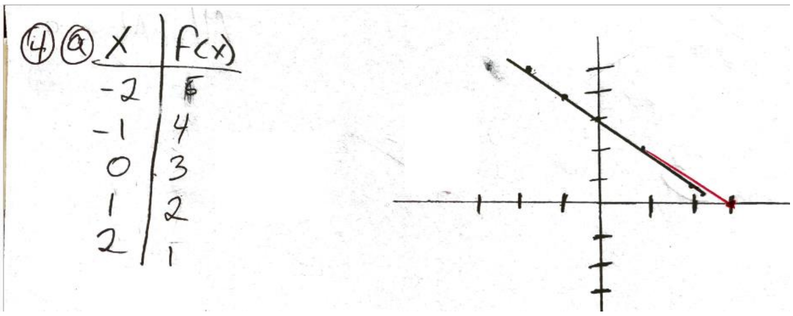


*Figura 1.* Tabla de valores y gráfica de f(x) construida por Tomás.

***Resolución de Santiago:*** Santiago presenta en un mismo plano las gráficas para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$. Construye la tabla de valores ubicada a izquierda de la Figura 2. Posteriormente, coloca correctamente los pares ordenados $(-2, 5)$, $(-1, 4), (0, 3)$, $(1, 2)$ y $(2, 1)$ correspondientes a la gráfica de $f(x)$ en la parte superior del plano.

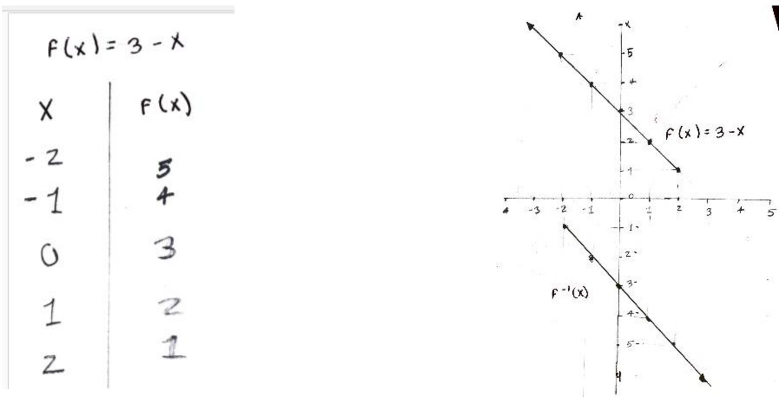


*Figura 2.* Gráfica de la función $f(x)$ *y* $f^{-1}(x)$ construida por Santiago

**Enunciado 2.** *Analice si la función es biyectiva. Justifique su respuesta*

***Resolución de Tomás***: En la Figura 3 se muestra la justificación que presenta Tomás luego de analizar conceptualmente la biyectividad de la función.

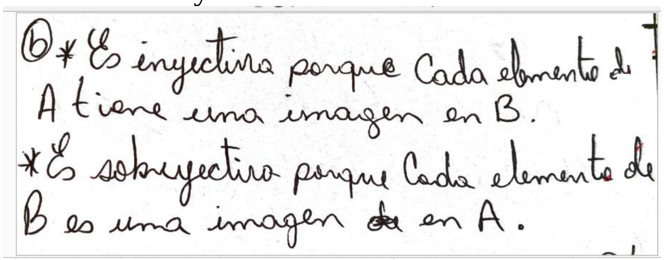


*Figura 3.* Justificación de biyectividad presentada por Tomás.

***Resolución de Santiago:*** Por su parte Santiago, muestra en la Figura 4 el análisis y la justificación de la biyectividad del problema construyendo un diagrama de conjuntos.

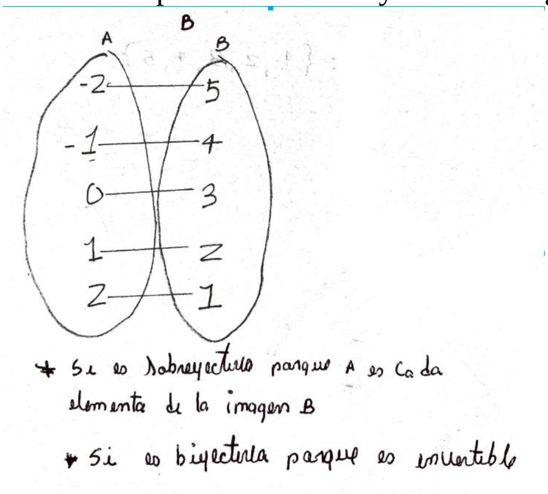


*Figura 4.* Justificación de biyectividad presentada por Santiago.

**Enunciado 3.** *Pruebe analíticamente que* $f(x)$ *es invertible*

***Resolución de Tomás:*** En la Figura 5, se muestra la respuesta de Tomás al enunciado 3. En el desarrollo ubicado a la izquierda, Tomás despeja el valor de $y$ para obtener $x$ en función de $y$, derivando así de la expresión $f(x) = 3 - x$, la expresión $x = 3 - y$, que conlleva a $f^{-1}(x) = 3 - x$. Posteriormente, la imagen de la derecha en la Figura 4 muestra de acuerdo a los cálculos analíticos, que Tomás prueba la propiedad señalada por Pestana et al. (2007) y por Aguilar et al. (2016).

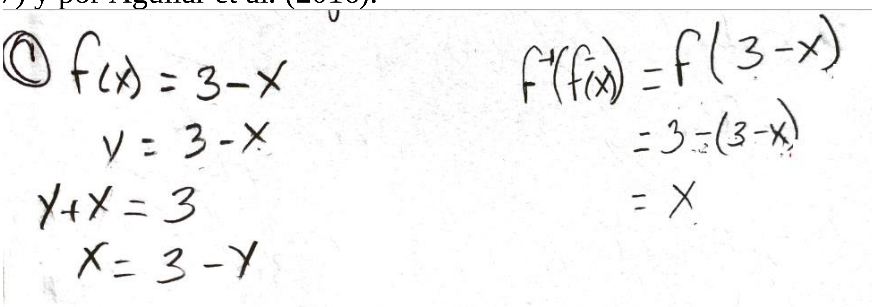


*Figura 5.* Prueba de que $f(x)$ es invertible realizada por Tomás.

Podemos observar que Tomás escribe $f^{-1}(f(x)) = f(3 - x)$ y que la escritura correcta es $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3 - x)$, pero este error no impide que Tomás verifique la inversa de la función. Aunque se sugiere para próximos estudios solicitar se pruebe el sentido inverso $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, donde $f\left(f^{-1}(x)\right) = 3 - f^{-1}(x)$, luego $f\left(f^{-1}(x)\right) = 3 - (3 - x) = x$.

***Resolución de Santiago:*** Se muestra a continuación la forma de obtener la inversa de la función realizada por Santiago. Obsérvese la Figura 6.

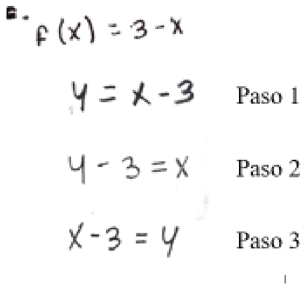


*Figura 6.* Prueba de que $f(x)$ es invertible realizada por Santiago.

Se observa en la Figura 6 que Santiago al probar analíticamente que $f(x)$ es invertible y resolver para $x$ como función de $y$, sustituye $f(x)$ por $y$, asume intercambiar la expresión $3 - x$ de la función lineal dada por la expresión $x - 3$ como se muestra en el paso (1). Posteriormente, en el paso (2) traslada el $-3$ del miembro derecho al miembro izquierdo conservando el mismo signo a este término, luego de realizada la trasposición, finalmente concluye que $y = x - 3$.

**Enunciado 4.** *Construya la gráfica para* $f^{-1}(x) = 3 - x$

***Resolución de Tomás***: Tomás construye correctamente para $f^{-1}(x) = 3 - x$ una tabla de valores y luego coloca los pares ordenados $(5, -2)$, $(4, -1)$, $(3, 0)$, $(2, 1)$ y $(1, 2)$ (ver Figura 7). A partir de estos datos se observa a la derecha de la Figura 7 la construcción de la gráfica de la función lineal inversa. De acuerdo a las tablas de valores construidas por Tomás, indica que el dominio de $f^{-1}(x)$ es el rango de $f(x)$ y que el rango de $f^{-1}(x)$ es el dominio de $f(x)$.

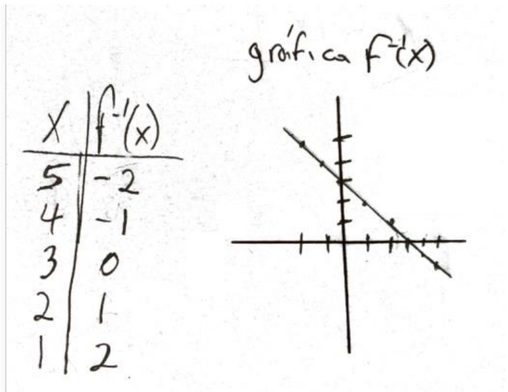


*Figura 7.* Tabla de valores y gráfica de $f^{-1}(x)$ construida por Tomás

Al contrastar las gráficas de la Figura 1 y Figura 7 elaboradas por Tomás, se observa que las líneas de las gráficas correspondientes a $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ pasan por los mismos puntos. Cortan en ambas los ejes coordenados en los puntos (3,0) y (0,3). No obstante, este recorrido se realiza en sentidos distintos. Tomás al no colocar el sentido que conlleva cada línea, le impide observar la reversibilidad de las mismas. En este caso surge la conjetura de que esta sea la situación por la cual Tomás no se sentía conforme con los resultados obtenidos al construir la gráfica, dado que en las prácticas realizadas en clases en ningún momento se les presentó una estructura gráfica con esta forma. Se considera que la forma como se redactó la indicación para la construcción de las gráficas del problema propuesto (enunciados 1 y 4) fueron una limitante para Tomás quien construyó las gráficas de las funciones en plano separados. Además, en ningún momento se les sugirió colocar el sentido del recorrido de las líneas.

***Resolución de Santiago:*** Santiago no construye la tabla de valores para $f^{-1}(x)$, pero de acuerdo a la gráfica que se presenta en la Figura 2, muestra haber considerado los pares ordenados $(-2,-1)$, $(-1,-2),(0,-3),(1,-4)$, $(2,-5)$. Es decir, muestra haber considerado como dominio de $f^{-1}(x)$ el dominio de $f(x)$ y como rango de $f^{-1}(x)$ ha invertido el orden del rango de $f(x)$ cambiando los signos. Se puede observar que coloca el sentido de las líneas correspondientes a la gráfica de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en dirección contraria. Luego, se observa que las líneas son paralelas, lo cual muestra que Santiago presenta una confusión con el patrón geométrico de la función presentada en el instrumento de evaluación.

## ANÁLISIS DE LA DIFICULTAD ENCONTRADA

Iniciamos aquí el proceso de manejo didáctico del contenido matemático en estudio como búsqueda de respuesta a la dificultad presentada por ambos estudiantes.
**Primer señalamiento metodológico**: Considerar las dificultades mostradas por el estudiante como interrogantes a resolver de acuerdo a señalamiento realizado por Rico (2003). Estas dificultades condujeron a indagar un poco más y buscar una posible solución al problema

1. *Dificultad de Tomás*: se procedió a analizar el diálogo que surgió con el estudiante Tomás, donde se percibe la presencia de una dificultad en su comprensión respecto a la estructura gráfica de la función. Tomás muestra inseguridad al trazar la estructura gráfica de la imagen inversa correspondiente a la función inicialmente dada.

2. *Dificultad de Santiago:* Asume que la estructura gráfica de la ***FLI*** al actuar como reflejo de la función lineal dada inicialmente, debe manifestarse como una recta paralela a $f(x)$, considerando que las estructuras gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son imágenes reflejo una de la otra con respecto a la función $y = x$, según señala Aguilar et al. (2016) en la cuarta propiedad propuesta.

Ante la inseguridad y dificultad presentadas por Tomás y Santiago, cabe señalar la importancia del uso de la tecnología como herramienta pedagógica para la comprensión del concepto de función inversa (Attorps et al., 2013).

**Segundo señalamiento metodológico***:* Cambiar la forma en la cual se presenta el Álgebra en los textos y páginas web, según señalamiento hecho por Kieran (1992).
Se procedió a realizar una revisión de problemas propuestos que atienden a las ***FLI*** en libros de texto y páginas web, con el objetivo de extraer información adicional acerca de las diversas ejemplificaciones utilizadas para el tema en estudio, y su relación con las dificultades encontradas al proponer cambios en la nueva tarea asignada a los estudiantes. De esta revisión se observa en la Tabla 2 que, en su mayoría los ejemplos presentados en los libros de texto y páginas web revisados y que atienden a las ***FLI***, poseen un patrón estructural algebraico muy similar, que presenta la forma $f(x) = mx + b$ y otros ejemplos propuestos y desarrollados cuyo patrón algebraico posee la forma $f(x) = x + b$. Observemos otros ejemplos añadidos a los ya presentados en la Tabla 1.

**Tabla 2.** *Otros ejemplos propuestos en libros de texto y páginas web*

| *Función lineal* | *Función Inversa* |
|---|---|
| $f(x) = 4x - 3$ | $f^{-1}(x) = (x + 3)/4$ |
| $f(x) = -2x + 3$ | $f^{-1}(x) = (3 - x)/2$ |
| $f(x) = x + 4$ | $f^{-1}(x) = x - 4$ |

**Tercer señalamiento metodológico:** Considerar el análisis de estructuras algebraicas para promover el sentido estructural según señalamiento propuesto por Vega-Castro, Molina y Castro (2012).
El objetivo de intentar promover el sentido estructural conduce al análisis de las estructuras de las expresiones considerándolas como objetos. Este objetivo a su vez conlleva a atenuar las dificultades mostradas por los estudiantes, para lo cual se proponen cuatro estrategias.

***Estrategia 1.*** *Analizar similitudes y diferencias de ejemplos encontrados en libros de texto y páginas web para la búsqueda de un patrón algebraico que caracterice las estructuras de las expresiones dadas.*

Luego de analizar similitudes y diferencias en los ejemplos presentados en la Tabla 1 y Tabla 2, incluyendo el ejemplo de la tarea con la función $f(x) = 3 - x$, propuesta a los estudiantes en el instrumento de evaluación individual, se observan tres casos de patrones algebraicos subyacentes en la estructura de una función lineal de la forma $f(x) = mx + b$. En la Tabla 3 se muestra cada patrón generalizado y sus respectivos ejemplos con diversos valores reales para la ordenada al origen.

**Tabla 3.** *Casos de patrones algebraicos que caracterizan las* ***FLI***

| **Caso 1**. $f(x) = mx + b$ | **Caso 2**. $f(x) = x + b$ | **Caso 3.** $f(x) = -x + b$ |
|---|---|---|
| $f(x) = 2x - 3$ | $f(x) = x - 3$ | $f(x) = -x + 3$ |
| $f(x) = 3x + {}^1/_2$ | $f(x) = x + {}^1/_2$ | $f(x) = -x - {}^1/_2$ |
| $f(x) = 5x - \sqrt{3}$ | $f(x) = x - \sqrt{3}$ | $f(x) = -x + \sqrt{3}$ |

***Estrategia 2***. *Analizar estructuralmente el contenido de los casos de patrones algebraicos obtenidos, de forma que permita identificar y describir características del tema en consideración (considerar señalamiento de Castro, Rico y Castro, 1995 y definición propuesta por Radford, 2010).*

Al analizar los casos de patrones algebraicos de la Tabla 3 se pudo estructurar las respectivas restricciones para la forma generalizada de cada caso de ***FLI*** encontrada:

- En los tres casos es posible asignar cualquier valor real a la ordenada al origen. Este valor no influye en el comportamiento de la forma adquirida por la gráfica que corresponde a cada caso.
- Se requiere que tanto el valor de la pendiente *m*, como el valor de la ordenada al origen *b*, sean distintos de cero en los tres casos.
- El comportamiento de la gráfica de la ***FLI*** varía en función del valor del parámetro $m$ como pendiente de cualquier función lineal dada. Es decir, la pendiente $m$

en el Caso 2 es estrictamente igual a 1, mientras que la pendiente $m$ en el Caso 3 es estrictamente igual a -1. Observemos:

**Caso 1**. Que la pendiente $m$ sea un número real distinto de $\{-1, 0, 1\}$.

**Caso 2.** Que la pendiente sea estrictamente $m = 1$

**Caso 3**. Que la pendiente sea estrictamente $m = -1$

***Estrategia 3****. Establecer características algebraicas y geométricas.*

*a. Caracterización Algebraica*

Este análisis conlleva a describir características en cada patrón algebraico generalizado. En la Tabla 4 se presenta la caracterización algebraica de las ***FLI*** a través de las cualidades de las estructuras que presentan cada uno de los patrones algebraicos encontrados dentro de cada caso. Cabe señalar que para el Caso 1, en el cual $f(x) = mx \pm b$ y donde $m$ es un número racional de la forma $m = \frac{a}{c}, c \neq 0$, luego:

*a.1.* Para $c = 1$, el patrón algebraico de la ***FLI*** queda expresado de la forma $f^{-1}(x) = \frac{x \mp b}{a}$.

*a.2.* Para $c \neq 1$, el patrón algebraico de la ***FLI*** queda expresado de la forma $f^{-1}(x) = \frac{c(x \mp b)}{a}$.

**Tabla 4.** *Caracterización algebraica de las* ***FLI***

| Características / Caso | Caso 1 | Caso 2 | Caso 3 |
|---|---|---|---|
| Patrón algebraico de la función lineal dada | $f(x) = mx \pm b$ | $f(x) = x \pm b$ | $f(x) = -x \pm b$ |
| Patrón algebraico de la ***FLI*** | $f^{-1}(x) = \frac{x \mp b}{a}$ <br> $f^{-1}(x) = \frac{c(x \mp b)}{a}$ | $f^{-1}(x) = x \mp b$ | $f^{-1}(x) = -x \pm b$ |
| Condición de la estructura de la función en todos los casos para $m \neq 0, b \neq 0$ | La pendiente $m$ puede ser cualquier valor real, excepto $\{-1, 0,1\}$ | La pendiente es estrictamente $m = 1$ | La pendiente es estrictamente $m = -1$ |
| Signo de la ordenada al origen en las ***FLI*** | Presenta variación | Presenta variación | No presenta variación |

*b. Caracterización Geométrica*

*b.1. Caracterización geométrica de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ para el Caso 1*

A raíz de los tres casos de generalización algebraica obtenida, en esta sección se describen las características del comportamiento geométrico de una función modelo para el Caso 1, la función es $f(x) = 3x - 2$ y su inversa $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$, estableciendo de esta forma un patrón geométrico para el Caso 1 (ver Figura 8).

Características del comportamiento

- Se interceptan en un punto y son inversas entre sí,

- Son cortadas por la función $y = x$, formando ángulos simétricos respecto de la función identidad,
- Ambas son crecientes o decrecientes a la vez, es decir, ambas son rectas que se elevan a la derecha o ambas descienden a la derecha.

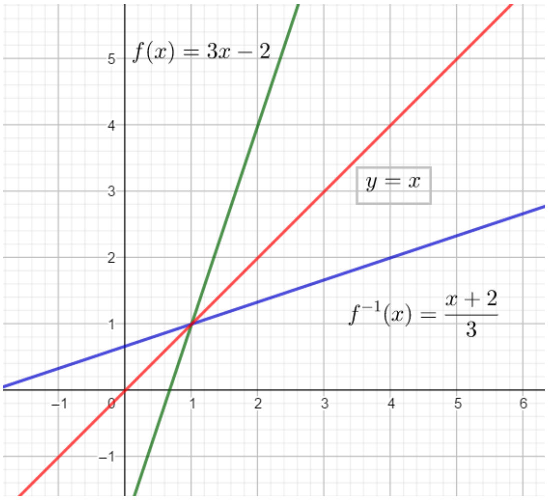


*Figura 8.* Patrón geométrico del Caso 1.

*b.2. Caracterización geométrica de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ para el Caso 2*

Para el Caso 2, se utilizan como función modelo $f(x) = x + 3$ y su inversa $f^{-1}(x) = x - 3$, y se describen las características del comportamiento geométrico estableciendo de esta forma un patrón geométrico para el Caso 2 (ver Figura 9).

Características del comportamiento
- No se interceptan, son paralelas y son inversas entre sí.
- No son cortadas por la función $y = x$, en ningún punto, se muestran como reflexiones a distinto lado y son paralelas a la función identidad,
- Ambas son crecientes, es decir, son rectas que se elevan a la derecha.

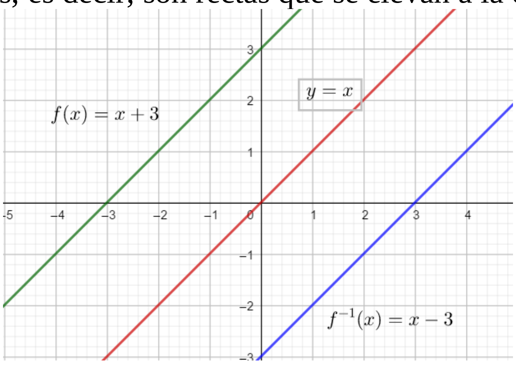


*Figura 9.* Patrón geométrico del Caso 2.

*b.3 Caracterización geométrica de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ para el Caso 3*

Para el Caso 3, se utiliza como función modelo la función aplicada a los estudiantes en el instrumento de evaluación individual, $f(x) = 3 - x$ y su inversa $f^{-1}(x) = 3 - x$. Se describen las características del comportamiento geométrico, estableciendo de esta forma un patrón geométrico para el Caso 3 (ver Figura 10).
Características del comportamiento

- No se interceptan, son reversibles, se superponen una sobre otra en dirección contraria, y son inversas entre sí.
- Ambas líneas son cortadas perpendicularmente en un mismo punto por la función identidad.
- Mientras la función $f(x)$ desciende a la derecha, $f^{-1}(x) = g(x)$ asciende a la izquierda.

a. Trazado de la gráfica $f(x)$ b. Trazado de la gráfica $f^{-1}(x)$

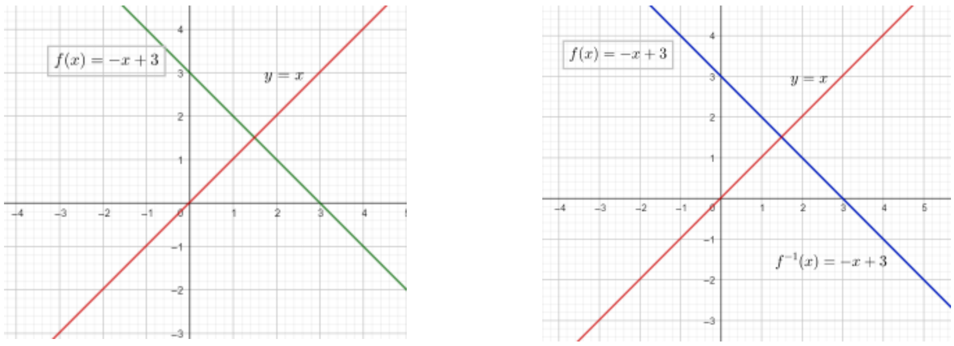


*Figura 10.* Patrón geométrico del Caso 3.

***Estrategia 4****. Impregnar de sentido la dificultad encontrada*

Esta estrategia se presenta con el interés de ayudar al estudiante a la fijación del aprendizaje de este tópico, para lo cual considerando que el tema de las funciones lineales inversas está íntimamente ligado a la fenomenología de la reflexión de la luz y buscando impregnar de sentido la dificultad encontrada, se han establecido similitudes y diferencias entre la estructura gráfica de las ***FLI*** (en el Caso 1 y el Caso 3) y la estructura gráfica correspondiente a este fenómeno de las ciencias físicas. De forma que permita al estudiante familiarizar las estructuras algebraicas y gráficas de las funciones en estudio con situaciones de la vida real para la fijación del conocimiento.

a. Contrastando la estructura gráfica presentada en el Patrón Geométrico del Caso 1 (ver Figura 8) con la estructura gráfica de un rayo de luz incidente en forma oblicua en un determinado plano (ver Figura 11), podemos observar similitudes y diferencias.

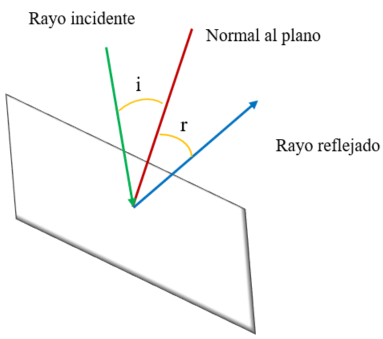


*Figura 11.* Incidencia y reflexión de la luz en una superficie. Fuente: Elaboración propia.

*Similitudes*. De acuerdo a las leyes de la reflexión de la luz al incidir oblicuamente un rayo luminoso sobre una superficie, el rayo incidente, el rayo reflejado y la normal se encuentran en el mismo plano, además el ángulo de incidencia con la normal es igual al ángulo de reflexión. De igual forma en las ***FLI*** el ángulo formado por la función $f(x)$ con la función identidad es igual al ángulo formado por $f^{-1}(x)$ con la función identidad. De esta forma la función $y = x$ en las ***FLI***, ejerce las veces de la normal al plano o superficie en la reflexión de la luz, forma ángulos simétricos entre ambas funciones.

*Diferencias*. Se aprecia que el rayo reflejado en el plano (ver Figura 11) no muestra el mismo sentido que el rayo incidente, mientras que las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$, siguiendo las tablas de valores, muestran el mismo sentido, ambas son rectas que se elevan a la derecha o ambas son rectas que descienden a la derecha.

b. Contrastando la estructura gráfica presentada en el Patrón Geométrico del Caso 3 (ver Figura 10) con la estructura gráfica de un rayo de luz incidente en forma rectilínea en un determinado plano (ver Figura 12), podemos observar similitudes y diferencias.

*Similitudes.* La función $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ utilizan la misma trayectoria de ida y vuelta, son reversibles. De igual forma el rayo incidente y el rayo reflejado utilizan la misma trayectoria de ida y vuelta, dando lugar a la reversibilidad de la trayectoria óptica, el rayo de luz regresa por el mismo camino.

*Diferencias*. Se aprecia que el rayo incidente y el rayo reflejado son paralelos a la normal al plano (ver Figura 12), mientras que las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ ambas son rectas perpendiculares a la función $y = x$ o función identidad.

a. Rayo incidente en una superficie　　b. Rayo reflejado en una superficie


*Figura 12.* Similitudes y diferencias con el Patrón geométrico del Caso 3.
Fuente: Elaboración propia.

## DISCUSIÓN

En este trabajo el objetivo propuesto consistió en identificar dificultades estructurales en estudiantes al verificar propiedades de las funciones lineales inversas mediante estructura de una función lineal algebraica no trabajada en clases. El desarrollo de este objetivo condujo a la generalización de patrones algebraicos y geométricos, que conllevaron a establecer características subyacentes en las funciones lineales inversas y al posterior diseño de una propuesta metodológica para el manejo didáctico de contenidos matemáticos dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las ***FLI***. Con la caracterización algebraica establecida en la Tabla 4 y las características del comportamiento geométrico deducidos de las Figuras 8, 9 y 10, el estudiante podrá identificar a través de la estructura algebraica de cualquier función lineal dada, el tipo de patrón algebraico y geométrico al cual corresponde una determinada función. Este trabajo se propone como estudio de manejo didáctico de contenidos matemáticos para futuros formadores de matemáticas, de forma que les permita aplicar los señalamientos y estrategias propuestos por los investigadores, aquí citados, a la orientación del desarrollo de sentido estructural en sus estudiantes. Por tanto, se ha desarrollado como propuesta de aprendizaje la siguiente metodología:

**Primer señalamiento metodológico**. Considerar las dificultades mostradas por los estudiantes como interrogantes a resolver (Rico, 2003).

**Segundo señalamiento metodológico**. Realizar revisiones de problemas propuestos en libros de texto y páginas web, para innovar la forma en que se presenta el Álgebra (Kieran, 1992).

**Tercer señalamiento metodológico**. Considerar el análisis de estructuras algebraicas para promover el sentido estructural (Vega-Castro, Molina y Castro, 2012). En este señalamiento metodológico se propone:

***Estrategia 1***. *Analizar similitudes y diferencias de ejemplos encontrados en libros de texto y páginas web para la búsqueda de un patrón algebraico que caracterice las estructuras de las expresiones dadas.*

***Estrategia 2***. *Analizar estructuralmente el contenido de los patrones algebraicos obtenidos de forma que permita identificar y describir características del tema en consideración (considerar señalamiento de Castro, Rico y Castro, 1995 y definición propuesta por Radford, 2010).*

***Estrategia 3***. *Establecer características en patrones algebraicos y geométricos.*

***Estrategia 4***. *Impregnar de sentido las dificultades encontradas para la fijación del tema en estudio.*

## CONCLUSIONES

El tópico de las $\boldsymbol{FLI}$ es un tipo de enseñanza que se puede utilizar para que el estudiante fije su aprendizaje mediante la aplicación de relaciones y conexiones entre las características presentadas por estructuras algebraicas dadas, generando y fortaleciendo el reconocimiento de patrones. De esta forma, atendiendo la estructura generalizada $f(x) = mx + b$ conocida en el estudio de las funciones lineales, observamos que los gráficos de las $\boldsymbol{FLI}$ correspondientes a las funciones con estructuras algebraicas $f(x) = x - b$ y $f(x) = b - x$ presentan distinto comportamiento gráfico a las $\boldsymbol{FLI}$ que corresponden a la estructura de la forma $f(x) = mx + b$**.** Analizando los casos presentados, el gráfico del Caso 3 presenta un comportamiento diferente a los estudiados en clases y que el estudio de las $\boldsymbol{FLI}$ puede ser clasificado de acuerdo a una estructura algebraica generalizada tal como se presenta en la Tabla 4 y Figuras 9, 10 y 11.

Al considerar similitudes y diferencias, en la estructura algebraica de la función lineal en estudio, ha conllevado como aporte de investigación, a establecer patrones de estructura algebraica y geométrica subyacentes en las $\boldsymbol{FLI}$. De forma que, dada la clasificación, los estudiantes puedan identificar de acuerdo a la expresión de la función algebraica el tipo de estructura gráfica, sin necesidad de construirla.

En este trabajo se ha indagado en señalamientos y estrategias aportados por diversos investigadores con el interés de desarrollar una propuesta de Sentido Estructural que conlleve a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de estudiantes panameños dados los resultados de PISA/OCDE. Los señalamientos aportados por diversos investigadores condujeron a la realización de un trabajo con estructuras algebraicas que dio lugar a una experiencia de aprendizaje dadas las dificultades en dos estudiantes que presentaron un alto nivel de desempeño y que motivó al desarrollo de un estudio de casos.

Esta propuesta teórica se considera de utilidad como fundamento metodológico en la formación de estudiantes, futuros docentes de matemática, dado que contiene el desarrollo de estrategias modelo para la creación y el reconocimiento de patrones de acuerdo a los aportes de Castro, Rico y Castro (1995), y desarrollo de estrategias modelo para la generalización algebraica de patrones señaladas por Radford (2010). Se plantea como proceso creativo para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas de forma que ayude a fijar la comprensión de los aprendizajes desde el análisis de las estructuras algebraicas de diversas expresiones matemáticas. A su vez puede ser generalizada a otros tópicos de la matemática, así como puede ser aplicada a otras áreas científicas de las Ciencias Básicas.

**Agradecimientos**
Este trabajo está patrocinado por la Dirección I+D de la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) de Panamá, dentro del marco del Proyecto de Investigación Inserción de Talento Especializado, ITE16-R2-029 “Nivel de sentido estructural que manifiestan estudiantes panameños al trabajar con estructuras algebraicas. Diseño de una propuesta para desarrollar en el aula”. El agradecimiento a la Dra. Encarnación Castro de la Universidad de Granada, al Dr. Eduardo Flores-Castro y Profesora Dilcia Arosemena de la Universidad de Panamá y, a los revisores anónimos por los aportes brindados a este trabajo.

## REFERENCIAS

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2016). *Cálculo diferencial e Integral*. (4ª ed.). México: Pearson Education.

Arcavi, A. (2013). Reflexiones sobre el Álgebra Escolar y su Enseñanza. En *Investigación en didáctica de la matemática* (pp. 13-22). El Instituto Weizmann de Ciencias.

Attorps, I., Björk, J., Radic, M. & Viirman, O. (2013). Teaching inverse functions at tertiary level. *CERME 8.*

Bernal, C. (2020). *Propuesta para la innovación del curso de precálculo: Funciones, sus gráficas, dominios y codominios*. [Recursos de enseñanza]. https://core.ac.uk/download/pdf/322383994.pdf

Breen, S., Larson, N., O’Shen, A. & Petterson, K. (2015). Students’ concept images of inverse functions. *CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 2228-2234. Charles University in Prague: Prague

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Una empresa docente. Bogotá, Colombia.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Peñalva, F. J. García y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 -94). Jaén, España: SEIM.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function, in G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, 25* (p. 85-107), United States of America: Mathematical Association of America.

Even, R. (1992). The inverse function: Prospective teachers' use of “undoing”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(4), 557-562.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 305-312. Praga, República Checa: Charles University in Prague.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707- 762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *Suma*, *65*, 7-15.

Mulligan, J., Vale, C. y Stephens, M. (2009). Understanding and developing structure-Its importance for mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 1- 4.

Nolasco, J. (2018). *The struggle with inverse functions doing and undoing process.* Electronic Theses, Projects, and Dissertations. 652. http://scholarworks.lib.csusb.edu/etd/652

Okur, M. (2013). Learning difficulties experienced by students and their misconceptions of the inverse function concept. *Educational Research and Reviews*, *8* (12), 901-910.

Paoletti, T., Stevens, I. E., Hobson, N. L., Moore, K. C., y LaForest, K. R. (2018). Inverse function: Pre-service teachers’ techniques and meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(1), 93-109.

Pestana, D., Rodríguez, J., Romera, E., Tourís, E., Álvarez, V. y Portilla, A. (2007). *Curso práctico de Cálculo y Precálculo* (2ª ed.). Barcelona: Editorial Ariel, S.A.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.) *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35) México: Trillas. https://www.uv.es/Puigl/2013fenomenosyajustes.pdf

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Real Academia Española. (s.f.). *Diccionario de la lengua española*. Madrid, España: Autor.

Rico, L. (2003). Presentación de la edición española. En NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (p.viii). Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Rico-Romero, L. y Lupiánez-Gómez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Socas, M., Hernández, J., Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de matemáticas de estudiantes para profesor de educación primaria y secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. Sánchez, C. Fernández, J. L. Lupiáñez, L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 145-154). Málaga: (SEIEM).

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Swokowski, E. W. y Cole, J. A. (2012). *Algebra y trigonometría con geometría analítica* (13.va ed.). Santa Fe, México: Cengage Learning.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(2), 233-258. https://www.redalyc.org/pdf/335/33523165005.pdf

Vega-Castro, D. (2013). *Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el Sentido Estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas*. Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada. https://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7478/

Vincent, J., Pierce, R. y Bardini C. (2017). Structure Sense: A precursor to Competency in Undergraduate Mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal, 31*(1), 38-47. University of Melbourne. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1153295.pdf

Welder, R. (2006). Prerequisite Knowledge for the Learning of Algebra. En *Proceedings of the 5th Annual Hawaii International Conference on Statistics, Mathematics and Related Fields* (pp. 1642-1667). Honolulu, HI: American Statistical Association.

Wilson, F. C., Adamson, S., Cox, T. & O'Bryan, A. (2011). Inverse functions: What our teachers didn't tell us. *The Mathematics Teacher*, 104 (7), 500-507.

Danellys Vega-Castro
Universidad de Panamá, Panamá
danellys.vega@up.ac.pa

---

[i] Se añade la letra cursiva debido al uso de la bibliografía digitalizada hoy día.

[ii] A los estudiantes se ha asignado el nombre de Tomás y Santiago por confidencialidad.