Meavilla Seguí, V. (2022). Cubos y prismas triangulares para los niños y niñas de preescolar: un material didáctico de Friedrich Fröbel. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 5*(2), 1-14

ISSN: 2603-9982

# CUBOS Y PRISMAS TRIANGULARES PARA LOS NIÑOS Y NIÑAS DE PREESCOLAR: UN MATERIAL DIDÁCTICO DE FRIEDRICH FRÖBEL

Vicente Meavilla Seguí, Catedrático jubilado, España

***Resumen***

*En 1840, el pedagogo alemán Friedrich Fröbel acuñó el término Kindergarten [= Jardín de Infancia] para los centros germanos de formación preescolar. En ellos el profesorado estaba constituido por mujeres y el juego era considerado como un proceso esencial de la educación inicial del niño. Para fomentar la capacidad creadora de los principiantes Fröbel diseñó un material escolar específico. En este artículo, nos ocuparemos de un juego de bloques cúbicos y prismáticos que, a nuestro entender, tiene un notable interés en la formación aritmético-geométrica de los más pequeños e incluso de los que no lo son.*

***Palabras clave***: *Friedrich Fröbel, jardín de infancia, material didáctico, aritmética, geometría*

## Cubes and triangular prisms for preschool children: a teaching material by Friedrich Fröbel

***Abstract***

*In 1840, the German pedagogue Friedrich Fröbel coined the term Kindergarten for German pre-school training centers. In them the teaching staff was made up of women and the game was considered as an essential process of the initial education of the child. To encourage the creative capacity of beginners, Fröbel designed a specific school material. In this article, we will deal with a game of cubic and prismatic blocks that, in our opinion, has a notable interest in the arithmetic-geometric formation of the smallest and even of those that are not.*

***Keywords****: Friedrich Fröbel, Kindergarten, didactic material, arithmetic, geometry*

Recibido: 27/01/2022; Aceptado:17/06/2022

## FRIEDRICH FRÖBEL: APUNTE BIOGRÁFICO

*Figura 1*. Friedrich Fröbel (1782 – 1852)

Friedrich Fröbel nació en Oberweisbach (Alemania) el 21 de abril de 1782. Su padre era el pastor luterano de la villa y su madre murió cuando Federico tenía unos nueve meses.

Resumimos sus datos biográficos más relevantes en el cuadro siguiente:

- **1792 – 1797**. Vive con su tío en la ciudad de Stadt Ilm.
- **1797 – 1799**. Vuelve al hogar paterno.
- **1799 – 1801**. Estudia Matemáticas y Botánica en Jena.
- **1802 – 1805**. Trabaja como agrimensor.
- **1805**. Se instala en Frankfurt para dedicarse a la arquitectura. Sin embargo, contacta con el director de una escuela normal que le convence para que se dedique a la enseñanza.
- **1808 – 1810**. Trabaja con Johann Heinrich Pestalozzi (1746 – 1827) en Yverdon-les-Bains (Suiza).
- **1811 – 1813**. Acaba sus estudios universitarios en la Universidad de Gottingen. En dicha institución se dedica al estudio de diversas lenguas (hebreo, árabe, persa), física, química, mineralogía, historia natural y astronomía.
- **1813 – 1814**. Participa en las campañas contra Napoleón, formando parte del Cuerpo de Lutzow[1].
- **1814 – 1816**. Trabaja como conservador en el Museo de Mineralogía de Berlín.
- **1818**. El 20 de septiembre se casa con Wilhelmine Henriette Hoffmeister (1780 – 1839).
- **1820**. Publica el folleto *A nuestro pueblo alemán* (*An unser deutsches Volk*).
- **1826**. Publica *La educación del hombre* (*Die Menschenerziehung*).
- **1831 – 1837**. Vive en Suiza y funda un centro educativo en Wartensee (Lucerna).

[1] Fuerza armada voluntaria del ejército de Prusia durante las Guerras Napoleónicas.

- **1837**. Regresa a Alemania, se dedica a la educación preescolar y fabrica materiales de juego en Bad Blankenburg. En dicha ciudad funda el Instituto de Actividades para párvulos.
- **1838 – 1840**. Publica la revista *Ein Sonntagsblatt für Gleichgesinnte.*
- **1851**. Se casa con Louise Levin.
- **1852.** Muere en Marienthal el 21 de junio.
(Wiebé, 1896)


*Figura 2*. Medalla de bronce dedicada a Friedrich Fröbel (1927)

## LA QUINTA CAJA DE FRÖBEL

En líneas precedentes ya hemos dicho que, para fomentar la capacidad creadora de los niños, Fröbel diseñó un material escolar lúdico [= dones = regalos = gifts = fröbelgaben] que se describe en el manual *The Kindergarten Guide* (Kraus-Boelté & Kraus, 1877), resultado de veinte años de experiencia en los jardines de infancia de Alemania, Inglaterra y América, publicado por Maria Kraus-Boelté (1836 – 1918) y su esposo John Kraus (Gutiérrez Zuluaga, 1970) [2].

[2] Fröbel describió el uso de algunos de sus regalos en su revista *Ein Sonntagsblatt für Gleichgesinnte* (1838 – 1840) que no hemos podido consultar.


*Figura 3*. John Krauss y Maria Kraus-Boelté

Entre dichos «regalos» hemos seleccionado, por su interés didáctico, la caja de construcción nº 5 en la que se incluye un cubo 3 × 3 × 3, formado por veintiún cubos unitarios, seis prismas triangulares grandes (mitades de cubos unitarios) y doce prismas triangulares pequeños (cuartas partes de cubos unitarios). En total, treinta y nueve piezas[3].

[3] Además de esta caja, Fröbel incluye entre su material didáctico tres cubos como los que se detallan en las figuras siguientes:

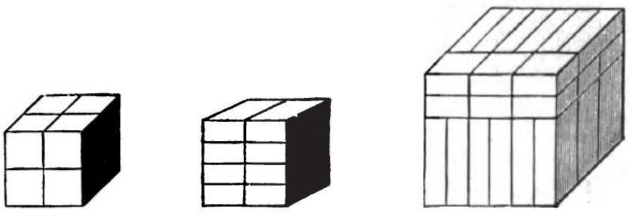


*Figura 4*. La caja de construcción nº 5

**La quinta caja de Fröbel y algunas cuestiones elementales sobre fracciones**

[1] Por manipulación de las piezas intervinientes los niños pueden descubrir fácilmente que con dos prismas grandes se construye un cubo unitario y que con cuatro prismas pequeños también.

En otras palabras: un cubo unitario es el doble de un prisma grande (un prisma grande es la mitad de un cubo unitario), un cubo unitario es cuádruplo de un prisma pequeño (un prisma pequeño es la cuarta parte de un cubo unitario). Así las cosas, las piezas de este fröbelgaben permiten introducir en los niños la idea de unidad, mitad (doble) y cuarta parte (cuádruplo).

Por consiguiente, si cada cubo unitario se designa por 1, entonces cada uno de los seis prismas triangulares grandes se designará por 1/2 y cada uno de los doce prismas triangulares pequeños por 1/4.

Luego, comparando los tamaños de los antedichos cuerpos geométricos, resulta claro que:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$$

Tampoco es difícil comprobar los resultados siguientes:

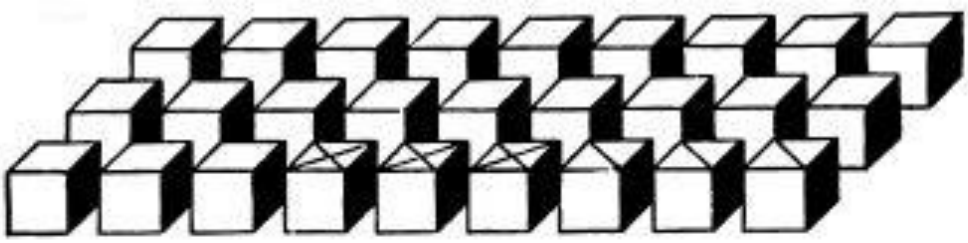
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

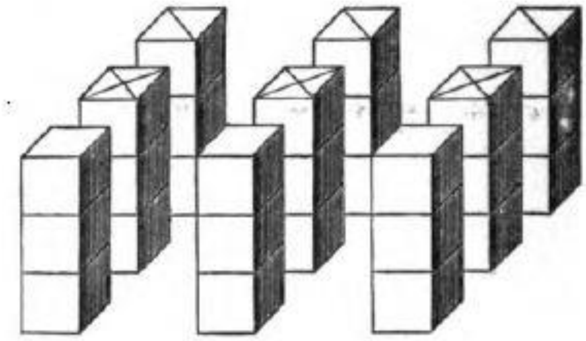
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

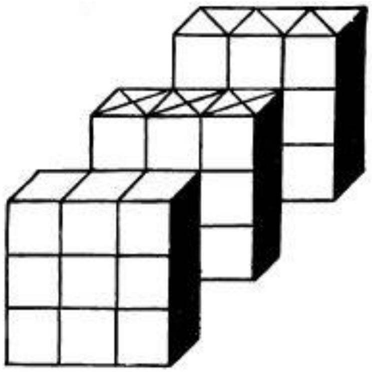
[2] Por otro lado, cada cubo unitario es 1/27 del cubo completo.



Cada una de las columnas de la figura adjunta representa 1/9 del cubo original.



Cada una de las tres capas siguientes representa 1/3 del cubo 3 × 3 × 3.



Por simple inspección se observa que 1/3 es triple de 1/9, y que 1/9 es triple de 1/27. Por tanto, con las piezas de la caja nº 5 se pueden introducir los conceptos de triple y tercera parte.

Además, a partir de los diagramas anteriores se puede establecer la siguiente ordenación de fracciones:

$$\frac{1}{27} < \frac{1}{9} < \frac{1}{3}$$

También es fácil descubrir que:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{3}{27}$$

Por otro lado, no reviste dificultad alguna «efectuar» las adiciones y sustracciones siguientes:

$$\frac{3}{27}+\frac{2}{9}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{9}=\frac{3}{9}+\frac{5}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\frac{9}{27}-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

Con lo visto hasta aquí, podemos afirmar que con el material didáctico que estamos analizando se pueden introducir en los niños conceptos tales como doble, mitad, triple, tercera parte, cuádruplo y cuarta parte; también se pueden trabajar con él las ordenaciones, equivalencia y operaciones elementales (adición y sustracción) de fracciones (Meavilla Seguí, 2008).

## La quinta caja de Fröbel y algunas cuestiones elementales sobre Geometría


*Figura 5*. La caja de construcción nº 5

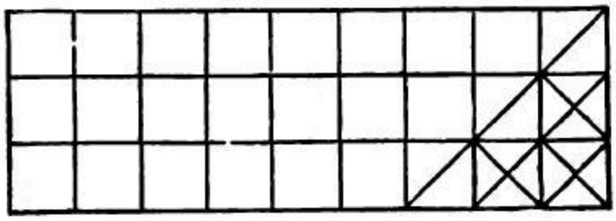
[a] Con los tres tipos de piezas de la caja, los niños y niñas de preescolar pueden iniciar un paseo por el mundo de las figuras y cuerpos geométricos.

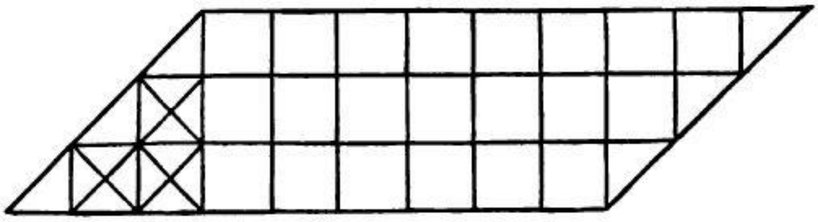
Así, en el mundo 2D, los más pequeños tomarán contacto con las figuras triangulares, rectangulares y cuadradas y con sus elementos básicos (lados. vértices, ángulos).

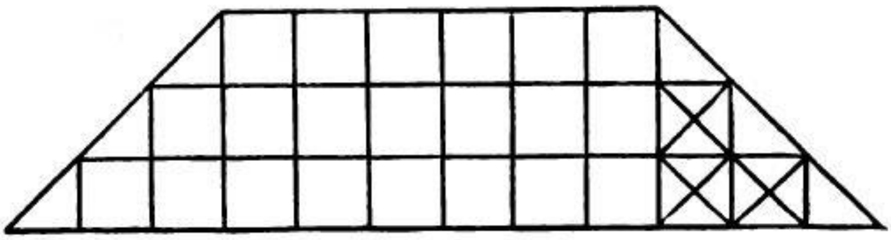
Al mismo tiempo, en el universo 3D, los aprendices convivirán con un par de cuerpos geométricos, los cubos y los prismas triangulares, y con sus elementos constituyentes (caras, vértices y aristas).

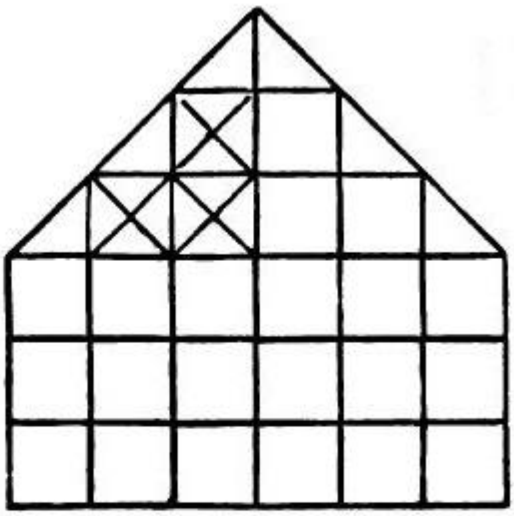
[b] Acoplando de forma conveniente las piezas del material en estudio, los «usuarios» del Jardín de Infancia pueden materializar diversas estructuras que les pueden familiarizar con algunos polígonos.

Por ejemplo, las siguientes construcciones con todas las piezas del puzle, permiten visualizar tres cuadriláteros (rectángulo, romboide y trapecio isósceles) y un pentágono.

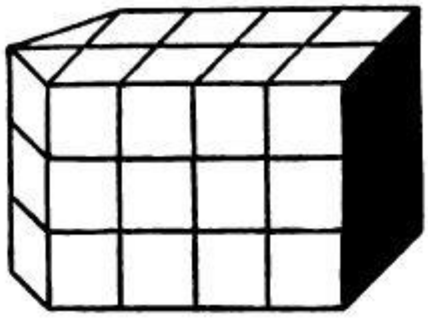


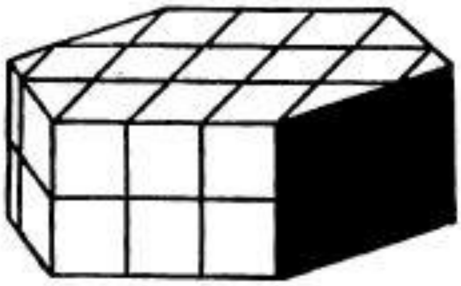


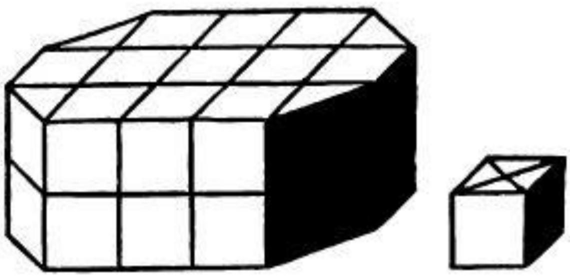




[c] También se pueden construir bloques con más de un piso, algunas de cuyas caras son pentágonos, hexágonos y octógonos.



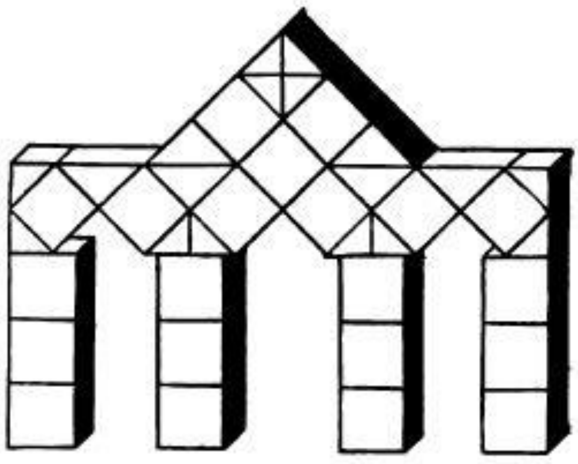


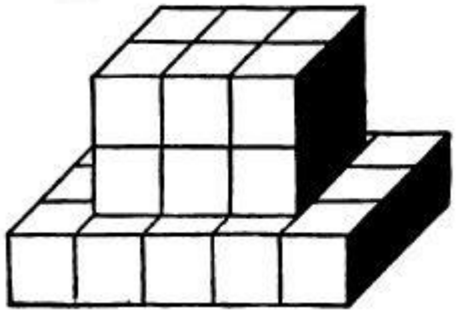


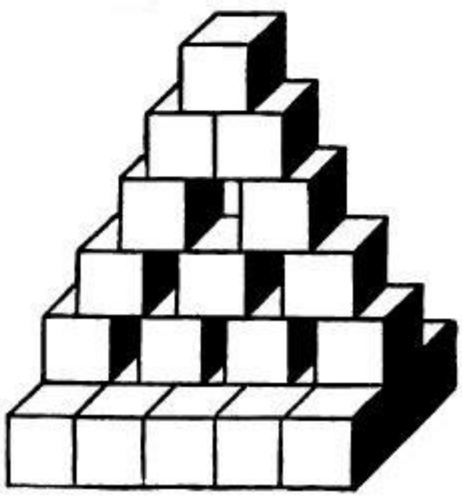
**La creatividad al poder**

Además de sus aplicaciones a la enseñanza de la Aritmética y la Geometría la caja nº 5 de Fröebel se puede usar para crear (reproducir) objetos tridimensionales.

Ofrecemos algunos ejemplos construidos con todas las piezas del puzle.







**GEOMETRÍA PARA ALUMNOS MÁS AVANZADOS**

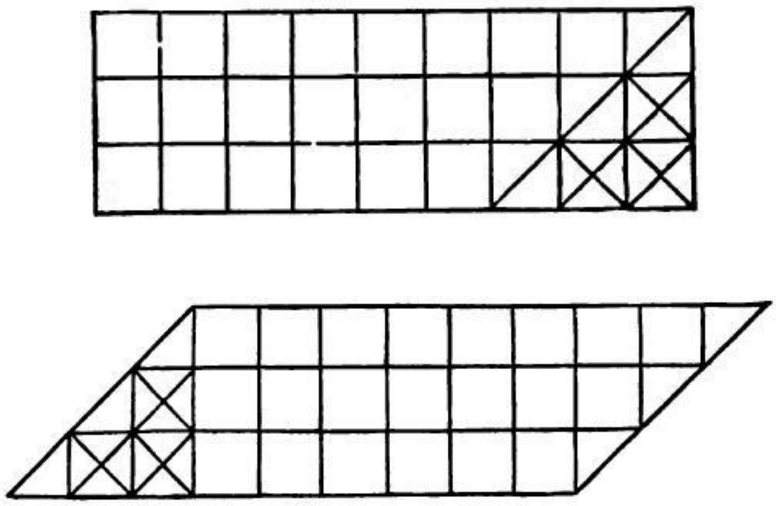
Para los alumnos de cursos más avanzados, el material de Fröbel puede ser útil para introducir, afianzar o demostrar algunos asuntos de carácter geométrico (Meavilla Seguí, 2008).

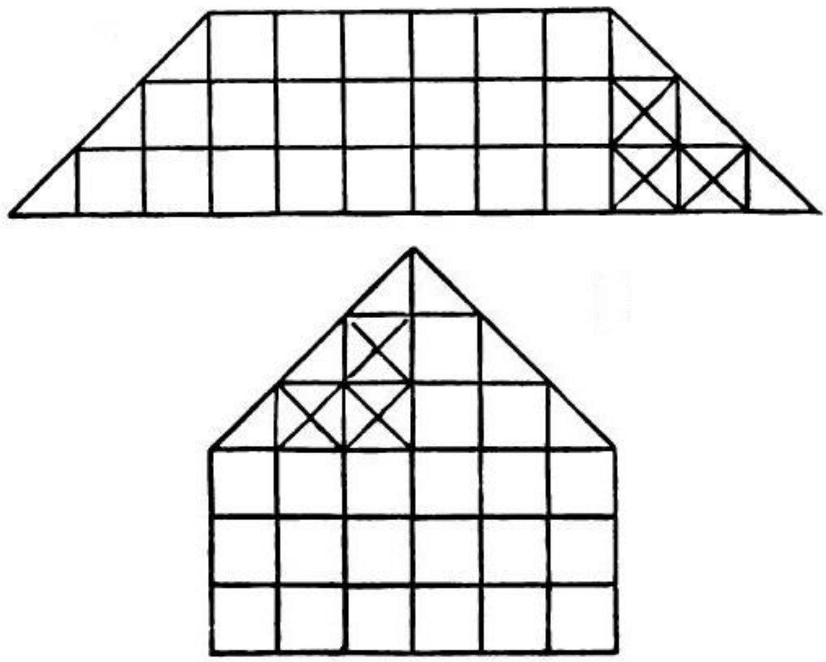
[α] EQUIVALENCIA Y EQUICOMPOSICIÓN DE FIGURAS

Dos figuras se llaman equicompuestas si dividiendo una de ellas en un número finito de partes, se puede (disponiendo dichas partes de otra manera) componer con ellas una segunda figura.

Por otro lado, dos figuras se dicen equivalentes si tienen la misma área.

Así, por ejemplo, los «polígonos» de la figura siguiente, construidos con las treinta y nueve piezas de la caja nº 5 de Fröbel, son equicompuestos.

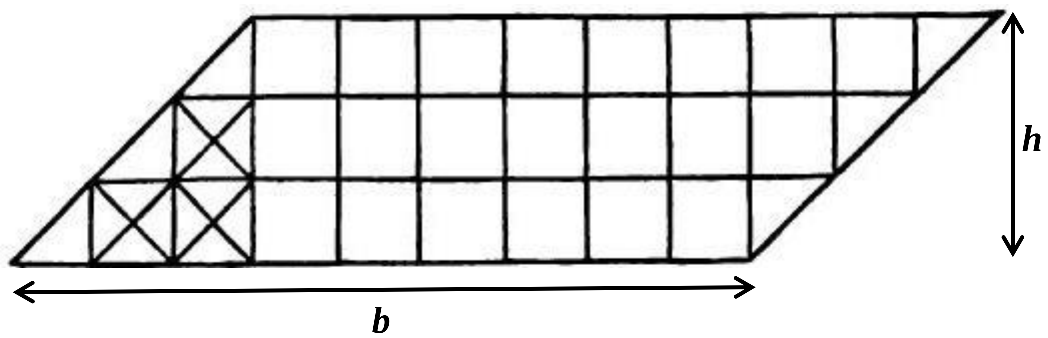




Además, es claro que todos ellos tienen la misma área. Por consiguiente, son equivalentes.

Por tanto, mediante la consideración de estos cuatro ejemplos se intuye el teorema siguiente: Dos polígonos equicompuestos cualesquiera son equivalentes[4].

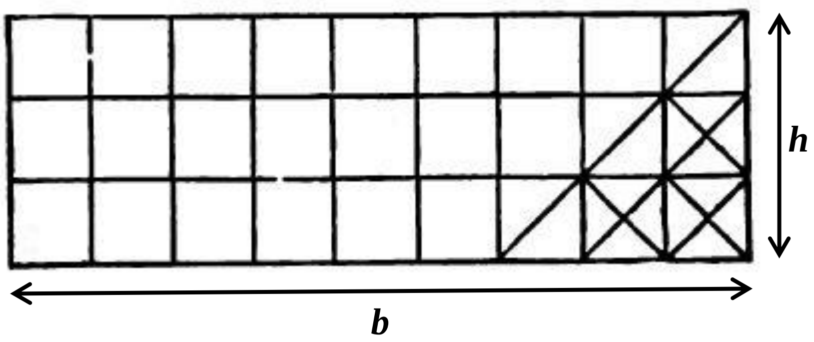
[β] ÁREA DE UN ROMBOIDE




En la figura anterior se representa un «romboide» construido con todas las piezas del rompecabezas de Fröbel. La longitud de su base es *b* y la de su altura es *h*.

Cambiando la posición del triángulo rectángulo isósceles (formado por doce prismas pequeños y tres grandes) se obtiene el «rectángulo» del diagrama adjunto.

[4] El teorema recíproco, conocido como teorema de Bolyai-Gerwien, dice así: *Dos polígonos equivalentes son equicompuestos* (Boltianski, 1981).

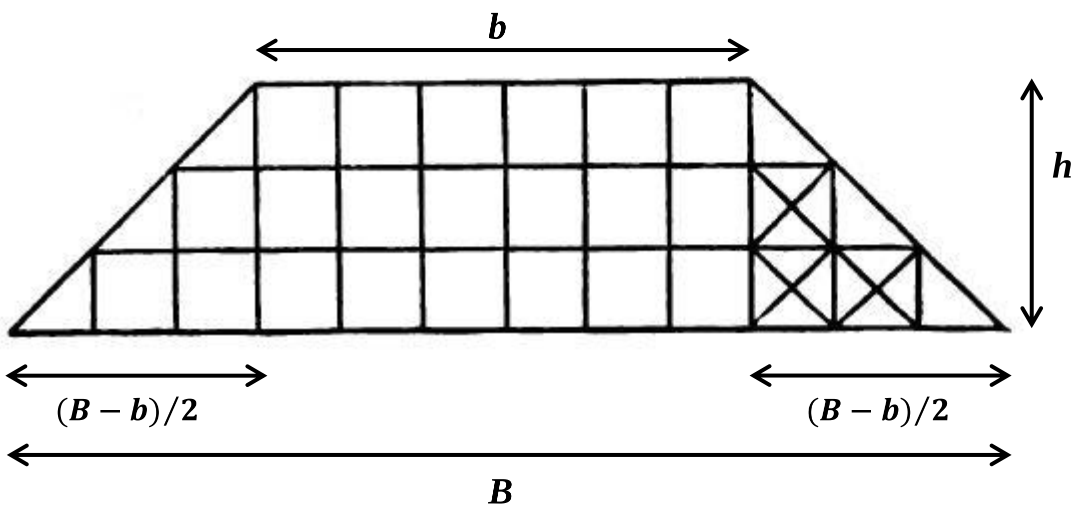



Teniendo en cuenta que los dos cuadriláteros son equivalentes y que el área del rectángulo es igual a $b \times h$, resulta que el área del romboide también es igual a $b \times h$.

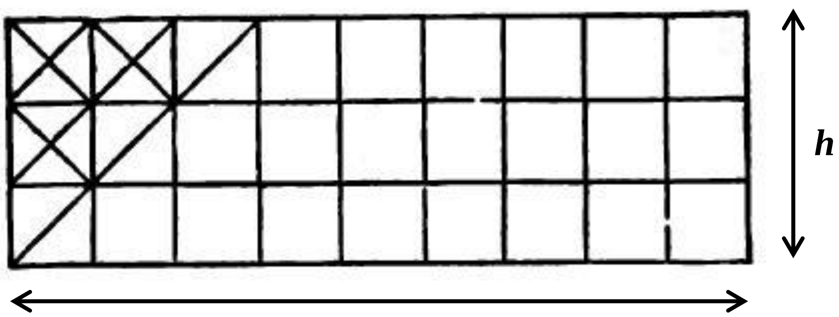
[γ] ÁREA DE UN TRAPECIO ISÓSCELES

En la figura siguiente se representa un «trapecio» isósceles construido con todas las piezas del puzle de Fröbel.

La longitud de su base mayor es *B*, la de su base menor es *b* y la de su altura *h*.




Cambiando la posición del triángulo rectángulo isósceles (formado por doce prismas pequeños y tres grandes) se obtiene el «rectángulo» del diagrama adjunto.




$$\boldsymbol{B - \frac{B-b}{2} = \frac{2B - B + b}{2} = \frac{B+b}{2}}$$

Teniendo en cuenta que los dos cuadriláteros son equivalentes y que el área del rectángulo es igual a:

$$\left(\frac{B+b}{2}\right) \times h,$$

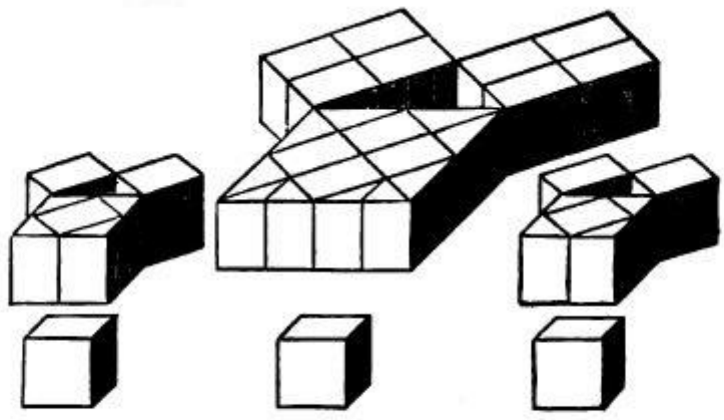
es claro que el área del trapecio ($A$) también es igual a:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}\right) \times \boldsymbol{h}$$

[δ] EL TEOREMA DE PITÁGORAS

El famoso y popular Teorema de Pitágoras [= «teorema de la mujer casada» = «pons asinorum» = «la silla de la novia» = «teorema del cuadrado sobre la hipotenusa»] también se puede visualizar, para algunos casos concretos, con las piezas de nuestro rompecabezas.

Así, en el dibujo adjunto, se prueba el antedicho teorema para los triángulos rectángulos isósceles $(1, 1, \sqrt{2})$ y $(2, 2, 2\sqrt{2})$.



**REFLEXIONES FINALES**

En las secciones precedentes hemos estudiado, desde una óptica matemática, las posibilidades didácticas de un rompecabezas de treinta y nueve piezas diseñado en el siglo XIX por el pedagogo alemán Friedrich Fröbel y dirigido a los niños y niñas del *Kindergarten*.

Sin pretender agotar todo el potencial educativo de dicho material y ampliando el grupo de sus posibles destinatarios, hemos ofrecido el siguiente catálogo de conceptos y procedimientos aritmético-geométricos que se pueden trabajar con el *Fröbelpuzle*:

- Unidad, doble, mitad, triple, tercera parte, cuádruplo y cuarta parte.
- Ordenación de fracciones.
- Fracciones equivalentes.
- Adición y sustracción de fracciones.
- Figuras geométricas (rectángulo, romboide, trapecio isósceles, pentágono, hexágono y octógono).
- Cuerpos geométricos (cubos y prismas triangulares).
- Equivalencia y equicomposición de figuras.
- Área de un romboide.
- Área de un trapecio isósceles.

- Teorema de Pitágoras.

Dejamos que nuestros colegas, los profesores de Matemáticas, profundicen en el estudio de dicho material didáctico y hagan partícipes a sus alumnos del placer de trabajar e investigar con él.

## REFERENCIAS

Boltianski, V.G. (1981). *Figuras equivalentes y equicompuestas*. Editorial MIR.

Gutiérrez Zuluaga, I. (1970). *Historia de la Educación (Tercera edición)*. ITER Ediciones.

Kraus-Boelté, M. & Kraus, J. (1877). *The Kindergarten Guide (First Volume: The Gifts)*. E. Steiger & Co.

Meavilla Seguí, V. (2008). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales (Segunda edición)*. Prensas Universitarias de Zaragoza.

Wiebé, E. (1896). *Paradise of Childhood.* Milton Bradley

Vicente Meavilla Seguí
Catedrático jubilado, España
vmeavill@hotmail.com