11

La evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos en los libros de texto sobre trigonometría publicados en España

The evolution of methods for solving oblique triangles in the textbooks on trigonometry published in Spain

Carmen León-Mantero,[1] María José Madrid[2]
y Alexander Maz-Machado[1]
[1]Universidad de Córdoba, [2]Universidad Pontificia de Salamanca

Resumen
Presentamos un estudio sobre la evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos descritos en los libros de textos de trigonometría publicados en España durante diferentes épocas. Se trata de una investigación descriptiva y exploratoria, que se enmarca en el enfoque de tipo histórico y que usa el método del análisis de contenido para el estudio de los datos. Entre los autores de los libros de texto analizados encontramos al Padre Zaragoza, Tomás Vicente Tosca, Benito Bails, Vicente Tofiño, José Mariano Vallejo, Silvestre Lacroix o Juan Cortázar, entre otros. Los resultados han identificado los dos métodos incluidos en textos españoles para la resolución de los triángulos oblicuángulos, estos métodos fueron utilizados en dos periodos diferenciados marcados por la publicación de las traducciones de los libros de texto de Silvestre Lacroix, que supusieron la introducción en España del teorema del coseno.

Palabras clave: trigonometría, resolución de triángulos oblicuángulos, libros de texto, historia de la educación matemática, teorema del coseno

Abstract
We present a research on the evolution of methods for solving oblique triangles included in Trigonometry textbooks published in Spain during different periods. This is a descriptive and exploratory research, which is focused in the historical approach and uses the content analysis method to study the data.

Among the authors of the textbooks analysed are José Zaragoza, Tomás Vicente Tosca, Benito Bails, Vicente Tofiño, José Mariano Vallejo, Silvestre Lacroix and Juan Cortázar. The results identified two resolution methods included in Spanish books for solving oblique triangles. These methods were used in two different periods separated by the publication of the translations of Silvestre Lacroix's textbooks, which meant the introduction of the law of cosines in Spain.

Keywords: trigonometry, solution of oblique triangles, textbooks, history of mathematics education, law of cosines

1. Introducción

Las investigaciones en historia de las matemáticas y educación matemática se encargan de descubrir y comprender de qué forma los avances matemáticos en cada época han sido incorporados a la enseñanza de la disciplina, y cómo el contexto que rodea a estos avances ha ejercido influencia en la forma de presentarlos a través del sistema educativo en vigor (Karp, 2014).

En concreto, aquellas investigaciones que tienen a los libros de texto históricos como fuentes documentales, buscan entre otras cuestiones conocer el tratamiento dado a los contenidos, los principios y estrategias didácticas presentes en ellos, etc., ya que estos libros han sido hasta hace poco la vía principal de divulgación y la fuente de información más importante tanto para profesores como para alumnos (Gómez, 2011). Por ese motivo su análisis nos permite vislumbrar la evolución histórica de conceptos y contenidos matemáticos a lo largo de la historia y la influencia que ha ejercido el contexto histórico, social y cultural (Maz-Machado y Rico, 2015).

Entre las numerosas investigaciones que centran su atención en el análisis de libros de texto históricos se incluyen la realizada por Christianidisa y Megremi (2019), que demostraron la influencia de la *Arithmetica* de Diofanto en diferentes textos hasta principios de la Edad Media. También d'Enfert y Búrigo (2019) indagan en los contenidos de matemáticas que se abordaban en las escuelas primarias normales de Francia en la década de 1830.

Las investigaciones realizadas a nivel nacional se engloban principalmente en dos líneas: por un lado, la identificación de las bases del currículo actual y, por otro, el estudio del origen de los problemas que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así, podemos encontrar trabajos como el de Puig (1994) que analizó una parte del libro de Jordanus Nemorarius *De Numeris Datis* centrándose en su sistema matemático de signos; Picado *et al*. (2013) analizaron un libro de texto de matemáticas utilizado para la enseñanza de la aritmética y el sistema métrico decimal en Canarias en el siglo XIX; Sierra *et al*. (2002) estudiaron el desarrollo histórico del concepto de *continuidad* en distintos manuales escolares españoles. También Gómez (2018) estudia los problemas verbales descriptivos a través del análisis didáctico en libros de texto y manuales escolares; Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2020) analizan los prólogos de las obras que incluyen álgebra escritas en español y publicadas durante el siglo XVI; o el trabajo de León-Mantero *et al*. (2021) en el que se analiza el *Tratado de Álgebra elemental* de Juan Cortázar, uno de los libros de texto que fueron elegidos para formar parte de las listas oficiales para la enseñanza secundaria desde mediados del siglo XIX.

La trigonometría aporta un importante conjunto de herramientas que permiten resolver problemas geométricos que surgen en numerosas situaciones reales. Su inclusión en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato responde, por un lado, a su importancia en el estudio de las matemáticas avanzadas y, por otro, a sus importantes aplicaciones en campos científicos y tecnológicos. Sin embargo, el estudio de la trigonometría, al igual que las demás ramas de las matemáticas, suele provocar dificultades entre los estudiantes de Secundaria y Bachillerato, debido a que requiere de altos niveles de abstracción y pensamiento matemático avanzado (Dündar, 2015; Gur, 2009).

El objetivo del presente trabajo es analizar la evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos y cómo se realizó su incorporación al sistema educativo a través de los libros de texto sobre trigonometría que han sido publicados en España. En primer lugar, centraremos nuestra atención en los primeros libros de texto que incluyeron estos métodos y en el enfoque geométrico que los impregnaba, para después ser testigos con el paso de los años del proceso de algebrización que produjo la introducción del teorema del coseno como principal herramienta de resolución.

Este trabajo pretende contribuir a la formación inicial o permanente de los profesores de matemáticas, ya que, por un lado, investigaciones como esta hacen posible que las Matemáticas se reconozcan como una actividad humana, lo que permite ver las diferentes facetas de los conceptos y teorías matemáticas y sacar a la luz los obstáculos que surgen en el estudio de las Matemáticas (Furinghetti, 2012), entre ellos, los obstáculos a los que se suelen enfrentarse sus alumnos cuando se aborda en el aula la resolución de triángulos oblicuángulos. Por otro, tal y como indica Schubring (2006), conocer los problemas surgidos en el desarrollo y en la enseñanza de la materia que imparten y cómo algunos han sido ya resueltos, les capacita para enfrentarse a las dificultades que surgen en el ejercicio diario de su actividad.

2. Contexto histórico

Boyer (1968) señala que, a pesar de que los primeros acercamientos a la resolución de triángulos a través de resultados trigonométricos se remontan a las civilizaciones antiguas de Egipto y Babilonia, fue en realidad el interés surgido en Grecia por resolver problemas de astronomía, geografía, óptica y mecánica lo que fomentó su desarrollo, siendo el *Almagesto* de Ptolomeo la obra más importante en lo que respecta a la génesis de esta rama de las matemáticas.

A su vez, en las proposiciones 12 y 13 del Libro II de *Los Elementos de Euclides* ya podemos encontrar un principio emergente del teorema del coseno para los triángulos obtusángulos y acutángulos, respectivamente, que, como hacemos en la actualidad, eran demostrados mediante una doble aplicación del teorema de Pitágoras:

> Proposición 12
>
> En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que forman el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpen-

dicular hacia el exterior desde el ángulo obtuso. (Boyer, 1986, p. 155)

Posteriormente, con claras influencias de los conocimientos alcanzados en Grecia, los estudios realizados por los astrónomos hindúes aportaron grandes avances, como, por ejemplo, la introducción de la función seno de un ángulo. Los árabes recogieron los avances griegos e hindúes y adoptaron tanto la geometría del *Almagesto* como las tablas hindúes de senos; sin embargo, la mayoría de los resultados trigonométricos desarrollados por estos están construidos sobre la base de la función seno. Fueron estos últimos los que hicieron llegar esta trigonometría a Europa y sus avances durante la Edad Media nos dieron la formulación que conocemos ahora (Boyer, 1986).

En el siglo XV el matemático Johann Müller, más conocido como Regiomontano o Joannis Regio Monte escribió *De Triangulis Omnimodis* un tratado que incluye los métodos para resolver triángulos con nociones derivadas del trabajo de Euclides, la demostración del teorema del seno (la ley de los senos) (figura 1) y problemas para determinar lados, ángulos y áreas de triángulos bajo unas determinadas condiciones. También incluye resultados sobre trigonometría esférica.

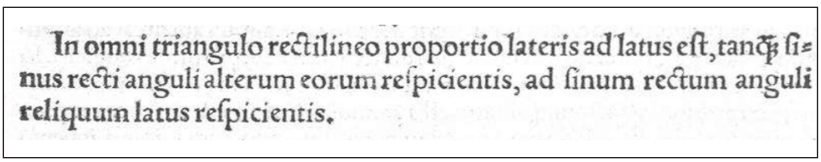
In omni triangulo rectilineo proportio lateris ad latus eſt, tanq̃ ſi=
nus recti anguli alterum eorum reſpicientis, ad ſinum rectum anguli
reliquum latus reſpicientis.

Figura 1. Ley de los senos en *De Triangulis Omnimodis* (Regio Monte, 1533, p. 46).

Pero fue realmente el francés François Viète el que aportó un enfoque analítico generalizado a la trigonometría partiendo de la herencia recibida de sus predecesores. En su obra, *Canon mathematicus seu ad triangula: cum appendicibus* (1579) elaboró tablas para las seis funciones trigonométricas (aunque no usó los mismos nombres que usamos en la actualidad, excepto para la función seno). En esta obra también podemos encontrar el teorema del coseno (ley de los cosenos) con una formulación similar a la que se suele usar en la actualidad (figura 2):

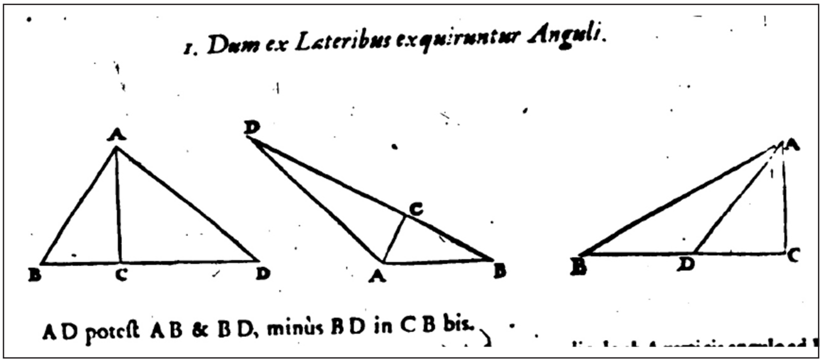

Figura 2. Ley de los cosenos en *Canon mathematicus seu ad triangula: cum appendicibus* (Viète, 1579, p. 14).

Viète introdujo también en un trabajo posterior titulado *Variorum de Rebus Mathematicis* (1593) una expresión equivalente al teorema de la tangente, y aunque probablemente fue el primero en usar este resultado en sus trabajos, no fue el primero en publicarlo, ya que el profesor de matemáticas alemán, Thomae Finkii lo incluyó en su obra *Geometriae Rotundi Libri XIV* (1583) (figura 3).

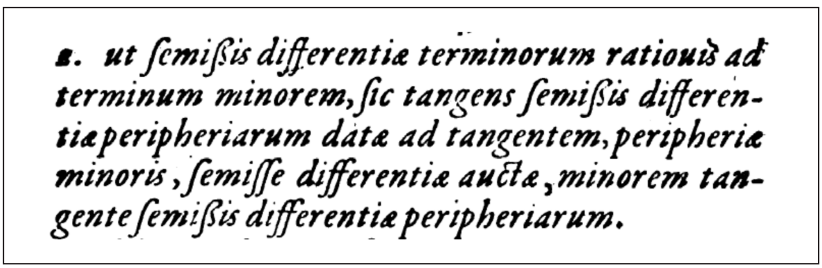
ut ſemiſsis differentiæ terminorum rationis ad terminum minorem, ſic tangens ſemiſsis differentiæ peripheriarum datæ ad tangentem, peripheriæ minoris, ſemiſſe differentiæ auctæ, minorem tangente ſemiſsis differentiæ peripheriarum.

Figura 3. Teorema de la tangente en *Geometriae Rotundi Libri XIV* (Frinkii, 1583, p. 282).

Tal y como señala Dorce (2017), la transferencia de conocimientos científicos entre España y el resto de Europa durante la segunda parte del siglo XVI estuvo limitada, debido a las políticas de Felipe II. Esto provocó que el nivel de las matemáticas no fuera demasiado elevado a pesar de que se promoviera la creación de instituciones como la Academia Real de Matemáticas que trataron de formar a expertos matemáticos necesarios para servir a la corona.

En ese contexto, los primeros libros impresos en castellano que incluyen contenidos geométricos son abordados de forma breve, y centrando su atención en cálculos de perímetros y áreas de figuras planas. No es hasta 1572 que podemos encontrar el *Tratado de Geometría Practica, y Speculativa* de Pérez de Moya que sigue los contenidos del *General trattato di numeri et mesure*, publicado por Tartaglia entre 1556 y 1560. En este se incluye una tabla para la función seno y trata sobre esta razón trigonométrica, aunque recomienda las lecturas de Ptolomeo y Copérnico para quien desee conocer su utilidad.

A principios del siglo XVII dos instituciones educativas lideraban el desarrollo de las matemáticas en España, el Colegio Imperial de Madrid, más tarde Reales Estudios de San Isidro, y la Universidad de Valencia. La primera, a cargo de la Compañía de Jesús de Madrid apostó por profesores extranjeros para mejorar la situación de la ciencia española, estos escribieron obras de geometría, óptica, fortificación y cosmografía. En la segunda destacó la figura del padre José Zaragozá y Vilanova, quien publicó numerosas obras con claras evidencias de interés por la didáctica de las matemáticas. Entre ellas destaca su *Tratado de Trigonometria española: resolución de los triangulos planos y esféricos, fabrica y uso de los senos y los logaritmos* publicado en 1672.

Durante el siglo XVIII se crearon numerosos centros cuyo propósito era el cultivo de las ciencias y las técnicas, apoyados por las políticas ilustradas de los reyes Felipe V y Fernando VI. Asimismo, las instituciones educativas religiosas se unieron a ese objetivo e incorporaron física, matemáticas y construcción a las enseñanzas en sus colegios (Garma, 1988). Con la expulsión de los jesuitas en 1767 aparecieron también instituciones civiles o militares en las que se enseñaban matemáticas, con lo que se necesitaron profesores laicos con conocimientos matemáticos, que sustituyeran a los religiosos. Se hizo necesario, pues, recopilar libros de texto extranjeros y escribir grandes tratados sobre geometría elemental y práctica, trigonometría rectilínea y esférica o cartografía, destinados a instruir a militares, marinos e ingenieros en estas instituciones (Gómez, 2011).

Es a principios del siglo XIX cuando una serie de reformas educativas crean la etapa de la segunda enseñanza que permitió, por un lado, mejorar el nivel educativo de la nación, y preparar para los estudios universitarios, por otro. A través de esta, se logra una mayor difusión de los saberes científicos, con la introducción de asignaturas de contenido exclusivamente matemático, en las que se estudiaba aritmética, álgebra, geometría y trigonometría a través de reediciones de libros de texto de autores como Lacroix, Vallejo, Lista, Odriozola o Juan Cortázar, entre otros (Vea, 1995).

3. Metodología

Este trabajo presenta la evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos en los libros de texto dedicados a la enseñanza de la trigonometría escritos en castellano y publicados en España. Se enmarca en el enfoque de investigación de tipo histórico y en el que usamos el análisis de contenido para examinar los datos. Esta técnica ha sido ampliamente utilizada en investigaciones anteriores (León-Mantero *et al.*, 2021; Madrid *et al.*, 2020).

La búsqueda de los libros de texto se realizó en: el Fondo Histórico de la Universidad de Córdoba y Sevilla, la Biblioteca Virtual Cervantes, la Biblioteca Virtual Andalucía, la Biblioteca Digital Hispánica de la Biblioteca Nacional de España, y en el repositorio digital de Google Books. En total se localizaron más de treinta obras, algunas de las cuales tuvieron que ser descartadas, porque o bien no fueron publicadas, o no se conserva ningún ejemplar, o hasta el momento, no han sido localizadas y no hemos podido acceder a ellas.

El listado completo de los libros analizados incluye *Trigonometría española, resolucion de los triangulos planos, y esfericos* del Padre Zaragoza (1672), *Architectura civil recta y obliqua* de Juan Caramuel (1678), *Architecto perfecto en el arte Militar* de Sebastián Fernández de Medrano (1700), *Elementos Mathematicos* del Padre Pedro de Ulloa (1706), *Compendio Mathematico* (tomo III) de Tomás Vicente Tosca (1727), *Tratado de Trigonometría plana general* de Juan Sánchez Reciente (1742), *Elementos de Mathematicas* (Tomo III) del Padre Wendlingen (1755), *Prácticas de geometría y trigonometría* de Pedro Giannini (1784), *Tratado de la Trigonometria plana y esferica* de Antonio Gabriel Fernández (1788), *Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando* (Segunda edición) de Benito Bails (1788), *Compendio de la Geometría elemental y Trigonometría* de Vicente Tofiño (1794), *Compendio de matemáticas puras y mixtas para instruccion de juventud* (tomo I) de Francisco Verdejo González (1794), *Curso de matematicas* de Tadeo Lope y Aguilar (1795), *Tratado elemental de Matemáticas* (volumen III) de José Mariano Vallejo (1812), *Curso de estudios elementales de la marina* (tomo II) de Gabriel Ciscar (1816), *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y esférica* de Silvestre Lacroix (1820), *Curso completo de matematicas puras* de José de García Odriozola (1827) y *Tratado de trigonometría rectilínea y esférica* de Juan Cortázar (1848).

Para su análisis, seguimos las recomendaciones incluidas en Maz (2009), es decir, se definieron como unidades de análisis los enunciados y posteriores resoluciones de todos los ejercicios y problemas sobre triángulos oblicuángulos presentes en los libros de texto, se leyeron, se categorizaron y se procedió a su análisis cuyos resultados recogemos a continuación.

4. Resultados

Antes de describir los resultados hallados, advertimos que la grafía, acentuación y puntuación de los ejemplos incluidos a continuación han sido respetadas de la fuente original. Asimismo, debido a que las fechas de publicación entre los textos varían en más de cien años, podemos encontrar términos, como, por ejemplo, *triángulo*, escritos en algunas ocasiones sin tilde y en otras con tilde.

El análisis de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos en los libros de texto consultados nos permitió dividir en dos periodos bien diferenciados cómo fue su incorporación a la enseñanza de la trigonometría a lo largo de los años. El punto de inflexión lo encontramos en la publicación en España de la versión traducida por Josef Rebollo y Morales del *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y esférica* de Silvestre Lacroix en 1807 y en la inclusión del teorema del coseno como resultado principal del método de resolución. Hablamos así de un primer periodo basado en una concepción geométrica de los resultados trigonométricos y un segundo periodo que en el que las relaciones trigonométricas trascienden a un plano algebraico y analítico tal y como procedemos en la actualidad. Veamos detenidamente las características de los métodos en ambos periodos.

4.1. Periodo 1, hasta 1807: enfoque geométrico

Todos los autores consultados dan definiciones similares de *trigonometría rectilínea*, *plana* o *llana*, como la «Ciencia que enseña á resolver los triangulos rectilíneos» (Tofiño, 1794, p. 115). «Enseña, pues, [...] como se responde en todos los casos posibles esta pregunta: Dadas tres de las seis cosas que en un triángulo rectilineo se consideran (los tres ángulos y los tres lados), hallar el valor de las otras tres» (Bails, 1788, p. 321). Esta rama se divide en Rectangula y Obliquangula. «La Rectangula trata de los triangulos rectangulos rectilineos; y la Obliquangula de los triangulos obliquangulos» (Fernández, 1788, p. 21). En este trabajo centramos nuestra atención en la resolución de triángulos oblicuángulos, a saber, «todo aquel que no tiene ningún ángulo recto» (Bails, 1788, p. 336).

> *En qualquier Triangulo lo 1.° ſon proporcionales los lados à los Senos de los Angulos, que les eſtàn opueſtos. Lo 2.° la Summa de dos lados es à la diferencia de ellos como la Tangente de la Ss. de los Angulos opueſtos à la Tangente de la Sd. de los miſmos. Lo 3.° el lado Maximo es à el aggregado de los otros dos, como la Diferencia de eſtos à la Diferencia de los Segmentos que haze en el lado Maximo la Perpendicular que cae ſobre èl deſde el angulo opueſto.*

Figura 4. Proposición Universal (De Ulloa, 1755, p. 276).

Con respecto a las proposiciones teóricas que sirven como base para la posterior resolución de los ejercicios propuestos, destaca que, a excepción del texto de Fernández de Medrano (1700), los libros de este periodo contienen los mismos resultados matemáticos con relación a los triángulos oblicuángulos. El Padre Pedro de Ulloa (1755) los resume en lo que llama *Proposición Universal* (figura 4), ya que, al ser válido para cualquier tipo de triángulo rectilíneo, también es aplicable para triángulos rectángulos. El lado mayor del triángulo suele ser llamado *lado Maximo*, *base* o *basa*.

En palabras de Tofiño (1794), esta proposición se desglosa en tres teoremas:

> Teorema I. En qualquier Triangulo rectilineo ABC, los lados AB, BC, son proporcionales con los Senos de los Angulos opuestos C y A. (Tofiño, 1794, p. 126)

> Teorema II. En todo triangulo rectilineo ABC, la suma de dos lados AB, BC, á su diferencia, tiene la misma razón que la Tangente de la mitad de la suma de los angulos opuestos A y C, á la Tangente de la mitad de la diferencia de dichos angulos. (Tofino, 1794, p. 127)

> Teorema III. En qualquier triangulo ABC, la base ó lado mayor BC, á la suma de los lados BA, AC tiene la misma razón, que la diferencia de los mismos lados, á la diferencia de los segmentos BE, EC, que hace la perpendicular AE en la base BC. (Tofiño, 1794, p. 129)

Estos tres teoremas permiten resolver los siguientes tipos de ejercicios (tabla1):

Tabla 1. Tipos de ejercicios y teoremas para su resolución.

Ejercicio 1. «resolver un triángulo, 1º. quando son conocidos dos ángulos y un lado; 2º. quando son conocidos dos lados y un ángulo opuesto al uno de ellos» (Bails, 1788, p. 336)	Teorema I
Ejercicio 2. «Por los tres lados conocidos de un triángulo determinar los ángulos» (Bails, 1788, p. 339)	Teorema III
Ejercicio 3. «resolucion de un triángulo quando se conocen dos de sus lados y el ángulo que forman» (Bails, 1788, p. 341)	Teorema I y teorema II

Así, Tofiño (1794) propone resolver el triángulo, «dados dos lados (AB de 300 pies, y AC de 400), y el ángulo comprehendido (A de 61 grados y 16 minutos)» (p. 135). La resolución dada por el autor es la siguiente:

- Para hallar los ángulos *B* y *C*, aplicamos el teorema II. La suma de los lados *AB* y *AC* (700) es a la diferencia de los mismos (100), como la tangente de la semisuma de *B* y *C*, a la tangente del ángulo de la semidiferencia. Pero como la semisuma de *B* y *C* es igual a la mitad de la diferencia entre 180 grados y *A*, es decir, 59 grados y 22 minutos, entonces el ángulo de la semidiferencia es 13 grados y 34 minutos.

$$\frac{B+C}{2}=\frac{180°-A}{2}=59°22' \rightarrow \frac{700}{100}=\frac{tg(59°22')}{tg\left(\frac{B-C}{2}\right)} \rightarrow \frac{B-C}{2}=13°34'$$

- Sumando las cantidades de la semisuma de *B* y *C*, y la semidiferencia de *B* y *C*, obtenemos *B*, es decir, 72 grados y 56 minutos. Si ahora restamos la semisuma de *B* y *C* a la semidiferencia, obtenemos *C*, es decir, 45 grados y 48 minutos.

$$\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}=B=72°56' \text{ y } \frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}=C=45°48'$$

- Aplicando el teorema I, *AB* (300) es a *BC* como el seno de *C* es al seno de *A*; por tanto, *BC* es:

$$\frac{300}{BC}=\frac{sen\,45°48'}{sen\,61°16'} \rightarrow BC=366,94\ pies$$

Huelga decir que este método de resolución se basa íntegramente en las relaciones de semejanza que existen entre las razones trigonométricas de los ángulos y los lados del triángulo.

Entre las características que podemos encontrar en los libros publicados en este periodo, observamos que se definen y se hace uso exclusivo del seno, tangente y secante, a excepción del texto de Lope y Aguilar (1795) que ya habla de las seis razones trigonométricas.

Los razonamientos usados en las demostraciones de los teoremas necesarios para la aplicación del método de resolución se basan en la búsqueda de triángulos semejantes que permiten establecer relaciones de proporcionalidad (figura 5).

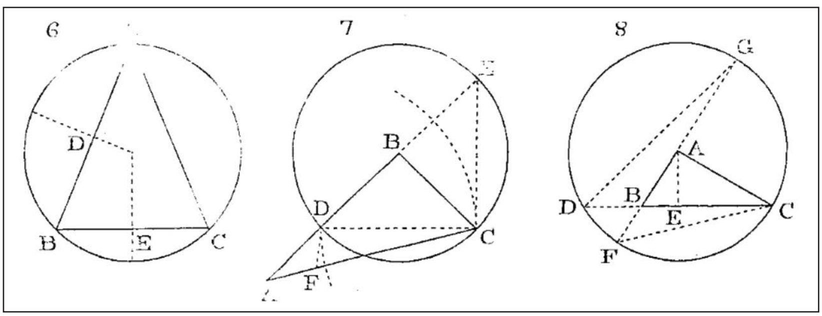

Figura 5. Representación que apoya a la demostración de los teoremas I, II y III (Tofiño, 1794).

Con respecto a los ejercicios propuestos en los textos, los autores utilizan la misma estructura en su formulación; de hecho, en ocasiones, aunque realizan pequeños cambios en el enunciado, replican de forma íntegra los datos dados en los ejercicios diseñados por sus predecesores. Por ejemplo, en Tofiño (1794) se incluye más de un siglo después el problema III que propuso Zaragoza (1672) en su *Trigonometría española*. En otros casos, se modifican los valores de los lados de tal forma que sean proporcionales a los originales, obteniendo, por tanto, los mismos valores de los ángulos. Llama la atención que no se proponen problemas sobre triángulos oblicuángulos para resolver, podemos encontrar exclusivamente ejercicios.

Por otro lado, el Padre Wendlingen (1755) y Tofiño (1794) desglosan la resolución de ejercicios en dos secciones, por un lado, la resolución de triángulos acutángulos y, posteriormente, se estudian casos de triángulos obtusángulos.

Por último, hemos de señalar que, tal y como comentamos anteriormente, Fernández de Medrano (1700), en su obra *Architecto perfecto en el arte Militar*, resuelve los ejercicios que hemos denominado *de segundo tipo* mediante otro método al visto en el resto de los libros, a saber, calcula los ángulos del oblicuángulo trazando la altura sobre el lado mayor y usando las propiedades de Geometría elemental para hallar las dos proyecciones sobre la hipotenusa. De esa forma puede aplicar la definición del seno en los dos triángulos rectángulos en los que ha dividido al triángulo dado.

4.2. Periodo 2, a partir de 1807: enfoque algebraico

Como ya habíamos adelantado, el primer libro escrito en castellano y publicado en España en el que se introduce por primera la formulación del teorema del coseno tal y como lo conocemos hoy es en una edición traducida de 1807 del *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y esférica* escrita por el francés Silvestre Lacroix (figura 6).

Es importante indicar que Lacroix no abandona el teorema de la tangente; sin embargo, el método de resolución de triángulos oblicuángulos que elige para resolver triángulos oblicuángulos es el que nuestros actuales libros de texto exponen.

Este método se va incorporando paulatinamente en los libros de texto del siglo XIX. No ocurre así en los primeros años tras la publicación; por ejemplo, los textos de Vallejo (1812) y Císcar

> Antes de exponer los ejemplos de la resolucion de los triángulos rectilíneos haremos la observacion siguiente.
>
> La ecuacion
>
> $$\cos.\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$
>
> nos dice que *en todo triángulo rectilíneo el coseno de un ángulo es igual á la suma de los cuadrados de los lados que forman dicho ángulo, menos el cuadrado del lado opuesto, dividido todo por dos veces el rectángulo de los lados que forman el ángulo de que se trata;* por lo mismo de cualquier triángulo rectilíneo se podrán deducir las tres ecuaciones
>
> $$\cos.\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc},\quad \cos.\ B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$$
>
> $$\cos.\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}.$$

Figura 6. Teorema del coseno en el *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y esférica* de Lacroix (1807, p. 54).

(1816) siguen abordando el método usando los tres teoremas de la proposición universal. Tendremos que esperar a 1827 para ver el primer texto de un español en el que aparece la formulación actual del teorema del coseno y, por tanto, su aplicación en el método de resolución de triángulos. Se trata del *Curso completo de matemáticas puras*, de Odriozola (1827). Es importante matizar que, en la resolución de los triángulos, el autor usa implícitamente el teorema del coseno, ya que, a partir de este y de la relación que se da entre las razones seno y coseno, obtiene una ecuación equivalente.

Caracteriza a este periodo que las demostraciones se realizan a través de las relaciones analíticas entre las diferentes razones trigonométricas. La definición y el uso de las seis razones se generalizan. Así, comienzan también a enunciarse y demostrarse las fórmulas del ángulo doble o mitad o la más que conocida identidad:

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

Al igual que Lacroix, en los libros de texto publicados durante el siglo XIX no se abandonan en ningún momento los teoremas de la proposición universal, pero sí empiezan a aparecer diferentes alternativas para resolver los mismos triángulos usando el teorema del coseno, que, además, permiten reducir el número de pasos.

5. Conclusiones

La primera idea que nos gustaría esgrimir es que, tres siglos después, los enunciados de los ejercicios que hemos encontrado en los libros de texto de los siglos XVII, XVIII y XIX son análogos a los que podemos encontrar hoy en día. Sin embargo, no nos sorprende tanto si pensamos en la propia definición de *trigonometría rectilínea* y en su búsqueda por hallar tres de los elementos de un triángulo conocidos los otros tres.

Por otro lado, a pesar de las similitudes en los enunciados, encontramos grandes diferencias en su resolución. No cabe duda de que la introducción del teorema del coseno en la enseñanza de la resolución de triángulos redujo significativamente el número de pasos dedicados a obtener la solución, pero a lo largo de todos estos años ha supuesto la algebrización de un método que tuvo su base en la semejanza de triángulos y la evidente desaparición del teorema de la tangente de los libros de textos actuales, a pesar de ser contenido oficial del currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en España.

De nuevo surge la idea de la importancia de traer a España la ciencia europea durante los siglos XVIII y XIX y la gran labor de los autores que tradujeron, adaptaron al sistema educativo vigente y difundieron en sus clases y a través de sus libros de texto, los avances matemáticos que habían sido desarrollados en Europa.

Por último, queremos señalar que, si bien hemos analizado la evolución de los métodos de resolución de triángulos en los libros de texto, eso no significa que ese conocimiento matemático fuese incorporado a la enseñanza de la materia de forma inmediata. Del mismo modo que los autores españoles fueron incorporando paulatinamente el teorema del coseno en sus obras, el uso de estos libros de texto en las instituciones en las que se estudiaba matemáticas también lo fue.

6. Referencias

Bails, B. (1788). *Principios de Matematica de la Real Academia de San Fernando*. Imprenta de la viuda de Ibarra.

Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas*. Alianza.

Christianidisa, J. y Megremi, A. (2019). Tracing the early history of algebra: Testimonies on Diophantus in the Greek-speaking world (4th-7th century CE). *Historia Mathematica*, *47*, 16-38.

Císcar, G. (1816). *Curso de estudios elementales de la marina* (tomo II). Imprenta Nacional.

D'Enfert, R. y Búrigo, E. Z. (2019). Ensino de matemática nas escolas normais primárias francesas, 1830-1848: desafios sociais e culturais para a formação de professores primários. *Educação*, *42*(2), 165-177. https://doi.org/10.15448/1981-2582.2019.2.34111

Dorce, C. (2017). *Historia de las Matemáticas en España*. Arpegio.

Dündar, S. (2015). Mathematics Teacher-Candidates' Performance in Solving Problems with Different Representation Styles: The Trigonometry Example. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6), 1379-1397. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1396a

Fernández, A. G. (1788). *Tratado de la Trigonometria plana y esferica*. Oficina de Vázquez, Hidalgo y Compañía.

Fernández de Medrano, S. (1700). *Architecto perfecto en el arte Militar*. Editorial de Bruselas.

Finkii, T. (1583). *Geometriae Rotundi Libri XIV*. Sebastianum Henricpetri

Furinghetti, F. (2012). History and epistemology in mathematics education. En: Hansen, V. L. y Gray, J. (eds.). *History of mathematics, in Encyclopedia of Life Support Systems* [e-book]. EOLSS.

Garma, S. (1988). Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX. En: Sánchez, J. M. (ed.). *Ciencia y sociedad en España* (pp. 93-127). El Arquero.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon*, *28*(1), 9-22.

Gómez, B. (2018). Uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *1*(1), 11-21.

Gur, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, *57*(1), 67-80.

Karp, A. (2014). The history of mathematics education: developing a research methodology. En: Karp, A. y Schubring, G. (eds.). *Handbook on the history of mathematics education* (pp. 9-24). Springer.

Lacroix, S. (1807). *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y esférica* [traducida por D. Josef Rebollo y Morales]. Imprenta Real.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y Madrid, M. J. (2021). El *Tratado de Álgebra elemental* de Juan Cortázar: un libro significativo para la enseñanza de las matemáticas en España. *Educatio Siglo XXI*, *39*, 235-256. http://dx.doi.org/10.6018/educatio.469251

Lope y Aguilar, T. (1795) *Curso de matemáticas.* Imprenta Real.

Madrid, M. J., López-Esteban, C. y Jiménez-Fanjul, N. (2020). La enseñanza de las matemáticas en la Academia de Guardiamarinas de Cádiz: una visión a partir de tres libros clave. En: Maz-Machado, A. y López-Esteban, C. (eds.). *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* (pp. 93-113). Ediciones Universidad de Salamanca.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME, Revista latinoamericana de Investigación Educativa, 18*(1), 49-76.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En: González, M. J., González, M. T. y Murillo, J. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). SEIEM.

Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2020). Análisis de los prólogos de los textos algebraicos publicados en España durante el siglo XVI. *Historia y Memoria de la Educación, 11*, 51-85.

Odriozola, J. (1827). *Curso completo de matemáticas puras*. Imprenta que fue de García.

Picado, M., Rico, L. y Gómez, B. (2013). El sistema métrico decimal en textos de matemáticas para la instrucción primaria en las Islas Canarias en el siglo XIX. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82*, 37-53.

Puig, L. (1994) El De Numeris Datis de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos, *Mathesis, 10*, 47-92.

Regio Monte, I de. (1533). *De Triangulis Omnimodis.* In aedibus Io. Petrei.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2002). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática, 15*(1), 21-49.

Schubring, G. (2006). Researching into the history of teaching and learning mathematics: The state of the art. *Paedagogica Historica,42*(4-5), 665-677.

Tofiño, V. (1794). *Compendio de la Geometria elemental y Trigonometria rectilinea para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas en su academia*. Imprenta de la Real Academia.

Ulloa, P. de (1706). *Elementos Mathematicos*. Antonio Gonçalez de Reyes.

Vallejo, J. M. (1812). *Tratado elemental de Matemáticas* (volumen III). Imprenta de Melchor Guasp

Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España (s. XIX)*. Universidad de Zaragoza.

Viète, F. (1579). *Canon mathematicus seu ad triangula: cum appendicibus*. Apud Ioannem Mettayer

Viète, F. (1593). *Variorum de Rebus Mathematicis.* Apud Iamettium Mettayer.

Wendlingen, J. (1755). *Elementos de Mathematicas (Tomo III).* Oficina de Joachin Ibarra.

Zaragoza, J. (1672). *Trigonometría española, resolucion de los triangulos planos, y esféricos*. Francisco Oliver.