Una interpretación de la densidad de los modelos clásicos de áreas de mercado

FRANCISCO JUAREZ RUBIO

Profesor del Departamento de Economía y Sociología Agrarias (E.T.S.I. Agrónomos. Universidad de Córdoba).

El origen de los principales conceptos empleados en la Teoría Económica de la Localización y Dimensión Optimas de plantas industriales aisladas, en un contexto espacial, se encuentra en el trabajo pionero de von Thünen (1). Este autor planteó un modelo de áreas de mercado de una ciudad aislada que se aprovisionaba de los productos agrícolas producidos en la «llanura homogénea» que la rodea. El modelo puede simplificarse, considerando un solo producto agrícola, con lo que se obtiene el área de mercado de una «planta aislada» que adquiere la producción de un determinado producto agrícola obtenido en el espacio que la circunda (2). Launhardt (3) introdujo una importante modificación en este esquema, suponiendo una planta aislada que, en lugar de adquirir un producto agrícola de los agricultores que lo producen en la zona circundante, abastece a un conjunto de consumidores del bien que ella produce, estando estos consumidores esparcidos alrededor de la planta. Este modelo serviría de partida posteriormente para el análisis de las «Regiones económicas» de Lösch (4).

En la literatura especializada son bastante conocidos los modelos que suponen una planta industrial agraria, aislada, que obtiene una materia prima, producida en la zona circundante, para transformarla. En estos modelos, que tratan generalmente de determinar la dimensión óptima de la planta, juega un importante pa-

---

(1) J. H. THÜNEN: *Von Thünen's Isolated State* (edición inglesa de *Der Isolierte Staat...*, por P. HALL), Pergamon, Oxford, 1966.

(2) Para una discusión detallada, véase F. JUÁREZ: *Modelos de localización y dimensión óptimas de industrias agrarias: algunos desarrollos teóricos*, tesis doctoral, Universidad de Córdoba, 1980.

(3) W. LAUNHARDT: *Il Fondamento Matematico dell'Economia Politica* (traducción de Tulio Riogiotti), CEDAM (Dott. Antonia Milani), Padua, 1954.

(4) A. LÖSCH: *The Economics of Location* (traducción de W. H. Woflom y W. F. Stolper), Yale University Press, New Haven, 1973.

pel la densidad de producción de la materia prima agrícola. Entre estos modelos cabe citar los de los norteamericanos Olson (5) y Williamson (6). En España destacan los trabajos de Ballestero (7), Dueñas y Romero (8), Alonso, Pazos, Rodríguez y Romero (9). En los modelos clásicos de áreas de mercado, de tipo löschiano, juega también un importante papel la densidad de clientes en la zona que abastece la planta, suponiéndose usualmente constante. Sin embargo, al introducir una función de demanda-precio individual de tangente negativa, se originan los famosos conos de demanda de Lösch. Estos conos vienen a indicar que la cantidad de producto demandada de la planta por unidad de área es una función decreciente de la distancia dentro del área de mercado. En los modelos adaptados al estudio de las áreas de mercado de plantas industriales agrarias, suele suponerse una densidad de producción de la materia prima que la planta adquiere constante o variable con la distancia (10). Cuando se introduce una curva de oferta-precio del «agricultor individual», los resultados que se obtienen son bastante parecidos a los de los modelos löschianos, cuando la planta practica una política similar de precios; en este caso la cantidad de materia prima ofertada por unidad de área es también una función decreciente de la distancia a la planta (11).

Al hablar de áreas de mercado de plantas industriales agrarias y de densidad de producción, implícitamente debe entenderse que en esas áreas no se produce *solamente* la materia prima que las plantas adquieren. Esto es necesario no solamente para tener en cuenta lo que ocurre en la realidad, sino también porque existen

(5) F. L. OLSON: «Location Theory as Applied to Milk Processing Plants», *Journal of Farm Economics*, núm. 41, 1959, págs. 1546-1559.

(6) J. C. WILLIAMSON, Jr.: «The Equilibrium Size of Marketing Plants in a Spatial Market», *Journal of Farm Economics*, núm. 44, 1962, págs. 953-967.

(7) E. BALLESTERO: *Principios de la economía de la empresa*, Alianza Editorial, Madrid, 1978, págs. 604-609.

(8) J. DUEÑAS y C. ROMERO: «Un modelo para determinar la dimensión óptima de una central lechera en la provincia de Zaragoza», *Revista de Estudios Agrosociales*, núm. 82, 1973, págs. 55-68.

(9) R. ALONSO, D. PAZOS, J. E. RODRÍGUEZ y C. ROMERO: «Dimensión óptima de una planta industrial cuando los coeficientes de la función de costes no están especificados. Aplicación al caso de una fábrica de azúcar en Valladolid», *Cuadernos de Economía*, núm. 6, 1978, págs. 393-404.

(10) Entre los modelos que suponen una densidad de producción constante se encuentra el de Olson. Dueñas y Romero suponen una densidad que es función de la distancia a la planta.

(11) F. JUÁREZ: *Op. cit.*, págs. 212-243.

razones agronómicas que obligan a ello. En este artículo vamos a profundizar en este aspecto de la densidad.

1. UNA INTERPRETACION DE LA DENSIDAD DE PRODUCCION

Supongamos una zona agraria, Z, que es una «llanura homogénea» en el sentido clásico del término, sobre la que se produce la materia prima que la planta aislada adquiere, la cual es transportada en línea recta desde cada superficie infinitesimal donde se produce hasta la planta. En la zona Z es posible producir un conjunto de cultivos $C = C_j$, $j = 1, 2, 3 \ldots h, \ldots n$. La planta adquiere la materia prima C_h para transformarla. Admitamos que en una superficie infinitesimal $dxdy$ sobre la que se cultiva la materia prima C_h se produce una cantidad $dq_h = D_h dxdy$. La planta aislada que adquiere esta materia prima suponemos que se halla localizada en un punto 0, que tomamos como origen de un sistema de ejes coordenados, y extiende su área de mercado hasta conseguir un círculo de radio R, inscrito en la superficie Z. Esta situación se esquematiza en la figura 1.

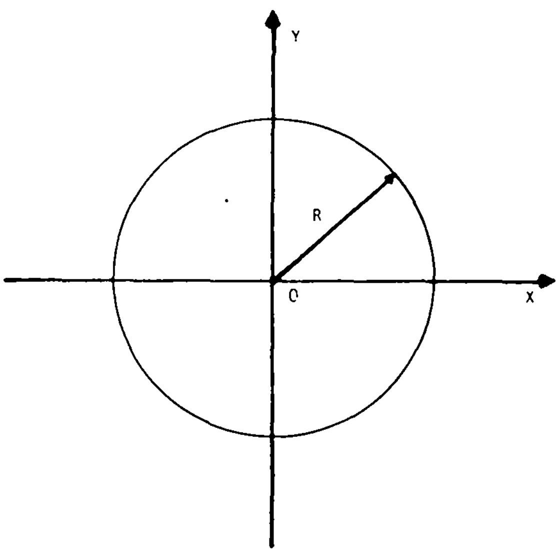


Figura 1

En primer lugar vamos a admitir que D_h es constante. Si la probabilidad de que una superficie infinitesimal $dxdy$ lleve el cultivo C_h es P_h, la esperanza matemática de la cantidad producida sobre cualquier superficie infinitesimal será:

$$E(dq_h) = P_h D_h dxdy$$

Cuando P_h es constante, la esperanza matemática de la cantidad de materia prima C_h que la planta adquiere en su área de mercado viene dada por la ecuación [1].

$$E(Q_h) = \int_0^{2\pi} \int_0^R P_h D_h \rho d\rho d\theta = P_h D_h \pi R^2 \qquad [1]$$

La esperanza matemática de los costes de transportar la materia prima viene dada por la ecuación [2].

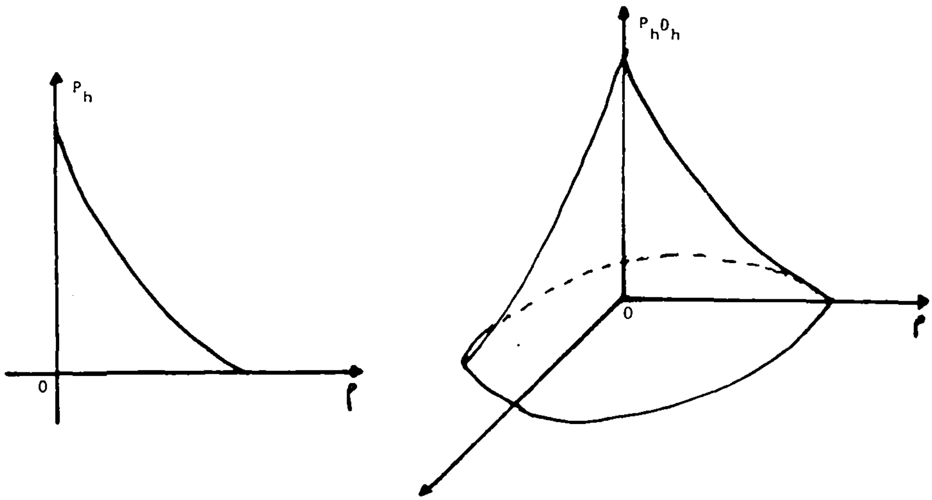
$$E(CTT_h) = t \int_0^{2\pi} \int_0^R P_h D_h \rho^2 d\rho d\theta = \frac{2}{3} t P_h D_h \pi R^3 \qquad [2]$$

En este caso vemos que podríamos admitir la ficción de que sólo se cultiva C_h sobre la zona Z, siempre que admitiéramos también una densidad aparente de producción dada por $P_h D_h$, donde sabemos que $P_h < 1$. Esta densidad aparente es a la que hacen referencia los modelos que admiten una densidad de producción constante. Puesto que la probabilidad de hallar una superficie infinitesimal ocupada por el cultivo C_h es P_h, constante, de hecho ha de ocurrir que se tenga una distribución bastante regular de las parcelas que llevan el cultivo sobre todo el área de mercado. Esta es, sin embargo, una condición suficiente pero no necesaria. Veremos más adelante cómo otros casos pueden originar el mismo efecto.

Supongamos ahora que la probabilidad de encontrar una superficie infinitesimal $dxdy$ que lleve el cultivo C_h es una función de la distancia a la planta, ρ. En este caso se verificará $P_h = P_h(\rho)$. La esperanza matemática de la cantidad de materia prima C_h que la planta adquiere en un área de mercado de radio R vendrá dada por la ecuación [3].

$$E(Q_h) = \int_0^{2\pi} \int_0^R P_h(\rho) D_h \rho d\rho d\theta \qquad [3]$$

Suponiendo que la relación entre P_h y ρ sea como la representada en la figura 2 (a), la educación [3] representa la cantidad de producto comprendida dentro del cono de oferta de materia prima de la figura 2 (b).



(a) (b)

Figura 2

Si calculáramos los costes de transporte correspondientes, concluiríamos que el caso que estamos estudiando equivale a suponer que sobre el área de mercado sólo se da el cultivo C_h, pero con una densidad aparente de producción que depende de la distancia a la planta y viene dada por $P_h(\rho)D_h$.

Vamos a admitir ahora que la probabilidad de hallar una superficie infinitesimal *dxdy* ocupada por el cultivo C_h es función del ángulo θ. Es decir, $P_h = P_h(\theta)$. En este caso la esperanza matemática de la cantidad producida en el área de mercado de la planta vendrá dada por la ecuación [4].

$$E(Q_h) = \int_0^{2\pi} \int_0^R P_h(\theta) D_h \rho \, d\rho \, d\theta = D_h \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} P_h(\theta) d\theta \qquad [4]$$

Obsérvese que podemos obtener un valor medio dado por:

$$S_h = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_h(\theta) d\theta$$

Con lo cual la ecuación [4] se transforma en la ecuación [5].

$$E(Q_h) = D_h S_h \pi R^2 \qquad [5]$$

Donde $D_h S_h$ es la densidad aparente de producción de la materia prima.

Admitamos ahora que la probabilidad de hallar una superficie infinitesimal ocupada por el cultivo C_h es una función de ρ y de θ. Es decir, $P_h = P_h(\theta, \rho)$. Este caso puede transformarse en el segundo estudiado, ya que podemos obtener una variable $S_h^*(\rho)$ dada por:

$$S_h^*(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_h(\rho, \theta) d\theta$$

La variable S_h dependerá de ρ o bien será una constante. Este último caso puede considerarse una particularización del primero, cuando la relación entre P_h y ρ viene dada por una recta de pendiente nula.

En todo el análisis anterior hemos estado manteniendo constantes D_h, la cantidad de materia prima producida por unidad de superficie. Lo que variaba era la distribución de las parcelas que llevaban el cultivo C_h en torno a la planta, cambiando por tanto la probabilidad de hallar una de ellas. Pero podríamos admitir que la probabilidad de hallar una superficie *dxdy* del cultivo C_h es constante. Esto podría corresponderse con una distribución homogénea del cultivo (o de los consumidores de Lösch). Haciendo variar la cantidad producida en cada superficie infinitesimal (o la cantidad demandada, según el modelo), obtendríamos resultados semejantes a los encontrados anteriormente.

Obsérvese que es posible que varíen tanto P_h como D_h con ρ. No es difícil entender que en este caso podrían obtenerse densidades aparentes que o bien serían función de ρ o bien serían constantes, cuando uno de los parámetros fuera creciente y el otro decreciente.

2. OBTENCION DE DENSIDADES APARENTES

Del análisis anterior podemos concluir:

1. Que desde un punto de vista operativo puede aceptarse la ficción de que sobre el área de mercado de la planta sólo se da el cultivo que ésta adquiere como materia prima.
2. Que este cultivo se produce según una densidad aparente que o bien es constante o bien puede expresarse en función de la distancia a la planta.

Las anteriores conclusiones pueden tener bastante interés práctico si pueden generarse fácilmente funciones que expresen la densidad aparente en función de la distancia a la planta. Nosotros proponemos el siguiente método, que es muy sencillo de aplicar:

a) Se trazan círculos en torno a la planta variando el radio.

b) En un sistema de ejes cartesianos se representa en abscisas el valor del radio considerado y en ordenadas la densidad aparente correspondiente, calculada con la fórmula siguiente:

$$Da(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\pi \rho^2}$$

donde $Q(\rho)$ es la cantidad de materia prima producida en el círculo de radio ρ.

Este, en realidad, es el método empleado por Dueñas y C. Romero (12).

Mediante este método se obtiene un conjunto de puntos en un sistema de ejes cartesianos Da, ρ. En la figura 3 se representan tres posibles casos. El caso 1 se corresponde con la hipótesis de densidad constante. El caso 2 es aquel en el que la densidad aparente varía con la distancia, pero para el cual es posible obtener una relación funcional sencilla que permita utilizar el aparato matemático usual en este tipo de modelos, basados en el cálculo inte-

(12) Véase Dueñas y Romero, *op. cit.*

gral. El caso 3 presenta una relación que obligaría a utilizar técnicas especiales de cálculo, ya que la relación entre *Da* y la distancia no puede expresarse mediante una relación funcional sencilla.

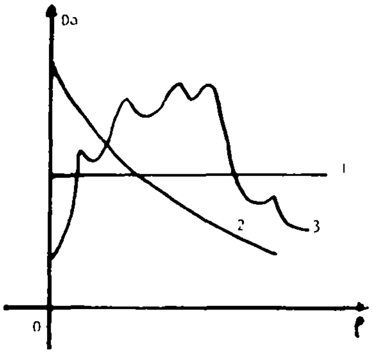


Figura 3

3. UN POSIBLE CASO PRACTICO

Vamos a desarrolar un ejemplo numérico en el que se supone conocida la función de densidad aparente, $Da = a - x - y$. Haciendo el correspondiente cambio de variables para pasar a un sistema de coordenadas polares, obtenemos:

$$Da = a - \rho\,(sen\,\theta + cos\,\theta)$$

Vemos que $Da = Da\,(\rho, \theta)$. Podemos transformar *Da* para obtener una variable que sólo dependa de ρ. Para ello calculamos:

$$S^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a - \rho\,(sen\,\theta + cos\,\theta)]\, d\theta = a$$

Con lo anterior, la densidad aparente para cualquier círculo en torno al punto donde la planta se localiza es una cantidad constante, *a*. La cantidad total de producto que adquiere la planta en un círculo de radio *R*, será:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} a\,d\rho\,d\theta = a\pi R^2$$

Los costes totales de transporte en que se incurre al transportar la materia prima, valen:

$$CTT = t\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} a\rho^2 d\rho d\theta = \frac{2}{3}\, t\pi a R^3$$

Con estos datos puede determinarse fácilmente el área de mercado óptima, conocida la función de costes de funcionamiento de la planta y el objetivo que persiga el empresario.