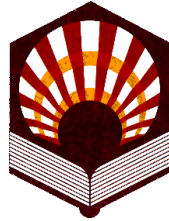


UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRÓNOMOS Y
DE MONTES

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA GRÁFICA E INGENIERÍA Y
SISTEMAS DE INFORMACIÓN CARTOGRÁFICA



TESIS DOCTORAL

DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE
REDES GEODÉSICAS OBSERVADAS MEDIANTE GPS.
ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LOS MÉTODOS DE
CÁLCULO EN LA PRECISIÓN.

PRESENTADA POR:

Dña. MARÍA JESÚS AGUILERA UREÑA
Ingeniero Agrónomo

DIRIGIDA POR:

D. JOSÉ EMILIO MEROÑO DE LARRIVA
Dr. Ingeniero Agrónomo.
D. FRANCISCO MANZANO AGUGLIARO
Dr. Ingeniero Agrónomo.

CÓRDOBA.
OCTUBRE, 2001.

**ÍNDICE**

I.	INTRODUCCIÓN	1
II.	OBJETIVOS	5

ANTECEDENTES

III.	APLICACIONES GEODÉSICAS DEL GPS.	7
	III.1. ORIGEN Y EVOLUCIÓN DE LAS APLICACIONES GEODÉSICAS DEL GPS	7
	III.2. GENERALIDADES SOBRE REDES GEODÉSICAS.	14
	III.3. APLICACIÓN DEL SISTEMA GPS AL CÁLCULO DE REDES.	16
	III.3.1. Densificación de redes existentes.	19
	III.3.2. Consideraciones altimétricas.	20
	III.3.3. Aplicaciones informáticas comerciales para el ajuste de observaciones GPS.	21
IV.	SISTEMAS DE REFERENCIA.	25
	IV.1. INTRODUCCIÓN	25
	IV.2. SISTEMAS DE REFERENCIA, MARCOS DE REFERENCIA Y DATUM.	26
	IV.3. SISTEMAS Y MARCOS DE REFERENCIA GLOBALES.	29
	IV.3.1. Sistema de Referencia Inercial.	29
	IV.3.2. Sistema Terrestre Geocéntrico Convencional.	30
	IV.3.2.1. El Marco de Referencia Terrestre Internacional (ITRF).	32
	IV.3.2.2. El sistema WGS-84.	34
	IV.4. SISTEMAS DE REFERENCIA LOCALES.	36
	IV.4.1. Sistema de referencia horizontal.	36
	IV.4.2. Sistema de referencia vertical.	37
	IV.4.2.1. Modelos de geoide.	38
	IV.5. MODELO GEODÉSICO TRIDIMENSIONAL.	40
	IV.6. SISTEMAS DE REFERENCIA PLANOS: PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS.	44
	IV.6.1. Proyección UTM.	45



IV. 7. TENDENCIAS FUTURAS EN CUANTO A MARCOS DE REFERENCIA.	48
V. MARCOS DE REFERENCIA ESPAÑOLES.	49
V.1. INTRODUCCIÓN.	49
V.2. RED GEODÉSICA ESPAÑOLA.	49
V.2.1. Red ED-50	50
V.2.2. Redes NRPO y ROI	51
V.2.3. Red de Nivelación	52
V.2.4. EUREF'89	53
V.2.5. IBERIA95	55
V.2.6. REGENTE	56
VI. POSICIONAMIENTO GPS EN APLICACIONES GEODÉSICAS.	59
VI.1. INTRODUCCIÓN.	59
VI.2. ERRORES COMETIDOS EN LA MEDIDA DE PSEUDODISTANCIAS.	60
VI.2.1. Efemérides.	61
VI.2.2. Errores de reloj.	62
VI.2.3. Ionosfera.	63
VI.2.4. Troposfera.	65
VI.2.5. Multicamino (Multipath).	68
VI.2.6. Receptor.	69
VI.2.7. La Disponibilidad Selectiva (SA).	71
VI.2.8. Efectos relativistas.	71
VI.3. PRECISIÓN EN EL POSICIONAMIENTO GPS.	73
VI.3.1. UERE y factores DOP.	73
VI.3.2. Conceptos de Precisión y Exactitud.	76
VI.4. ALGORITMOS DE CÁLCULO.	80
VI.4.1. Medida de fase de la portadora.	80
VI.4.2. Observables de fase derivados.	84
VI.4.2.1. Simples diferencias.	85
VI.4.2.2. Dobles diferencias.	86
VI.4.2.3. Triples diferencias.	88
VI.4.2.4. Otros observables derivados.	89
VI.4.3. Resolución de la ambigüedad.	92



VI.4.3.1. Modalidades de operación especial.	94
VI.4.3.2. Búsqueda en el dominio de las observaciones.	94
VI.4.3.3. Búsqueda en el dominio de las coordenadas.	95
VI.4.3.4. Búsqueda en el dominio de las ambigüedades.	96
VI.4.3.5. Técnicas de recuperación de ambigüedades.	97
VI.4.3.6. Técnicas integradas.	97

METODOLOGÍA.

VII. AJUSTE MÍNIMOS CUADRADOS APLICADO A REDES GEODÉSICAS.	99
VII.1. INTRODUCCIÓN.	99
VII.2. MODELOS ESTOCÁSTICOS Y MODELOS MATEMÁTICOS.	101
VII.2.1. Modelo matemático.	101
VII.2.2. Modelo estocástico.	103
VII.3. SOLUCIÓN MÍNIMOS CUADRADOS.	104
VII.3.1. Modelo de ajuste mixto.	105
VII.3.1.1. Linealización.	105
VII.3.1.2. Minimización y Solución.	107
VII.3.1.3. Matrices cofactor y covarianza.	108
VII.3.1.4. Iteraciones.	110
VII.3.2. Modelo de ecuaciones de observación y modelo de ecuaciones de condición.	111
VII.4. AJUSTES MÍNIMO CONSTREÑIMIENTO Y AJUSTES CONSTREÑIMIENTO INTERNO.	113
VII.4.1. Solución mínimo constreñimiento.	113
VII.4.2. Solución constreñimiento interno.	114
VII.5. ESTADÍSTICOS EN EL AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS.	116
VII.5.1. Test sobre la varianza de peso unidad.	117
VII.5.2. Elipses como regiones de confianza.	119
VII.5.3. Fiabilidad de una red.	122
VII.5.3.1. Número redundante.	122
VII.5.4. Detección de errores groseros.	124
VII.5.4.1. Test Tau.	126
VII.5.4.2. Test de Baarda.	127



VII.5.4.3 Cambio de peso de las observaciones.	128
VIII. TRANSFORMACIÓN ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA.	129
VIII.1. INTRODUCCIÓN.	129
VIII.2. TRANSFORMACIÓN TRIDIMENSIONAL DE COORDENADAS WGS-84 AL SISTEMA DE REFERENCIA ELIPSOÍDICO LOCAL	130
VIII.2.1. Transformación de Helmert.	130
VIII.2.2. Transformación de Molodensky-Badekas.	134
VIII.2.3. Transformación de Veis.	135
VIII.2.4. Comparación entre los tres modelos de transformación tridimensional.	137
VIII.3. PROBLEMA DE LA ALTIMETRÍA CON GPS. TRANSFORMACIÓN TRIDIMENSIONAL COMO SUMA DE UNA TRANSFORMACIÓN 2D MÁS OTRA 1D.	138
VIII.3.1. Transformación 2D para planimetría.	139
VIII.3.1.1. Método 1. Transformación de posiciones elipsoidales en áreas pequeñas.	139
VIII.3.1.2. Método 2. Transformación de posiciones planas en áreas pequeñas.	143
VIII.3.1.2.1. Transformación plana.	144
VIII.3.1.3. Transformación 1D para altimetría.	146
VIII.4. MÉTODOS DE TRANSFORMACIÓN DIRECTOS.	148
VIII.4.1. Transformación según los 7 parámetros calculados para el ED-50	148
VIII.4.2. Transformación según los 5 parámetros del IGN.	149
VIII.4.3. Parámetros de Molodensky.	150
VIII.4.4. Método de regresión múltiple.	150
IX. RESOLUCIÓN DE REDES GEODÉSICAS GPS.	153
IX.1. INTRODUCCIÓN.	153
IX.2. SOLUCIONES MÍNIMO CONSTREÑIMIENTO Y CONSTREÑIMIENTO INTERNO CON VECTORES GPS COMO OBSERVABLES.	155
IX.3. SOLUCIÓN EN EL SISTEMA WGS-84.	160
IX.4. SOLUCIÓN EN EL SISTEMA LOCAL.	163



X.	UCORed-GPS. APLICACIÓN INFORMÁTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE REDES GPS.	169
X.1.	INTRODUCCIÓN.	169
X.2.	CRITERIOS DE DISEÑO DE LA INTERFACE GRÁFICA DE UCORed-GPS.	170
X.3.	ESTRUCTURA GENERAL DEL PROGRAMA.	172
X.3.1.	Herramientas de Gestión de trabajos de UCORed-GPS.	173
X.3.2.	Entrada de información en UCORed-GPS.	174
X.3.2.1.	Líneas base GPS observadas.	174
X.3.2.2.	Información sobre posiciones conocidas.	176
X.3.3.	Herramienta gráfica para la visualización de la información de salida.	177
X.3.4.	Procedimientos de cálculo y ajuste implementados en UCORed-GPS.	178
X.3.4.1.	Modulo de cierre de triángulos.	178
X.3.4.2.	Alternativas a seguir en la resolución de una red GPS.	179
X.3.4.3.	Ajuste de la red con constreñimiento interno.	181
X.3.4.4.	Ajuste de la red en el sistema WGS-84.	185
X.3.4.4.1.	Detección de errores groseros en coordenadas conocidas de estaciones en el sistema WGS-84.	187
X.3.4.4.2.	Cálculo de puntos de apoyo.	190
X.3.4.5.	Obtención de coordenadas en el sistema local correspondiente.	192
X.3.4.5.1.	Ajuste tridimensional local.	193
X.3.4.5.2.	Cálculo de los parámetros locales de transformación.	196
X.3.4.5.3.	Transformación 2D+1D.	197
X.3.4.5.4.	Transformación directa.	199
 FASE EXPERIMENTAL.		
XI.	APLICACIÓN PRÁCATICA I. GEORREFERENCIACIÓN CON GPS EN GUATEMALA.	201
XI.1.	INTRODUCCIÓN.	201
XI.1.1.	Precisiones exigidas.	202



XI.1.2. Proyección y sistema geodésico de referencia.	202
XI.2. RED BÁSICA.	203
XI.2.1. Fase de observación.	204
XI.2.2. Procesado de Líneas Base.	206
XI.2.3. Ajuste y cálculo de la red.	206
XI.2.3.1. Ajuste con constreñimiento interno.	207
XI.2.3.2. Solución en el sistema WGS-84.	212
XI.2.3.2.1. Concepto de puntos fijos.	212
XI.2.3.2.2. Concepto de puntos fiduciales.	214
XI.2.3.3. Solución local.	220
XI.2.3.3.1. Coordenadas locales planimétricas.	220
XI.2.3.3.2. Coordenadas locales altimétricas.	220
XI.2.4. Redes de Segundo Orden.	221
XI.2.4.1. Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután.	222
XI.2.4.1.1. Solución con constreñimiento interno.	224
XI.2.4.1.2. Solución WGS-84.	227
XI.2.4.1.3. Solución local.	229
XI.2.5. Resolución de puntos de apoyo.	230
XI.2.5.1. Apoyo Gualán.	232
XII. APLICACIÓN PRÁCTICA II. GEORREFERENCIACIÓN CON GPS EN ANDALUCÍA.	237
XII.1. INTRODUCCIÓN.	237
XII.2. DISEÑO Y FASE DE OBSERVACIÓN.	238
XII.2.1. Red Básica.	239
XII.2.2. Puntos de apoyo.	240
XII.2.3. Procesado de líneas base.	241
XII.3. AJUSTE DEL BLOQUE I.	242
XII.3.1. Solución constreñimiento interno.	242
XII.3.2. Solución WGS-84.	246
XII.3.2.1. Primera alternativa. Puntos fijos.	246
XII.3.2.2. Segunda alternativa. Puntos fiduciales.	247
XII.3.3. Solución en el sistema local.	249



XII.3.3.1. Uso de alturas ortométricas frente a alturas elipsoidales para al cálculo de la transformación 3D.	251
XII.3.3.2. Precisión de las coordenadas obtenidas aplicando parámetros calculados para distintas extensiones geográficas.	254
XII.3.3.3. Comparación Transformación 3D frente a Transformación 2D+1D.	254
XII.3.3.4. Efecto de la aplicación de unos parámetros de transformación fuera de la zona para la que se han calculado.	257
XII.4. RESOLUCIÓN HOJA 237.	259
XII.4.1. Resolución de la red.	259
XII.4.1.1. Ajuste con constreñimiento interno de la red.	260
XII.4.1.2. Solución WGS-84.	261
XII.4.1.3. Cálculo de los parámetros de transformación. Evaluación de las precisiones de los vértices de la ROI que forman la red.	261
XII.4.2. Solución de los puntos de apoyo.	263
XII.4.2.1. Solución local de los puntos de apoyo.	265
XII.5. DETECCIÓN DE ERRORES EN LAS COORDENADAS DE LA ROI.	268
XIII. CONCLUSIONES.	273
XIV. BIBLIOGRAFÍA.	277
ANEXO I: TABLAS APLICACIÓN PRÁCTICA I. GUATEMALA.	
ANEXO II: TABLAS APLICACIÓN PRÁCTICA II. ANDALUCÍA.	
ANEXO III: GRÁFICOS APLICACIÓN PRÁCTICA III. ANDALUCÍA.	



INDICE DE DIAGRAMAS.

Diagrama X-1. Criterios de diseño de la interface gráfica.	171
Diagrama X-2. Alternativas de ajuste de una red GPS observada.	180
Diagrama X-3. Esquema ajuste de la red con constreñimiento interno.	184
Diagrama X-4. Esquema ajuste de la red en el sistema WGS-84.	186
Diagrama X-5. Esquema ajuste de la red en el sistema local.	193
Diagrama X-6. Esquema transformación plana.	198

**INDICE DE FIGURAS.**

Figura III-1. Precisión en la determinación relativa de distancias por diferentes técnicas.	10
Figura IV-1. Mapa de Red de Estaciones IGS.	33
Figura IV-2. Horizonte Geodésico Local sobre al superficie terrestre.	41
Figura IV-3. Horizonte Geodésico Local respecto al sistema WGS-84.	42
Figura IV-4. Proyección UTM.	46
Figura V-1. Campañas de observación EUREF.	55
Figura V-2. Mapa de Vértices de IBERIA95.	56
Figura V-3. Mapa de Proyecto Regente en la actualidad.	57
Figura VI-1. Modos de posicionamiento relativo GPS junto con sus precisiones.	60
Figura VI-2. Errores de efemérides.	61
Figura VI-3. Densidad diurna de electrones en diferentes zonas de la ionosfera en función de la altura.	63
Figura VI-4. Refracción ionosférica en función del ángulo de elevación.	64
Figura VI-5. Efecto de la refracción troposférica.	65
Figura VI-6. Efecto multicamino.	68
Figura VI-7. Exactitud y precisión.	77
Figura VI-8. Medidas de precisión horizontales.	80
Figura VI-9. Esquema de simples diferencias.	86
Figura VI-10. Esquema de dobles diferencias.	87
Figura VI-11. Esquema de triples diferencias.	88
Figura VI-12. Búsqueda de la ambigüedad en el dominio de las observaciones.	95
Figura VI-13. Búsqueda de la posición en el dominio de las coordenadas.	95
Figura VI-14. Búsqueda de la ambigüedad en el dominio de la ambigüedad.	97
Figura VII-1. Rotación del sistema de coordenadas de ejes principales.	120
Figura VIII-1. Transformación entre sistemas tridimensionales.	131
Figura VIII-2. Transformación entre sistemas cartesianos planos.	145
Figura X-1. Ventana de selección de directorio de trabajo.	173
Figura X-2. Ventana gestión de líneas base.	174
Figura X-3. Ventana introducción líneas base desde teclado.	175
Figura X-4. Ventana de lectura de líneas base procedentes de procesado con TGO.	175
Figura X-5. Ventana de introducción de coordenadas elipsoidales de estaciones fijas.	176



Figura X-6. Visualización en pantalla de la solución ajustada de una red, junto con elipses de error	177
Figura X-7. Fichero *.jpg como salida gráfica de resultados.	178
Figura X-8. Editor de cierre de triángulos.	179
Figura X-9. Ventana test Chi-cuadrado en solución mínimo constreñimiento.	182
Figura X-10. Ventana text de Baarda de detección de errores groseros.	183
Figura X-11. Opciones de edición de la solución WGS-84.	187
Figura X-12. Ventana edición residuos tipificados en componentes HGL.	189
Figura X-13. Ventana de introducción de 7 parámetros de transformación.	199
Figura XI-1. Mapa de localización de la Aplicación I.	201
Figura XI-2. Red Básica observada.	205
Figura XI-3. Ejemplo de observación GPS en estación de la Red Geodésica de Guatemala.	219
Figura XI-4. Detalle de vértice de la Red Geodésica de Guatemala.	219
Figura XI-5. Gráfico de la Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután, sobre cartografía 1:100.000 de Guatemala. Puntos de apoyo del vuelo bajo del municipio de Cabañas.	223
Figura XII-1. Ejemplo de Red Básica para la hoja 248 del mapa 1:100.000 de Andalucía.	240
Figura XII-2. Distribución teórica de los puntos de apoyo en cada Hoja MTN 1:100.000.	241
Figura XII-3. Localización Bloque I Andalucía.	242



INDICE DE GRÁFICOS.

Gráfico X-I. Ejemplo de levantamiento de puntos de apoyo desde dos puntos fijos.	191
Gráfico XI-1. Elipses de error solución constreñimiento interno Red Básica. Solución con todas las líneas base observadas.	208
Gráfico XI-2 Elipses de error solución constreñimiento interno Red Básica. Solución definitiva.	210
Gráfico XI-3. Precisiones ajuste WGS-84 fijando las coordenadas de Júcaro, Yupiltepeque, La Tinta como Puntos fiduciales de precisión rms=3cm componentes planimétricas y 4cm en componentes altimétricas.	217
Gráfico XI-4. Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután dentro de la Red Básica.	223
Gráfico XI-5. Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután. Solución constreñimiento interno. Antes de eliminación de errores groseros.	225
Gráfico XI-6 Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután. Solución constreñimiento interno. Sin errores groseros.	225
Gráfico XI-7. Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután. Solución WGS-84. Puntos fijos.	228
Gráfico XI-8. Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután. Solución WGS-84. Puntos fiduciales.	228
Gráfico XI-9. Apoyo Zacapa, Cabañas y Teculután.	230
Gráfico XI-10. Apoyo Esquípulas y Quetzaltepeque.	231
Gráfico XI-11. Apoyo Gualán.	231
Gráfico XI-12. Apoyos Chiquimula e Ipala.	232
Gráficos XI-13. Elipses de error puntos apoyo Gualán. Solución Puntos de Apoyo.	233
Gráficos XI-14. Elipses de error puntos apoyo Gualán. Solución Ajuste EGS-84.	233
Gráfico XII-1. Gráfico solución constreñimiento interno Bloque I Andalucía previo proceso de eliminación de errores groseros. Elipses planimétricas de error y desviación estándar altimétrica.	244
Gráfico XII-2. Gráfico solución constreñimiento interno Bloque I Andalucía. Después de eliminar errores groseros. Elipses planimétricas de error y desviación estándar altimétrica.	245
Gráfico XII-3. Gráfico solución WGS-84 Bloque I con puntos fiduciales (1cm en las tres componentes). Elipses de error y desviación estándar altimétrica.	249



Gráfico XII-4. Distribución de sub-bloques dentro del Bloque I de Andalucía. 12, 6, 4, 2 y 1 hojas.	250
Gráfico XII-5. Desviaciones medias en planimetría y altimetría para transformaciones en diferentes bloques. Transformación 3D con alturas elipsoidales obtenidas con modelo de geoide aproximado.	253
Gráfico XII-6. Desviaciones medias en planimetría y altimetría para transformaciones en diferentes bloques. Transformación 3D con ortométricas.	253
Gráfico XII-7. Comparación transformación 3D y 2D para planimetría en diferentes bloques.	255
Gráfico XII-8. Comparación transformación 3D y 1D para altimetría en diferentes bloques.	255
Gráfico XII-9. Desviación en coordenadas planimétricas y altimétricas de los puntos de apoyo de una hoja calculados con los parámetros correspondientes y con los de la hoja contigua, en función de la distancia al centroide de la hoja contigua.	258
Gráfico XII-10. Representación diferencias posiciones planimétricas con distintos parámetros de transformación para los puntos de apoyo en el límite de hojas contiguas.	258
Gráfico XII-11. Solución constreñimiento interno Red Geodésica Hoja 237. Elipses de error y rms altimétrico.	260
Gráfico XII-12. Solución ajuste WGS-84 para puntos apoyo Hoja 237.	264
Gráfico XII-13. Solución puntos de apoyo Hoja 237.	265
Gráfico XII-14. Precisiones solución local para puntos de apoyo. Ajuste local con puntos fijos.	266
Gráfico XII-15. Precisiones solución local para puntos de apoyo. Ajuste local con puntos fiduciales.	266
Gráfico XII-16. Solución constreñimiento interno de la Hoja 262.	269

**INDICE DE TABLAS.**

Tabla VI-1. Errores estándar posicionamiento L1, código C/A, con SA.	73
Tabla VI-2. Errores estándar posicionamiento L1, código C/A, sin SA.	74
Tabla VI-3. Uso de las medidas de precisión.	79
Tabla VI-4. Diferencias de fase usadas en posicionamiento relativo.	89
Tabla VII-1. Resumen de los tres modelos de ajuste.	112
Tabla VIII-1. Parámetros transformación WGS-84 ED-50(Torge, W. 1991).	149
Tabla VIII-2. Parámetros transformación WGS-84 ED-50 (IGN).	149
Tabla VIII-3. 5 parámetros transformación WGS-84 ED-50 IGN.	150
Tabla VIII-4. Parámetros de transformación Molodensky para distintos sistemas locales.	150
Tabla IX-1. Submatriz de diseño para una estación ocupada con receptor GPS.	164
Tabla IX-2. Matriz de diseño para los parámetros de transformación entre sistemas.	165
Tabla XI-1. Elipses de error y desviaciones estándar altimétricas solución constreñimiento interno Red Básica Guatemala. Solución con todas las líneas base observadas.	209
Tabla XI-2. Elipses de error y desviaciones estándar altimétricas solución constreñimiento interno Red Básica Guatemala. Solución definitiva.	211
Tabla XI-3. Precisiones ajuste WGS-84 fijando las coordenadas de Zacapa, Júcaro, Yupiltepeque, Estor, La Tinta.	213
Tabla XI-4. Residuos tipificados en componentes HGL. 5 vértices fijos.	213
Tabla XI-5. Residuos tipificados en componentes HGL. Sin Zacapa.	214
Tabla XI-6. Residuos tipificados en componentes HGL. Puntos fiduciales con 3 cm precisión componentes planimétricas y 6 cm componentes altimétricas.	215
Tabla XI-7. Residuos tipificados en componentes HGL. Puntos fiduciales con 4 cm precisión componentes planimétricas y 7 cm componentes altimétricas.	215
Tabla XI-8. Residuos tipificados en componentes HGL. 4 puntos fiduciales con 3 cm precisión componentes planimétricas y 4 cm componentes altimétricas.	216
Tabla XI-9. Residuos tipificados en componentes HGL. 3 puntos fiduciales con 3 cm precisión componentes planimétricas y 4 cm componentes altimétricas.	216
Tabla XI-10. Precisiones ajuste WGS-84 fijando las coordenadas de Júcaro, Yupiltepeque, La Tinta como puntos fiduciales de precisión rms=3 cm componentes planimétricas y 4 m en componentes altimétricas.	218



Tabla XI-11. Errores cometidos al aplicar los parámetros de la transformación lineal altimétrica en los cinco puntos de alturas ortométricas conocidas.	221
Tabla XI-12. Comparación precisión solución constreñimiento interno antes y después de eliminación de errores groseros.	224
Tabla XI-13. Comparación precisiones ajuste WGS-84 Red Segundo Orden Cabañas-Teculután, con puntos fijos y con puntos fiduciales.	227
Tabla XI-14. Residuos tipificados observaciones puntos fijos.	229
Tabla XI-15. Residuos tipificados observaciones puntos fiduciales.	229
Tabla XI-16. Comparación de precisiones obtenidas con solución WGS-84 y solución Puntos de Apoyo. Apoyo Gualán.	234
Tabla XI-17. Residuos tipificados líneas base asociadas a punto de apoyo G101.	235
Tabla XII-1. Resumen precisiones obtenidas. Solución constreñimiento interno Bloque I Andalucía. Solución previa a la eliminación de errores groseros.	243
Tabla XII-2. Resumen precisiones obtenidas. Solución constreñimiento interno Bloque I Andalucía. Solución posterior a la eliminación de errores groseros.	243
Tabla XII-3. Residuos tipificados coordenadas Regente. Estaciones fijas. Componentes HGL.	247
Tabla XII-4. Residuos tipificados coordenadas Regente. Estaciones fiduciales con 1cm de error en las tres componentes. Componentes HGL.	248
Tabla XII-5. Resumen errores cometidos transformación 3D en diferentes bloques. Utilizando cotas ortométricas.	252
Tabla XII-6. Resumen errores cometidos transformación 3D en diferentes bloques. Utilizando cotas elipsoidales.	252
Tabla XII-7. Resumen de errores cometidos en la 2D y en la transformación 1D para diferentes bloques.	256
Tabla XII-8. Resumen de los errores altimétricos utilizando el modelo EGM96.	256
Tabla XII-9. Precisión solución constreñimiento interno Red Geodésica Hoja 237.	260
Tabla XII-10. Residuos tipificados cinco vértices fijos Hoja 237.	262
Tabla XII-11. Residuos tipificados cinco vértices Hoja 237 (rms planimétrico=15 cm, altimétrico =30 cm).	263
Tabla XII-12. Resumen de precisiones ajuste local puntos de apoyo Hoja 237. Comparación puntos fijos-puntos fiduciales (rms 15 cm planimetría y 30 cm en altimetría).	267
Tabla XII-13. Resumen de diferencias en coordenadas obtenidas mediante ajuste local, considerando puntos fijos, o considerando puntos con precisión.	268



Tabla XII-14. Residuos tipificados coordenadas estaciones ROI Hoja 262. Considerando puntos con precisión de 15 cm en planimetría y 30 cm en altimetría.	270
Tabla XII-15. Residuos tipificados coordenadas estaciones ROI Hoja 262.	270
Tabla XII-16. Errores coordenadas estaciones ROI 104304.	270



I. INTRODUCCIÓN.

El Sistema GPS es un sistema espacial de navegación, desarrollado por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos (DoD) a mediados de los setenta, para satisfacer las necesidades de las Fuerzas Armadas en lo que respecta a la determinación precisa de la posición, velocidad y tiempo en un sistema de referencia global, de forma permanente en cualquier lugar sobre la superficie de la Tierra y bajo diferentes condiciones meteorológicas.

Dadas las características que presenta el sistema GPS, desde su origen se reconoció la utilidad para obtener posiciones geodésicas con gran precisión, a pesar de que el sistema fue diseñado en un principio para la aplicación a la navegación. A partir de 1983, cuando el sistema es desclasificado y se permite el uso civil, es cuando se empieza a usar para la resolución de problemas geodésicos.

En este sentido, el GPS ha revolucionado la ciencia del posicionamiento y medida de la Tierra. Por un lado por la precisión, por otra parte por la velocidad y simplicidad, y por último por el coste. Todas estas mejoras contribuyen a que aumenten las aplicaciones. La tecnología está lista, y sólo hace falta imaginación e intuición para llevarla a aplicaciones concretas.

Actualmente, el sistema GPS se utiliza para resolver gran variedad de problemas geodésicos y geodinámicos, presentándose como una alternativa a las observaciones clásicas de ángulos y distancias, con la gran ventaja, además de las altas precisiones obtenidas, la no necesidad de intervisibilidad entre estaciones. Así, hoy día, la tecnología GPS se puede considerar una técnica de geodesia espacial completamente madura.

La geodesia de un país está basada en el establecimiento de un número suficiente de puntos de control, perfectamente localizados en el terreno y que constituyen el marco de



referencia para la georreferenciación de los trabajos realizados en el mismo. Así mismo, en zonas locales, será necesaria una densificación del marco de referencia existente, que permita una georreferenciación precisa de los trabajos llevados a cabo. Las coordenadas de estos puntos se han venido obteniendo tradicionalmente a través de observaciones geodésicas clásicas y posterior compensación. Hoy día, la potencialidad del GPS se ve aplicada en la resolución de estos problemas, a través de la observación de redes geodésicas.

Así, con la observación de una red geodésica se pretende obtener las coordenadas, su precisión y fiabilidad en términos relativos y absolutos de un conjunto de puntos perfectamente localizados en el terreno, en un sistema de referencia preestablecido.

Una característica de las aplicaciones geodésicas es la gran precisión exigida, por lo que la precisión que ofrece el sistema en modo absoluto no es de gran utilidad. Sin embargo, estas restricciones se pueden obviar con distintos procedimientos, como es, mediante el posicionamiento relativo, usando las observaciones de fase de una o las dos portadoras, y prolongando el tiempo de observación en un punto (posicionamiento estático). El desarrollo del sistema en estos últimos años ha sido enorme, surgiendo nuevas técnicas de observación, cada vez más precisas (centimétrica o incluso milimétricas), con tiempos de observación menores, equipos cada más manejables y baratos y con mayor disponibilidad de software de proceso, que se adapte a cada necesidad particular.

Un modo adicional de aumentar la precisión en las posiciones obtenidas con GPS será disponiendo de un conjunto de observaciones redundantes. Esto es lo que se consigue con la observación de una red, tener más líneas base GPS observadas que las necesarias, de modo que se pueda controlar la calidad de estas observaciones, así como poder estimar de manera fidedigna la precisión de los resultados obtenidos. La resolución de la red, partiendo de un conjunto redundante de observaciones, requerirá un proceso de ajuste, proceso que permite la aplicación de técnicas estadísticas para evaluar las precisiones tanto de las observaciones de partida como de los resultados finales.



Por otro lado, las medidas terrestres son por naturaleza locales, por lo que tradicionalmente, la resolución de los problemas geodésicos, cartográficos y topográficos se ha abordado de forma local, utilizando bien sistemas de referencia geodésicos locales, o bien sistemas de referencia planos en la mayor de las simplificaciones asumida en topografía. Por tanto, normalmente nos interesará referir las posiciones obtenidas con GPS a la información cartográfica disponible, es decir, al sistema de referencia local, siendo necesario un tratamiento especial de los sistemas de referencia.

Surgirá en este punto la necesidad de establecer una transformación entre ambos sistemas implicados, el sistema global WGS-84 al que se refieren las observaciones GPS y el sistema local correspondiente. Esta transformación se puede resolver en el propio proceso de ajuste de una red GPS observada, introduciendo una serie de parámetros de transformación que relacionen ambos sistemas.

En el presente trabajo pretende evaluarse las distintas alternativas que se presentan a la hora de abordar la resolución de una red GPS observada, estableciendo una metodología a aplicar en las distintas circunstancias que se puedan presentar. Se analizarán de manera especial las precisiones obtenidas, así como el estudio de métodos de detección de errores groseros en líneas base observadas y en las coordenadas de posiciones conocidas, tanto en el sistema global como en el sistema local, técnicas encaminadas a extraer la máxima precisión de una serie de observaciones GPS en el posicionamiento geodésicos.

*Las medidas están todas alrededor de nosotros.
El objetivo es extraer la máxima información de estas medidas.
(Gilbert Strang)*



II. OBJETIVOS.

El presente trabajo tiene como objetivo general el desarrollo, la implementación y la validación de una metodología de ajuste de redes geodésicas observadas con GPS en diferentes circunstancias, así como la evaluación de la influencia del método de resolución en la precisión que se alcanza en dicho proceso.

Para abordar este objetivo general, se plantearán los siguientes objetivos específicos:

1. Estudio de las distintas alternativas a la hora de abordar la resolución de una red GPS observada.
2. Estudio de los distintos sistemas de referencia implicados en geodesia así como la transformación entre los mismos, para su incorporación en el proceso de resolución de una red GPS.
3. Desarrollo de herramientas para la evaluación de la precisión en una red GPS observada, tanto desde el punto de vista de la precisión interna de las observaciones GPS de partida, como de la precisión del marco de referencia en el que se encuadra el trabajo. Proceso de detección de errores en coordenadas de puntos considerados como conocidos.
4. Desarrollo y evaluación de una metodología para el tratamiento de redes en caso particulares, como es el caso de la resolución de puntos de apoyo levantados desde más de una estación.
5. Implementación, evaluación y validación de una herramienta informática basada en programación orientada a objetos, con entorno gráfico de ventanas, que permita resolver el problema de ajuste de redes GPS, y que presente las siguientes características:



- Acceso a todas las fases del proceso de forma abierta y flexible.
- Posibilidad de resolver problemas evaluando diferentes alternativas en el proceso de ajuste.
- Tratamiento de las precisiones de las observaciones de partida y de los parámetros estimados, tanto numérica como gráficamente.
- Adaptación a diferentes sistemas de referencia.



III. APLICACIONES GEODÉSICAS DEL GPS.

III.1. ORIGEN Y EVOLUCIÓN DE LAS APLICACIONES GEODÉSICAS DEL GPS.

Con el lanzamiento del primer satélite artificial, el SPUTNIK-1, el 4 de octubre de 1957 (Seeber G.,1993), comienza la utilización del espacio con fines tecnológicos. Hoy en día existen miles de satélites artificiales comprendidos en un espacio utilizable que va desde los 150 Km. hasta 1/10 de la distancia Tierra Luna, alrededor de 38.000 Km. (Stiller A.H.,1988), y se destinan principalmente a tres actividades: Teledetección (entre 150 y 160 Km.), Satélites de Navegación (de 1.000 a 22.000 Km.), y Comunicaciones (sobre los 36.000 Km.).

Los primeros sistemas de navegación que permitieron el posicionamiento por satélite fueron el sistema TRANSIT (1959) del U.S. Navy, y el sistema ZIKADE (1967) de la antigua Fuerza Naval Soviética. Las características de funcionamiento de estos dos sistemas son similares, sus satélites orbitan a unos 1.000 Km., lo cual permite a cada satélite cubrir sólo de un 5 a un 8 % de la superficie de la Tierra. La poca cobertura de estos sistemas de navegación, implicaba tiempos de observación altos, puesto que se necesitaban varias pasadas de los satélites para alcanzar una precisión elevada. Para dar una idea de los ordenes de magnitud de que se están tratando, el Federal Geodetic Control Committee, organismo encargado de controlar las precisiones e integridades de este tipo de sistemas, obtuvo con el sistema TRANSIT, tras 16 pases, lo que suponía un día de observación, una precisión de un punto con más menos 40 cm. en latitud y longitud, y un metro en altura en términos de desviación estándar (Robertson K. D., 1985).

La nueva generación de satélites de navegación sustituye a las anteriores principalmente por dos motivos: la ventaja en la cobertura y el aumento de precisión. Lo primero se



traduce en disminuir el tiempo de observación necesario para alcanzar determinadas precisiones. Estos sistemas de navegación son: el sistema GLONASS (1976) de la antigua Fuerza Aérea Soviética y el sistema NAVSTAR-GPS (1974) de la U.S Air Force. Estos satélites orbitan a unos 20.000 Km. y cada satélite cubre sobre el 30 - 35 % de la superficie de la Tierra.

Al auge del sistema GPS ha contribuido de forma notable la política empleada para su utilización, empleándose así por un elevado número de usuarios civiles, ya que desde 1984 se les permitió el libre acceso al código C/A, sin coste y en todo el mundo (Stiller A.H.,1988), y existe una directiva del Presidente de los Estados Unidos, Clinton, fechada el 29 de Marzo de 1996 de que la gratuidad del sistema se va a mantener en el futuro. Otro paso adelante fue la eliminación de la Disponibilidad Selectiva en mayo de 2000, aumentando la precisión en el uso civil del GPS (White House. 2000).

Sin embargo el desarrollo del sistema GPS no ha sido como se planteó desde un principio, pues la constelación NAVSTAR (NAVigation Satellite Time And Ranging) se preveía que iba a estar completa en 1991, sin embargo el desastre del transbordador espacial Challenger, el 25 de Enero de 1986, supuso la destrucción de los 4 satélites NAVSTAR del bloque II que llevaba a bordo, (Hartl P., 1988), así el sistema sólo se pudo declarar completamente operativo en el 8 de diciembre de 1993 (Leick A. 1994).

La investigación del GPS para usuarios civiles ha seguido principalmente dos líneas: La técnica, orientada a mejorar la precisión en la determinación de la posición y la velocidad de su determinación, y la segunda, la de las aplicaciones en el entorno social del GPS. Los problemas técnicos del posicionamiento con GPS se solucionaron con la aparición de la técnica relativa, donde la precisión que se puede alcanzar es de pocas partes por millón (ppm) de la línea base medida. (Vanicek P., 1988).

El uso civil del sistema GPS, se puede considerar que comienza en el verano de 1982, cuando por parte de investigadores del MIT (Massachusetts Institute of Technology) se realizan repetidas mediciones con el prototipo de GPS Macrometer para estudiar esta



nueva tecnología. Los test revelaron precisiones en las medidas del orden de 1 a 2 ppm., que son aceptables incluso para medidas de una red de primer orden. (Leick A. 1994).

Como método de posicionamiento y de medida de distancias, la técnica relativa empezó a aplicarse para sustituir sistemas muy precisos de medida de grandes distancias como son el VLBI (Very Long Baseline Interferometry) o el SLR (Satellite Laser Ranging), para su aplicación a geodinámica (Anderson A.J. 1986), sobre todo en estudios de tectónica de placas donde los movimientos son muy pequeños y dilatados en un amplio espacio de tiempo. Uno de los primeros trabajos en este sentido fue realizado por el JPL (Jet Propulsion Laboratory) y la NASA para estudiar el movimiento de separación de las placas entre México y el Caribe (Thornton et al. 1986), o el de Cross y Sellers, que con receptores GPS consiguieron medir que la placa Africana subduce bajo la Europea a una velocidad de 6 cm. al año (Cross P. et al., 1988). El GPS demostró ser una herramienta eficaz para los problemas fundamentales de la tectónica de placas, ya que necesita una herramienta precisa para dos aspectos: el primer problema, es medir la relación entre la escala de deformación de las placas (centímetros) y la separación entre los puntos geológicamente estables de éstas (alrededor de 100 km.), y el segundo, es el de la velocidad de estas deformaciones, medible generalmete por periodos de un año. Otras de las aplicaciones en las que el sistema GPS sustituye al VLBI o el SLR son en estudios de movimientos de rotación de la tierra (velocidad y orientación) y en el cálculo de la órbita de la Tierra (Lichten S. M., 1991).

El GPS también está siendo revolucionario en la transferencia de tiempo, alcanzando con receptores muy precisos, una precisión relativa por dobles diferencias igual a 10^{-6} ó 10^{-7} segundos de la longitud de la línea base en distancias de hasta 1000 km. (Nard G. P., 1988).

La precisión en la determinación de posiciones relativas del sistema GPS en relación con los distintos métodos puede verse en la Figura III-1.

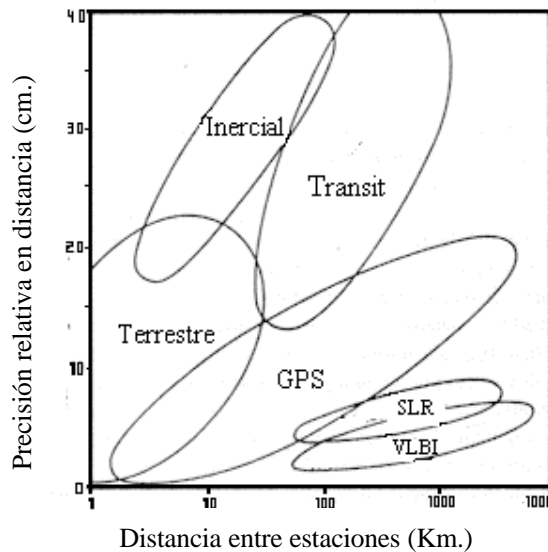


Figura III-1. Precisión en la determinación relativa de distancias por diferentes técnicas.

Las aplicaciones continuaron con la introducción del GPS en las campañas para la observación de redes geodésicas. Los primeros trabajos se realizaron en Ottawa 1983, para redes geodésicas de pequeñas dimensiones, sobre los 50 km. de línea base, y para redes de grandes dimensiones en el oeste de Canadá, cerrando un triángulo con líneas base de 291, 471, y 544 km. obteniéndose resultados satisfactorios. (Wells D. et al. 1986).

En 1985 Remondi introduce el concepto de posicionamiento cinemático relativo, midiendo la fase de la portadora, con el cual era posible obtener precisiones centimétricas con observaciones prácticamente instantáneas, simplemente con la condición de no perder el seguimiento de los satélites durante la trayectoria, para que no hubiese pérdida de ciclos, y establecer un período previo de inicialización para la resolución de la ambigüedad entera. (Remondi, B. W. 1985 (1), (2), (3)).

Con objeto de reducir el tiempo de inicialización, el propio Remondi en 1986, planteó dos técnicas para la resolución de la ambigüedad (Boucher C., 1988):

- Calibrar la ambigüedad sobre una línea base conocida.



- Realizar la técnica del intercambio de antena (Ashkenazi V. et al.,1988).

Hoy en día existen diversas técnicas para la resolución de la ambigüedad entera en postproceso y en modo estático, sin necesidad de recurrir las técnicas anteriores. Éstas se basan en hallar una primera estimación relativa de la posición mediante medidas de pseudodistancias, y a partir de ella, una estimación de los ciclos de la ambigüedad a los diversos satélites GPS.

Centrándonos en el campo de la georreferenciación con GPS, o lo que es lo mismo, las aplicaciones geodésicas-topográficas del GPS, la evolución ha sido paralela a las dos líneas de investigación anteriores; se han ido aumentando las aplicaciones en este campo a la vez que se ha mejorando en la precisión de la posición y en la velocidad de su determinación. Al desarrollo de estas aplicaciones han contribuido de manera notable las mejoras tecnológicas, que principalmente han venido en tres sentidos (Lichten S. M., 1991): tecnología del receptor, tecnología de la antena y en los algoritmos de cálculo. En materia de receptor, la mejora ha supuesto una reducción del tamaño y el abaratamiento de los mismos. Las antenas han mejorado en su tecnología reduciendo ruidos de la señal y el efecto multipath, lo cual supone una mejora en el aumento de la precisión. Y por último, la mejora de los algoritmos de cálculo permite obtener soluciones más precisas en el mismo tiempo de observación o la misma precisión con mucho menor tiempo de observación, a lo que ha contribuido también, el avance informático, ofreciendo una mayor capacidad de cálculo, sin aumento de tamaño ni prácticamente de coste.

Dado el origen militar del sistema GPS, los pioneros en la utilización del GPS en la Ingeniería fueron el U.S. Army Topographic Engineers Center (USATEC), cuyas primeras aplicaciones descritas para GPS diferencial, fueron de levantamiento de puntos de control en fotografía aérea, y el establecimiento de redes de primer y segundo orden en zonas donde no existía la posibilidad de apoyarse en puntos de control existentes (Robertson K. D., 1985). Otra de las primeras aplicaciones fue la determinación del acimut con líneas base cortas, con aplicación en artillería, obteniendo precisiones de 3.4



minutos sesagesimales en una línea base de 22 m, lo cual era suficiente para esta aplicación. (Marth R.B., 1991 y 1992).

Posteriormente, con medidas que emplean la fase de la portadora, se pudo obtener precisión con calidad suficiente para el control geodésico. Se establecieron redes de control horizontal en grandes obras de ingeniería, sustituyendo a la Geodesia clásica que se empleaba en este sentido, ya que el progreso científico-técnico que actualmente se lleva a efecto en todas las ramas de la construcción de obras básicas, plantea cada vez nuevas exigencias ante la calidad y la precisión en el control geométrico de los trabajos de Ingeniería (Sundakov Ya. A. 1981)

Como ejemplos de organismos que optaron por la sustitución del GPS en el control horizontal frente a los métodos tradicionales caben destacar: el National Geodetic Survey, que hace esta labor con GPS desde 1992 (Marth R.B., 1992), o el Departamento de Transportes del Estado de Nueva York (NYSDoT), que desde 1994 emplea el GPS para el control horizontal en los trabajos de densificación de la NYHAN (New York High-Accuracy Reference Network) tanto para la elaboración de los proyectos, como para el diseño óptimo de trazados de carreteras, o el control de la ejecución. (Shinkle K., 1998).

En España, el Instituto Geográfico Nacional empezó a incorporar el GPS en el área de Geodesia a partir de 1989, para la reobservación de las redes de primer orden e inferior, y aproximadamente tres años y medio más tarde para la actualización y control del Mapa Topográfico Nacional. (Dalda Monrón, A. 1997).

Como último nivel en la escala de las precisiones, el nivel milimétrico, el GPS sustituye a los trabajos geodésicos de precisión en el control de estructuras que se hacía en la construcción de grandes obras industriales y altos edificios (Sundakov Ya. A., 1981). Estos trabajos son de monitorización de puntos de las estructuras a estudiar, donde las necesidades de precisión son de 1 mm. a 1 cm. en distancias de pocos kilómetros (Wells D. et al. 1986). Una aplicación concreta es en puentes, para estudios de la



dilatación en horizontal y estudios de deformaciones verticales, y en presas para los estudios de agotamiento de la cerrada. (Ashkenazi V., 1998).

Por último, la aplicación que más incertidumbre ha presentado es la utilización del sistema GPS es el cálculo de la altimetría. Trabajos como los de Wu y Lin, realizados en 1993 con equipos bifrecuencia, nos muestran cómo la planimetría es más precisa que la altimetría en un factor de dos (Wu J. y Lin S.G, 1995), y trabajos realizados con equipos monofrecuencia en el cálculo de redes geodésicas de pequeñas dimensiones arrojan resultados parecidos, mientras que la planimetría daba una precisión de 1 a 1.5 cm, la de la altimetría era de 2 a 2.5 cm (Aguilera Ureña, M.J. 1997).

El GPS calcula posiciones en un sistema geocéntrico tridimensional, de modo que las alturas obtenidas serán alturas elipsoidales, mientras que las alturas obtenidas a partir de nivelación utilizan como datum vertical el geode, obteniéndose alturas ortométricas. La cuestión que se plantea es si utilizando la técnica relativa para el GPS, los incrementos de altura elipsoidal difieren de los incrementos de alturas ortométricas obtenidas por nivelación. Los primeros trabajos en estas aplicaciones fueron para el cálculo de elevaciones a lo largo del río Mississippi, deduciéndose que para posiciones relativas daba buenas precisiones (Robertson K. D., 1985).

Lo visto hasta ahora nos permite pensar que la tecnología GPS se va a emplear masivamente en la resolución de problemas de georreferenciación precisa, pero sin olvidar la perspectiva de que como toda nueva tecnología, ésta necesita de parámetros y metodología de utilización. En este sentido, Leick A. 1992 (2), plantea que si bien la tecnología del GPS es revolucionaria en muchos sentidos, permitiendo solucionar antiguos problemas, esto no está exento de riesgo, esto es, que las soluciones puedan ser de peor calidad, los resultados obtenidos mal interpretados, o quizás que las posibilidades del GPS sean sobrevaloradas.



III.2. GENERALIDADES SOBRE REDES GEODÉSICAS.

Dentro de las aplicaciones geodésicas del GPS, está el cálculo de redes geodésicas, objeto de este trabajo. Una red geodésica es un conjunto de puntos perfectamente localizados en el terreno mediante señales adecuadas, entre los que se han efectuado observaciones de tipo geodésico, con el fin primordial de obtener las coordenadas, su precisión y fiabilidad en términos relativos y absolutos, respecto de un sistema de referencia establecido de antemano (Ferrer Torío R. et al, 1991).

Los objetivos que se pretende cubrir con la creación de una estructura geodésica tal pueden ser los siguientes:

- Constituir el marco principal en el que se puedan basar observaciones menos precisas, que pueden ser la base para mapas topográficos y catastrales.
- Determinar la forma y tamaño de la Tierra y la forma de sus superficies equipotenciales externas, en combinación con observaciones clásicas.
- Detectar movimientos de la corteza terrestre.

De estos objetivos, el primero es una necesidad práctica. Estas redes son muy importantes ya que todo levantamiento de tipo topográfico tiene que estar referido a ellas, tanto en posicionamiento absoluto, como en escala y orientación. No se suele hacer topografía local de áreas desconectadas (Seeber, G., 1993).

Las redes geodésicas pueden ser:

- Redes planimétricas, con el fin primordial de establecer coordenadas latitud y longitud (o bien x , y). Son redes puramente planimétricas las de Primer Orden o Fundamentales, con lados entre 30 y 40 km, dependiendo de la orografía.
- Redes altimétricas, con el fin primordial de establecer la tercera coordenada, altura sobre la superficie del geoide. Estas redes son las redes de nivelación de alta precisión de primer orden, que son totalmente independientes de las anteriores, tanto en su ubicación, señalización y métodos de observación.



- Redes tridimensionales en las que la planimetría y la altimetría se determinan de manera conjunta.

Tradicionalmente, la estructura geodésica se ha compuesto de redes planimétricas y redes altimétricas obtenidas de manera independiente. Esto era debido a que resultaba más fácil y económico la determinación de posiciones horizontales y verticales por separado, requiriendo cada una diferentes tipos de observaciones de campo (Vanicek, P., Krakiwsky, E.J. 1986). Este concepto cambiará al usar el posicionamiento tridimensional GPS.

Las redes de carácter fundamental no son suficientes para las necesidades de otras actividades que no son la geodesia, y muy particularmente la cartografía, lo que obliga a la densificación de estas redes fundamentales, y en particular la de la red planimétrica. Estas densificaciones se pueden resumir en (Ferrer Torío R. et al, 1991):

- Redes de Segundo Orden, con distancias medias entre lados de 15 a 20 km.
- Redes de Tercer Orden, con distancias medias entre lados de 4 a 8 km.
- Densificaciones de Cuarto y Quinto Orden, con distancias medias entre lados de 2 a 3 Km, llegando incluso a 1 Km.

Así, la principal estructura geodésica de un país, se suele denominar Primaria o de Primer Orden. Ésta se densificará en la estructura de Segundo Orden y ésta a su vez en la de Tercer Orden, que contendrá los numerosos puntos necesarios como base para los trabajos topográficos. Por otro lado, los modernos métodos geodésicos, como la Geodesia de satélites, con métodos más precisos que las clásicas triangulaciones, permitirán una estructura de Orden Cero para controlar la estructura de Primer Orden (Seeber, G., 1993).

Otros tipos de redes utilizadas en trabajos de carácter local son:



- Redes de control para levantamientos topográficos, en trabajos cartográficos, catastrales...
- Redes de control para proyectos de ingeniería lineal y de largo recorrido, como carreteras, canalizaciones...
- Redes locales de alta precisión para ingeniería, como por ejemplo, replanteo de grandes túneles, centrales nucleares...
- Redes de alta precisión para control de deformaciones de la Corteza Terrestre, edificios...

III.3. APLICACIÓN DEL SISTEMA GPS AL CÁLCULO DE REDES.

Como se ha visto en el apartado III.1 de este capítulo, desde que el sistema GPS se presentó como una técnica de posicionamiento de gran precisión, económica y disponible continuamente, en todas las condiciones meteorológicas e incluso en tiempo real, se abrieron casi un número ilimitado de posibilidades para su uso dentro de la geodesia.

Con respecto a las aplicaciones geodésicas, los objetivos que se pueden buscar con el sistema GPS son:

- Construcción de una red geodésica nueva.
- Densificación o ampliación de redes existentes.
- Inspección, análisis y mejora de redes existentes.
- Contribución a la determinación de altura y geoide.

En general, una campaña de observación GPS, llevada a cabo para obtener posiciones precisas, conlleva la utilización de un número pequeño de receptores para obtener posiciones de un mayor número de estaciones, cuyas líneas base observadas (vectores de posición relativa entre estaciones) constituirán una red (Rizos, C. 1999). El área cubierta en estos trabajos puede ser tan sólo de varios kilómetros, hasta cientos de kilómetros, o incluso miles en trabajos de geodinámica.



Las observaciones realizadas simultáneamente dentro de un proyecto GPS, constituyen una sesión de observación (Seeber, G., 1993). La duración de una sesión puede ser tan corta como pocos minutos, si se utiliza una técnica rápida para la determinación de las ambigüedades en pequeñas redes, o de varias horas si se requieren grandes precisiones en redes extensas.

La observación de una red se puede llevar a cabo en una única sesión de observación, pero la disponibilidad de equipos, hace normalmente necesario la observación de las estaciones que constituyen el trabajo en diferentes sesiones de observación. Para combinar diferentes sesiones de observación en un mismo trabajo, será necesaria al menos una estación común entre dos sesiones, con el objetivo de conseguir continuidad en el trabajo, aunque el aumento de estaciones comunes entre sesiones diferentes, aumentará la redundancia, y por tanto, precisión en los resultados obtenidos (Leick, A. 1994 (1)).

Considerando:

- r número de receptores operando simultáneamente
- n número de estaciones
- m número de estaciones con más de una observación en dos sesiones diferentes
- s número de sesiones

el número de sesiones necesarias para llevar a cabo la observación de la red será (Seeber, G., 1993):

$$s = \frac{n - m}{r - m}$$

Ec. III-1

siendo s el siguiente número entero al obtenido.



Con dos o más estaciones reocupadas en cada sesión, algunas de las líneas base son determinadas dos veces. Desde un punto de vista económico, será favorable una distribución homogénea de reocupación, ya que ello proporciona una redundancia distribuida por igual con el menor número de sesiones requeridas (Kearsley, A.F.W. 1988) (Grafarend, E.W., Sansó, F. 1985).

La combinación de las soluciones de sesiones diferentes dentro de una red GPS observada, se lleva a cabo a través de la obtención de dos tipos de soluciones (Rizos, C., 1999):

- Ajuste de las observaciones brutas GPS que forman una sesión de observación, obteniendo soluciones de líneas base junto con sus precisiones.
- Ajuste secundario utilizando como observaciones los resultados de las soluciones previas para las sesiones que forman la red, y obteniendo como resultado final la posiciones precisas de las estaciones junto con las precisiones correspondientes.

Respecto al segundo paso, objeto de este trabajo, la manera de llegar a las coordenadas de las estaciones que forman la red, a partir del conjunto redundante de soluciones de línea base observadas, será a través de un proceso de ajuste mínimos cuadrados. Este proceso de ajuste, permite aprovechar la redundancia de observaciones implícita en una red observada, obteniendo, no sólo valores para los parámetros buscados, sino también información adicional sobre precisión de los resultados, permitiendo un control de calidad del trabajo (Kösters, A.J.M. 1992).

Otra cuestión importante para la resolución de una red GPS será el sistema de referencia en el que se quieren expresar las coordenadas de los puntos. Para definir dicho sistema de referencia, será necesario incluir dentro de las estaciones de la red, estaciones cuyas coordenadas sean conocidas en un sistema de referencia concreto, dado que el GPS proporciona posiciones precisas relativas, pero no absolutas (Leick, A., 1995 (4)). Surge así el concepto de punto fiducial, que será una estación cuyas coordenadas son conocidas con una determinada precisión (Seeber, G., 1993). Las posiciones de estos



puntos, junto con sus precisiones, servirán para definir el sistema de referencia de un trabajo, además de conectar diferentes sesiones de observación (Rizos, C., 1999).

A la hora de definir el sistema de referencia, habrá que tener en cuenta que las observaciones GPS vienen expresadas en un sistema de referencia global, el WGS-84, mientras que las observaciones tradicionales se han tomado respecto a sistemas de referencia locales. Así, una aplicación del GPS puede ser la densificación de redes locales, que requerirá un tratamiento especial de los sistemas de referencia, con la introducción de la transformación entre sistemas de referencia en el ajuste de la red GPS observada (Junkins D., Garrand G. 1998). El estudio de los diferentes sistemas de referencia a tener en cuenta en georreferenciación se tratará en el capítulo siguiente.

III.3.1. Densificación de redes existentes.

Como ya se ha dicho, una aplicación geodésica del GPS es la densificación y ampliación de redes existentes. La densificación de una red existente se puede tratar de diferentes modos (Seeber, G., 1993):

1. Existe una red terrestre clásica precisa de segundo o de tercer orden. En estos casos, el GPS se usa como una herramienta topográfica moderna para la densificación precisa de redes. Los puntos de control existentes se toman como estaciones de referencia fijas. Se mantiene el datum nacional existente.
2. Existe una red terrestre de media o baja precisión y las coordenadas existentes deben mantenerse. En estos casos, la distorsión de la red se introduce dentro de los resultados GPS precisos. El GPS se usa como un método rentable de interpolación dentro de la estructura de referencia existente. Este procedimiento es aceptable como una solución intermedia, en particular, en países en desarrollo, hasta que se pueda establecer una red completamente nueva y un datum, basados en técnicas por satélite.
3. La red terrestre existente se combina con las nuevas observaciones GPS. En este caso, se mantiene el datum; sin embargo, la red completa se reajusta y se refuerza



con la inclusión de las medidas GPS. Se añaden nuevos puntos a la red existente de un modo óptimo. Este método sólo se puede aplicar si se tiene suficiente información estocástica de la red existente.

III.3.2. Consideraciones sobre altimetría.

Con respecto a la determinación de la altura, el sistema GPS da las coordenadas tridimensionales de cada punto, que se pueden transformar a coordenadas elipsoidales, longitud, latitud y altura.

Hay que destacar aquí el grave problema que supone la determinación altimétrica con GPS. La componente altura es particularmente sensible a la configuración geométrica de los satélites (sólo se tienen satélites por encima del horizonte) y a errores no modelados en la refracción atmosférica (Langley, R.B., 1997). Así, como se ha visto en el apartado III.1 de este capítulo, estudios por simulación muestran que los errores en la componente vertical pueden ser el doble o incluso más que los errores en las componentes horizontales. Sin embargo, si se consideran diferencias de alturas, estos errores se pueden reducir o incluso eliminar, pudiéndose considerar las técnicas GPS como un medio para la determinación de alturas de modo preciso.

Es obvio que la altura obtenida de la solución GPS es una cantidad puramente geométrica (altura elipsoidal). En la mayoría de los casos, lo que interesa es la altura relacionada con el campo de la gravedad, es decir, la altura ortométrica referida al geoide, más que la altura elipsoidal. La relación que existe entre ambas, como se verá al hablar del geoide en el capítulo siguiente, es:

$$h = H + N$$

Ec. III-1

siendo

h altura elipsoidal obtenida de observaciones GPS



H altura ortométrica obtenida mediante nivelación

N altura del geoide en el punto

Así, si se tienen dos de los tres tipos de datos que intervienen, el tercero se puede determinar (Leick, A. 1995 (4)):

- con alturas de geoide precisas, las alturas ortométricas se pueden obtener de datos GPS, cuando se quiera controlar o substituir la información de altura obtenida por nivelación
- con información de nivelación precisa y alturas elipsoidales obtenidas con GPS, se puede derivar o controlar información sobre el geoide.

Por otro lado, si lo que interesa es tan sólo controlar los cambios de altura que experimenta un punto, basta con la determinación de la altura GPS de manera repetida.

Por todo esto, las tres aplicaciones del GPS en la determinación de la altura son (Seeber, G., 1993):

- determinación de cambios de altura mediante controles GPS repetidos
- obtención alturas ortométricas siendo el geoide conocido
- determinación del geoide

La determinación de alturas ortométricas mediante mediciones GPS es un objetivo que se intenta alcanzar para poder substituir los trabajos clásicos de nivelación, costosos tanto en tiempo como en dinero. La principal limitación en este sentido es la necesidad de una precisa información sobre el geoide.

III.3.3. Aplicaciones informáticas comerciales para el ajuste de observaciones GPS.

En los últimos años, ha proliferado la aparición de aplicaciones informáticas para el ajuste de las observaciones GPS que constituyen una red GPS observada.



Una primera clasificación de estas aplicaciones informáticas puede ser (Seeber, G., 1993):

1. Software comercial, procedente de fabricantes de receptores GPS.
2. Software científico, desarrollado por investigadores pertenecientes a organismos científicos.

Con respecto al primer grupo, son programas diseñados para el procesado de datos procedentes de un tipo particular de receptores, incluyendo normalmente un módulo para el ajuste de observaciones tomadas simultáneamente; sólo los más avanzados están adaptados a recibir datos procedentes de otros receptores o del procesado con otros programas, a través del formato estándar RINEX, o de ciertos programas traductores. Como norma general, los usuarios de estos programas sólo pueden disponer del programa como un ejecutable, sin disponer de la documentación completa a cerca de los modelos matemáticos utilizados. De este modo, el uso de estos programas, será adecuado sólo en ciertas aplicaciones, con un limitado número de opciones disponibles, con el objetivo de que sean herramientas fáciles de utilizar por personas con un nivel bajo de formación en geodesia, temas de ingeniería o incluso en conocimientos sobre la tecnología GPS (Seeber, G., 1993).

Ejemplos de este grupo de programas son:

- SKI-PRO. (Leica Geosystems). Paquete de programas integrado en una aplicación informática que permite procesar datos GPS, obteniendo soluciones WGS-84 y en los sistemas locales. <http://www.leica-geosystems.com/gps/product/ski-pro.htm>
- Trimble Geomatics Office (TGO). (Trimble). Incluye el programa Wave para el procesado de líneas base y un módulo de Ajuste de Redes. <http://www.trimble.com/geomaticsoffice.html>
- Ashtech Office Suite for Survey (AOS). (Ashtech, Inc). Aplicación integrada para el procesado de observaciones GPS y GPS+ GLONASS, incluyendo un



módulo para el ajuste de redes. Aplicación desarrollada por Spectra Precision Terrasat GmbH. <http://www.ashtech.com/>

El desarrollo de un sistema de procesamiento de observaciones GPS, para una aplicación en cualquier ámbito de actuación, es una tarea más compleja. Diferentes instituciones científicas han desarrollado paquetes de este tipo, intentando conseguir aplicaciones que se puedan utilizar en las diferentes situaciones que se puedan presentar:

- Uso profesional estándar para el procesamiento de pequeñas redes.
- Uso profesional en trabajos de gran precisión, incluso para grandes distancias.
- Uso científico, permitiendo el análisis de los datos y los resultados en trabajos de investigación.

Ejemplos de este segundo grupo de programas informáticos son:

- BERNESE, desarrollado por la universidad de Berna (Suiza). (<http://www.cx.unibe.ch/aiub/bernese.html>) Orientado a aplicaciones GPS de muy alta precisión, permitiendo el procesamiento de datos de redes de estaciones permanentes de modo rápido y eficiente. La última versión, 4.2 está diseñada para el ajuste de grandes redes (>100 receptores), permitiendo soluciones libres de redes.
- DIDOP (Differential POsitioning Program) desarrollado por la universidad de New Brunswick (Canadá) (<http://home.istar.ca/~princo/GRSL/dipop.html>). Es un programa que calcula posiciones relativas precisas usando observables de fase GPS, permitiendo el ajuste de líneas base y de redes usando observaciones procedentes de los diversos receptores GPS existentes en el mercado. Adicionalmente se ha desarrollado también el módulo NETVAL que proporciona varias herramientas analíticas para evaluar la precisión de trabajos realizados sobre redes de validación.
- GEONAP desarrollado por la Universidad de Hannover (Alemania) (<http://www.geopp.de/geonap/page1.html>).



- GIPSY-OASIS (GPS-Inferred Positioning SYstem and Orbit Analysis SIMulation Software), desarrollado por el Jet Propulsion Laboratory (USA) (<http://gipsy.jpl.nasa.gov>).
- TOPAS desarrollado por el Instituto de Geodesia y Navegación de la Universidad FAF de Munich (Alemania) en la década de los 80. (<http://ifen.bauv.unibw-muenchen.de/Institut/index.shtml>).
- GAMIT-GLOBK desarrollado por el Instituto Tecnológico de Massachusetts MIT (USA). (<http://www-gpsg.mit.edu/~simon/gtgk>).

Además de las operaciones estándar, estos paquetes informáticos suelen incluir opciones que permiten el tratamiento científico de los datos, lo que hace de ellos herramientas de manejo complejo, aptas tan sólo para personas con gran experiencia, y con amplio conocimiento sobre geodesia, teoría de errores y el sistema GPS. Sin embargo, en contrapartida, los modelos matemáticos utilizados están perfectamente documentados y discutidos en la literatura publicada.



IV. SISTEMAS DE REFERENCIA.

IV.1. Introducción.

Antes de la aparición de las técnicas de posicionamiento espaciales, la mayoría de los países consideraban como suficientes para la referenciación de actividades topográficas y cartográficas la utilización de sistemas de referencia definidos localmente.

Con el avance de los sistemas de posicionamiento con satélite, como el Sistema de Posicionamiento Global (GPS), y su equivalente ruso (GLONASS), se empieza a ver necesario la utilización de un único sistema de referencia global. Así, hoy día, técnicas como GPS y GLONASS, junto con otras como VLBI (Very Long Baseline Interferometry), SLR (Satellite Laser Ranging), LLR (Lunar Laser Ranging), han tenido una influencia fundamental en la definición y el uso de los datums geodésicos utilizados. Además, la naturaleza global de las observaciones de estos sistemas espaciales está significando que la geodesia, como ciencia global, está aumentando su importancia en las actividades topográficas y cartográficas.

Es por esto que hoy día, la mayoría de los países están actualizando sus sistemas de referencia con el objetivo de ser más compatibles con los sistemas de referencia en los que se basan las técnicas espaciales, siendo la mayor tendencia a utilizar un datum asociado con ITRF (International Terrestrial Reference Frame). Al nivel de precisión que se requiere para la mayoría de las prácticas de posicionamiento con GPS, los sistemas basados en el marco ITRF son altamente compatibles con las medidas tomadas con dicho sistema.

El hecho de que los sistemas de posicionamiento mediante satélites son de naturaleza tridimensionales, lleva a la necesidad de relacionar los datums horizontales y verticales. Surge así el problema con la altimetría, pues estos sistemas de posicionamiento mediante satélite miden alturas sobre el elipsoide, que no son compatibles con las



alturas ortométricas utilizadas tradicionalmente. Esto lleva a la necesidad de un estudio particular de los datum altimétricos utilizados, así como los modelos de geoide relacionados. Hoy día, nuevos modelos geopotenciales globales, novedosas técnicas para la determinación del geoide e investigaciones para la obtención de un Datum Vertical Global pretenden mejorar las posibilidades de uso de los sistemas de posicionamiento por satélite en cuanto a la altimetría.

IV.2. Sistemas de referencia, marcos de referencia y datum.

Los términos de datum, sistema de referencia y coordenadas están muy interrelacionados, y es usual que su uso se intercambie a la hora de hablar de georreferenciación, perdiendo cada uno de ellos su significado concreto (Junkins D., Garrand G. 1998).

En primer lugar, la georreferenciación o información de la posición mediante coordenadas, la podemos definir como un conjunto de números que expresan la posición de un punto en un espacio Euclídeo (AFNOR 1995).

Para la mayor parte de los problemas geodésicos, se utiliza la geometría de un espacio Euclídeo de una, dos o tres dimensiones. Para definir un sistema de referencia en un espacio Euclídeo n-dimensional, es suficiente con escoger n coordenadas de un punto arbitrario, $1/2 \cdot n \cdot (n-1)$ ángulos entre los ejes de coordenadas y una unidad de medida, con la condición de que todos los ejes de coordenadas tengan un punto en común, el origen de coordenadas cero (Kösters A.J.M. 1992). Por razones de conveniencia, es preferible que los ejes sean perpendiculares entre sí, definiendo así un sistema de referencia cartesiano.

Particularizando para $n=3$, es decir, un sistema de referencia Euclídeo tridimensional, éste está definido por siete parámetros: tres para la posición del origen, que supone tres grados de libertad para una translación, tres para su rotación que supone tres posibles ejes de rotación, y uno para la unidad de medida o escala, que supone medidas



homogéneas dentro del mismo sistema de referencia (Pachelski W. 1994). De este modo, la posición de cualquier punto sobre la superficie de la tierra, en este sistema de referencia Euclídeo tridimensional, vendrá dado por unas coordenadas (x, y, x) .

Avanzando, si a este sistema de referencia tridimensional se le añade un elipsoide de revolución como aproximación a la superficie de la tierra, se tiene el concepto tradicional de datum geodésico (Junkins D. Garrand G. 1998). El elipsoide es realmente una superficie bidimensional en el espacio tridimensional definido por el sistema de referencia al que se asocia. Así, el concepto de datum geodésico, se asocia tradicionalmente al posicionamiento horizontal, transformando las coordenadas cartesianas tridimensionales de un punto en las coordenadas elipsoidales correspondientes. La componente vertical de posición, tradicionalmente no se ha venido asociando a este datum geodésico, sino a un datum altimétrico independiente, que suele ser el nivel medio del mar (Higgins, M.B. 1999).

Los sistemas definidos hasta ahora (sistema de referencia y datum geodésico), no son más que conceptos, sin presentar una realidad física en el terreno. Para hacerlos reales, será necesario asignar valores numéricos para las coordenadas de puntos tangibles del terreno (Junkins D. Garrand G. 1998). Surge así el concepto de marcos de referencia, como conjunto de puntos materializados en el terreno, cuyas coordenadas son conocidas en un determinado sistema de referencia. El marco de referencia existe físicamente en el terreno, representando la realización práctica del sistema de referencia a través de observaciones y de las coordenadas de un conjunto de estaciones (Seeber G. 1993). Así, para determinar las coordenadas de los puntos que lo componen, se debe aplicar alguna técnica de posicionamiento precisa, ya que no se pueden medir directamente coordenadas, sino funciones de éstas como ángulos o distancias. Estas estaciones serán los puntos fiduciales, puntos a los que se referirán y conectarán otros trabajos de posicionamiento (Junkins D. Garrand G. 1998).

Así, la definición de la información de posición de un punto sobre el terreno, estará definida por tres conjuntos de datos:



- El tipo de información de posición, es decir, el sistema de coordenadas.
- El tipo de referencias utilizadas para su determinación, es decir, el marco de referencia al que pertenece.
- Los valores que definen la posición.

Los tipos de marcos de referencia los podemos clasificar (AFNOR, 1995):

1.- Marco de Referencia Tridimensional:

1.1.- Geodésico.

1.1.1.- Geográfico:

Geométrico: ϕ, λ, h .

Geodésico: ϕ, λ, H .

1.1.2.- Plano: E, N, H.

1.1.3.- Cartesiano: X, Y, Z.

1.2.- Cartesiano Local: u, v, w.

1.3.- Astronómico: Φ, Λ, H .

2.- Marco de referencia bidimensional, horizontal o planimétrico:

2.1.- Geodésico:

2.1.1.- Geográfico: ϕ, λ .

2.1.2.- Plano: E, N.

2.2.- Cartesiano Local: u, v.

2.3.- Astronómico: Φ, Λ .

3.- Marco de referencia unidimensional o altimétrico:

3.1.- Geodésico.

3.1.1.- Geográfico:

Geométrico: h.

Geodésico: H.

3.2.- Cartesiano Local: w.

En la clasificación anterior, la información se estructura en tres niveles: el primero es el número de dimensiones, el segundo describe el sistema de coordenadas (unidades,



datum...), y el tercero hace referencia a la forma de expresar las coordenadas (por ejemplo, una posición en un espacio tridimensional, y referida a un datum en concreto puede expresarse con coordenadas cartesianas, geográficas o planas).

Según el tipo de datum que utilicemos, necesitaremos definir:

- Elipsoide Geodésico.
- Meridiano cero.
- Sistema de Unidades: lineal y angular.
- Modelo de Geoide.
- Proyección Cartográfica.

IV.3. Sistemas y Marcos de referencia Globales.

El sistema GPS utiliza dos tipos de sistemas de referencia (Seeber G. 1993):

- Sistema de referencia inercial, fijo en el espacio, para la descripción del movimiento de los satélites.
- Sistema terrestre geocéntrico convencional, para la descripción de la posición de las estaciones de observación.

IV.3.1. Sistema de Referencia Inercial.

La determinación de las coordenadas de los satélites se realiza aplicando las leyes de Kepler, las cuales son válidas en un sistema de referencia inercial.

El sistema inercial que se usa para la descripción del movimiento de los satélites es el Sistema de Referencia Celeste Convencional (CCRS), que queda definido por:

- Origen el centro de masas de la Tierra.
- El eje Z es el eje de rotación de la Tierra. De esta forma el plano fundamental será el Ecuador instantáneo.



- El eje X está en la dirección del punto vernal (intersección del plano ecuatorial terrestre y la eclíptica).
- El eje Y se sitúa en la perpendicular a ambos en sentido dextrógiro.

Este sistema, definido como inercial debido a la pequeña aceleración que experimenta el centro de masas de la Tierra en su movimiento anual alrededor de la Tierra, es llamado a veces, cuasinercial (Hofmann-Wellenhof, B. 1993).

El CCRS adoptado desde el día 1 de enero de 1984 por la IAU (Unión Internacional Astronómica) queda definido por el Ecuador y equinocio instantáneos del día 1 de enero del año 2000 a las 12 horas, que corresponde a la fecha juliana 2451545, designada por J.2000, y considera como geocentro el centro de masas de la Tierra (Seeber G. 1993).

Desde el día 1 de enero de 1988, la definición y mantenimiento del CCRS y su referencia respecto de otros sistemas han sido asumidos por el International Earth Rotation Service (IERS).

El problema que presentan estos tipos de sistemas de referencia es que, respecto a ellos, las coordenadas de un punto fijo sobre la Tierra varían con el tiempo. Este problema se resuelve definiendo un sistema de referencia fijo con la Tierra: sistemas de referencia terrestres.

IV.3.2. Sistema terrestre geocéntrico convencional.

Debido a que el sistema instantáneo no es muy operativo, habrá que elegir un sistema geocéntrico único para referenciar las coordenadas de los puntos sobre la Tierra. Este sistema será el Sistema de Referencia Terrestre Convencional (CTRS). La transformación necesaria para pasar de posiciones referidas al CCRS al Sistema de Referencia Terrestre Convencional se realiza según (Caturla, J.L. 1988):



$$\text{CTRS} = (\text{A})(\text{B})(\text{C})(\text{D}) \text{CCRS}$$

Ec. IV-1

siendo:

(A) = movimiento del polo.

(B) = tiempo sidéreo

(D) = precesión astronómica. Es el movimiento de giro que realizan los polos celestes alrededor de los polos de la eclíptica, describiendo un círculo con sentido retrógrado.

(C) = nutación astronómica. Es el movimiento de giro del polo, que describe una elipse, en sentido retrógrado, como causa de la atracción lunar.

Una particular materialización de CTRS es el Sistema de Referencia Terrestre Internacional (ITRS), con las siguientes características (Boucher C. et al 1996):

- El origen es el centro de masas de la Tierra, incluyendo océanos y atmósfera.
- La unidad de longitud es el metro.
- La orientación de sus ejes es consistente con los definidos por el Bureau International de L'Heure (BIH), a principios de 1984 de acuerdo con la resolución de la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG) y la Unión Internacional Astronómica (IAU).
- Los cambios de orientación en el tiempo son tales que no hay rotación residual con respecto al movimiento horizontal de la corteza terrestre.

Tres materializaciones de Sistema de Referencia Terrestre Internacional son:

- El Marco de Referencia Terrestre Internacional (ITRF).
- El Sistema WGS-84 utilizado por el GPS.
- El PZ90 utilizado por GLONASS.



IV.3.2.1. El Marco de Referencia Terrestre Internacional (ITRF).

El Marco de Referencia Terrestre Internacional, establecido y mantenido por el International Earth Rotation Service (IERS), es la materialización del ITRS a través de la realización de observaciones espaciales en sitios específicos alrededor de la superficie terrestre, teniendo en cuenta factores en la observación y procesado de las observaciones. Estos factores incluyen (Higgins M. B. 1999):

- Relación entre el Sistema de Referencia Celeste Convencional y el ITRS, teniendo en cuenta la velocidad de rotación de la tierra.
- Coordenadas a priori de las estaciones.
- Modelo de movimiento de la tectónica de placas utilizado, para tener en cuenta las velocidades de las estaciones.
- Modelo geopotencial utilizado para el campo de gravedad de la Tierra.
- Constante gravitacional para la masa de la Tierra, GM.
- Valor adoptado para la velocidad de la luz.
- Influencia de las mareas.
- Presión de radiación solar.
- Efectos de errores del reloj.
- Efectos atmosféricos.
- Variaciones de antena.

Del procesado de las observaciones tomadas con técnicas geodésicas espaciales como VLBI, SLR, LLR, y teniendo en cuenta los factores anteriores, el IERS produce un ITRF como coordenadas para un conjunto de estaciones, junto con sus velocidades, para un instante dado, normalmente, el comienzo del primer día de un año dado. Así, por ejemplo, el ITRF94 es el Sistema de Referencia Terrestre Internacional materializado para el 1 de enero de 1994 (Boucher C. et al 1996).

En 1991, el IERS añadió el GPS a la lista de técnicas utilizadas. El IERS CB (International Earth Rotation Service Central Bureau) calcula la solución anual ITRF y



la publica. La primera solución ITRF publicada fue en 1988 (Alamini, Z., Boucher, C. 1996).

Un ITRF normalmente vendrá dado por coordenadas cartesianas (x, y, z). Así, si se quiere expresar en coordenadas elipsoidales, será necesario introducir un elipsoide de referencia. El elipsoide de referencia asociado con los ITRF recientes es el Sistema de Referencia Geodésico de 1980 (GRS80).

Un desarrollo importante, y que ha permitido el establecimiento del ITRF a nivel global, y accesible mundialmente, fue el establecimiento del Servicio Internacional GPS (IGS). El IGS es una red global de estaciones que disponen de receptores GPS de alta calidad, observando continuamente. La Figura IV-1 muestra el mapa de estaciones IGS actual.

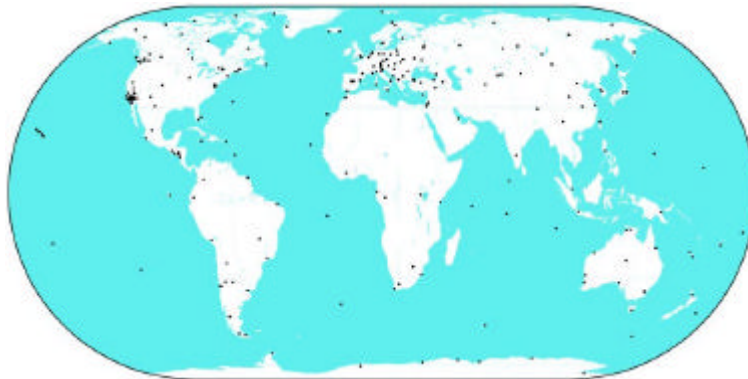


Figura IV-1. Mapa de Red de Estaciones IGS.

El IGS dispone de centros de datos que hacen disponibles las observaciones brutas, así como otros productos derivados, fácilmente accesibles vía Internet (<http://igscb.jpl.nasa.gov>).

El producto más importante del IGS son las efemérides precisas para los satélites GPS. Así, observaciones conectándose con estaciones ITRF y procesadas usando efemérides precisas facilitadas por el IGS permiten la densificación del marco de referencia ITRF mediante redes geodésicas locales.



IV.3.2.2. El Sistema WGS-84.

El sistema de referencia utilizado por el GPS es el sistema WGS-84 (World Geodetic System 1984), establecido por DMA (US Defense Mapping Agency, conocido hoy como National Imaging and Mapping Agency, NIMA), sistema utilizado tanto para las estaciones de control como para los usuarios del sistema. Se trata de un sistema de coordenadas cartesianas geocéntrico, un elipsoide medio para toda la Tierra, y modelo de gravedad (EGM), y unos parámetros de transformación con los otros datum geodésicos (Lohmar F. J. 1988).

Este sistema de referencia terrestre queda definido por un elipsoide cuyos parámetros fundamentales son (DMA, 1991):

- Semieje mayor: $a = 6378137 \text{ m}$
- Aplanamiento: $f = 0.00335281066474$
- Constante gravitacional: $\mu = 3986005 \cdot 10^8 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$
- Velocidad de rotación: $\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

El eje menor (parámetro secundario) se deduce de los valores fundamentales y tiene un valor $b = 6356752.3142 \text{ m}$. Este elipsoide define su posición espacial de la siguiente manera (Ferrer Torío, R., et al 1991):

- origen el centro de masas de la Tierra (geocentro).
- Eje Z paralelo al denominado CIO (Origen Convencional Internacional), que coincide con la posición del polo medio en 1903 (media de la situación del polo entre los años 1900 y 1905), definido por el Bureau International de L'Heure (BIH) y concordante con las determinaciones del International Polar Motion Service (IPMS).
- El eje X está definido por la intersección del plano ecuatorial medio de 1900 a 1905, y el plano meridiano de referencia (paralelo al meridiano cero de Greenwich definido por el BIH).



- El eje Y está situado en el plano ecuatorial medio, y constituye con los ejes anteriores, un sistema de coordenadas rectangular directo.

El sistema WGS-84 constituye un Sistema de Referencia Geodésico y se construyó a través de observaciones gravitatorias, desviaciones de la vertical, observaciones a satélites TRANSIT, por técnicas Doppler, observaciones VLBI, observaciones SLR, etc.

El sistema WGS-84 supone la materialización de un Sistema de Referencia Terrestre convencional, muy próximo a los actuales ITRF. Sin embargo, dado que originalmente se basó en observaciones del Sistema Transit, la primera materialización del sistema WGS-84 sólo tenía una precisión de uno o dos metros (Higgins, M.B. 1999). A comienzos de 1994 (comienzos de la semana GPS 730), el uso de un valor revisado para la constante de gravitación (GM) junto con coordenadas mejoradas para las estaciones de seguimiento GPS del DMA, condujeron al WGS-84 (G730), consistente con el ITRF con un nivel de precisión de 10 cm (Malys S, y Jensen P. 1994).

Las posiciones de los satélites radiodifundidas en la señal GPS están expresadas en este sistema WGS-84. El elipsoide WGS-84 es similar al GRS80, excepto en una pequeña diferencia en el término del aplanamiento (en el noveno decimal).

El paso de un sistema de referencia inercial a otro no inercial implica la corrección de los movimientos de precesión y nutación astronómica, así como los movimientos de variación del polo y la corrección del tiempo sidéreo (variación de la velocidad de rotación de la Tierra). Estos valores son publicados periódicamente por el BIH (Bureau International de l'Heure).

La transformación de los datos espaciales CCRS al sistema WGS-84 se realiza de manera automática en el receptor GPS, mediante el software que incorpora.



IV.4. Sistemas de Referencia Locales.

Con el fin de minimizar los errores en la proyección, tradicionalmente se han venido utilizando los denominados sistemas de referencia locales. Estos sistemas de referencia se suelen determinar por la selección de un sistema de referencia horizontal y otro vertical, normalmente independientes, por el hecho de que las observaciones usadas tradicionalmente para la determinación de la posición planimétrica han sido de naturaleza diferente a las utilizadas para obtener posiciones altimétricas.

IV.4.1. Sistema de referencia horizontal.

El sistema de referencia horizontal vendrá determinado por la selección de los siguientes elementos (Higgins, M.B. 1999):

- Tamaño y forma del elipsoide de referencia, (normalmente el que mejor se adapta en la zona), definido por el semieje mayor y aplanamiento de dicho elipsoide.
- Posición del elipsoide, definido mediante la longitud, latitud y altura elipsoidal del Punto fundamental o datum horizontal.
- Origen de longitudes.

El datum es el punto de tangencia entre el elipsoide y el geoide. En dicho punto, la normal al geoide y al elipsoide coinciden. Asimismo, en este punto, las coordenadas geodésicas (longitud y latitud geodésicas) y astronómicas (longitud y latitud astronómicas) coinciden.

Esta operación de situar tangentes ambas figuras, supone determinar en el espacio un sistema de ejes del elipsoide de revolución, cuyo origen ya no coincide con el centro de masas de la Tierra, y cuya orientación no tiene que ser paralela a la del sistema cartesiano tridimensional geocéntrico.

En geodesia tradicional, a partir del punto fundamental, por medida de ángulos y de distancias, se van determinando las coordenadas geodésicas de una red de puntos del terreno (vértices geodésicos), complementado en ciertos puntos por observaciones



astronómicas (puntos Laplace). Estos cálculos se realizan reduciendo tanto ángulos como distancias al elipsoide (Bomford, G. 1980).

El sistema de referencia horizontal en España, para la antigua red geodésica existente, era (Martín Asín, F. 1983):

- Elipsoide: Struve.
- Datum horizontal: Observatorio Astronómico de Madrid.
- Origen de longitudes: Meridiano de Madrid.

Esta antigua red geodésica española fue compensada por el Army Map Service, dentro del bloque del sudoeste europeo, adoptando el Sistema de Referencia Geodésico Europeo (RE-50 o ED-50). Este sistema está definido por (López Curvo, S. 1993):

- Elipsoide: Hayford o Internacional. Este elipsoide queda definido por los siguientes parámetros:

$$a = 6378388 \text{ m}$$

$$e^2 = 0.00672267$$

- Datum: Postdam.
- Origen de longitudes: Meridiano de Greenwich.

IV.4.2. Sistema de referencia vertical.

Asociado al sistema de referencia horizontal, se determina un sistema de referencia vertical. Lo más usual es adoptar como superficie de referencia el geoide, y seleccionar un punto como origen de altitudes (datum vertical).

En el caso de España, este datum vertical es el nivel medio de los mares en calma de Alicante (Martín Asín, F. 1983). A partir de este datum altimétrico, se determinan mediante redes de nivelación de alta precisión las cotas ortométricas de un conjunto de puntos distribuidos por todo el territorio nacional. La propia metodología utilizada (método de nivelación geométrica) hace que la superficie de nivelación se conserve



paralela al geoide, aunque en el caso de nivelaciones de alta precisión se realicen correcciones gravimétricas para la determinación de las altitudes.

Sin embargo, surge aquí una cuestión importante a la hora de utilizar el GPS para determinaciones altimétricas, como se introdujo en el capítulo anterior. El sistema GPS mide diferencias de alturas elipsoidales entre estaciones, por lo que para obtener alturas ortométricas, con significado físico, será necesario disponer de un modelo suficientemente preciso para la separación del geoide y el elipsoide: modelo de geoide. A esta necesidad contribuye el hecho de que el GPS puede medir diferencias de altura elipsoidal de estaciones separadas una gran distancia (Higgins, M.B. 1999).

IV.4.2.1. Modelos de geoide.

Dado que el geoide es una superficie equipotencial dentro del campo gravitatorio terrestre, el cálculo de alturas sobre el geoide conlleva el estudio de variaciones gravitatorias entre estaciones, que reflejen variaciones en la superficie del geoide. Estos cálculos se fundamentan en la integral de Stokes (Heiskanen W.A. Moritz H. 1967).

Como resulta imposible calcular esta integral para la superficie entera de la Tierra, lo que se hace es una aproximación utilizando los términos de onda larga y los términos de onda corta, calculados por separado. Los términos de onda larga se calculan como anomalías de la gravedad a partir de un modelo geopotencial global. Comparando después con observaciones reales de la gravedad, por diferencia, se obtienen los términos de onda corta. La suma de los componentes de onda larga y de onda corta nos da el valor de la altura del geoide para un punto.

Es de destacar, que en la mayoría de los países, la cobertura de observaciones locales gravimétricas es mínima, por lo que lo único que se puede utilizar es un modelo geopotencial global, contando con tan sólo los términos de onda larga, y con la precisión que eso supone.



Un modelo geopotencial global se calcula como una serie de expansiones de armónicos esféricos de un máximo orden y grado. Un modelo geopotencial ampliamente utilizado ha sido el OSU91A (Rapp, R. et al, 1991), que es una expansión de orden y grado 360. Esto significa que permite una caracterización del geoide con una longitud de onda por debajo del medio grado (≈ 55 Km.).

Otro modelo geopotencial global más reciente es el EGM96 (Earth Geopotencial Model 1996). Igual que el anterior, EGM96 es también una expansión de orden y grado 360, con la misma máximo resolución nominal. Sin embargo, los datos se han mejorado, con lo que se han conseguido mejorar la resolución en muchas partes del globo. La mejoras consisten en una mejor cobertura de datos gravimétricos en zonas donde antes eran pocos o ningunos y un uso mejorado de la altimetría con satélite (NIMA (3)).

Para el cálculo de los términos de onda corta del geoide, a partir de observaciones locales de gravedad, se puede utilizar diferentes técnicas, como la integración directa o ajuste mínimos cuadrados. Una técnica relativamente más reciente es la aproximación a través de la transformación rápida de Fourier, llamadas técnicas FFT (Schwarz, K.P. et al, 1990).

La precisión en la altura del geoide calculada está fuertemente influida por cómo los datos de gravedad utilizados representen el campo actual de gravedad. Una tendencia para mejorar esta información es utilizar observaciones de satélites altimétricos, para la densificación de datos gravitatorios. Otra tendencia ha sido el uso de Modelos Digitales de Elevación (MDE) para conseguir tener en cuenta el efecto que provoca el terreno sobre el campo gravitatorio, normalmente, utilizando técnicas FFT. Los MDE pueden resultar de gran utilidad para detectar variaciones bruscas del campo gravitatorio, para así mejorar la interpolación de los datos de gravedad observados (Higgins, M.B. 1999).

El incremento en el uso del sistema de posicionamiento GPS, ha conducido a la búsqueda de modelos de geoide locales precisos. Éstos, normalmente vienen en la forma de una malla de alturas de geoide, que pueden ser interpoladas para obtener la



ondulación del geoide en un punto sobre el terreno dado. Sunkel presenta un resumen de recientes geoides desarrollados en distintos países (Sunkel, H. 1996).

En el caso de España, con el proyecto Regente se pretende conseguir un Modelo de Geoide para España, de precisión centimétrica, que relacione alturas elipsoidales sobre el elipsoide WGS-84 con alturas ortométricas. Para conseguir esto, se ha incluido en la observación de Regente clavos de las líneas de NAP (Nivelación de Alta Precisión) (IGN, 2000).

IV.5. Modelo Geodésico Tridimensional.

Con los métodos clásicos, las medidas geodésicas realizadas sobre la superficie de la Tierra debían ser referidas a una superficie de referencia, bien la superficie del elipsoide o el plano de proyección según el sistema cartográfico correspondiente. Sobre dicha superficie se realizaba el ajuste de las observaciones por el que se obtenía la posición de los vértices de estación. El tratamiento era bidimensional, y los problemas tridimensionales eran descompuestos en planimétricos (bidimensionales) y altimétricos (unidimensionales). Esto se refleja en las redes clásicas existentes, descompuestas en redes planimétricas y redes altimétricas.

Sin embargo, al utilizar observaciones GPS en aplicaciones geodésicas, no se puede olvidar la naturaleza tridimensional de dichas medidas (sus tres componentes son determinadas conjuntamente). Por tanto, el modelo clásico utilizado con las observaciones de ángulos y distancias tradicionales no resulta muy útil (Leick, A. 1994).

Diversos autores (Bomford G. 1980), (Vanicek P. y Krakiwsky E. 1986), (Seeber G. 1993) y (Leick A. 1994), proponen el cambio de datum geodésico tridimensional al cartesiano local, a través de una transformación al Horizonte Geodésico Global (HGL), como herramienta para integrar los datos del posicionamiento con GPS con datos de



observaciones terrestres, realizadas por Topografía clásica, como es el caso de las redes geodésicas

El Horizonte Geodésico Local (HGL), es un plano tangente al elipsoide, o para ser más preciso paralelo a un plano tangente, ya que este plano se sitúa en un punto sobre la superficie terrestre, esto es a una determinada altura sobre el elipsoide. El sistema de referencia así definido, tiene el eje Y (N) en la dirección del norte geográfico, el eje de la altura h es perpendicular a la superficie del elipsoide, y el eje X (E) es perpendicular a ambos en sentido destrógiro (Figura IV-2).

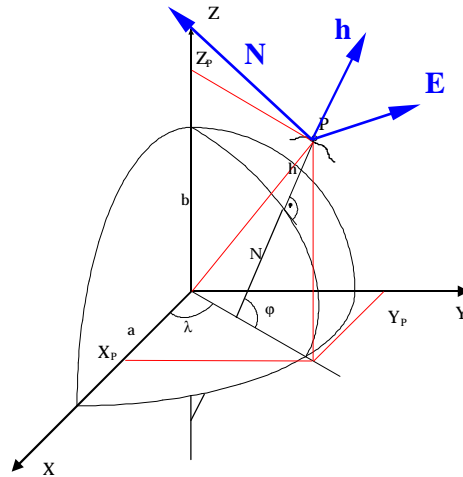


Figura IV-2. Horizonte Geodésico Local sobre la Superficie Terrestre.

En este sistema de referencia se toma como origen un punto determinado con GPS, de forma que tengamos coordenadas conocidas tanto en el sistema cartesiano global WGS84, como en el elipsoide sobre el que vamos a realizar el Horizonte Geodésico Local, quedando respecto al sistema cartesiano como se indica en la Figura IV-3 (Manzano Agugliaro F., 1999).

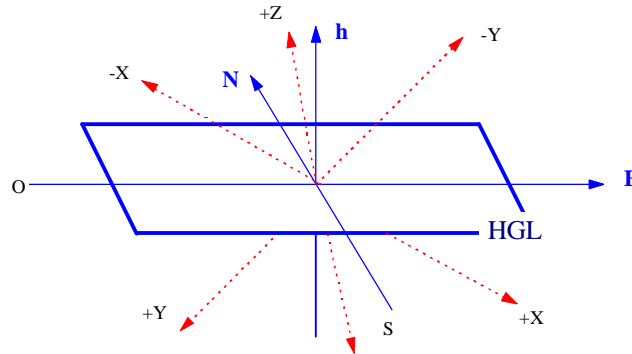


Figura IV-3. Horizonte Geodésico Local respecto al sistema WGS-84.

Para obtener las ecuaciones que nos permitan pasar de posiciones cartesianas a posiciones en el sistema geodésico local en un punto, primero habrá que considerar la relación entre coordenadas cartesianas y elipsoidales, que es como sigue (Ec. IV-2):

$$\begin{aligned}u &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\v &= (N + h) \cos \varphi \sen \lambda \\w &= [N(1 - e^2) + h] \sen \varphi\end{aligned}$$

Ec. IV-2

siendo las cantidades auxiliares N y e , la Gran Normal y la excentricidad del elipsoide respectivamente. Diferenciando las expresiones de la Ec. IV-2 queda:

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(M + h) \cos \lambda \sen \varphi & -(N + h) \cos \varphi \sen \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -(M + h) \sen \lambda \sen \varphi & (N + h) \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sen \lambda \\ (M + h) \cos \varphi & 0 & \sen \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix}$$

Ec. IV-3

donde M es el radio de curvatura de la elipse meridiana. La expresión anterior se puede expresar como:



$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = J(\varphi, \lambda, h) \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix}$$

Ec. IV-4

expresión en la que la matriz $J(\varphi, \lambda, h)$ debe calcularse para la latitud y longitud geodésicas del punto que se esté considerando.

Avanzando aún más, la relación entre coordenadas elipsoidales y las correspondientes al sistema geodésico local vienen dadas por la expresión:

$$\begin{bmatrix} dn \\ de \\ dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M+h & 0 & 0 \\ 0 & (N+h)\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix} = H(\varphi, h) \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix}$$

Ec. IV-5

Así, teniendo en cuenta las Ec. IV-4 y Ec. IV-5, el paso de coordenadas cartesianas a las correspondientes en el sistema geodésico local en un punto, se lleva a cabo según las expresiones siguientes (Leick, A., 1995(4)):

$$\begin{bmatrix} dn \\ de \\ dh \end{bmatrix} = H(\varphi, h) J^{-1}(\varphi, \lambda, h) \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

Ec. IV-6

donde

$$J^{-1}(\varphi, \lambda, h) = \begin{bmatrix} \frac{-\operatorname{sen}\varphi \cos\lambda}{M+h} & \frac{-\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda}{M+h} & \frac{\cos\varphi}{M+h} \\ \frac{-\operatorname{sen}\lambda}{(N+h)\cos\varphi} & \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\varphi} & 0 \\ \frac{\cos\varphi \cos\lambda}{\cos\varphi \cos\lambda} & \frac{\cos\varphi \operatorname{sen}\lambda}{\cos\varphi \operatorname{sen}\lambda} & \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}$$

Ec. IV-7



Sustituyendo las matrices H y J, se tiene la siguiente expresión para calcular las componentes referidas al horizonte geodésico local en un punto de longitud y latitud λ y φ , a partir de la diferencia de coordenadas cartesianas:

$$\begin{bmatrix} n \\ e \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \varphi \cos \lambda & -\text{sen } \varphi \text{sen } \lambda & \cos \varphi \\ -\text{sen } \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \text{sen } \lambda & \text{sen } \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix}$$

Ec. IV-8

Teniendo en cuenta la ley de propagación de la varianza, si se tiene la matriz de covarianza de las coordenadas cartesianas de una estación, la correspondiente matriz para la posición expresada en el sistema geodésico local se puede obtener según las siguientes expresiones (Leick, A., 1995(4)):

$$\begin{aligned} \sum_{n,e,h} &= (HJ^{-1}) \sum_{u,v,w} (HJ^{-1})^T \\ \sum_{\varphi,\lambda,h} &= (J^{-1}) \sum_{u,v,w} (J^{-1})^T \end{aligned}$$

Ec. IV-9

Esta transformación tiene una desviación en el eje de la altura respecto a los métodos topográficos clásicos, puesto que entre ambos sistemas de referencia existe la desviación relativa de la vertical, como consecuencia de considerar en el HGL alturas elipsoídicas mientras que en el sistema plano local se consideran alturas ortométricas (Manzano Agugliaro, F., 1999).

IV.6. Sistemas de Referencia Planos: Proyecciones Cartográficas.

Como se ha visto con anterioridad, cualquier punto de la Tierra o del cielo, estará definido por unas coordenadas únicas respecto a un sistema de referencia determinado. La dificultad aparece al intentar representar estos puntos, ya que debido a la forma de la Tierra, es imposible dicha representación sobre un plano sin que se produzcan deformaciones. Surgen así las denominadas proyecciones cartográficas.



El término proyección representa la correspondencia biunívoca entre los puntos de la esfera o elipsoide, y sus transformados en el plano. Esta correspondencia se expresa en función de las coordenadas geográficas de cada punto del elipsoide y se traducen en el plano en coordenadas cartesianas. Esto se define por las siguientes expresiones (Featherstone, W., Langley R.B. 1997):

$$\begin{aligned}y &= f(\varphi, \lambda) & \varphi &= F(x, y) \\x &= g(\varphi, \lambda) & \lambda &= G(x, y)\end{aligned}$$

La formulación de las funciones f , g , F , G definen las propiedades de la representación, y definirán el tipo de proyección cartográfica.

La representación plana exige una reducción previa de las medidas realizadas en el campo, en primera instancia sobre el geoide, y posteriormente sobre el elipsoide, y a partir de sus coordenadas sobre el anterior, se proyecta cartográficamente sobre el plano.

Existen distintos tipos de proyecciones, cada una con distintas propiedades. Una descripción completa de los distintos tipos de proyecciones cartográfica se muestra en Snyder, J.P. 1987. La proyección adoptada oficialmente para la cartografía española es la proyección UTM, según decreto 2303/1970 del 16 de Julio (Martín Asín, F. 1983).

IV.6.1. Proyección U.T.M.

Para la transformación al sistema de referencia plano cartográfico, se parte de las coordenadas elipsoidicas en el sistema local, en nuestro caso el ED50 (φ , λ), y se quieren determinar las coordenadas de los puntos en el sistema UTM (X , Y), (Figura IV-4).

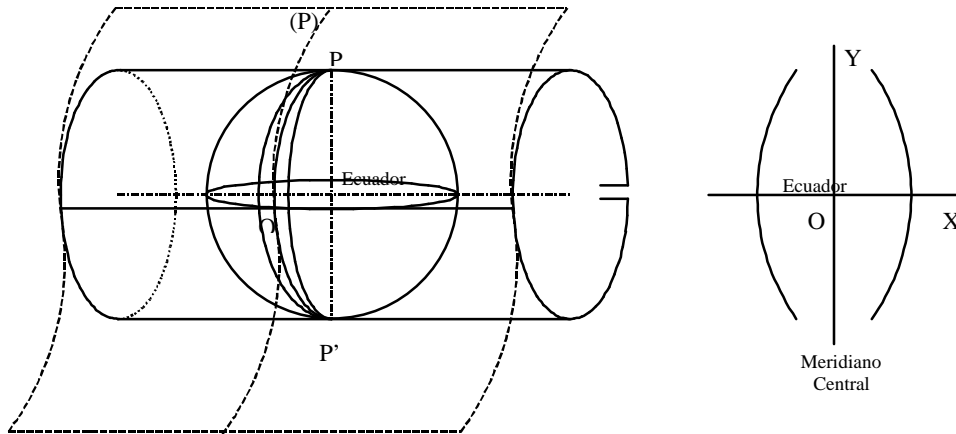


Figura IV-4. Proyección UTM.

La determinación de las coordenadas UTM, tradicionalmente no se ha realizado a través de las funciones de transformación debido a su complejidad, sino que se han empleado desarrollos en serie de estas funciones. Las fórmulas de Redfearn para la proyección UTM son (Maling, D.H. 1992):

$$X = 500.000 + K_0 \left[1 \cdot N \cos \varphi + \frac{1^3}{6} N \cos^3 \varphi \cdot (1 - t^2 + \eta^2) + \right. \\ \left. + \frac{1^5}{120} N \cos^5 \varphi \cdot (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) + \right. \\ \left. + \frac{1^7}{5040} N \cos^7 \varphi \cdot (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6 + \dots) \right]$$

Ec. IV-10

$$Y = K_0 \left[B(\varphi) + \frac{1^2}{2} t \cdot N \cos^2 \varphi + \frac{1^4}{24} t \cdot N \cos^4 \varphi \cdot (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \right. \\ \left. + \frac{1^6}{720} t \cdot N \cos^6 \varphi \cdot (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2) + \right. \\ \left. + \frac{1^8}{40320} t \cdot N \cos^8 \varphi \cdot (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6 + \dots) \right]$$

Ec. IV-11

Con: $B(\varphi)$ Longitud de arco de meridiano a la latitud φ .



- N Gran normal.
 η^2 Cantidad auxiliar: $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$
 e' segunda excentricidad.
 l Diferencia de longitudes: $l = \lambda - \lambda_0$.
 λ_0 Longitud del meridiano central del huso.
 $\lambda_0 = 6h - 183^\circ$
 siendo

$$h = \text{parte} \cdot \text{entera} \left(\frac{180 + \lambda}{6} \right) + 1$$

Ec. IV-12

K_0 Factor de reducción de escala propio de la proyección UTM.

La longitud del arco meridiano es la distancia sobre el elipsoide desde el Ecuador hasta el punto en donde se determinan las coordenadas. Este valor se calcula también por desarrollos en serie:

$$B(\varphi) = a(1 - e^2) \cdot \left(a_0 \varphi - \frac{1}{2} \left(a_2 \sin(2\varphi) - \frac{a_4}{2} \sin(4\varphi) + \frac{a_6}{3} \sin(6\varphi) - \frac{a_8}{4} \sin(8\varphi) + \frac{a_{10}}{5} \sin(10\varphi) \right) \right)$$

Ec. IV-13

Donde:

$$a_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10}$$

$$a_2 = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10}$$

$$a_4 = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10}$$

$$a_6 = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10}$$

$$a_8 = \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10}$$



$$a_{10} = \frac{693}{131072} e^{10}$$

Ec. IV-14

IV.7. Tendencias futuras en cuanto a Marcos de Referencia.

De todo lo dicho anteriormente, se puede intuir la tendencia futura a dejar de pensar en datum horizontal y datum vertical como entidades independientes, como tradicionalmente se han venido considerando. Estos dos conceptos puede que permanezcan, pero se tenderá a que estén basados en un marco de referencia tridimensional común, como es el ITRF (Higgins, M.B. 1999.).

Avanzando más aún, se puede incluso pensar en que los marcos de referencia no tienen que estar restringidos a tres dimensiones. La materialización del ITRF en un punto y en un instante de tiempo determinado, tiene en cuenta modelos de velocidad de tectónica de placas, por lo que el tiempo puede ser una nueva dimensión a tener en cuenta (Strang, G., Borre, K. 1997). Surge entonces el concepto de datum dinámico (Gant, D.B., Pearse, M.B. 1995), donde el tiempo es la cuarta dimensión considerada. Esto es de suma importancia en zonas donde las deformaciones en el tiempo son importantes.



V. MARCOS DE REFERENCIA ESPAÑOLES.

V.1. Introducción.

Cuando se realizan observaciones mediante GPS, se está usando el sistema de referencia WGS-84 como sistema de trabajo, pero no se puede olvidar que la cartografía oficial española se sustenta en el sistema de referencia ED-50 con alturas sobre el geode, datum altimétrico el nivel medio del mar en Alicante y elipsoide de referencia el de Hayford. Por lo tanto, es de gran interés conocer los parámetros de transformación entre ambos. Para ello será necesario conocer coordenadas en ambos sistemas.

Actualmente, el Área de Geodesia del Instituto Geográfico Nacional (IGN) los siguientes marcos de referencia.

- Red Geodésica Española. ROI.
- Red de Nivelación de Alta precisión.
- Marcos de referencia en el sistema WGS-84:
 - EUREF-89.
 - IBERIA-95.
 - REGENTE.

V.2. Red Geodésica Española.

El primer intento para la realización de la Red Geodésica Española data del siglo XVIII, pero fue en 1853 con la “Ley de medición del territorio” cuando se encomendó, primero al Ministerio de la Guerra y después al de Fomento, la ejecución del Mapa de España. Con la creación del Instituto Geográfico en 1870 comienza la observación de la Red de Primer orden.



La Red de Primer Orden se compone de un total de 573 vértices, constituidos por los vértices de triángulos con separación media entre ellos de 40 km. Su observación se finalizó en 1874.

La Red de Primer Orden se densificó con otra de segundo orden y que apoyada en la anterior diera continuidad territorial, fijando las capitales de provincia y sirviendo de apoyo a la de tercer orden.

La triangulación de tercer orden se apoya en la de segundo, y todos los vértices de orden superior lo son también de esta red, que forma una malla continua para todo el territorio peninsular. Alrededor de 12000 vértices componen la red de tercer orden, red que se terminó pocos años después de la de segundo orden, en 1930.

El sistema de referencia empleado por la Red Antigua (R.A.) es el elipsoide de Struve, con punto fundamental o datum el Observatorio Astronómico de Madrid. Las longitudes geográficas están referidas al meridiano de Madrid.

V.2.1. Red ED-50.

En el año 1945, el Army Map Service de los Estados Unidos acometió la labor de unificar las redes geodésicas de los países europeos, realizando compensación de conjunto. El servicio de Geodesia del IGN suministró las observaciones disponibles, eran las observaciones de la red antigua, de modo que la red española quedó integrada así dentro del bloque del Sudoeste europeo.

La antigua red fundamental española quedó compensada en conjunto y enlazada con las redes de Francia y Portugal. El Army Map Service también realizó un ajuste de las redes de segundo y tercer orden, calculando las coordenadas rectangulares de sus vértices en la proyección UTM.



Los datos de estas compensaciones de las redes de primer, segundo y tercer orden constituyen el denominado Sistema Geodésico RE-50 o ED-50.

El sistema de referencia al que se refiere el sistema ED-50 está definido por el elipsoide Internacional (Hayford 1909), con datum en Postdam, y las longitudes referidas al meridiano de Greenwich (Gómez, A. 1989).

V.2.2. Redes NRPO y ROI.

Con el paso del tiempo, la red existente en España ha sufrido una paulatina degradación, desapareciendo muchas señales y perdiéndose la intervisibilidad entre otras muchas por nuevas construcciones.

En el 1970, Portugal, con una moderna red geodésica completamente observada pero sin poder enlazar con el resto de Europa, solicitó su cálculo y compensación al IGN. Fusionando ambas redes, moderna portuguesa y antigua española, se puso de manifiesto un importante error en la zona occidental de la Cadena Costa Sur de nuestra red fundamental. Ante tal circunstancia, el IGN se vio obligado a la reconstrucción y observación de la cadena (1972), que constituyó el comienzo de un trabajo de restauración a muy largo plazo de la nueva red geodésica de primer orden (N.R.P.O.).

La aparición en 1978 del Decreto 2857/78 por el que se aprueba el Reglamento General para el Régimen de la Minería, donde se establece que todos los trabajos de demarcaciones mineras deben definirse a partir de la “vigente red geodésica nacional”, obligó al IGN a reconsiderar su planificación geodésica, planteándose el reconstruir y observar en su totalidad la nueva red de primer orden (NRPO) y la red de orden inferior (ROI), desaparecida ésta en un 90 %.

En los años 70, el IGN inició la reconstrucción de esta Red, perdida casi en su totalidad por diversas causas tales como la guerra civil y los desarrollos urbanos e industriales. Para ello se aprobó un plan de reconstrucción que iniciado en 1982 vio su final en 1992,



quedando la nueva Red Geodésica, constituida por una red de primer orden con unos seiscientos ochenta vértices, conformando una malla continua sobre todo el territorio nacional, y una red de orden inferior ROI (Canas, J. A. 1999).

La ROI queda constituida por un total de 10.944 vértices (654 de ellos pertenecientes a la red de primer orden), que cubre todo el territorio español, con una densidad, similar a la de la antigua red de tercer orden, con una distancia media de 8 a 10 km entre vértices. Los vértices están construidos con señales de hormigón de diversas alturas acordes con las características del terreno y que aseguran su permanencia en el mismo.

La ROI ha sido observada por métodos convencionales (triangulación, trilateración, poligonalización), quedando rígidamente ligada a la red de primer orden. Su compensación se ha realizado en el Sistema Geodésico ED-50, reglamentario para toda la cartografía oficial española, manteniendo fijas las coordenadas de la red de primer orden, y actuando por bloques provinciales.

La precisión de la ROI, a igual que la de la red de primer orden, queda actualmente limitada por los defectos, ya comprobados, del sistema ED-50. Así, las precisiones alcanzadas en la ROI varía de unas zonas a otras, siendo el error medio cuadrático aproximadamente de 15 cm para planimetría y 30 cm para altimetría (Caturla J. L 1988).

La altimetría de la ROI se ha obtenido mediante nivelación geométrica de algunos vértices, geodésica de otros y trigonométrica (cenitales recíprocos) de los restantes, todo ello apoyado en al Red de Nivelación de Alta Precisión de España.

V.2.3. Red de nivelación.

La nivelación de precisión española ha pasado por tres fases claramente diferenciadas:

- a) Nivelación de precisión.
- b) Nivelación de Alta Precisión.



- c) Nueva nivelación de Alta Precisión: A partir de 1975 se pretende efectuar la reobservación de la Red N.A.P. con nueva instrumentación y con un conocimiento muy exacto del valor de la gravedad en la mayoría de las señales de nivelación.

El primer paso para establecer en España una red de nivelación que permitiera dotar de altimetría a todos los vértices geodésicos, fue adoptar como altitud cero el nivel medio del mar en Alicante.

El deterioro sufrido por la actual Red de Nivelación, consecuencia del tiempo transcurrido desde su instalación y de las muy importantes reformas viarias, ha impuesto la necesidad de establecer una nueva Red con superior densidad y precisión que la anterior. El IGN prevé un plano inferior a ocho años para su total implantación (IGN 2001).

La principales aplicaciones de RED-NAP son las siguientes:

- Determinación muy precisa del relieve del territorio.
- Origen indispensable para las grandes obras públicas.
- Establecimiento de la cartografía a cualquier escala, necesaria para la ordenación del territorio.
- Conocimiento muy preciso del nivel medio del mar y sus variaciones a causa del efecto invernadero.
- Detección de posibles variaciones verticales de la corteza en zonas con previsible fenómenos sísmicos y volcánicos.
- Determinación muy precisa de las ondulaciones del geoide con relación al elipsoide utilizado en la geodesia por satélite (GPS, EGNOS, GALILEO etc).

V.2.4. EUREF'89.

A finales de los años ochenta, la disponibilidad del GPS y su uso versátil en muchas áreas, mostró la necesidad de un sistema de referencia geodésico uniforme en Europa. En ese tiempo, la red más uniforme sobre Europa era el Datum Europeo ED87,



calculado por la comisión RETrig de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG), como resultado de la combinación y reajuste de las redes de triangulación nacionales. Ni el ED79, y el marco WGS-84 establecido con una precisión de pocos metros en aquellos momentos, cubría las expectativas.

A escala europea, se ha desarrollado un marco de referencia de alta precisión, denominado ETRF89 (European Terrestrial Reference Frame 1989), en base a la campaña EUREF'89, y en la que ha participado España con una estación VLBI y 14 estaciones GPS. EUREF89 representa un marco de referencia consistente con ITRF y WGS-84 (Seeger, H. 1994).

La actividad inicial de EUREF se basaba en campañas de observación GPS de varios días de observación, mientras que hoy día, se encuentra establecida en Europa una red de estaciones permanentes con más de 90 estaciones. Las estaciones cumplen los requisitos impuestos a las estaciones IGS, y existe implementada una estructura para el análisis y transmisión de los datos (Gubler, E. 1999).

Dependiendo del tipo de observaciones (obtenidas en campañas de observación antes o después de 1992, o como estaciones permanentes), dentro de EUREF se han definido tres tipos de precisiones:

- Clase A: 1 cm de precisión para cada componente de posición en el sistema ETRS, independientemente del tiempo, garantizado por la existencia de estaciones permanentes.
- Clase B: 1 cm de precisión, pero garantizada sólo para una determinada época, obtenidas en campañas de observación después de 1993.
- Clase C: 5 cm de precisión, obtenida en las primeras campañas de observación entre 1989 y 1992.

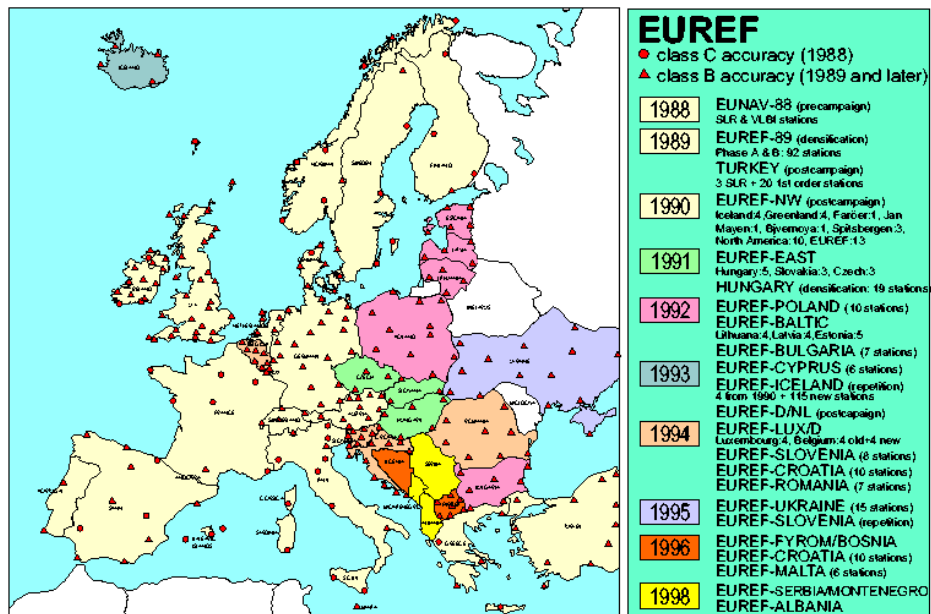


Figura V-1. Campañas de observación EUREF.

La actual organización de EUREF, consiste en (Gubler, E. 1999):

- Subcomisión de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) para Europa.
- Grupo Técnico de Trabajo EUREF
- Grupo de Trabajo EUVN, para el establecimiento la Red GPS Vertical Europea.
- Grupo de Trabajo UELN95, para el refinamiento de las redes de nivelación integradas en un sistema dinámico de alturas.

V.2.5. IBERIA95.

Durante la semana del 8 al 12 de Mayo de 1995 se llevó a cabo la observación de la campaña IBERIA95 preparada en colaboración directa entre el IGN español y el Instituto Portugués de Cartografía e Cadastro (IPCC). El objetivo primordial de IBERIA95 es la densificación en la Península Ibérica del "European Terrestrial Reference Frame 1989" (ETRF89) y la mejora de precisiones de la campaña EUREF89 en España y Portugal, estableciendo así una red geodésica tridimensional de alta



precisión, alguna de cuyas estaciones coincide con la campaña EUREF89. La red está formada por 39 estaciones, de las cuales 27 son españolas y 12 portuguesas.



Figura V-2. Mapa de Vértices de Iberia95 (Servidor de Geodesia y Geofísica del IGN. <http://www.geo.ign.es>)

V.2.6. REGENTE.

El IGN, en colaboración con otros organismos oficiales dotados de modernos receptores GPS, tales como el Servicio Geográfico del Ejército SGE, el Real Observatorio de la Armada ROA, el Instituto Cartográfico de Cataluña ICC y el Servicio de Cartografía de Navarra SCN, iniciaron, a partir de 1994 el ambicioso plan de establecimiento de un Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales. Esta red pretende ser una red puramente GPS en el sistema WGS-84, perfectamente enlazada con el sistema de referencia ETRF a través de 14 estaciones EUREF89.

Para el Archipiélago Canario se ha utilizado ya, como estación de referencia, la Estación VLBI Maspalomas, cuyas coordenadas de alta precisión han sido determinadas en la campaña GPS 1991 realizada por el Institute of Physical Geodesy de Darmstad.



La obtención de los parámetros necesarios para la transformación de las coordenadas del Sistema Geodésico ED50, oficial para toda la cartografía española, exige cubrir el territorio nacional con una potente red GPS, coincidente con vértices de la ROI, cuya densidad es de una estación por cada hoja del MTN 1/50.000, lo que supone 1.200 estaciones incluyendo la península y los archipiélagos.

Por otra parte, la obtención de una carta precisa del geoide, requeriría la inclusión en REGENTE de clavos de las líneas NAP, incrementando el número de estaciones.

La observación de la red REGENTE se efectúa con receptores GPS de doble frecuencia, en grupos de 9 estaciones simultáneas, con dos sesiones de 3 horas cada una realizadas en días y horas diferentes para asegurar distintas constelaciones (IGN 2000):

La disponibilidad actual de REGENTE se muestra en la Figura V-3:

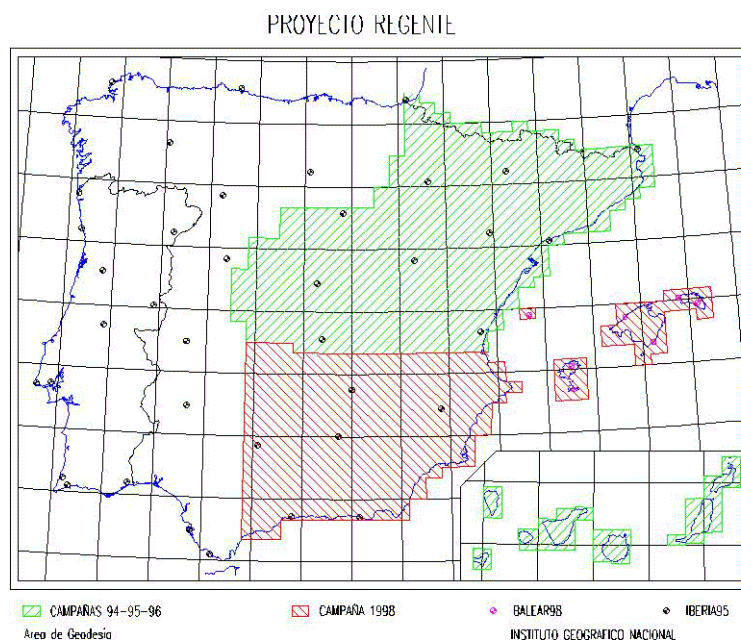


Figura V-3. Mapa de Proyecto Regente en la actualidad (Servidor de Geodesia y Geofísica del IGN. <http://www.geo.ign.es>)



Aunque el proyecto comienza en 1994, por problemas económicos, a finales de 2000 se encontraba observado más del 90 %, estando prevista su finalización en la campaña del año 2001.

Las finalidades que se pretenden alcanzar con la implementación de REGENTE son:

- Establecimiento sobre todo el territorio español de una Red Geodésica Tridimensional de Orden Cero, de una elevada precisión fijada a priori para cada coordenada en un error medio cuadrático menor de 0.05 m.
- Determinación de unos parámetros precisos de transformación entre REGENTE (ETRF-89) y la Red Geodésica Nacional (ED-50).
- Contribución, en unión de las observaciones gravimétricas y astronómicas ya existentes, a la determinación de un geoide con precisión centimétrica.
- Dado el número, cada vez más elevado, de usuarios de la técnica GPS, facilitar a los mismos la fusión de sus observaciones convencionales con las observaciones GPS.
- Servir como apoyo a las Redes Locales futuras.



VI. POSICIONAMIENTO GPS EN APLICACIONES GEODÉSICAS.

VI.1. Introducción.

Dentro de las variadas posibilidades que ofrece el sistema GPS a la hora de obtener posiciones, las altas precisiones exigidas en aplicaciones geodésicas, restringirán el uso de dicho sistemas.

En primer lugar, aun cuando la disponibilidad selectiva ha sido desactivada a partir del 1 de mayo de 2000, las precisiones que se pueden alcanzar en posicionamiento absoluto, no son mejores de 10 m (Wormley, S.J. 2001), por lo que para las aplicaciones geodésicas, el modo de observación con GPS será el modo relativo, en el que obtienen posiciones relativas precisas entre receptores que observan simultáneamente (Hofmann-Wellenhof, B. 1993), llamado también modo diferencial o DGPS (Wells D. 1986).

Por otro lado, de los dos observables disponibles en las observaciones GPS, pseudodistancias y medida de fase, será el segundo el que proporcione mayor precisión, y por tanto el que se utilizará en las aplicaciones geodésicas y topográficas (Leick A 1992 (1)). El error en el posicionamiento se reduce de metros a milímetros usando la fase en vez del código, pero en contrapartida, requiere incluir una mayor componente matemática en el GPS (Strang, G., Borre, K. 1997).

Si las antenas de ambos equipos están fijas, se suele hablar de posicionamiento en modo estático, mientras que si están en movimiento, se suele hablar de posicionamiento cinemático. Con el primero, por el hecho de conseguir redundancia de observaciones para una posición determinada, se consiguen eliminar gran parte de los errores que afectan a las observaciones GPS, mejorando la precisión alcanzada. Así, prolongando el



tiempo de observación, en modo estático con procesado de fase, se pueden conseguir precisiones milimétricas (Leick, A. 1992 (2)).

En la Figura VI-1 se muestra un esquema de los distintos modos en los que puede operar el GPS, junto con sus precisiones.

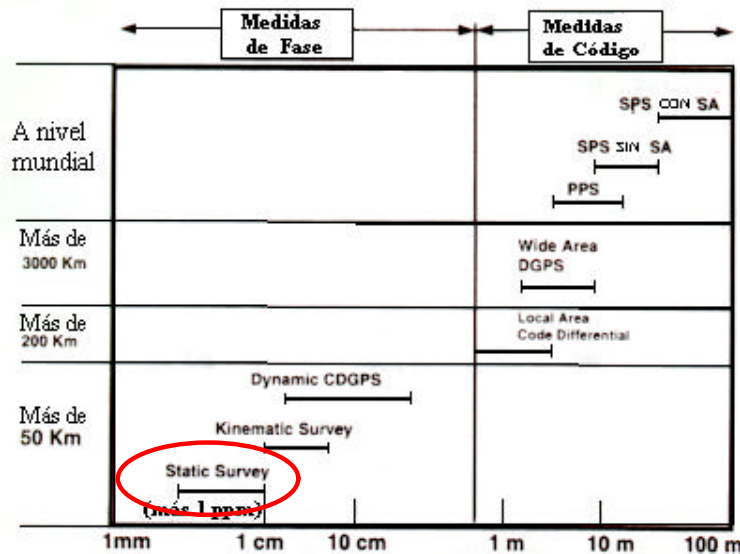


Figura VI-1. Modos de posicionamiento relativo GPS juntos con sus precisiones.

De lo dicho, se puede deducir que para aplicaciones geodésicas, y en concreto, para la observación de redes geodésicas, el modo de posicionamiento a utilizar será posicionamiento relativo, estático, con procesado de fase de la portadora, consiguiendo precisiones del orden centimétrico o incluso milimétrico prolongando el tiempo de observación (Leick A.1995 (4)) (Parkinson B.W., Spilker, J.J. 1996) (Teunissen, P.J.G., Kleusberg, A. 1998).

VI.2. Errores cometidos en la medida de pseudodistancias.

En cualquier proceso de medida se cometen errores, no siendo en este sentido los receptores GPS una excepción.



Los receptores GPS lo que hacen es determinar la distancia entre su antena y las antenas transmisoras de los satélites de los que reciben señales. Basándose en estas distancias y el conocimiento de la posición de los satélites, se podrá determinar la posición de dichos receptores. Sin embargo, la medida de las distancias se ven afectadas por diversos errores, errores que se transmiten a las posiciones calculadas para las estaciones.

VI.2.1. Efemérides.

Para calcular su posición, el receptor GPS debe conocer la posición de los satélites. De manera general, esta información se obtiene del mensaje de navegación, generado por el Sector de Control y radiodifundido por cada satélite.

Estas efemérides transmitidas en el mensaje de navegación, son las posiciones aproximadas que toma el satélite, siendo imposible predecirlas de manera exacta (Langley, R.B. 1997).

Los errores de efemérides, se deben a que la posición transmitida por el satélite no coincide exactamente con la posición real de éste. (Figura VI-2).

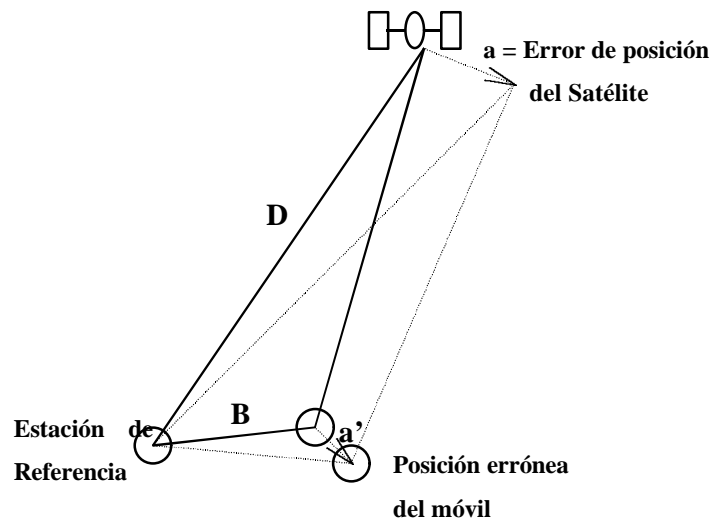


Figura VI-2. Errores de efemérides.



Siendo D la distancia real del satélite a la estación de referencia, B la línea base que une la estación de referencia con el equipo móvil, a el error de posición transmitido por el satélite GPS, y a' el error en la posición del móvil, se puede establecer que:

$$a' \cong a \cdot \left(\frac{B}{D} \right)$$

Ec. VI-1

y como $D \sim 20.000$ Km., entonces para líneas base cortas (menores a 200 Km.), se puede concluir que el error de efemérides se ve reducido en un factor de 100 o más. (Anderson A.J. et al., 1986).

Un orden de magnitud del error en la estación de referencia debido a las efemérides, es de un rms 2.1 m. tras 24 horas de observación (Bowen R., et al. 1986).

Para reducir el efecto de este error, en vez de las efemérides radiodifundidas en el mensaje de navegación, se pueden usar las llamadas efemérides precisas, proporcionadas por el IGS (International GPS Service for Geodynamics) o cualquier otro organismo que las suministre (Piriz Mira, G., et al. 1999). Éstas son las posiciones calculadas para cada satélite y para cada instante de tiempo desde puntos de control terrestres, y son publicadas con algunos días de retraso (Seeber, G. 1993).

VI.2.2. Errores de reloj.

Los relojes de los satélites GPS, utilizan osciladores de cesio o de rubidio, que tienen una estabilidad de 1 parte en 10^{13} segundos en un día, y como un día tiene alrededor de 10^5 segundos, se puede establecer que el error es de 10^{-8} segundos. Traduciendo este error en términos de distancia, tenemos dependiendo del autor, 3.5 m (Parkinson B.W, 1996), de 2.6 a 5.2 m (Langley R.B, 1991), o 1 m (Seeber G., 1993).

Estos errores afectan directamente a la solución de navegación, pero se reducen con la técnica relativa según la expresión (Leick A., 1995 (4)):



$$\Delta r_{km}^p = 0.3 \cdot 10^{-5} \cdot a^p \cdot d_{km}$$

Ec. VI-2

donde:

- Δr_{km}^p es el incremento de distancia de los receptores #k y #m al satélite #p,
 a^p es el error del reloj del satélite expresado en ciclos/segundo, que para un reloj de cesio estándar es de 0.0015 c/s, y
 d es la distancia que separa ambos receptores (línea base).

VI.2.3. Ionosfera.

Al existir electrones libres en la Ionosfera, la señal GPS no viaja a la velocidad de la luz al atravesar esta zona de la atmósfera que va desde los 50 km. hasta los 1000 km. (Hofman-Wellenhof B. et al, 1994), sino que se retrasa proporcionalmente al número de electrones libres encontrados e inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia ($1/f^2$). (Seeber G., 1993). En la Figura VI-3, se puede apreciar la variación de la densidad del contenido de electrones en función de la altura durante el día.

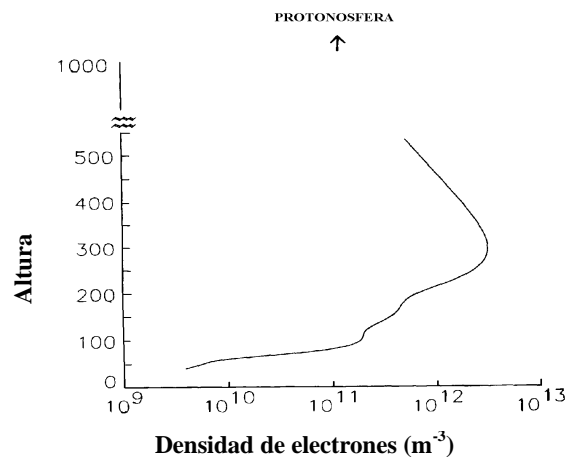


Figura VI-3. Densidad diurna de electrones en diferentes zonas de la ionosfera en función de la altura.



La Ionosfera está bien estudiada y es bastante estable en las zonas templadas, pero cerca del Ecuador o de los Polos Magnéticos, puede fluctuar considerablemente (Parkinson B.W. et al 1996), variando el error desde 1 m hasta más de 100 m (Wells D. et al 1986). Otra de las mayores causas del error ionosférico es la refracción que sufre la señal GPS al atravesar las distintas capas (Klobuchar J.A. (2)), en Figura VI-4 se puede apreciar cómo afecta esta circunstancia para ambas frecuencias L1 y L2 en función del ángulo de elevación.

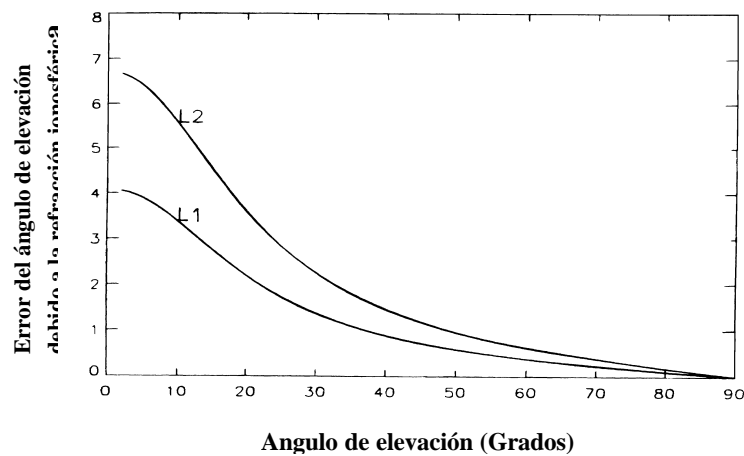


Figura VI-4. Refracción ionosférica en función del ángulo de elevación.

El primer modelo para corregir el efecto ionosférico (para GPS monofrecuencia), ideado a mediados de los setenta, corregía aproximadamente el 50 % del error de la distancia satélite receptor y era válido para todo el mundo (Klobuchar J.A., (1)), ya que el mensaje GPS sólo tenía espacio para ocho coeficientes para describir el comportamiento de la Ionosfera terrestre, y estos coeficientes sólo podían actualizarse una vez al día. En este trabajo también se dedujo que no era posible modelizar el comportamiento de la ionosfera sin datos reales para la obtención de una corrección mejor del 20 - 25 %. Posteriormente (Klobuchar J.A., (2)) estableció un modelo de corrección en función de la latitud y longitud geodésica, ángulo de elevación y acimut de cada satélite GPS, que es el que actualmente se utiliza puesto que los coeficientes de este algoritmo, se transmiten en la señal GPS.



La precisión de este modelo en las zonas templadas, es de 2 a 5 m de las distancias satélite receptor (Parkinson B.W. 1996), y usando la técnica relativa con una sola frecuencia es de 1 ppm para líneas base cortas (Wells D. et al 1986).

Los usuarios de GPS bifrecuencia, pueden medir la señal en las dos frecuencias, y establecer directamente el retraso, ya que pueden medir la diferencia del tiempo de llegada de la señal con la L1 y con la L2. Esta diferencia de tiempo es el retraso ionosférico. Con la utilización de esta técnica se consiguen precisiones de 1 a 2 m en la distancia satélite receptor, para receptores bien calibrados (Parkinson B.W., 1996). Será por ello, que el uso de receptores bifrecuencia sea obligado para observaciones de gran distancia.

VI.2.4. Troposfera.

Otro de los retrasos de la señal GPS se debe al paso de ésta por la Troposfera, en esta zona de 50 km. de la atmósfera, la señal en banda L sufre una refracción y curvatura en la trayectoria (Leick A., 1995 (4)). Este retraso no se puede eliminar con el uso de la bifrecuencia al igual que pasaba con el error ionosférico, puesto que el error troposférico afecta por igual a todas las frecuencias por debajo de 30 GHz. (Wells D. et al. 1986).

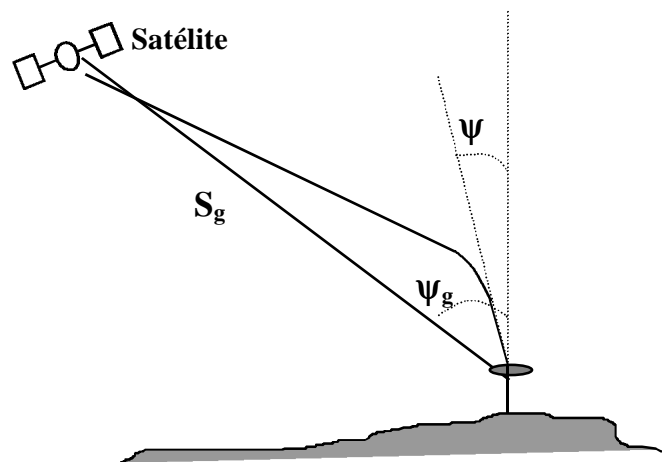


Figura VI-5. Efecto de la refracción troposférica.



En la Figura VI-5 se puede apreciarse cómo se ve afectada la distancia satélite receptor por la refracción atmosférica, donde S es la distancia medida que se ve afectada de dicho efecto, y S_g es la distancia geométrica satélite receptor, que es la real. El error cometido en distancia será pues $\Delta S = S - S_g$. También puede apreciarse cómo el ángulo cenital es menor en la señal medida que en la recta que une satélite con receptor, esto es $\psi < \psi_g$, siendo el ángulo cenital (ψ) 90° menos el ángulo de elevación.

La atenuación de la señal suele estar por debajo de 0.5 dB, lo cual supone un retraso de 2 a 25 m., dependiendo principalmente del ángulo de elevación del satélite (Parkinson B. W. 1996). Los ángulos de elevación de los satélites cercanos al cenit son los que menos retraso sufren de 2 a 2.5 m., mientras que los bajos, aumentan este error proporcionalmente a la cosecante del ángulo de elevación, con 5° sufren el mayor retraso, de 20 a 28 m. (Leick A., 1995 (4)).

Este tipo de retraso es muy importante en el posicionamiento preciso y en la determinación de las líneas base precisas, y en particular para la componente altimétrica, ya que los parámetros troposféricos se correlan mal (Seeber G., 1993).

La manera de reducir esta fuente de error es la utilización de modelos troposféricos, en general los componentes troposféricos se pueden dividir en componentes húmedos y en componentes secos. Los componentes secos están a lo largo de los 50 km. de la Troposfera mientras que los componentes húmedos, vapor de agua, están principalmente en los 12 primeros kilómetros (Hofmann-Wellenhof B., 1994). Los componentes secos suponen el 90 % de los errores de la distancia medida en el cenit, y pueden medirse en función de la presión atmosférica sobre la superficie terrestre con una precisión del 0.2 %. Los componentes húmedos no se correlan bien con parámetros medidos sobre la superficie terrestre y dependen del contenido de vapor de agua, la temperatura, la altitud y el ángulo de elevación de la trayectoria de la señal. (Wells D., et al. 1986).

Los principales modelos troposféricos son los de:



- Hopfield del 1969, basando su modelo en perfiles de los componentes húmedos y secos de la atmósfera. Donde la componente seca supone 2.3 m. de orden de magnitud y varía muy poco, mientras que la componente húmeda varía 0.25 m. pero oscilando $\pm 40\%$. (Hopfield H. S., 1969, 1970, y 1972).
- Saastamoinen en 1972 y 1973, basando su modelo de estimación del retraso troposférico en el ángulo de elevación. (Saastamoinen J., 1972 y 1973).
- Berman en 1976 propone un modelo de retraso basado en los componentes secos y la correlación de los componentes húmedos medidos de día y de noche. El principal problema de este modelo es que fue determinado en una zona bastante seca. (Berman A.L. 1976).
- Davis, Chao y Marini en 1972, proponen corregir el exceso de distancia debido al ángulo de elevación del satélite mediante funciones. Estas funciones utilizan como variables: el ángulo de elevación del satélite, condiciones meteorológicas (Temperatura, Presión Atmosférica), y altura de la Tropopausa (Marini J.W. 1972).
- Altshuler y Kalagham en 1974, proponen un modelo de corrección basado en correcciones mensuales de los valores de refractividad (Altshuler E.E., y Kalagham P.M. 1974).
- Black y Eisner (B & E) de 1984, proponen un modelo de Hopfield que introduce los ángulos de elevación (Black H. D. y Eisner A., 1984).
- Janes, Langley y Newby en 1991 proponen un modelo simplificado que puede ser útil para los usuarios a nivel del mar. (Janes, Langley y Newby, 1991).

Janes et al. 1991, compararon los modelos troposféricos descritos anteriormente obteniendo que los modelos de Hopfield y Saastamoinen dan resultados milimétricos para los componentes secos del retraso cenital. Para 5° de elevación el modelo de Hopfield da 5 cm. mientras que el de Saastamoinen da 6 mm. Para 20° de elevación los modelos de Saastamoinen y de Black y Eisner dan errores dentro de 8 mm.

Los errores debidos al retraso troposférico se eliminan en parte con la técnica relativa ya que existe cierta correlación en los errores de diferentes satélites. Como se ha visto los



errores de este tipo se dan sobre todo para satélites con ángulos de elevación bajos. Suponiendo cuatro satélites bajos y uno en el cenit, si bien el error en estos satélites bajos es el mismo, y no hay error en el satélite cenital, esto provocará que en la posición horizontal los errores se cancelen pero que en la altitud el error permanezca. (Spilker Jr. 1996).

Para la mayor parte de los usuarios, un modelo simple puede dar una precisión de 1 m o mejor en la distancia satélite receptor (Parkinson B. W., et al, 1996).

VI.2.5. Multicamino (Multipath).

El efecto multisenda o multicamino se debe a que la señal entrante en el receptor enmascara el pico real de la correlación causado por la reflexión de ésta en zonas cercanas a la antena. Otra manera de definir este efecto es que la señal del satélite llega al receptor por dos o más caminos diferentes (Wells D., et al 1986). (Figura VI-6).

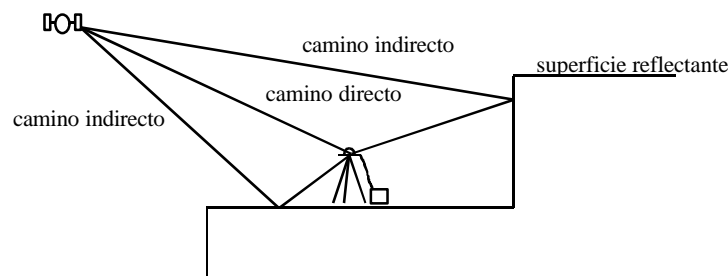


Figura VI-6. Efecto multicamino.

Este efecto tiende a ser más pronunciado en receptores estáticos cerca de superficies reflectantes, llegando en casos extremos a cometerse un error de 15 m. en la medida de la distancia (Parkinson B. W., et al, 1996).

Las estaciones de referencia deben de prestar especial cuidado para minimizar este efecto. Las principales formas de minimizar este error son:



- Utilización de máscaras de elevación, para no tener en cuenta las señales que provienen por debajo de este ángulo. (Parkinson B. W., et al, 1996).
- Ubicación de la antena lejos de zonas reflectantes. En el caso de estaciones portables conviene alejarlas lo más posible del coche empleado para el desplazamiento a la zona de trabajo. (Seeber G., 1993).
- Utilización de la llamada correlación estrecha (narrow correlation), que utiliza un pico de la señal estrecho para la correlación, reduciendo así el enmascaramiento del pico real. (Parkinson B. W., et al, 1996).
- Utilización de planos de tierra y materiales que absorban la señal. En este sentido cabe destacar el “choke-ring”, que según algunos trabajos reduce el efecto multicamino en más de un orden de magnitud (Lichten S. M., 1991).

Con observaciones realizadas durante un largo período de tiempo, también se puede minimizar este efecto, pero esto no es posible con observaciones cinemáticas o estáticas rápidas. Es sobre todo para este tipo de observación donde la tecnología de la antena a mejorado mucho, y numerosos trabajos muestran la importancia que ésta tiene en la reducción de errores (Geiger A. 1988).

VI.2.6. Receptor.

Los errores del receptor son los debidos al equipo completo de recepción constituido por receptor y antena.

Los primeros receptores comerciales eran secuenciales, donde uno o dos canales servían para hacer el seguimiento a cuatro o más satélites. Hoy en día, las mejoras en la tecnología han permitido un abaratamiento de los costes y una reducción del tamaño de los receptores, siendo muy común los receptores con 12 canales en paralelo.

Los errores del hardware se deben a (Seeber G, 1993):

- Ruidos del receptor.
- Error intercanal.



- Variación del retraso de la fase.
- Inestabilidad del reloj.
- Variación del centro de fase de la antena.

El ruido del receptor suele ser el 1% de la longitud de onda de la señal, es decir, para:

- Código C/A $\lambda \approx 300$ m. Ruido ≈ 3 m.
- Código P $\lambda \approx 30$ m. Ruido ≈ 30 cm.
- Portadora $\lambda \approx 20$ cm. Ruido ≈ 2 mm.

La tecnología moderna de receptores tiende a reducir el ruido de la fase por debajo de 1 mm, y reducir el ruido del código a nivel centimétrico. Esto último tiene especial importancia para la resolución de ambigüedades enteras en tiempo real (Seeber G, 1993).

Los receptores multicanales o con canales en paralelo tienen distinto retraso para cada canal, ya que la señal procedente de cada satélite recorre un camino electrónico distinto. Un error de 5° en la fase se corresponde a unos 2.5 mm (Seeber G, 1993), aunque este aspecto puede calibrarse si cada canal se ocupa del seguimiento de un satélite y las medidas se comparan entre sí mediante un modelo de ajuste (Rodríguez-Solano R., 1994). Este error no existe con los receptores secuenciales, ya que el recorrido de la señal por la circuitería es el mismo.

La variación del retraso de la fase depende de la fuerza de la señal, y su influencia se puede reducir introduciendo varios satélites para el cálculo de la solución.

La inestabilidad del reloj del receptor se debe a que están equipados con osciladores de cuarzo, pero esto tiene una influencia secundaria en el diseño del receptor, puesto que la sincronización se hace con reloj del satélite. Este error se puede modelar en el proceso de ajuste y se suele englobar con otras causas de error a la hora de corregirlo.



El centro eléctrico de la fase de la antena varía con la intensidad y dirección de la señal incidente. Para aplicaciones de muy alta precisión se debe conocer de forma muy precisa el centro de fase de la antena. Sin entrar a clasificar los tipos de antenas, casi todos los fabricantes suelen dar el modelo 3 D que sigue el centro de fase de la antena. Los modelos de los centros de fase de la antena se pueden utilizar para ser incorporados sin mucho esfuerzo dentro de otros modelos de corrección de errores, como los del multicamino, troposféricos, de distribución de satélites, etc. (Geiger A., 1988).

VI.2.7. La Disponibilidad Selectiva (SA).

La Disponibilidad Selectiva (SA) es la degradación intencionada de la señal GPS con el objetivo de denegar la capacidad plena de precisión en el posicionamiento y velocidad a usuarios no autorizados.

La SA no formaba parte del diseño original del sistema GPS, pero unos test iniciales con el código C/A en los setenta revelaron precisiones mejores que las previstas inicialmente y fue formalmente implementada el 25 de Marzo de 1990 (Committee on the future 1995).

Sin embargo, el 1 de Mayo de 2000, el presidente de los Estados Unidos hacía pública la decisión de que los Estados Unidos eliminaban, a partir de dicha fecha, la degradación intencionada de la señal GPS, para uso civil (White House. 2000). Es por ello, que esta fuente de error, hoy día, no tiene que ser considerada.

VI.2.8. Efectos Relativistas.

Las observaciones tanto para la geodesia como para la cartografía se realizan como modelos físicos. La Mecánica Newtoniana esta basada en un Espacio Euclídeo y Tiempo Absoluto que hasta ahora ha sido empleada para los modelos físicos antes mencionados. Sin embargo este modelo físico basado en la mecánica newtoniana no debería usarse cuando (Stöker-Meiner E. 1988):



- Las señales electromagnéticas se usan en las observaciones.
- Cuerpos cuya velocidad es comparable a la velocidad de la luz.
- Cuando existe un campo de gravedad fuerte.

En estos casos la mecánica Newtoniana se sustituye por la relatividad general.

Los efectos de la relatividad a un usuario GPS le afectan en (Zhu .S. Y. y Groten E., 1988):

- La órbita del satélite. El campo de gravedad de la Tierra causa perturbaciones relativistas en las órbitas keplerianas de los satélites, estimándose la parte no kepleriana de la órbita en menos de 0.6 ns, lo que en distancia son unos 18 cm.
- La señal. El campo de gravedad de la Tierra afecta creando una curvatura espacio-tiempo en la señal GPS, de forma que la distancia calculada en un espacio de tres dimensiones y en uno de cuatro es distinta. Para tener un orden de magnitud, un punto sobre la superficie de la Tierra, tomando como radio medio de ésta 6370 Km., y un satélite, tomando como altura media de éste 20200 Km., la máxima distancia por el teorema de Pitágoras sería de 25800 Km. Esto nos daría un error en la distancia de 18.7 mm. si no tuviésemos en cuenta los efectos relativistas, para el posicionamiento absoluto con GPS. Pero para posicionamiento relativo el efecto es mucho menor 0.001 ppm.
- El reloj del satélite. La frecuencia fundamental del reloj del satélite, está influenciada por el movimiento del satélite y por la diferencia de gravedad entre el satélite y el lugar del observador. De este modo para que la frecuencia que llegue al observador sea la nominal f_0 , la frecuencia nominal en el satélite debe corregirse en una cantidad df . Este término es corregido antes del lanzamiento en órbita del satélite. Los efectos relativistas no corregidos son del orden de 10^{-10} , aunque éstos se corrige totalmente en el posicionamiento relativo.



VI.3. Precisión en el posicionamiento GPS.

VI.3.1. UERE y factores DOP.

La precisión final obtenida con GPS depende de dos factores (Seeber G. 1993):

- La precisión final obtenida en la medición de la pseudodistancia, expresada por el término UERE (User Equivalent Range Error) o asociado a la desviación estándar en la medida de la distancia GPS (σ_R), influido por los factores vistos hasta ahora.
- La configuración geométrica de los satélites empleados en la medición.

El UERE se calcula como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las fuentes de error individuales que contribuyen a la medida de la pseudodistancia (Langley R.B. 1997). Las magnitudes que contribuyen a dicho error y su orden de magnitudes se muestra en las tablas siguientes, distinguiendo para las situaciones de SA activada o desactivada (Wormley, S.J. 2001):

Causa de error	1· σ (m)			DGPS
	Sistemáticos	Aleatorios	Total	
Efemérides	2.1	0.0	2.1	0.0
Error del satélite	20.0	0.7	20.0	0.0
Ionosfera	4.0	0.5	4.0	0.4
Troposfera	0.5	0.5	0.7	0.2
Multipath	1.0	1.0	1.4	1.4
Receptor	0.5	0.2	0.5	0.5
UERE (rms)	20.5	0.4	20.5	1.5
σ Vertical (VDOP= 2.5)			51.4	3.9
σ Horizontal (HDOP= 2.0)			41.1	3.1

Tabla VI-1. Errores estándar posicionamiento L1, código C/A. Con SA.



Causa de error	1·σ (m)			DGPS
	Sistemáticos	Aleatorios	Total	
Efemérides	2.1	0.0	2.1	0.0
Error del satélite	2.0	0.7	2.1	0.0
Ionosfera	4.0	0.5	4.0	0.4
Troposfera	0.5	0.5	0.7	0.2
Multipath	1.0	1.0	1.4	1.4
Receptor	0.5	0.2	0.5	0.5
UERE (rms)	5.1	0.4	5.1	1.5
σ Vertical (VDOP= 2.5)			12.8	3.9
σ Horizontal (HDOP= 2.0)			10.2	3.1

Tabla VI-2. Errores estándar posicionamiento L1, código C/A. Sin SA.

La geometría de los satélites influye claramente en la precisión final obtenida en el posicionamiento con GPS. El concepto de DOP (Dilution Of Precision), dilución de la precisión, se puede asociar a la desviación estándar en la posición obtenida por:

$$\sigma = \text{DOP} \cdot \sigma_R$$

Ec. VI-3

Asociados a este concepto de DOP se tienen:

- $\sigma_H = \text{HDOP} \cdot \sigma_R$ para posición horizontal.
- $\sigma_V = \text{VDOP} \cdot \sigma_R$ para posición vertical.
- $\sigma_P = \text{PDOP} \cdot \sigma_R$ para posición 3D.
- $\sigma_T = \text{TDOP} \cdot \sigma_R$ para la determinación del tiempo.

La combinación de los dos últimos se denomina GDOP:

$$\text{GDOP} = \sqrt{(\text{PDOP})^2 + (\text{TDOP})^2}$$

Ec. VI-4

El PDOP puede interpretarse como el inverso del volumen del tetraedro (V) formado por los satélites y la posición del usuario (Wells D., et al, 1986).



$$\text{PDOP} = 1 / V$$

Ec. VI-5

La matriz de covarianzas asociada a la posición en un punto vendrá dada por tanto, por la expresión (Parkinson B.W., et al, 1996):

$$\text{cov} = \sigma_R^2 \cdot [G^T G]^{-1}$$

Ec. VI-6

donde la matriz G se calcula en función de la posición de los satélites, dados por su dirección o acimut (A), y su ángulo de elevación (E), donde el subíndice indica el satélite al que hace referencia.

$$G = \begin{bmatrix} (\cos E_1 \otimes \sin A_1) & (\cos E_1 \otimes \cos A_1) & \sin A_1 & 1 \\ (\cos E_2 \otimes \sin A_2) & (\cos E_2 \otimes \cos A_2) & \sin A_2 & 1 \\ (\cos E_3 \otimes \sin A_3) & (\cos E_3 \otimes \cos A_3) & \sin A_3 & 1 \\ (\cos E_4 \otimes \sin A_4) & (\cos E_4 \otimes \cos A_4) & \sin A_4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ec. VI-7

Para un mayor número de satélites la expresión $[G^T G]^{-1}$ debe reemplazarse por $[G^T G]^{-1} G^T$.

Una vez obtenida la matriz $[G^T G]^{-1}$ se puede asociar los siguientes elementos

$$[G^T G]^{-1} = \begin{bmatrix} (\text{DOP}_{\text{ESTE}})^2 & & & \\ & (\text{DOP}_{\text{NORTE}})^2 & & \\ & & (\text{DOP}_{\text{VERTICAL}})^2 & \\ & & & (\text{DOP}_{\text{TIEMPO}})^2 \end{bmatrix}$$

Ec. VI-8

siendo los elementos fuera de la diagonal principal términos de covarianza.



Los factores DOP pueden calcularse previamente para una posición, ya que las posiciones de los satélites son predecibles. Así, dependiendo del propósito de la observación, se puede seleccionar una configuración de satélites con un DOP favorable. Con la constelación actual, la variación del DOP es poco crítica, y el PDOP permanece la mayor parte del tiempo por debajo de 3 (Seeber, G. 1993).

Para nuestras aplicaciones, el concepto de DOP, debe aplicarse a observaciones relativas, esto es a los satélites comunes entre base y móvil.

VI.3.2. Conceptos de Precisión y Exactitud.

Las observaciones realizadas, bien con un instrumento topográfico, bien con GPS, no son valores reales sino mediciones de una magnitud real. Estas mediciones puntuales pueden considerarse como elementos de una población, siendo esta última una función de probabilidad de ocurrencia del evento, la magnitud real (Figura VI-7).

El término exactitud (“accuracy” en la bibliografía anglosajona) hace referencia a la proximidad de las observaciones redundantes al valor real, que en la Figura VI-7, sería la distancia del valor medio de las observaciones x_M , al valor real x_R . Por otro lado, el término precisión (“precision” en la bibliografía anglosajona) hace referencia a la proximidad de las observaciones redundantes al valor medio de éstas (Leick A.1995 (4)). En la figura, sería la dispersión que tienen los valores observados respecto de su media. Así, una población con la función de densidad 3 será más precisa que la de la 4.



Por lo general, existe una tendencia a confundir ambas expresiones, debido esto a que cuando no se disponen de valores reales para las magnitudes observadas, se toma el valor medio como valor real para interpretar los resultados de las observaciones.

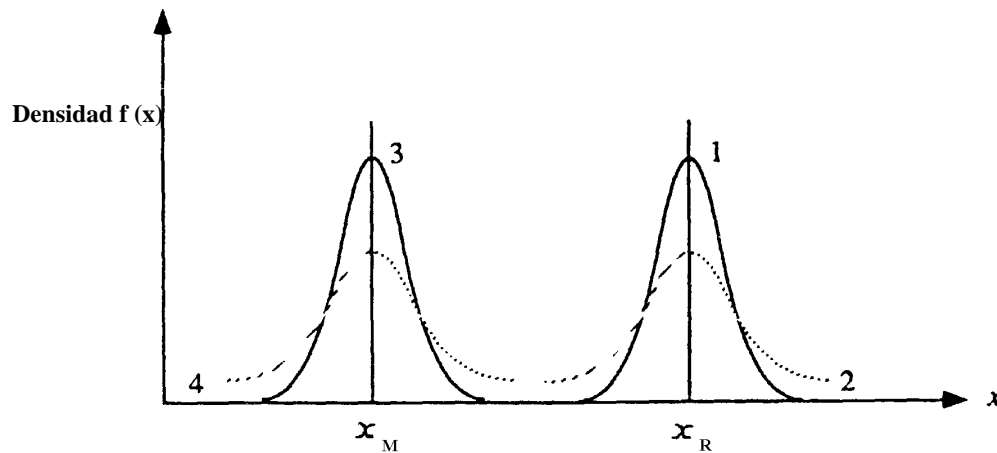


Figura VI-7. Exactitud y precisión.

Para evaluar la precisión del posicionamiento GPS, se dispone de diferentes herramientas para cuantificar la precisión, pero sin embargo, la exactitud no se puede calcular únicamente partiendo de observaciones, a no ser que se tenga alguna manera para cuantificar los errores sistemáticos que intervienen. Sólo si se eliminan estos errores sistemáticos, o se pueden considerar despreciables, las estimaciones de la precisión coinciden con estimaciones de la exactitud (Langley, R. B. 1999 (1)).

En el punto anterior se ha introducido el concepto de desviación estándar para hacer referencia a la precisión en una medida. La medida de la precisión, usualmente aplicada en geodesia y topografía, es la desviación estándar σ , refiriéndose a precisión en una determinada dimensión (Federal Geodetic Data Committee. 1998). Cuando tratamos posiciones bidimensionales (planimétricas) o tridimensionales, la probabilidad de que la localización de un punto esté dentro de una cierta región está descrita por la elipse de confianza (para dos dimensiones) o por el elipsoide de confianza (tres dimensiones),



con la posición estimada en el centro. Los ejes de la elipse de confianza son una función de la desviación estándar de las coordenadas particulares (por ejemplo, σ_ϕ para latitud y σ_λ para longitud) y del nivel de probabilidad específico. Normalmente se aplican niveles de probabilidad de 63.3 % (correspondientes a 1σ), 95.5 % (correspondientes a 2σ), o 99.7 % (correspondientes a 3σ) (Seeber, G. 1993).

Otros términos para indicar precisión posicional pueden ser (Federal Geodetic Data Committee. 1998):

- Error medio cuadrático (rms): La raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de los errores. Para la posición planimétrica:

$$rms = \sqrt{S_j^2 + S_l^2}$$

Ec. VI-9

- Doble del rms (2drms): El doble del rms de los errores horizontales

$$2drms = 2 \cdot \sqrt{\sigma_\phi^2 + \sigma_\lambda^2}$$

Ec. VI-10

- Error circular probable (CEP): Círculo, centrado en la posición verdadera de la antena, conteniendo el 50% de los puntos en una gráfica de dispersión en el plano horizontal:

$$CEP_{50} = 0.59 \times (\sigma_\phi + \sigma_\lambda)$$

Ec. VI-11

- Exactitud horizontal al 95% (R95 o CEP₉₅): Un círculo, centrado en la posición verdadera de la antena, conteniendo el 95% de los puntos en una gráfica de dispersión en el plano horizontal

$$R95 = CEP_{95} = 2.08 \times (\sigma_\phi + \sigma_\lambda)$$

Ec. VI-12



- Error esférico radial medio (MRSE): La raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de los errores, en las tres dimensiones.

$$MRSE = \sqrt{s_j^2 + s_l^2 + s_h^2}$$

Ec. VI-13

- Error esférico probable (SEP): Una esfera, centrada en la posición verdadera de la antena, conteniendo el 50% de los puntos en una gráfica de dispersión tridimensional

$$SEP = 0.51 \times (\sigma_\phi + \sigma_\lambda + \sigma_h)$$

Ec. VI-14

El uso de las anteriores medidas de precisión se muestra en la siguiente tabla:

Dimensiones	Medida de exactitud	Probabilidad (%)	Uso típico (dimensión)
1	Rms	68	Vertical
2	CEP	50	Horizontal
2	Rms	63-68	Horizontal
2	R95 (ó CEP ₉₅)	95	Horizontal
2	2drms	95-98	Horizontal
3	MRSE (ó rms 3D)	61-68	3-D
3	SEP	50	3-D

Tabla VI-3 Uso de las medidas de precisión.

La Figura VI-8 representa algunas de las medidas de precisión descritas.

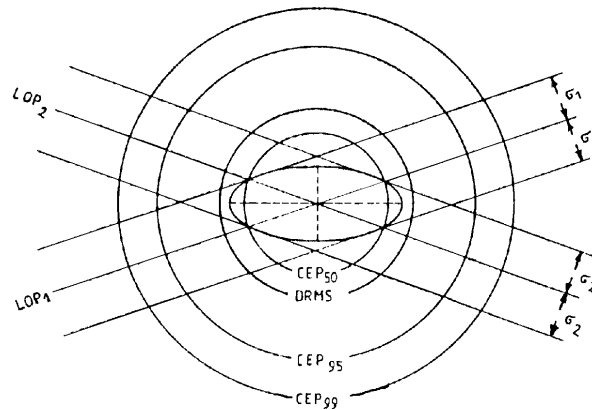


Figura VI-8. Medidas de precisión horizontales.

VI.4. Algoritmos de cálculo.

Hasta ahora, se han visto las causas que afectan a la precisión en las observaciones GPS, y como esta precisión, se puede transmitir a las posiciones calculadas. Sin embargo, necesitamos considerar aún un nuevo factor que influye en la precisión de las posiciones GPS calculadas, y será el algoritmo de cálculo utilizado para obtener posiciones GPS, posiciones relativas entre puntos en nuestro caso, a partir de las observaciones de distancias GPS.

Como se dijo al comienzo de este capítulo, para aplicaciones geodésicas, en las que se requiere gran precisión, se tendrá que utilizar el observable de fase, pues el observable de pseudodistancias, por sí sólo, no conseguiría las precisiones centimétricas necesarias.

VI.4.1. Medida de fase de la portadora.

El observable de fase es la diferencia entre la fase de la portadora del satélite, recibida por la antena del receptor, y la fase del oscilador interno del receptor en el instante de medida, t .



Cuando la onda portadora llega a la antena, habrá recorrido una distancia D , correspondiente a un cierto número entero N de longitudes de onda, más una cierta parte de longitud de onda φ .

El observable de fase de la onda portadora $\varphi_k^p(t)$ para la estación k y el satélite p se puede escribir como (Leick, A., 1995 (4)):

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_k(t) - \varphi^p(t) + N_k^p(1) + I_{k,\varphi}^p(t) + \frac{f}{c} T_{k,\varphi}^p(t) + d_{k,\varphi}(t) + d_{k,\varphi}^p(t) + d_{k,\varphi}^p(t) + \varepsilon_\varphi$$

Ec. VI-15

donde:

$\varphi_k(t)$ fase del receptor en el instante nominal de recepción t .

$\varphi^p(t)$ fase del satélite recibida en el instante nominal de recepción t .

$N_k^p(1)$ ambigüedad entera inicial: número entero de longitudes de onda.

$I_{k,\varphi}^p$ efecto ionosférico.

$T_{k,\varphi}^p$ efecto troposférico.

$d_{k,\varphi}(t)$ retrasos en el hardware del receptor.

$d_{k,\varphi}^p(t)$ retrasos en el hardware del satélite.

$d_{k,\varphi}^p(t)$ efecto multisenda.

ε_φ ruido aleatorio en la medida de la fase de la portadora.

El receptor mide la función dependiente del tiempo $\varphi_k(t) - \varphi^p(t)$ mediante el cambio en la fase generada por el receptor $\varphi_k(t)$ para alcanzar la fase recibida $\varphi^p(t)$. Los cambios en el observable de fase reflejan los cambios en la separación receptor-satélite. Cuando la diferencia de fase aumenta o disminuye en un ciclo (2π), el observable de fase $\varphi_k^p(t)$ cambia en un ciclo (cuenta de ciclos).

Es fundamental en el sistema no perder el seguimiento de la fase para que la ambigüedad inicial no varíe. Si hay una pérdida de recepción de la señal por cualquier causa, la cuenta de ciclos se rompe y se tiene un error por pérdida de ciclos (cycle slip).



La idea en el desarrollo de la ecuación de la medida de fase es la equivalencia de la fase recibida por el receptor y la fase emitida por el satélite τ_k^p segundos antes:

$$\varphi^p(t) = \varphi_{pT}^p(t - \tau_k^p)$$

Ec. VI-16

siendo τ_k^p el tiempo de viaje en el vacío. El subíndice T representa la fase emitida por el satélite p.

Las fases para el tiempo nominal t y el tiempo verdadero t_r se relacionan mediante los errores de los relojes como sigue:

$$\varphi_k(t_r) = \varphi_k(t) + f \cdot dt_k$$

Ec. VI-17

$$\varphi_{pT}^p(t_r - \tau_k^p) = \varphi_{pT}^p(t - \tau_k^p) + f \cdot dt^p$$

Ec. VI-18

Estas ecuaciones se basan en el hecho de que la frecuencia de un oscilador es constante con respecto a su propio sistema de tiempo. Así, es posible tomar la frecuencia del oscilador como una constante y, por definición, que sea el error del reloj el que absorba cualquier variación.

Despejando de la ecuación Ec. VI-17 $\varphi_k(t)$ y combinando la ecuación Ec. VI-18 con Ec. VI-16:

$$\varphi_k(t) = \varphi_k(t_r) - f \cdot dt_k$$

Ec. VI-19

$$\varphi^p(t) \equiv \varphi_{pT}^p(t - \tau_k^p) = \varphi_{pT}^p(t_r - \tau_k^p) - f \cdot dt^p$$

Ec. VI-20



Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación Ec. VI-15 e ignorando los errores de propagación y demás retrasos, se obtiene:

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_k(t_r) - \varphi_T^p(t_r - \tau_k^p) - f \cdot dt_k + f \cdot dt^p + N_k^p(1)$$

Ec. VI-21

Debido a que τ_k^p es el tiempo de viaje de la señal, que está en torno a 70 milisegundos, el desarrollo de $\varphi_T^p(t_r - \tau_k^p)$ requiere que se modele la frecuencia del satélite. Usando el modelo simple siguiente:

$$\dot{\varphi}_T^p(t_r) = f + a^p + b^p t$$

Ec. VI-22

siendo a^p el término de compensación para la frecuencia y b^p la tendencia de la frecuencia, queda:

$$\varphi_T^p(t_r - \tau_k^p) = \varphi_T^p(t_r) - \int_{\tau} \dot{\varphi}_T^p(t) dt = \varphi_T^p(t_r) - \left[f + a^p + \frac{1}{2} b^p \tau_k^p \right] \tau_k^p$$

Ec. VI-23

Sustituyendo la ecuación Ec. VI-23 en la Ec. VI-21 queda Ec. VI-24:

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_k(t_r) - \varphi_T^p(t_r) - f \cdot dt_k + f \cdot dt^p + \left[f + a^p + \frac{1}{2} b^p \tau_k^p \right] \tau_k^p + N_k^p(1)$$

Ec. VI-24

Los términos de fase $\varphi_k(t_r)$ y $\varphi_T^p(t_r)$ se pueden ignorar en conjunto debido a que no se pueden separar de los errores de reloj $f \cdot dt_k$ y $f \cdot dt^p$, y debido a que estos términos se eliminarán en la expresión de las dobles diferencias que se obtendrá en el apartado siguiente.



La ecuación Ec. VI-24 muestra que los términos a^p y b^p afectan a la fase recibida en una cantidad:

$$\Delta\phi^p = (a^p + \frac{1}{2}b^p\tau_k^p)\tau_k^p$$

Ec. VI-25

Debido a que el tiempo de viaje τ_k^p es corto, normalmente el término $b^p \tau_k^p$ se desprecia. Eliminando los términos pertinentes, la expresión Ec. VI-24 queda como:

$$\phi_k^p(t) = -f \cdot dt_k + f \cdot dt^p + (f + a^p)\tau_k^p + N_k^p(1)$$

El último paso en el desarrollo es relacionar el tiempo de viaje de la señal con la distancia topocéntrica entre el receptor y el satélite como:

$$\tau_k^p = \frac{\rho_k^p(t) + \dot{\rho}_k^p(t)dt_k}{c}$$

Ec. VI-26

Sustituyendo Ec. VI-26 en (3.12) e incluyendo los efectos ionoféricos y troposféricos a igual que los demás términos de retraso, se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi_k^p(t) = & \frac{f}{c}\rho_k^p(t) - f \left[1 - \frac{\dot{\rho}_k^p(t)}{c} \right] dt_k + f \cdot dt^p + N_k^p(1) + \frac{a^p}{c}\rho_k^p(t) + I_{k,\phi}^p(t) + \\ & + \frac{f}{c}T_{k,\phi}^p(t) + d_{k,\phi}^p(t) + d_{k,\phi}^p(t) + d_{k,\phi}^p(t) + \varepsilon_\phi \end{aligned}$$

Ec. VI-27

VI.4.2. Observables de fase derivados.

La ecuación Ec. VI-27 es la expresión completamente desarrollada para la observación de fase de la portadora no diferenciada. Debido a la relación lineal entre los errores de



reloj y otros efectos no modelados, sería necesario modelar el efecto combinado para cada parámetro y para cada instante de observación. Afortunadamente, la mayoría de estos términos de error se eliminarán, o sus efectos quedarán reducidos empleando observables derivados, obtenidos de diferenciar las observaciones de fase:

- entre observables en diferentes estaciones
- entre observaciones de diferentes satélites
- entre observaciones en diferentes momentos
- entre observaciones de fase L1 y L2.

VI.4.2.1. Simples diferencias.

Si dos receptores, k y m observan el mismo satélite p en el mismo instante, se pueden escribir dos ecuaciones de la forma Ec. VI-27. Restando ambas expresiones, el observable de simples diferencias de fase entre receptores, llamado normalmente observable de simples diferencias, se define como:

$$\begin{aligned} \varphi_{km}^p(t) = \varphi_k^p(t) - \varphi_m^p(t) = & \frac{f}{c} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] + \frac{a^p}{c} [\dot{\rho}_k^p(t) - \dot{\rho}_m^p(t)] + \\ & + \frac{f}{c} [\dot{\rho}_k^p(t) dt_k - \dot{\rho}_m^p(t) dt_m] + N_{km}^p(1) - f(dt_k - dt_m) + \\ & + I_{km}^p, \varphi(t) + \frac{f}{c} T_{km}^p(t) + d_{km, \varphi}(t) + d_{km}^p, \varphi(t) + \varepsilon_{km}^p, \varphi \end{aligned}$$

Ec. VI-28

$$\begin{aligned} \text{con } N_{km}^p(t) = N_k^p(t) - N_m^p(t) \\ I_{km}^p, \varphi(t) = I_k^p, \varphi(t) - I_m^p, \varphi(t) \\ T_{km}^p(t) = T_k^p(t) - T_m^p(t) \\ d_{km, \varphi}(t) = d_{k, \varphi}(t) - d_{m, \varphi}(t) \\ d_{km}^p, \varphi(t) = d_k^p, \varphi(t) - d_m^p, \varphi(t) \\ \varepsilon_{km}^p, \varphi(t) = \varepsilon_k^p, \varphi(t) - \varepsilon_m^p, \varphi(t) \end{aligned}$$



La Figura VI-9 muestra una visión conceptual de las simples diferencias. La principal ventaja de las simples diferencias es que la mayoría de los errores comunes al satélite se eliminan. Así, el gran término de error dt^P ha desaparecido. El pequeño término que queda en a^P converge hacia cero a medida que la separación entre estaciones disminuye. El retraso en el hardware del satélite también se elimina. Todos los errores que se eliminan en las simples diferencias lo hacen por el hecho de que permanecen constantes para la emisión del satélite.

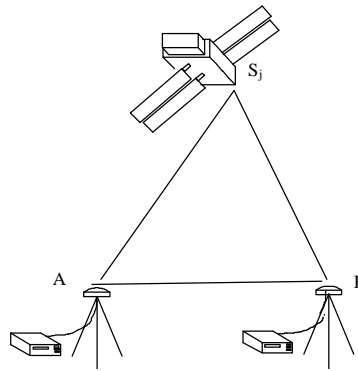


Figura VI-9. Esquema de Simples diferencias.

Aunque el tiempo nominal de recepción sea el mismo para la señal procedente de distintos satélites, los tiempos de emisión son distintos debido a la diferencia de distancia entre el satélite y las dos estaciones k y m. Con respecto a los errores de los relojes de los receptores, permanecerán los dos en la expresión de la simple diferencia.

VI.4.2.2. Dobles diferencias.

Si dos receptores k y m observan a dos satélites p y q en el mismo instante, el observable de dobles diferencias de fase es:

$$\begin{aligned} \varphi_{km}^{pq}(t) = \varphi_{km}^p(t) - \varphi_{km}^q(t) = & \frac{a^p}{c} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] - \frac{a^p}{c} [\rho_k^q(t) - \rho_m^q(t)] + \\ & + \frac{f}{c} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] - \frac{f}{c} [\rho_k^q(t) - \rho_m^q(t)] + \\ & + \frac{f}{c} [\dot{\rho}_k^p(t)dt_k - \dot{\rho}_m^p(t)dt_m] - \frac{f}{c} [\dot{\rho}_k^q(t)dt_k - \dot{\rho}_m^q(t)dt_m] + \end{aligned}$$



$$+ N_{km}^{pq}(1) + I_{km}^{pq,\varphi}(t) + \frac{f}{c} T_{km}^{pq}(t) + d_{km}^{pq,\varphi}(t) + \varepsilon_{km}^{pq,\varphi}$$

Ec. VI-29

con $N_{km}^{pq}(1) = N_{km}^p(1) - N_{km}^q(1)$

$$I_{km}^{pq,\varphi}(t) = I_{km}^p(t) - I_{km}^q(t)$$

$$T_{km}^{pq}(t) = T_{km}^p(t) - T_{km}^q(t)$$

$$d_{km}^{pq,\varphi}(t) = d_{km}^p(t) - d_{km}^q(t)$$

$$\varepsilon_{km}^{pq,\varphi}(t) = \varepsilon_{km}^p(t) - \varepsilon_{km}^q(t)$$

La Figura VI-10 representa las dobles diferencias. La principal característica de las dobles diferencias es la eliminación de los términos de errores de los relojes de los receptores, además de los errores de los relojes de los satélites. Estos errores de los relojes de los receptores se eliminan por el hecho de que las observaciones a dos satélites p y q se realizan al mismo tiempo.

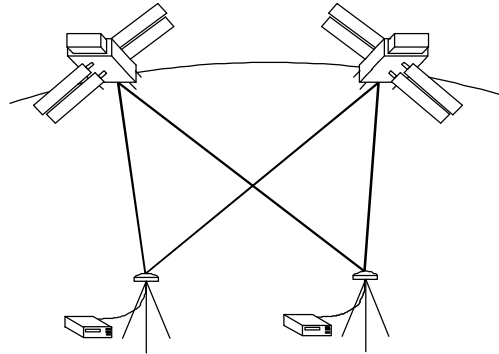


Figura VI-10. Esquema de Dobles diferencias.

La ambigüedad entera juega un papel importante en las dobles diferencias. Si es posible fijar la ambigüedad, o lo que es lo mismo, obligar a la ambigüedad $N_{km}^{pq}(1)$ a ser un número entero, entonces, esta solución es la preferida. Además, imponiendo la condición anterior se añade fuerza a la solución, debido a que el número de parámetros se reduce (Teunissen, P.J.G., Kleusberg, A. 1998).



VI.4.2.3. Triples diferencias.

La triple diferencia es la diferencia de las dobles diferencias correspondientes a dos instantes de tiempo distintos:

$$\Phi_{km}^{pq}(t_2, t_1) = \Phi_{km}^{pq}(t_2) - \Phi_{km}^{pq}(t_1)$$

Ec. VI-30

La Figura VI-11 representa las triples diferencias. Debido a que la ambigüedad de la triple diferencia es la diferencia de las ambigüedades de dos dobles diferencias, ambas para el instante inicial, y por tanto del mismo valor, la ambigüedad entera se ha eliminado en el observable de triples diferencias.

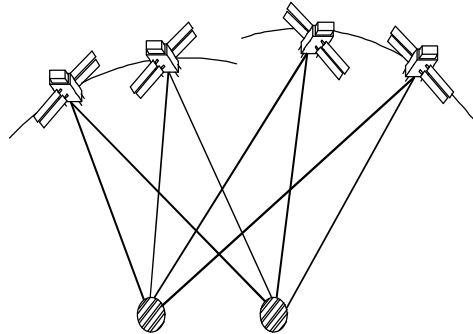


Figura VI-11. Esquema de Triples diferencias.

El observable de triples diferencias es probablemente el más fácil de tratar debido a que no tiene término de ambigüedad entera. Sin embargo, debido a la diferenciación con respecto al tiempo, las triples diferencias pierden alguna fuerza geométrica. Esta solución se usa a menudo como una técnica de preprocesado para conseguir una posición aproximada para posteriormente poder encontrar la solución de dobles diferencias. Además, la solución de triples diferencias presenta la propiedad de ser útil para encontrar, y poder eliminar los errores de pérdida de ciclos. Las observaciones resultantes libres de errores de pérdida de ciclos se pueden usar en la solución dobles diferencias.

Las triples diferencias se pueden calcular en cualquier orden:



$$\begin{aligned}
 \varphi_{km}^{pq}(t_2, t_1) &= [\varphi_{km}^p(t_2) - \varphi_{km}^q(t_2)] - [\varphi_{km}^p(t_1) - \varphi_{km}^q(t_1)] = \\
 &= [\varphi_{km}^p(t_2) - \varphi_{km}^p(t_1)] - [\varphi_{km}^q(t_2) - \varphi_{km}^q(t_1)] = \varphi_{km}^p(t_2, t_1) - \varphi_{km}^q(t_2, t_1) = \\
 &= [\varphi_k^p(t_2) - \varphi_m^p(t_2)] - [\varphi_k^p(t_1) - \varphi_m^p(t_1)] - [\varphi_k^q(t_2) - \varphi_m^q(t_2)] + [\varphi_k^q(t_1) - \varphi_m^q(t_1)] = \\
 &= [\varphi_k^{pq}(t_2) - \varphi_m^{pq}(t_2)] - [\varphi_k^{pq}(t_1) - \varphi_m^{pq}(t_1)] = \\
 &= [\varphi_k^p(t_2) - \varphi_k^p(t_1)] - [\varphi_m^p(t_2) - \varphi_m^p(t_1)] - [\varphi_k^q(t_2) - \varphi_k^q(t_1)] + [\varphi_m^q(t_2) - \varphi_m^q(t_1)] = \\
 &= \varphi_k^p(t_2, t_1) - \varphi_m^p(t_2, t_1) - [\varphi_k^q(t_2, t_1) - \varphi_m^q(t_2, t_1)] = \\
 &= \varphi_k^{pq}(t_2, t_1) - \varphi_m^{pq}(t_2, t_1)
 \end{aligned}$$

Ec. VI-31

La Tabla VI-4 muestra las características y utilidades de los observables diferenciados visto hasta ahora.

Observación	Efectos eliminados	Efectos reducidos	Opción
Simple diferencia	Efectos de primer orden del reloj de los satélites	ionosférico y troposférico para distancias cortas	Ambigüedad entera condicionada
Doble diferencia	Efectos de primer orden del reloj de satélites y receptores	ionosférico y troposférico para distancias cortas	Ambigüedad entera condicionada
Triple diferencia	Efectos de primer orden del reloj de satélites y receptores	ionosférico y troposférico para distancias cortas	Ambigüedad entera eliminada

Tabla VI-4. Diferencias de fase usadas en posicionamiento relativo.

VI.4.2.4. Otros observables derivados.

Las combinaciones vistas hasta ahora se pueden aplicar a observaciones de fase L1 o L2, independientemente, pero además, también son posibles combinaciones entre el mismo observable (por ejemplo, dobles diferencias), en ambas portadoras, L1 y L2.



Una combinación lineal arbitraria de la medida de fase de la portadora en L1 y L2 se forma con los coeficientes n y m:

$$\varphi_k^p{}_{n,m}(t) = n\varphi_k^p{}_{,1}(t) + m\varphi_k^p{}_{,2}(t)$$

Ec. VI-32

siendo la frecuencia, la longitud de onda y la ambigüedad de la señal derivada:

$$f_{n,m} = nf_1 + mf_2$$

$$\lambda_{n,m} = \frac{c}{f_{n,m}} = \frac{c}{nf_1 + mf_2}$$

$$N_k^p{}_{n,m}(l) = nN_k^p{}_{,1}(l) + mN_k^p{}_{,2}(l)$$

Ec. VI-33, Ec. VI-34 y Ec. VI-35

De todas las combinaciones lineales posibles sólo son de interés, aquellas que cumplen algunos criterios importantes para las señales combinadas (Leick, A., 1995 (4)):

- coeficientes enteros para producir ambigüedades enteras,
- longitudes de onda razonablemente grandes para ayudar a fijar la ambigüedad,
- baja influencia ionosférica,
- ruido de observación limitado.

Serán importantes las combinaciones lineales de “banda ancha” (“wide lane”):

$$\varphi_k^p{}_{,\Delta} = \varphi_k^p{}_{,1} - \varphi_k^p{}_{,2} \quad \lambda_{\Delta}=86.2 \text{ cm}$$

Ec. VI-36

y de “banda estrecha” (“narrow lane”):

$$\varphi_k^p{}_{,\Sigma} = \varphi_k^p{}_{,1} + \varphi_k^p{}_{,2} \quad \lambda_{\Sigma}=10.7 \text{ cm}$$

Ec. VI-37



La ventaja del observable de banda ancha, comparado con el observable original, es que la ambigüedad a resolver será la correspondiente a una señal con una longitud de onda cuatro veces mayor; el ruido de observación relativo es, sin embargo, seis veces mayor (Teunissen, P.J.G., Kleusberg, A. 1998).

La combinación banda estrecha tiene el nivel de ruido más bajo de todas las combinaciones lineales y así conduce a los mejores resultados. Su ambigüedad sin embargo, es difícil de resolver. La combinación de banda estrecha se usa principalmente en distancias interceptadas cortas.

La magnitud del efecto ionosférico en los observables de banda ancha y de banda estrecha es igual, pero tienen signo opuesto. Así, la media de banda ancha y de banda estrecha conduce a señal libre de efecto ionosférico (Rizos, C. 1999).

El observable formado de la diferencia de los observables mencionados es interesante, ya que contiene el efecto ionosférico completo. La señal permite un análisis detallado del comportamiento ionosférico que es útil para resolver la ambigüedad (Teunissen, P.J.G., Kleusberg, A. 1998).

Las ambigüedades serán:

$$N_{\Delta} = N_1 - N_2 \quad (4.10)$$

$$N_{\Sigma} = N_1 + N_2 \quad (4.11)$$

Ambas no son independientes. Cuando N_{Σ} es par, N_{Δ} es par, y cuando es impar, N_{Δ} es también impar.

Esta condición paridad-imparidad implica que cuando la ambigüedad está resuelta para una de las dos condiciones, la longitud de onda de la otra señal combinada está incrementada por un factor de dos. Esta condición se usa en la técnica “extra wide lane” (Leick, A., 1995 (4)).



VI.4.3. Resolución de la ambigüedad.

Para usar la fase de la portadora como un observable en el posicionamiento, se debe estimar o cuantificar su valor de la ambigüedad entera de alguna manera. El procedimiento necesario para procesar los datos y con ellos determinar el número entero del valor de la ambigüedad se llama resolución de la ambigüedad. La resolución de la ambigüedad resulta aún más complejo si el receptor está continuamente en movimiento, necesitando técnicas especiales conocidas como resolución de la ambigüedad on-the-fly (OTF). (Leick A. 1992 (3)).

En los últimos años se han desarrollado muy diferentes técnicas de resolución de la ambigüedad, con diferentes características, y cada una de ellas con unas ventajas y desventajas, algunas veces optimizadas para aplicaciones específicas. Pero sin embargo, la resolución de la ambigüedad sigue siendo uno de los temas investigados, tendiendo a aumentar la precisión con observaciones cada vez más cortas, y en líneas base de mayor longitud (Torrecillas Lozano, C. 1998).

Una posibilidad para resolver este problema de manera más fácil es usar conjuntamente observaciones GPS y observaciones GLONASS, o la posibilidad de la existencia de una segunda señal GPS de uso civil en la siguiente generación de satélites GPS, ahora en etapa de diseño (Strang, G., Borre, K. 1997).

El procedimiento más simple para cuantificar las ambigüedades es usar las observaciones de triples diferencias para eliminar las ambigüedades en el modelo de observación, o procesar las dobles diferencias de fase con las ambigüedades como números reales, lo que se denomina solución flotante. Debido a que la precisión de esta solución depende tan sólo de la variación en la geometría de los satélites, estos dos procedimientos no explotan al completo la exactitud potencial de las observaciones de fase de la portadora (Shaowein H., Rizos, C. 1997).

Uno de los primeros métodos para la determinación del valor entero de la ambigüedad consiste simplemente en el redondeo del valor real encontrado para la ambigüedad al



entero más cercano (Torrecillas Lozano, C. 1998). Sin embargo, esto solamente presenta validez si el valor real estimado para la ambigüedad es suficientemente bueno, o lo que es lo mismo, el error en las ambigüedades es menor a la mitad de la longitud de la onda portadora. Esto conllevará largos períodos de observación (0.5 a 1 hora) para líneas base cortas (15 km), lo que hace de dicho posicionamiento ineficiente para muchas aplicaciones.

Para subsanar esta ineficiencia, se han venido desarrollando diversidad de métodos de resolución de la ambigüedad. Una posible clasificación de estas técnicas puede ser (Shaowein H., Rizos, C. 1997):

- Modalidades de operación especial.
- Procedimientos de búsqueda de la ambigüedad en los dominios de observación.
- Procedimientos de búsqueda de la ambigüedad en los dominios de las coordenadas.
- Procedimientos de búsqueda de la ambigüedad en los dominios de las ambigüedades.
- Técnicas de recuperación de ambigüedades.
- Técnicas integradas.

Estas técnicas se basarán en aprovechar las ventajas que suponen las siguientes restricciones a la hora de resolver las ambigüedades GPS:

- Geometría de satélites instantánea, medida a través de la dilución de la precisión en la posición, y puede ser importante en diferentes técnicas de resolución de la ambigüedad.
- Cambio en la geometría de satélites, que resulta muy conveniente cuando se utilizan observaciones doppler, o las diferencias en las distancias del receptor a los satélites entre instantes de observación.
- Líneas base cortas: la distancia entre receptores resulta limitante en tanto a los retrasos ionosféricos, troposféricos o errores orbitales, en el sentido de que pueden ser eliminados o reducidos con distancias cortas.



- Ambigüedad entera. Los errores iniciales en la observación de fase portadora sobre L1 y L2 son números enteros.

VI.4.3.1. Modalidades de operación especial.

Estas técnicas requieren que el usuario ejecute las actividades de posicionamiento GPS de una manera específica, lo que requiere un esfuerzo adicional comparándolas con el posicionamiento estático de larga duración. Ejemplos de estas modalidades son (Hofmann-Wellenhof, B. 1993):

- Intercambio de antenas.
- Stop-and-Go.
- Reocupación.

Estas modalidades fueron los primeros métodos de resolución de ambigüedad, pero dado el avance en este aspecto, hoy día no es necesario su utilización.

VI.4.3.2. Búsqueda en el dominio de las observaciones.

En principio, para determinar la ambigüedad se podría utilizar observaciones de pseudodistancia sin ambigüedad. Sin embargo, la precisión de las pseudodistancias con código C/A o P no es suficiente para determinar la ambigüedad. La longitud de onda del observable de fase para la L1 es de 19.03 cm y de 24.42 cm para la L2, y el ruido sobre los datos de pseudodistancias suele ser bastante mayor.

Como alternativa, se puede utilizar combinaciones lineales enteras de los observables de fase de la L1 y la L2, que tengan una longitud de onda mayor, un ruido bajo y un retraso ionosférico relativamente pequeño. En este sentido son adecuadas las combinaciones wide lane, narrow lane y extra wide lane, con longitudes de onda de 0.86, 0.11 y 1.63 metros respectivamente. Si la línea base es corta, se puede despreciar el retraso ionosférico diferencial y usar los datos de pseudodistancia de código P para determinar



la ambigüedad entera inicial del observable combinado, y después derivar la ambigüedad de los observables originales L1 y L2 (Shaowein H., Rizos, C. 1997).

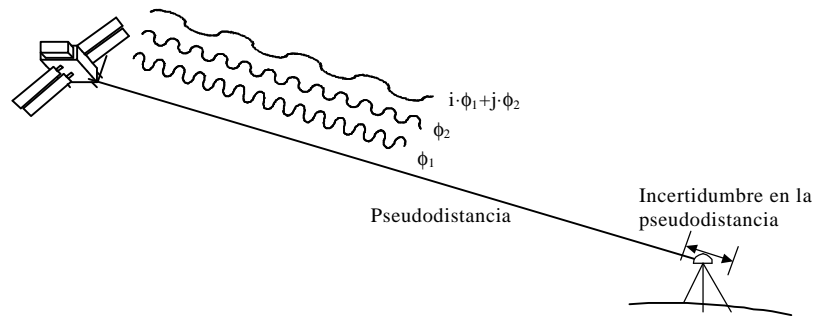


Figura VI-12. Búsqueda de la ambigüedad en el dominio de las observaciones.

VI.4.3.3. Búsqueda en el dominio de las coordenadas.

Dentro de este grupo, una técnica comúnmente utilizada es el método de función de ambigüedad, que transforma las ecuaciones de observación en una función en el plano complejo, y busca las componentes de posición de modo que el valor de la función de ambigüedad sea un máximo, o que la forma cuadrática de los residuales presente un mínimo.

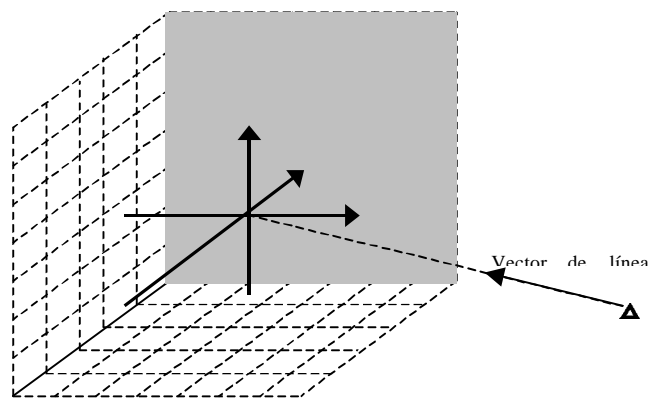


Figura VI-13. Búsqueda de la posición en el dominio de las coordenadas.



Usando entonces la insensibilidad de las funciones seno y coseno al multiplicarlas por 2π en un procedimiento de búsqueda, mediante un procedimiento ensayo-error se buscan las coordenadas del receptor, estableciendo diferentes rejillas y seleccionando las coordenadas del receptor y las correspondientes distancias de simple diferencia entre el receptor y cada uno de los satélites. La solución deseada será el punto de la rejilla que produce la función de ambigüedad máxima. Encontrado este punto, se usan las dobles diferencias para determinar las ambigüedades enteras.

VI.4.3.4. Búsqueda en el dominio de la ambigüedad.

Estos métodos parten de la solución flotante, en los que se estima un valor real para las ambigüedades, junto con su matriz de varianza-covarianza. A partir de este conjunto de ambigüedades, se seleccionan el conjunto de combinaciones de ambigüedad entera posibles, buscando como solución aquella que minimiza el cuadrado de los residuos de las observaciones. Con estos valores de ambigüedades enteros, se vuelve a plantear las ecuaciones de dobles diferencias, pero sustituyendo el valor encontrado para las ambigüedades, y estimando el resto de los parámetros de posición. Como los valores de las ambigüedades a determinar están altamente correlacionados, el conjunto de posibles soluciones a evaluar es muy grande, dependiente de la matriz de varianza-covarianza de las ambigüedades encontradas en la solución flotante (Strang, G., Borre, K. 1997).

Esta alta correlación entre las ambigüedades lleva al desarrollo de diversidad de técnicas que conllevan una previa decorrelación entre las ambigüedades, con el fin de reducir el espacio de búsqueda, y llegar a una solución rápida de la ambigüedad. Un caso es la técnica de resolución de la ambigüedad LAMBDA (Least squares AMBiguity Decorrelation Adjustment), que consiste en, previamente al proceso de búsqueda del valor entero de las ambigüedades, aplicar una z-transformación a las mismas para obtener una decorrelación, y reducir así el espacio de búsqueda de las ambigüedades. Una vez que se encuentran las ambigüedades transformadas, se aplica la transformación en sentido inverso, obteniéndose el valor de las ambigüedades originales (Teunissen, P.J.G., Kleusberg, A. 1998).

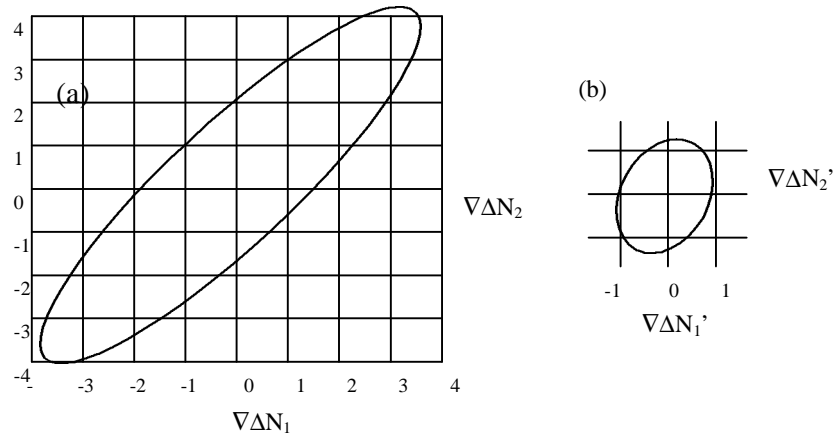


Figura VI-14. Búsqueda de la ambigüedad en el dominio de la ambigüedad. (a) Búsqueda en el dominio de la ambigüedad original (22 candidatos a evaluar). (b) Búsqueda en el dominio de la ambigüedad transformada (5 candidatos a evaluar).

En estos métodos, el paso siguiente a la determinación del valor entero para las ambigüedades sería la validación de estos valores de ambigüedad, para asegurar que la solución es correcta (Teunissen, P.J.G. 1998 y 1999) (Joosten, P., Tiberius, C. 2000).

VI.4.3.5. Técnicas de recuperación de ambigüedades.

La técnica de recuperación de ambigüedades se puede usar para reestimar las ambigüedades enteras cuando ocurren pérdidas de ciclo, es decir, faltan los datos, por períodos menores a varios minutos. Estas técnicas consisten por tanto en la eliminación de los errores de pérdida de ciclo, para posteriormente formar las dobles diferencias

VI.4.3.6. Técnicas integradas.

Un algoritmo que conllevara la combinación de diferentes técnicas ofrece ventajas respecto a un único método de resolución de la ambigüedad. Tal algoritmo puede combinar los procedimientos de búsqueda en los dominios de observación, de coordenadas y de estimación de ambigüedad.



Otras técnicas integradas usan mediciones GPS junto con datos de otros sensores físicos, como sistemas de navegación inercial o brújulas. Estos sensores deben presentar buena resolución para períodos cortos de tiempo, y pueden suponer una técnica de recuperación de la ambigüedad entera cuando se pierde la señal del satélite durante un corto período de tiempo. Sin embargo, tal combinación de equipos hará el sistema complejo y caro (Shaowein H., Rizos, C. 1997).



VII. AJUSTE MÍNIMOS CUADRADOS APLICADO A REDES GEODÉSICAS.

VII.1. Introducción.

Los problemas geodésicos que normalmente se plantean consisten en, a partir de una serie de observaciones realizadas, determinar el valor de una serie de parámetros incógnitas. Así, por ejemplo, en el cálculo de una red geodésica, se pretende determinar las coordenadas de los puntos que constituyen la red a través de una serie de observaciones realizadas en campo.

El primer paso a la hora de resolver estos problemas será identificar las expresiones matemáticas que relacionen las incógnitas con las observaciones de las que se disponga. Estas expresiones constituirán lo que se denomina el modelo matemático.

Los modelos matemáticos que se presentan para la resolución de problemas geodésicos son por lo general no lineales, por lo que un paso previo a la hora de obtener la solución de los mismos será linealizarlos.

Una vez linealizado el modelo, lo más usual es tener un modelo matemático con más ecuaciones que incógnitas, o lo que es lo mismo, tener un sistema sobredeterminado. Este caso se nos presenta cuando se tienen más observaciones que las necesarias para determinar el valor de un conjunto de incógnitas, es decir, se tienen observaciones redundantes. Esto es lo que ocurre en el caso de las redes geodésicas, ya que una vez realizadas las observaciones que constituyen una red, normalmente se tendrá un conjunto de observaciones redundantes

Los sistemas sobredeterminados no tienen solución matemática, por lo que para poder obtener una solución para el problema planteado habrá que reformular el modelo. Esto



se hará introduciendo algún mecanismo de ajuste, tal como la obtención de la solución mediante un proceso de ajuste mínimos cuadrados (Vanicek, P., Krakiwsky, E.J. 1986).

En 1805, Legendre declaraba ya que: "De todos los principios que pueden ser propuestos, pienso que no hay ninguno más general, más exacto y de más fácil aplicación que aquel que consiste en producir que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima".

En 1799, Laplace empleó el principio de la minimización de los errores absolutos con la condición adicional de que la suma de los errores fuera cero y demostró que en este caso la solución satisfacía exactamente n de las m ecuaciones. Gauss argumentó que dado que bajo los principios de probabilidad errores pequeños y grandes son posibles, era evidente que una solución que cumpliera exactamente n ecuaciones debía ser considerada menos consistente con las leyes de probabilidad. En 1805 Legendre publicó el procedimiento algebraico de los mínimos cuadrados y en 1809 Gauss lo justificó como procedimiento estadístico. Se desarrollará entonces una disputa histórica entre ambos acerca de la paternidad del método. En 1823 Gauss estableció las bases del método, probando el carácter óptimo de la estimación mínimo cuadrática sin realizar hipótesis alguna sobre las distribuciones de las variables aleatorias. Este último hecho pasó desapercibido hasta que fue puesto de manifiesto por Markoff en 1912. Así, el método mínimos cuadrados quedó establecido bajo el teorema de Gauss-Markov. (García Cortés, S. 2000) (Chueca Pazos, M. et al 1996).

La realización de un ajuste mínimos cuadrados para el cálculo de una red geodésica parte de la premisa inicial de que las variables que intervienen en los distintos tipos de observaciones geodésicas son variables aleatorias continuas, y además, que la distribución de frecuencias de las medidas se adaptan a una distribución normal (Harvey, B.R. 1994).

En definitiva, el ajuste mínimos cuadrados es un mecanismo matemático que permite obtener una solución partiendo de un conjunto redundante de observaciones,



permitiendo además llevar a cabo el control de calidad de las medidas geodésicas y un análisis estadístico de la solución encontrada (Leick, A. 1995 (4)).

VII.2. Modelos estocásticos y modelos matemáticos.

Cualquier ajuste por mínimos cuadrados se compone, además del modelo matemático antes mencionado, de un modelo estocástico (Leick A., 1993 (1)), (Chueca Pazo, M. et al, 1995). Ambos componentes son indispensables y contribuyen al algoritmo de ajuste (Diagrama VII-1).

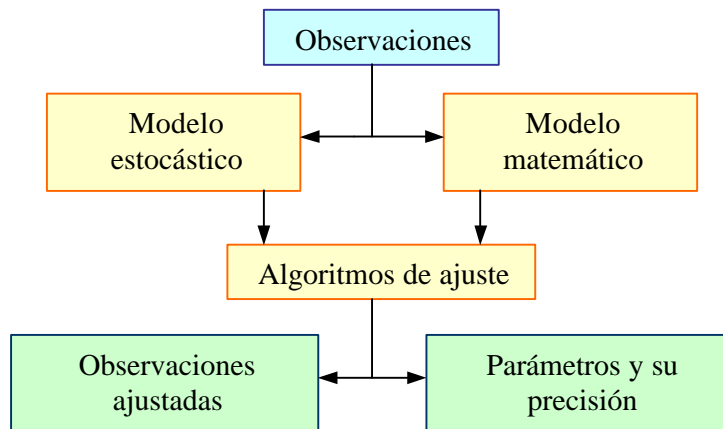


Diagrama VII-1. Proceso de estimación por mínimos cuadrados.

VII.2.1. Modelo matemático.

El modelo matemático pretende expresar, matemáticamente, la relación existente entre observaciones, y entre observaciones y los parámetros o incógnitas del ajuste.

En la mayoría de las aplicaciones geodésicas, el modelo matemático no es lineal. En el caso general, las observaciones y los parámetros están relacionados por una función implícita no lineal, como sigue:



$$F(L_a, X_a) = 0$$

Ec. VII-1

Éste es el Modelo Mixto de ajuste (Leick, A 1995 (4)), también llamado Modelo General (Chueca Pazos, M 1996). El subíndice a representa la cantidad ajustada. Normalmente, el número de observaciones se representa por n y el número de parámetros por u. Así:

L_a = vector de n observaciones ajustadas

X_a = vector de u parámetros ajustados

F = r funciones matemáticas no lineales.

Una posible modificación del modelo anterior se presenta cuando las observaciones están relacionadas explícitamente con los parámetros, tal como:

$$L_a = F(X_a)$$

Ec. VII-2

Este es el modelo de ecuación de observación. El número de ecuaciones en la expresión anterior es igual al número de observaciones, representándose por n.

Otra simplificación posible es la eliminación total de los parámetros, quedando el modelo de ecuación de condición:

$$F(L_a) = 0$$

Ec. VII-3

El número de ecuaciones en la expresión anterior se representa por r.

La decisión de qué modelo matemático usar depende de la aplicación. El modelo de ecuación de observación tiene la ventaja particular de que cada observación genera una ecuación, lo que hace fácil su implementación informática.



VII.2.2. Modelo estocástico.

Como se ha dicho, las observaciones son variables aleatorias y las varianzas de estas variables aleatorias comprenden el modelo estocástico.

El modelo estocástico entra en el ajuste para introducir información sobre la calidad de las observaciones y la posible correlación entre ellas (Leick, A. 1993 (1)). Esto se lleva a cabo mediante la matriz de varianza-covarianza de las observaciones (Tiberius, C. et al. 1999). Si L_b representa el vector de observaciones y n el número de observaciones, \sum_{L_b} representará su matriz de varianza-covarianza. En los problemas de ajuste clásicos, esta matriz es normalmente diagonal, es decir, las observaciones no están relacionadas (Rizos, C., 1999).

Dado que las observaciones geodésicas pertenecen a una distribución normal, el vector de observaciones es una muestra de la distribución normal multivariante, que se expresa por la siguiente notación (Leick, A. 1995(4)):

$$L_b \approx N(L_T, \sum_{L_b})$$

Ec. VII-4

donde L_T denota el vector media de la población.

En realidad, el ajuste requiere, no la matriz de varianzas-covarianzas, sino la matriz cofactor Q_{L_b} de las observaciones, que se corresponde con la matriz de varianza-covarianza ponderada:

$$Q_{L_b} = \frac{1}{s_0^2} \sum_{L_b}$$

Ec. VII-5

o la matriz de pesos, definida como:



$$P = P_L = (Q_L)^{-1} = \sum_{L_b}^{-2}$$

Ec. -

El factor σ_0^2 , llamado varianza a priori de peso unidad, es un factor de escala arbitrario por el que se multiplica la matriz de covarianza invertida para conseguir la matriz de pesos (Ferrer Torio, R. et al. 1991).

Una de las características fundamentales del ajuste por mínimos cuadrados es que tiene la capacidad de estimar el valor de σ_0^2 basándose en las observaciones y en la matriz de pesos P. Esta estimación se representa por $s_0^2(estim)$ y es la varianza a posteriori de peso unidad. Si las varianzas de peso unidad a priori y a posteriori son estadísticamente iguales, se puede decir que el ajuste es correcto. En general, la varianza a priori de peso unidad se iguala a 1; esto es, la matriz de pesos es igual a la inversa de la matriz de varianza-covarianza de las observaciones (Leick, A., 1995 (4)).

El nombre de “varianza de peso unidad” se deriva del hecho de que si la varianza de una observación es igual a σ_0^2 , el peso de la observación es igual a la unidad. El caso especial de $P=I$ (matriz de pesos igual a la matriz identidad), se puede considerar como el caso clásico de mínimos cuadrados.

VII.3. Solución mínimos cuadrados.

Al aplicar el proceso de mínimos cuadrados para la resolución de redes observadas con GPS, como se verá en el capítulo IX, el modelo matemático que relaciona las observaciones GPS (líneas base observadas) con las incógnitas (las coordenadas no conocidas de los vértices de la red) es el modelo de ecuaciones de observación (Rizos, C., 1999). Como este modelo es un caso simplificado del modelo mixto, su solución se obtendrá a partir de la solución obtenida para el modelo mixto.



El modelo de ecuaciones de condición también puede ser útil, pues normalmente, la definición del sistema de coordenadas de una red observada se realizará imponiendo condiciones entre los parámetros. Lo más habitual será fijar las coordenadas de uno o varios vértices cuyas coordenadas, en un determinado sistema de referencia, sean conocidas.

VII.3.1. Modelo de ajuste mixto.

En el modelo de ajuste mixto las observaciones y los parámetros están relacionados implícitamente. Si L_a representa el vector de n observaciones ajustadas, y X_a el vector de u parámetros ajustados (incógnitas), el modelo matemático viene dado por (Leick, A 1995 (4)) (Chueca Pazos, M et al. 1996):

$$F(L_a, X_a) = 0$$

Ec. VII-7

El número total de ecuaciones es r . El modelo estocástico asociado es:

$$P = \sigma_0^2 \sum_{L_b}^{-1}$$

Ec. VII-8

donde P es la matriz $n \times n$ de pesos, y $\sum_{L_b}^{-1}$ la matriz de covarianza de las observaciones.

VII.3.1.1. Linealización.

El objetivo del proceso de ajuste es determinar los parámetros. Para ello, se considera X_0 un vector conocido de valores aproximados para los parámetros. Las correcciones para obtener dichos parámetros serán:



$$X = X_a - X_0$$

Ec. VII-9

Si L_b representa el vector de observaciones, entonces los residuos son definidos por:

$$V = L_a - L_b$$

Ec. VII-10

Con las ecuaciones anteriores, el modelo matemático puede escribirse como:

$$F(L_b + V, X_0 + X) = 0$$

Ec. VII-11

El modelo matemático no lineal anterior se puede linealizar aplicando un desarrollo de Taylor en torno al punto de expansión conocido (L_b, X_0) . Quedándose sólo con los términos de primer orden se tiene:

$$r_{nn} V_i + r_{au} A_{ui} + r_{w1} W_1 = 0$$

Ec. -12

$$r_{Bn} = \left. \frac{\partial}{\partial L} \right|_0,$$

$$r_{Au} = \left. \frac{\partial}{\partial X} \right|_0,$$

$$r_{W1} = (L, X_0)$$

Ec. -13

Estas matrices de coeficientes se deben calcular para las observaciones y los parámetros



Cuanto mejor sea el valor aproximado X_0 , menores serán las correcciones a aplicar X para obtener los parámetros ajustados.

VII.3.1.2. Minimización y Solución.

La estimación por mínimos cuadrados se basa en minimizar la suma de los cuadrados de los residuos de las observaciones. Cuando las observaciones son de diferente precisión, es decir, se tienen observaciones con pesos distintos, la estimación por mínimos cuadrados se basa en hacer mínima la suma de los cuadrados de los residuos ponderados por sus pesos. Esta condición se traduce en la minimización de del productor matricial $V^T P V$. La solución mínimos cuadrados se obtiene introduciendo un vector de multiplicadores de Lagrange, K , y minimizando la función siguiente (Leick, A., 1995(4)):

$$\Phi(V, K, X) = V^T P V - 2K^T (B V + A X + W)$$

Ec. VII-14

La ecuación anterior es función de tres variables, X , V , y K . Una condición necesaria y suficiente para minimizarla es que las derivadas parciales deben ser cero.

Diferenciando queda la siguiente expresión para los residuos:

$$V = P^{-1} B^T K$$

Ec. VII-15

Sustituyendo este valor de V en las ecuaciones anteriores, se obtiene la solución para los multiplicadores de Lagrange:

$$K = -M^{-1} (A X(\text{estim}) + W)$$

Ec. VII-16

con:



$${}_rM_r = {}_rB_{uu}P^{-1}{}_{uu}B^T_r$$

VII-

$$X(\text{estim}) = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

Ec. VII-18

El proceso habitual de cálculo será:

1°- Cálculo de los parámetros X (Ec. VII-18).

2°- Cálculo de los multiplicadores de Lagrange (Ec. VII-16).

3°- Cálculo de los residuos V (Ec. VII-15).

4°- Cálculo de los parámetros ajustados y las observaciones ajustadas según:

$$X = X_a - X_0 \Rightarrow X_a = X + X_0$$

Ec. VII-19

$$V = L_a - L_b \Rightarrow L_a = V + L_b$$

Ec. VII-20

VII.3.1.3. Matrices cofactor y covarianza.

En el proceso de ajuste mínimos cuadrados, para cada cantidad estimada, se obtiene su correspondiente matriz de varianza-covarianza aplicando la ley de propagación de varianza-covarianza a partir de la matriz de pesos de las observaciones (Vanicek, P., Krakiwsky, E.J. 1986). De este modo, las matrices cofactor de los parámetros estimados (Q_x), de los residuos estimados (Q_v) y de las observaciones ajustadas (Q_{L_a}) toman los valores siguientes (Leick, 1995 (4)):



$$Q_X = (A^T M^{-1} A)^{-1}$$

Ec. VII-21

$$Q_V = P^{-1} B^T M^{-1} (M - A(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T) M^{-1} B P^{-1}$$

Ec. VII-22

$$Q_{La} = P^{-1} - Q_V$$

Ec. VII-23

Teniendo en cuenta que el valor esperado del vector de residuos es cero, se puede comprobar que el valor de la varianza a posteriori de peso unidad será (Chueca Pazos, M., et al 1996):

$$\sigma_0^2(\text{estimada}) = \frac{V^T P V}{r - u}$$

Ec. VII-24

siendo r-u los grados de libertad del ajuste, que se corresponde con el número de observaciones redundantes en el modelo.

Finalmente, las matrices de varianza-covarianza esperadas son:

$$\Sigma_X = \sigma_0^2(\text{estimado}) Q_X$$

Ec. VII-25

$$\Sigma_V = \sigma_0^2(\text{estimado}) Q_V$$

Ec. VII-26

$$\Sigma_{La} = \sigma_0^2(\text{estimado}) Q_{La}$$

Ec. VII-27



VII.3.1.4. Iteraciones.

El ajuste por mínimos cuadrados y el tratamiento estadístico requiere que las relaciones matemáticas no lineales sean linealizadas. Los posibles errores de despreciar la parte no lineal son eliminados a través de adecuadas iteraciones (Harvey, B.R. 1994).

La ecuación $F(L_a, X_a)=0$ es cierta sólo para (L_a, X_a) . Como antes del ajuste ninguna de estas cantidades es conocida, el punto de expansión inicial es elegido como (L_b, X_0) . Para la i -ésima iteración, el modelo linealizado se puede escribir como (Leick, A., 1995(4)):

$$B_{X_{0i}, L_{0i}} \bar{V}_i + A_{X_{0i}, L_{0i}} X^i + W_{X_{0i}, L_{0i}} = 0$$

Ec. VII-28

donde el punto de expansión (L_{0i}, X_{0i}) se toma de la solución previa tal que:

$$\bar{V}_i = L_{ai} - L_{0i}$$

Ec. VII-29

$$X^i = X_{ai} - X_{0i}$$

Ec. VII-30

Los símbolos L_{ai} , X_{ai} representan las observaciones y los parámetros ajustados en la i -ésima solución, y se obtienen por la ecuación anterior, una vez obtenida la solución por mínimos cuadrados.

La iteración comienza con $L_{01}=L_b$ y $X_{01}=X_0$. Si el ajuste converge adecuadamente, entonces \bar{V}_i y X_i convergen a 0, o dicho de otro forma, L_{ai} y X_{ai} convergen a L_a y X_a respectivamente.



VII.3.2. Modelo de ecuaciones de observación y modelo de ecuaciones de condición.

Comparando la expresión correspondiente al modelo de ecuaciones de observación (Ec. VII-2) respecto al modelo mixto (Ec. VII-1), se puede ver que el modelo de ecuación de observación se obtiene del modelo mixto con la especificación:

$$B = \frac{\partial(F(X_a) - L_a)}{\partial L_a} = -I$$

Ec. VII-31

Se suele usar el símbolo L en vez de W cuando se trata con modelo de ecuación de observación (Leick, A., 1995(4)). Así:

$$L = W = F(X_0) - L_b = L_0 - L_b$$

Ec. VII-32

El símbolo L_0 se refiere al valor de las observaciones calculadas a partir de los parámetros aproximados X_0 (punto de expansión para la linealización). El vector de observaciones no interviene en las iteraciones debido a la forma explícita de la ecuación.

La ecuación linealizada, llamada normalmente ecuación de observación, es:

$${}_n V_1 = {}_n A_{u_1} X_1 + {}_n L_1$$

Ec. VII-33

Por otro lado, si las observaciones están relacionadas por funciones no lineales en las que no intervienen los parámetros adicionales, se tiene un modelo de ecuación de condición. Comparándolo con la ecuación de modelo mixto, se ve que el modelo de ecuación de condición se obtiene con la especificación:



$$A = \frac{\partial[F(L_a)]}{\partial X} = 0$$

Ec. VII-34

La ecuación linealizada, llamada ecuación de condición, es:

$${}_r B_{nn} V_1 + {}_r W_1 = 0$$

Ec. VII-35

	Modelo mixto	Modelo de ecuación de observación	Modelo de ecuación de condición
Modelo no lineal	$F(L_a, X_a) = 0$	$L_a = F(X_a)$	$F(L_a) = 0$
Especificaciones		$B = -I, L = W, r = n$	$A = 0$
Modelo lineal	$BV + AX + W = 0$	$V = AX + L$	$BV + W = 0$
Elementos de la ecuación normal	$M = BP^{-1} B^T$ $N = A^T M^{-1} A$ $U = A^T M^{-1} W$	$M = P^{-1}$ $N = A^T P A$ $U = A^T P L$	$M = BP^{-1} B^T$
Ecuación normal	$NX(\text{estim}) = -U$	$NX(\text{estim}) = -U$	
VPV mínimo	$VPV = -K^T W = -U^T X(\text{estim}) + W^T M^{-1} W$	$VPV = -U^T X(\text{estim}) + L^T P L$	$VPV = -K^T W = -W^T M^{-1} W$
Parámetros estimados	$X(\text{estim}) = -N^{-1} U$	$X(\text{estim}) = -N^{-1} U$	
Residuos estimados	$V = P^{-1} B^T K,$ $K = -M^{-1} (AX + W)$	$V = AX(\text{estim}) + L$	
$\sigma_0^2(\text{estim})$	$\sigma_0^2(\text{estim}) = \frac{VPV}{(r - u)}$	$\sigma_0^2(\text{estim}) = \frac{VPV}{(n - u)}$	$\sigma_0^2(\text{estim}) = \frac{VPV}{r}$
Matriz cofactor de los parámetros estimados	$Q_X = N^{-1}$	$Q_X = N^{-1}$	
Matriz cofactor de los residuos estimados	$Q_V = P^{-1} B^T M^{-1} (M - AN^{-1} A^T) M^{-1} B P^{-1}$	$Q_V = P^{-1} - AN^{-1} A^T$	$Q_V = P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1}$
Matriz cofactor de las observaciones ajustadas	$Q_{L_a} = Q_{L_b} - Q_V$	$Q_{L_a} = Q_{L_b} - Q_V$	$Q_{L_a} = Q_{L_b} - Q_V$

Tabla VII-1.- Resumen de los tres modelos de ajuste.



La tabla anterior muestra un resumen de las expresiones utilizadas en el ajuste mínimos cuadrados, según los tres modelos vistos.

Hay situaciones en las que es igual de fácil usar cualquiera de los modelos. Sin embargo, en la mayoría de los casos, el modelo de ecuación de observación es preferible, ya que para cada observación hay una ecuación, lo que facilita la programación del software.

VII.4. Ajustes mínimo constreñimiento y ajustes constreñimiento interno.

Considerando una red geodésica observada, una vez planteado el ajuste mínimos cuadrados entre observaciones e incógnitas, la matriz de diseño tendrá un rango r : $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^T P A) = r \leq u$. El defecto de rango ($u-r$), es decir, número de columnas de la matriz normal que son linealmente dependientes del resto, es generalmente debido a la falta de definición del sistema de coordenadas y se subsana especificando ($u-r$) condiciones entre los parámetros (Chueca Pazos, M., et al, 1996) (Ferrer Torio, R. et al. 1991).

Como ya se ha dicho, el ajuste mínimos cuadrados tiene la propiedad de analizar la calidad de las observaciones. Este control de calidad de las observaciones se realizará por el ajuste mínimo constreñimiento o por el ajuste constreñimiento interno. Este es el motivo de la importancia de estos ajustes que ahora se analizan. La solución constreñimiento interno tiene la ventaja adicional que las elipses de desviación representan la geometría de la matriz de diseño.

VII.4.1. Solución mínimo constreñimiento.

La solución del ajuste por mínimos cuadrados para el modelo de ecuaciones de observación en la presencia de defecto de rango se puede obtener definiendo ($u-r$) ecuaciones de condición entre los parámetros. La formulación del ajuste sería como sigue (Leick, A., 1995(4)):



$$\left. \begin{array}{l} {}_n V_1 = {}_n A_u X_B + {}_n L_1 \\ P = \sigma_0^2 \sum L_b \\ {}_{u-r} B_u X_B = 0 \end{array} \right\}$$

Ec. VII-36

El subíndice B indica que la solución de los parámetros X depende de las condiciones específicas que implica la matriz B. Este es el modelo de ecuaciones de observación con condiciones entre los parámetros.

Se necesitarán u-r condiciones para resolver el problema mínimos cuadrados; esto es, el mínimo número de condiciones necesarias es igual al defecto de rango de la matriz de diseño. Cada solución obtenida de este modo es llamada solución mínimo constreñimiento (Leick, A., 1995(4)).

Habrán muchos conjuntos diferentes de posibles mínimos constreñimientos para el mismo ajuste. El único requisito que debe cumplir la matriz B es que su rango sea igual al número de filas, y que sus filas sean linealmente independientes de A.

VII.4.2. Solución constreñimiento interno.

En el caso de no disponer de condiciones entre los parámetros, para resolver el problema de defecto de rango, se puede recurrir a utilizar, en vez de la inversa de la matriz normal, una pseudoinversa. La solución obtenida de esta manera se le llama solución constreñimiento interno.

La manera de representar la matriz pseudoinversa es la siguiente:

$$Q_P = N^+ = (A^T P A)^+$$

Ec. VII-37



Para la obtención de la matriz pseudoinversa se requiere un cálculo previo de una matriz E ($u-r,u$) que cumpla:

$$(A^T P A) E^T = 0$$

Ec. VII-38

o bien: $A E^T = 0$

Ec. VII-39

Debido a que las filas de la matriz E son linealmente independientes de las de A , en vez de usar la condición general para definir el sistema de referencia, $B X_B = 0$, se puede usar la condición $E X_p = 0$. Así, en esta solución, se introduce la matriz E para proporcionar las condiciones sobre los parámetros que eliminen el defecto de rango del ajuste. Sustituyendo la matriz E se tiene la llamada solución constreñimiento interno (Leick, A., 1995(4)):

Usando la pseudoinversa, la solución constreñimiento interno tendrá la forma:

$$X_p(\text{estim}) = -(A^T P A + E^T E)^{-1} A^T P L$$

Ec. VII-40

La solución constreñimiento interno es también una solución mínimo constreñimiento, y cumple la condición de minimizar la suma de los cuadrados de los parámetros:

$$X^T X = \text{mínimo}$$

Ec. VII-41

Esta propiedad se puede usar para obtener la interpretación geométrica de la solución constreñimiento interno. Por ejemplo, se puede ver que los valores aproximados de los parámetros, X_0 , y los parámetros ajustados $X_p(\text{estim})$ se pueden relacionar por una



transformación cuyos parámetros de traslación y rotación estimados mínimos cuadrados son cero. Otra propiedad de esta solución es que la traza de la matriz Q_P es la más pequeña comparada con la traza de cualquier otra matriz cofactor (Ferrer Torio, R. et al. 1991).

En la solución con constreñimiento interno, las elipses de error muestran la geometría de la red, y no se ven afectadas por la definición del sistema de referencia.

VII.5. Estadísticos en el ajuste por mínimos cuadrados.

Una vez efectuado el ajuste de una red geodésica, será necesario comprobar que las hipótesis previas establecidas son congruentes o no con los resultados obtenidos.

Como se ha visto, el modelo de ajuste establecido, requiere la formulación de un modelo matemático y un modelo estocástico. Será necesario por tanto, verificar su adecuación a cada caso concreto, atendiendo a criterios sobre (Chueca Pazo, M., et al, 1996):

1. Los valores a priori y a posteriori de los estimadores de las varianzas de peso unidad de los observables y su inferencia estadística.
2. Geometría general de los errores en la red y en cada punto de ella y su valoración e interpretación rigurosa.
3. Los constreñimientos previos establecidos (puntos fijos, líneas medidas...) y su influencia en la posible introducción de errores en la red.
4. Los pesos a priori asignados a los observables y su adecuación a la realidad de la observación efectuada.
5. La detección, valoración y eliminación de posibles errores groseros de observación.

Los estadísticos completan la teoría de ajuste, ya que ello permite hacer afirmaciones objetivas sobre los datos, es decir, una valoración de los resultados.



Los requerimientos básicos son, que tanto el modelo matemático como el modelo estocástico sean correctos, y que las observaciones tengan una distribución normal multivariante. El uso de estadísticos no nos garantiza decisiones ciertas, pero nos puede hacer intuir motivos que nos conduzcan a determinadas decisiones.

VII.5.1. Test sobre la varianza de peso unidad.

Como se ha visto, el producto $V^T PV$ juega un papel fundamental en el ajuste mínimos cuadrados, y por tanto será importante conocer cómo se distribuye dicho producto. Se puede demostrar que dicho producto se distribuye según una distribución chi-cuadrado con $n-r$ grados de libertad (Leick, A. 1995 (4))(Chueca Pazos, M., et al. 1996) (Ferrer Torio, R. 1992):

$$\frac{V^T PV}{\sigma_0^2} \approx \chi^2_{(n-r)}$$

Ec. VII-42

Basándose en el estadístico anterior, se puede definir un test para detectar si hay distorsión en el ajuste, comparando los valores a priori y a posteriori de la varianza de peso unidad. La formulación de hipótesis para el test es (Leick, A., 1995(4)):

$$H_0 : \sigma_0^2 = \sigma_0^2(\text{estim})$$

$$H_1 : \sigma_0^2 \neq \sigma_0^2(\text{estim})$$

Ec. VII-43

La hipótesis nula lo que quiere decir es que la varianza a priori de peso unidad es estadísticamente igual a la varianza a posteriori de peso unidad. Para hacer esta comparación, el valor estimado para $V^T PV$ se compara con el valor de la distribución Chi-cuadrado, para un nivel de confianza, y los grados de libertad correspondientes, de modo que la hipótesis nula se aceptará si se cumple (Harvey, B. R. 1994):



$$\chi^2_{(n-r, 1-\alpha/2)} < \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} < \chi^2_{(n-r, \alpha/2)}$$

Ec. VII-44

Si el ajuste pasa este test, querrá decir que el ajuste planteado es correcto.

El nivel de significación del test, esto es, la probabilidad de un error del tipo I o la probabilidad de rechazar la hipótesis nula incluso aunque sea cierta, se fija normalmente en 0.05 (lo que se corresponde con un nivel de confianza del 95%) (Harvey, B. R. 1994). La probabilidad β de un error del tipo II, es decir, la probabilidad de rechazar la hipótesis alternativa y aceptar la hipótesis nula aunque sea cierta la hipótesis alternativa, generalmente no se calcula (Leick, A., 1995(4)).

El rechazar la hipótesis nula es indicativo de que algo hay mal en el ajuste. Habrá que investigar la causa del rechazo. El rechazo puede ser debido a un incorrecto modelo estadístico, o a un incorrecto modelo matemático, o a ambos. Posibles motivos para que el ajuste no pase el test sobre la varianza de peso unidad son (Rizos, C. 1999):

- Errores en el modelo matemático utilizado.
- Errores en los cálculos. Por ejemplo, fallo en la implementación informática.
- Presencia de singularidades en redes débilmente condicionadas (deficiencia a la hora de fijar el sistema de referencia, observaciones desconectadas...)
- Mala estimación de la precisión de las observaciones, es decir, mala estimación de la matriz cofactor de las observaciones. Esto se traduce en que los residuos de las observaciones son mucho más grandes o mucho más pequeños de los que se podrían esperar.
- Presencia de errores significativamente grandes en alguna o varias observaciones (existencia de errores groseros).

En todo caso, si el ajuste no pasa el test, habrá que investigar sobre la causa, antes de continuar con el ajuste.



VII.5.2. Elipses como regiones de confianza.

Las elipses de confianza son una expresión de la precisión de los parámetros obtenidos en la solución mínimos cuadrados.

La información sobre la precisión de los parámetros estimados en el ajuste viene dada por la matriz de varianza-covarianza de los parámetros. Esta matriz vendrá influida por (Rizos, C., 1999):

- Geometría de las observaciones.
- Sistema de referencia usado para relacionar observaciones y parámetros a estimar.
- Componente estocástica, es decir, observaciones y matriz de pesos asignada a priori).

Si de dicha matriz nos quedamos con la submatriz (3x3) correspondiente a las tres componentes de posición estimadas para un punto, dicha submatriz representa un elipsoide situado en el espacio, centrado en la posición estimada para dicho punto, de modo que incluye una determinado probabilidad de que la solución verdadera sea la estimada para ese punto (Harvey, B.R. 1994). Si consideramos tan sólo dos componentes de posición (por ejemplo, la posición planimétrica), el elipsoide se transforma en una elipse de confianza que nos da información sobre la precisión de las coordenadas obtenidas para la estación.

En el caso tridimensional, se pueden calcular elipsoides tridimensionales, o bien varias elipses, por ejemplo, elipse de error para la posición planimétrica. En redes, las elipses o elipsoides de confianza se pueden referir al sistema de coordenadas de la red y así pueden proporcionar una visión integrada de la geometría de las regiones de confianza y de la red.

Considerando las dos componentes de posición de una estación de la red, (por ejemplo las componentes que definen la posición planimétrica), los elementos correspondientes



de la matriz de varianza-covarianza de los parámetros estimada son los que se representan en la siguiente submatriz:

$$\Sigma_{x_1, x_2} = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix}$$

Ec. VII-45

Dicha submatriz representa la elipse de error, como expresión de la precisión de las dos componentes de posición. Para saber su posición en el espacio, se necesita saber la orientación de los ejes principales de dicha elipse (o elipsoide para el caso tridimensional) respecto a los ejes del sistema de referencia en el que estemos trabajando. Este problema se resuelve diagonalizando la submatriz de varianza-covarianza correspondiente (Rizos, C. 1999). Los valores propios serán los semiejes mayor y menor de la elipse, y los vectores propios nos darán las direcciones principales de la elipse (Figura VII-1).

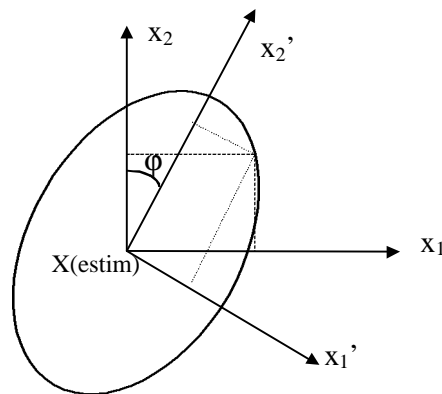


Figura VII-1.- Rotación del sistema de coordenadas de ejes principales.

Diagonalizando la matriz de varianza-covarianza se puede obtener tres ecuaciones que se pueden usar para calcular λ_1 , λ_2 (semiejes de la elipse), y ϕ (orientación de la elipse) como una función de los elementos de la matriz Q_i .



Los autovalores se calculan directamente de la ecuación característica (Ferrer Torío, R., et al, 1991):

$$|Q_i - \lambda^Q I| = \begin{vmatrix} q_{x1} - \lambda^Q & q_{x1x2} \\ q_{x1x2} & q_{x2} - \lambda^Q \end{vmatrix} = (q_{x1} - \lambda^Q)(q_{x2} - \lambda^Q) - q_{x1x2}^2 = 0$$

Ec. VII-46

de donde se obtiene:

$$\lambda_1^Q = \frac{q_{x1} + q_{x2}}{2} + \frac{1}{2} W$$

Ec. VII-47

$$\lambda_2^Q = \frac{q_{x1} + q_{x2}}{2} - \frac{1}{2} W$$

Ec. VII-48

con: $W = \sqrt{(q_{x1} - q_{x2})^2 + 4q_{x1x2}^2}$

Ec. VII-49

obteniéndose así:

$$\text{sen } 2\varphi = \frac{2q_{x1x2}}{W}$$

Ec. VII-50

Los valores respectivos para los semiejes mayor y menor de la elipse de error en un punto se obtienen a partir de los valores obtenidos λ_1^Q , λ_2^Q , de la siguiente manera:

$$\sigma_{\max}(\text{estim}) = \sigma_0(\text{estim}) \cdot \sqrt{\lambda_1}$$

Ec. VII-51

$$\sigma_{\min}(\text{estim}) = \sigma_0(\text{estim}) \cdot \sqrt{\lambda_2}$$

Ec. VII-52



Como resumen, las elipses de error son una representación de la precisión de los parámetros estimados en una red, precisión obtenida en la matriz de varianza-covarianza de los parámetros estimados. Dicha precisión vendrá dada tanto por las observaciones y su precisión, como por el sistema de referencia en el que se obtenga la solución (sistema de referencia que vendrá definido por las coordenadas de los puntos fijos que se introduzcan en el ajuste).

VII.5.3. Fiabilidad de una red.

No siempre pequeños residuos son indicativos de un ajuste de calidad. Igual de importante es tener la certeza de que todos los errores groseros que pueda haber en los datos han sido identificados y eliminados, y que los pequeños errores groseros que permanecen en las observaciones, no afectan de modo adverso en el ajuste de los parámetros. La fiabilidad se refiere a la capacidad de detectar errores groseros de las observaciones y de estimar los efectos que los errores groseros indetectables pueden tener en la solución (Leick, A., 1995(4)).

VII.5.3.1. Número redundante.

Partiendo de la expresión dada para la matriz cofactor de los residuos:

$$Q_v = P^{-1} - AN^{-1}A^T$$

Ec. VII-53

La traza de dicha matriz tendrá el siguiente valor:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Q_v P) &= \text{Tr}(I - AN^{-1}A^T P) = \text{Tr}(I) - \text{Tr}(AN^{-1}A^T P) = \\ &= n - \text{Tr}(N^{-1}A^T P A) = n - u \end{aligned}$$

Ec. VII-54

Una expresión más general se obtiene considerando que la matriz $AN^{-1}A^T P$ es idempotente, a igual que la matriz $I - AN^{-1}A^T P$. La traza de una matriz idempotente es igual al rango de la matriz (Leick, A. 1995 (4)). Así:



$$\text{Tr}(AN^{-1}A^T P) = \text{Rango}(A^T P A) = \text{Rango}(A) = r \leq u$$

Ec. VII-55

con lo que se tiene:

$$\text{Tr}(Q_V P) = \text{Tr}(P Q_V) = n - \text{Rango}(A)$$

Ec. VII-56

Representando los elementos de diagonal de la matriz $Q_V P$ por r_i , se puede escribir:

$$\sum_1^n r_i = n - \text{Rango}(A)$$

Ec. VII-57

Es decir, la suma de los elementos de la diagonal de la matriz $Q_V P$ es igual al número de grado de libertad. El elemento r_i se llama número redundante y es la contribución de la i -ésima observación al grado de libertad. Si la matriz de pesos P es diagonal, entonces:

$$r_i = q_i p_i$$

Ec. VII-58

siendo q_i el elemento de la diagonal de la matriz cofactor Q_V y p_i representa el peso de la observación i -ésima.

Una propiedad del número redundante es que su valor está entre 0 y 1.

Considerando la relación general:

$$Q_{La} = Q_{Lb} - Q_V$$

Ec. VII-59



y la especificación $r_i = q_i p_i$ para el número redundante, se puede ver que si el número redundante es cercano a la unidad, entonces la varianza de los residuos es cercana a la varianza de las observaciones, y la varianza de las observaciones ajustadas es cercana a cero. Si el número redundante es cercano a cero, entonces la varianza de los residuos es cercana a cero, y la varianza de las observaciones ajustadas está cercana a la varianza de las observaciones.

De lo dicho antes, se ve que será preferible que la varianza de los residuos y la varianza de las observaciones sean próximas, en cuyo caso, las observaciones ajustadas son determinadas con alta precisión. Este es el caso en que r_i está próximo a la unidad, y se dice que la ganancia en el ajuste es alta.

De la Ec. VII-57 se tiene el número redundante medio:

$$r_{\text{medio}} = \frac{n - \text{Rango}(A)}{n}$$

Ec. VII-60

Lo que quiere decir que cuanto más alto sea el grado de libertad, más cercano está el número redundante medio a la unidad. Sin embargo, la ganancia en términos de probabilidad encerrada por las elipses estándar se reduce notablemente después de cierto grado de libertad (Leick, A., 1995(4)).

VII.5.4. Detección de errores groseros.

Los errores groseros cometidos en el proceso de toma de datos en campo, en la transferencia de datos o en el procesado, son difíciles de detectar y de eliminar. La detección de estos errores se puede hacer antes o formar parte del proceso de ajuste. Antes del ajuste, se deben analizar las observaciones, así como los triángulos formados.



La detección de los errores dentro del ajuste se basa en el análisis de los residuos (Harvey, R.B. 1994). El problema de usar mínimos cuadrados teniendo errores de este tipo es que el ajuste tiende a reducir su impacto y distribuir su efecto más o menos por toda la red (Leick, A. 1993 (2), (3)). El requisito para un procedimiento de detección de errores groseros es la disponibilidad de un conjunto de observaciones redundantes, de manera que un estudio sobre los residuos, nos permita detectar y eliminar posibles errores groseros en las observaciones. Dicho estudio estadístico parte de la hipótesis de que los errores en las observaciones, y los residuos de las mismas, siguen una distribución normal (Rizos, C. 1999).

La distribución de frecuencias normal, en forma de campana de Gauss, indica que se pueden esperar residuos relativamente grandes, aunque éstos deben ocurrir con una frecuencia mucho menor que los residuos más pequeños. Así, por ejemplo, el 99.7 % de todos los residuos deberían ser menor de ± 3 veces el valor del error medio cuadrático de los residuos (=raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los residuos dividido por el número de residuos). En esto se basa la técnica a menudo usada de rechazar cualquier observación con un residuos mayor de 3 veces la desviación estándar de la observación (Rizos, C. 1999).

Si uno o más residuos son significativamente mayores que los demás residuos del ajuste, se tendrá que decidir entre dos opciones:

- La observación correspondiente representa una observación en los extremos de la distribución normal, en cuyo caso, la observación se debe considerar.
- La observación correspondiente es un error grosero (equivocación), por lo que no se debe considerar en el ajuste. Se debe rechazar.

El límite para decidir una de las opciones anteriores no está claro, y se suele indicar como valor crítico (Harvey, B.R. 1994).



Un error grosero en una observación, normalmente afecta a los residuos de otras observaciones. Así, al hacer los tests, estos nos pueden avisar de la existencia de errores en otras observaciones además de las que tienen dichos errores.

El primer paso a la hora de detectar uno de estos errores es revisar las notas de campo para comprobar que no ha habido ningún error en la transferencia de la información. Si no se detecta ningún error, la red debe separarse en subredes y se debe ajustar cada una por separado. En caso extremo, la red debe separarse en figuras simples como triángulos, y ajustarse por separado. Las observaciones se van añadiendo una a una, hasta que se pueda detectar el error.

La detección de errores groseros conjuntamente con el ajuste, toma ventajas de la redundancia total y la fuerza que le da la geometría de la red en su conjunto, y así es particularmente sensible a los errores más pequeños.

A continuación se muestran tres métodos de detección y eliminación de errores groseros:

- Test Tau.
- Test de Baarda
- Método de variación de pesos.

VII.5.4.1. Test Tau.

Este test, introducido por Pope (1971) pertenece al grupo de test de studentización, que hacen uso de la varianza a posteriori de peso unidad. El estadístico del test es (Leick, A., 1995 (4)) (Harvey, B.R. 1994):

$$\tau = \frac{|v_i|}{\sigma_{v_i}(\text{estim})} = \frac{|v_i|}{\sigma_0(\text{estim})\sqrt{q_i}} = \frac{|v_i|}{\sigma_0(\text{estim})\sqrt{\frac{f_i}{p_i}}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0(\text{estim})} \frac{|v_i|}{\sigma_i\sqrt{f_i}} \approx \tau_{n-r}$$

Ec. VII-61



que se distribuye según una T de Student con n-r grados de libertad.

Es importante que se dispongan de buenos pesos para las observaciones. En la presencia de errores groseros, la varianza a posteriori de peso unidad puede ser muy grande. En estos casos, puede ser preferible usar la varianza a priori de peso unidad. Después de calcular el estadístico, el valor crítico c se obtiene de la tabla de la distribución τ . Entonces, comparando el valor obtenido para el estadístico en el test, y el valor crítico, se puede decidir si la observación está afectada por un posible error. Si $\tau \geq c$, esto avisa de un posible rechazo de la observación.

VII.5.4.2. Test de Baarda.

Técnicas desarrolladas por Baarda (1968) (Leick, A., 1995 (4)), conocida también como “Data Snooping” (Harvey B. R. 1994) se usan para hacer test sobre los residuos. La teoría se basa en la existencia de sólo un error en el conjunto de observaciones. El test de Baarda hace una comparación con la distribución normal (0,1), asumiendo que la varianza a priori de peso unidad es conocida:

$$\frac{|v_i|}{\sigma_0 \sqrt{q_i}} \approx n(0,1)$$

Ec. VII-62

El valor crítico elegido para la aplicación del test se basa en la desviación estándar en la distribución normal, de modo que para los niveles de confianza de 95%, 99% y 99.9% (o lo que es lo mismo, para los niveles de significación $\alpha=0.05$, 0.01 y 0.001), se corresponden valores críticos 1.96, 2.58 y 3.29, valores obtenidos de la distribución normal. Así, si se adopta un nivel de confianza del 99.9 %, se puede esperar que, junto con los errores groseros, se puedan rechazar también un 0.1% de observaciones “buenas”. A esto se le llama error Tipo I (rechazo de observaciones no afectadas por errores groseros)



VII.5.4.3. Cambio del peso de las observaciones.

Este método, aunque no está basado en ninguna teoría estadística, es un método automático por el cual se detectan los errores groseros y se minimizan, o incluso se elimina su efecto en el ajuste. La ventaja respecto a los dos métodos anteriores es que localiza y elimina los errores automáticamente.

Básicamente, lo que hace este método es examinar los residuos de cada observación durante cada iteración. Si la magnitud del residuo está fuera de un cierto rango, el peso de la observación correspondiente se reduce. Este proceso de asignar nuevos pesos y reajuste, continua hasta que la solución converge.

El criterio por el que se decide si un residuo tiene un valor demasiado grande y la función para asignar nuevo peso para la observación son algo arbitrarios. Una técnica simple para seleccionar y dar peso después de cada iteración es (Leick, A., 1995 (4)):

$$p^{i+1} = \begin{cases} p^i e^{-|v|/3\sigma_i} & \text{si } |v| > 3v_i \\ p^i & \text{si } |v| \leq 3v_i \end{cases}$$

Ec. VII-63

donde σ_i representa la desviación estándar de la observación.

El uso de este método requiere alguna experiencia. Se debe investigar todas las observaciones a las que se les cambia el peso y establecer la causa para el cambio de peso.



VIII. TRANSFORMACIÓN ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA.

VIII.1. Introducción.

Como se ha visto en el capítulo IV, tradicionalmente, para la resolución de problemas geodésicos, topográficos o cartográficos, se han estado usando sistemas de referencia locales. Sin embargo, al usar la tecnología GPS, los resultados obtenidos están referidos al sistema WGS-84, sistema geocéntrico global.

Por tanto, en el momento en que surge el uso combinado de ambos tipos de medidas, GPS y terrestre, o cuando se quiere referir las coordenadas obtenidas por metodología GPS a los sistemas “tradicionales”, de forma que sean coherentes con la cartografía oficial, surge la necesidad de conocer la relación entre ambos sistemas de referencia.

En definitiva, se plantea el problema de conocer la relación entre el sistema local usado tradicionalmente, el ED-50 en el caso de nuestro país, y el sistema global WGS-84 al que se refieren los resultados GPS.

El problema de transformación entre ambos sistemas de referencia, constituye sin duda, el problema más difícil de resolver en todo el proceso de medida GPS (Hofmann-Wellenhof, B. 1993), ya que la precisión del propio sistema dependerá de la bondad en la transformación (determinación de coordenadas utilizables en los métodos clásicos de formación de cartografía, de medida de superficies, etc).

Hay diferentes modos de definir la relación entre dos sistemas de referencia tridimensionales, y la manera más adecuada vendrá condicionada por diferentes factores (Rizos, C. 1999):

- Si la transformación se lleva a cabo en una zona pequeña o sobre una zona extensa.



- Si uno o los dos sistemas presentan distorsiones importantes (es decir, existen distorsiones en el/los datum que los representan).
- Precisión requerida
- Si existen parámetros de transformación o tienen que ser determinados.

VIII.2. Transformación tridimensional de coordenadas WGS-84 al sistema de referencia elipsoidal local.

El problema que se plantea es la transformación de coordenadas entre el elipsoide geocéntrico WGS-84 al sistema elipsoidal local. La resolución de este problema se lleva a cabo considerando la transformación geométrica que relaciona coordenadas cartesianas respecto al geocentro y respecto al centro del elipsoide local.

A continuación se analizan tres modelos para llevar a cabo dicha transformación tridimensional:

- Transformación del Helmert.
- Transformación de Molodensky-Badekas.
- Transformación de Veis.

En realidad, cada modelo se obtiene como una variación del modelo anterior.

VIII.2.1. Transformación de Helmert.

Considerando dos sistemas de ejes tridimensionales $(U) = (u, v, w)$ y $(X) = (x, y, z)$ (Figura VIII-1), la transformación de coordenadas entre ambos estará definida por una transformación de semejanza espacial, expresada según el modelo de transformación de Helmert (Hofmann-Wellenhof, B. 1993) (Leick, A. 1995 (4)), conocido también como modelo de Bursa-Wolf (Rizos, C. 1999):

$$X = T + (1+\Delta) R U$$

Ec. VIII-1



siendo:

T: vector de traslación $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$

$1+\Delta$: factor de escala

R: matriz de rotación.

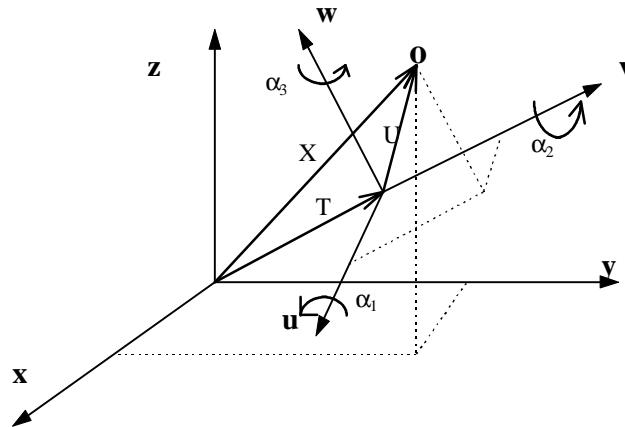


Figura VIII-1. Transformación entre sistemas tridimensionales.

En este caso particular, el sistema (X) puede representar el sistema geocéntrico WGS-84 y el sistema (U) el sistema local, ED-50 en nuestro caso.

Como se ve, la transformación de Helmert consiste en un cambio de base espacial con modificación de escala; es simplemente la realización de tres giros, tres translaciones y un cambio de escala.

La matriz de rotación R que interviene en la transformación es el producto de las tres rotaciones ortogonales consecutivas alrededor de los ejes de (U), como sigue:

$$R = R_3 \{ \alpha_3 \} R_2 \{ \alpha_2 \} R_1 \{ \alpha_1 \}$$

Ec. VIII-2



El símbolo R_i representa la matriz de rotación alrededor de cada eje i :

$$R_1(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \text{sen } \alpha_1 \\ 0 & -\text{sen } \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Ec. VIII-3

$$R_2(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & -\text{sen } \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Ec. VIII-4

$$R_3(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & \text{sen } \alpha_3 & 0 \\ -\text{sen } \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ec. VIII-5

Estas matrices describen la rotación del sistema de coordenadas, un ángulo alrededor del primer, segundo y tercer eje, respectivamente. Los ángulos $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ son positivos para una rotación en el sentido opuesto a las agujas del reloj, visto desde el extremo positivo del eje respecto al cual tiene lugar la rotación (u, v, w) .

Como norma general, el resultado de sucesivas rotaciones depende de la secuencia de las rotaciones individuales. Una excepción a esta regla es cuando se trata de rotaciones diferenciales, en cuyo caso, la secuencia de las rotaciones no es un problema (Harvey, B.R. 1986).

Desarrollando la Ec. VIII-1 se llega a:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + (1 + \Delta)R \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Ec. VIII-6



con

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 & \cos\alpha_1 \sin\alpha_3 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 & \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \\ -\cos\alpha_2 \sin\alpha_3 & \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 & \sin\alpha_1 \cos\alpha_3 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \\ \sin\alpha_2 & -\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 & \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Ec. VIII-7

Como se ve, la transformación de Helmert define la transformación entre los dos sistemas de coordenadas en términos de siete parámetros de transformación: (Δx , Δy , Δz , Δ , α_1 , α_2 , α_3). Los componentes de traslación representan el vector de posición del origen del sistema U respecto al X, y el sistema de coordenadas (U) es el que rota y al que se le aplica un factor de escala.

Para la resolución del problema, es decir, para la determinación de los siete parámetros de transformación entre ambos sistemas, es necesario conocer las coordenadas de una serie de puntos en el sistema local, sobre los que se van a realizar medidas GPS. Concretamente, con el valor de las coordenadas de dos puntos y la altitud de un tercero (siete componentes), el problema estaría resuelto. Es de destacar que será necesario conocer las alturas elipsoidales de los puntos, y no las ortométricas, ya que esta transformación tiene sentido geométrico, pero no físico. Así mismo, deberán conocerse las coordenadas de los mismos puntos en el sistema WGS-84.

Utilizando las coordenadas anteriores, se establecen las ecuaciones de la transformación de Helmert, determinándose los 7 parámetros de dicha transformación. En la práctica, suelen usarse más observaciones que las necesarias (tres estaciones serían las mínimas), obteniéndose redundancia, y resolviendo el problema mediante un ajuste mínimos cuadrados (Higgins, M.B. 1997).

Debido a que las rotaciones entre los sistemas (X) y (U) son pequeñas en aplicaciones de redes geodésicas (pequeñas rotaciones del sistema local respecto al global), se pueden



sustituir los cosenos por la unidad y los senos por el valor del arco, y despreciando términos de segundo orden, queda la matriz de rotación de la siguiente forma (Leick, A. 1995 (4)):

$$R = I + Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ec. VIII-8

Sustituyendo Ec. VIII-8 en Ec. VIII-1 y despreciando los términos de segundo orden en la escala Δ , en los ángulos de rotación $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y sus productos, el modelo Ec. VIII-1 se puede escribir como:

$$T + U + \Delta U + QU - X = 0$$

Ec. VIII-9

Para cada estación P_i se obtiene una ecuación vectorial como ésta, que según el modelo mixto de ajuste habría que linealizar para su resolución mínimos cuadrados.

VIII.2.2. Transformación de Molodensky-Badekas.

Cuando se trabaja en áreas pequeñas, como es lo normal en densificación de redes, el hecho de tomar como punto de rotación el centro del sistema local (transformación de Helmert), puede provocar una gran correlación entre los parámetros, pudiendo causar una singularidad en la matriz normal. La explicación de esto es que, sobre áreas pequeñas, es difícil distinguir entre los desplazamientos debidos a la traslación ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$) y los debidos a la rotación $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Esta circunstancia motiva que se puedan dar errores apreciables y que aunque éstos se compensen en el interior de la zona seleccionada, se puedan convertir en grandes discrepancias fuera de ella (Leick, A. 1995 (4)).

El modelo de Molodensky-Badekas (Harvey, B.R. 1984) (Rizos, C. 1999) (Leick, A. 1995 (4)) controla el problema de correlación apuntado, relacionando los parámetros de



rotación y de escala a un punto dentro de la red, U_0 . Este modelo de transformación es en realidad una variación del modelo anterior, considerando un punto de rotación (U_0) distinto al origen del sistema local; es decir, las rotaciones de los ejes no se realizan en el centro del sistema local, sino en un punto dentro de la red. Una adecuada elección de U_0 puede ser el centroide.

La expresión de este modelo de transformación es como sigue:

$$T + U_0 + (1 + \Delta)R(U - U_0) - X = 0$$

Ec. VIII-10

donde U_0 es el vector de posición en el sistema (U) de un punto localizado en algún lugar dentro de la red a ser transformada. El resto es como en la Ec. VIII-1. Siguiendo el mismo procedimiento que el seguido en la transformación de Helmert, el modelo de Molodensky-Badekas se puede expresar como sigue, para su resolución por mínimos cuadrados:

$$T + U + \Delta(U - U_0) + Q(U - U_0) - X = 0$$

Ec. VIII-11

VIII.2.3. Transformación de Veis.

El modelo de transformación de Veis usa el mismo punto de rotación U_0 que el modelo anterior, pero las rotaciones son sobre los ejes (n, e, h) del sistema de coordenadas geodésico local en U_0 (Leick, A. 1995 (4)).

De modo similar a como se han obtenido las expresiones para los dos modelos de transformación anterior, se obtiene la siguiente expresión para la transformación de Veis:



$$T + U_0 + (1 + \Delta)M(U - U_0) - X = 0$$

Ec. VIII-12

Si $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ representan las rotaciones positivas sobre los ejes (n, e, h) y $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)$ representan las coordenadas geodésicas del punto de rotación, la matriz M es (Leick, A. 1995 (4)):

$$M = R_3^T(\lambda_0)R_2^T(90 - \varphi_0)R_3(\beta_3)R_2(\beta_2)R_1(\beta_1)R_2(90 - \varphi_0)R_3(\lambda_0)$$

Ec. VIII-13

Debido a que los ángulos de rotación $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ son infinitesimalmente pequeños, la matriz M se simplifica:

$$M(\lambda_0, \varphi_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_3 M_{\beta_3} + \beta_2 M_{\beta_2} + \beta_1 M_{\beta_1} + I$$

Ec. VIII-14

donde:

$$M_{\beta_3} = \begin{bmatrix} 0 & \text{sen } \varphi_0 & -\text{cos } \varphi_0 \text{ sen } \lambda_0 \\ -\text{sen } \varphi_0 & 0 & \text{cos } \varphi_0 \text{ cos } \lambda_0 \\ \text{cos } \varphi_0 \text{ sen } \lambda_0 & -\text{cos } \varphi_0 \text{ cos } \lambda_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ec. VIII-15

$$M_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\text{cos } \lambda_0 \\ 0 & 0 & -\text{sen } \lambda_0 \\ \text{cos } \lambda_0 & \text{sen } \lambda_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ec. VIII-16

$$M_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\text{cos } \varphi_0 & -\text{sen } \varphi_0 \text{ sen } \lambda_0 \\ \text{cos } \varphi_0 & 0 & \text{sen } \varphi_0 \text{ cos } \lambda_0 \\ \text{sen } \varphi_0 \text{ sen } \lambda_0 & -\text{sen } \varphi_0 \text{ cos } \lambda_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ec. VIII-17



Si de nuevo se eliminan los términos de segundo orden en la escala, en las rotaciones y sus productos, el modelo queda:

$$T + U + \Delta(U - U_0) + (1 + \Delta)(M - I)(U - U_0) - X = 0$$

Ec. VIII-18

Así, la única diferencia entre el modelo de Molodensky-Badekas y el de Veis es que la rotación en este segundo se puede visualizar como rotaciones alrededor de los ejes que forman el sistema geodésico locales en U_0 .

VIII.2.4. Comparación entre los tres modelos de transformación tridimensional.

Los tres modelos de transformación vistos en los puntos anteriores son equivalentes en el sentido que, una vez que los parámetros de la transformación se han eliminado, la transformación directa de un sistema al otro da los mismos resultados para cada modelo. Esta equivalencia es también cierta para la varianza-covarianza de las coordenadas transformadas. Los tres modelos dan la misma varianza a posteriori de peso unidad y los mismos residuos (correcciones a las coordenadas). El mismo factor de escala se obtiene en los tres casos. El modelo de Helmert y el modelo de Molodensky-Badekas dan los mismos ángulos de rotación.

La elección de un modelo u otro sólo puede venir condicionada por el posible problema de correlación entre los parámetros que presenta el modelo de Helmert cuando se trabaja en áreas pequeñas. En estos casos, que serán los que habitualmente se nos presenten, será más adecuado usar como punto de rotación un punto U_0 dentro de la red (normalmente el centroide) (Rizos, C 1999).

Así, el uso del modelo de Molodensky-Badekas o el de Veis puede ser indistinto, con la única diferencia que las rotaciones nos las dan respecto a distintos sistemas de ejes.



VIII.3. Problema de la altimetría con GPS. Transformación tridimensional como suma de una transformación 2D más otra 1D.

Una de las características distintivas del GPS es que sus tres coordenadas se obtienen simultáneamente. No hay separación entre coordenadas horizontales y altura de un punto debido a que las tres componentes se calculan conjuntamente, en el mismo proceso. Sin embargo, en geodesia clásica, las coordenadas horizontales (2D) se calculan independientemente de las verticales (1D).

Así, los datos de alturas referidos al sistema local que disponemos, obtenidos tradicionalmente, son alturas ortométricas, alturas sobre el geoide. Por tanto, el problema que se presenta a la hora de establecer una transformación tridimensional entre los sistemas WGS-84 y el sistema local es la disposición de datos de ondulación del geoide, que permitan obtener alturas elipsoidales a partir de alturas ortométricas conocidas, y así poder relacionar alturas elipsoidales en ambos sistemas.

En los casos en los que no se disponga de un modelo de geoide, y por tanto, no sea posible establecer una transformación tridimensional entre ambos sistemas, se puede suponer que, la transformación tridimensional 3D que relaciona los sistemas WGS-84 y el sistema geodésico local ED-50, se puede descomponer en una transformación 2D para coordenadas horizontales y una transformación 1D para las alturas (Hofmann-Wellenhof, B. 1993) (Leick, A. 1995 (4)). Esto se traduce en que los 7 parámetros que relacionan los dos sistemas de referencia, se descomponen en cuatro parámetros para definir la transformación planimétrica, y tres para la altimétrica:

3D: $c_1 \ c_2 \ c_3 \ \mu \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3$

2D: $c_1 \ c_2 \ \mu \ \alpha_3 \ +$

1D: $c_3 \ \alpha_1 \ \alpha_2$



De esta manera, considerando la transformación 2D para planimetría, será posible usar las observaciones GPS para la densificación de redes bidimensionales aún en los casos en los que no se disponga de datos de ondulación del geoide.

VIII.3.1. Transformación 2D para planimetría.

La transformación 2D planimétrica que se puede plantear con observaciones GPS, para referirlas al sistema local, se puede abordar según distintos métodos. A continuación se plantean dos posibles métodos para resolver el problema:

Método 1. Transformación de posiciones elipsoidales en áreas pequeñas.

Método 2. Transformación de posiciones planas en áreas pequeñas.

Ambos métodos se basan en la previa obtención de unas coordenadas WGS-84 para las estaciones que forman la red, a partir de las observaciones GPS. En los casos en los que dentro de la red no se tenga ningún punto de coordenadas conocidas, y por tanto no se pueda obtener una solución WGS-84 de red precisa, puede bastar con una solución de red partiendo de coordenadas WGS-84 aproximadas. Las posiciones relativas WGS-84 entre las estaciones, obtenidas con esta solución “aproximada”, son bastante precisas; lo único que no se ha hecho es fijar con precisión el sistema de referencia. Sin embargo, la discrepancia entre estas coordenadas “aproximadas” y las coordenadas WGS-84 verdaderas no influirá en las coordenadas locales obtenidas a través de la transformación 2D, pues dichas discrepancias son absorbidas por los parámetros de transformación obtenidos (Aguilera Ureña, M.J., 1997).

VIII.3.1.1. Método 1. Transformación de posiciones elipsoidales en áreas pequeñas.

Una vez que se dispone de una solución de la red en el sistema WGS-84, dichas coordenadas cartesianas $(x, y, z)_{i,GPS}$ se pueden convertir a coordenadas elipsoidales latitud, longitud y altura elipsoidal. Para llevar a cabo esta transformación planimétrica, el elipsoide usado para esta conversión debe ser de la misma dimensión que el elipsoide del sistema geodésico local, es decir, el elipsoide local: $(\varphi_{i,GPS}, \lambda_{i,GPS}, h_{i,GPS})$.



Si se conocen las coordenadas elipsoidales locales de un subconjunto de las n estaciones desde las que se han realizado observaciones GPS, se tendrá dos conjuntos de latitudes y longitudes elipsoidales de dicho subconjunto de estaciones: las posiciones dadas en el sistema local local, $P(\varphi_{ED-50}, \lambda_{ED-50})$, y las posiciones GPS calculadas $P(\varphi_{GPS}, \lambda_{GPS})$ en el sistema del satélite. La idea es transformar las posiciones GPS al datum geodésico, en nuestro caso el sistema ED-50.

La transformación en dos dimensiones se hace con las herramientas de la geodesia clásica (Leick, A.1995 (4)). Primero se calcula el centroide de las estaciones en el sistema GPS $(\varphi_{c,GPS}, \lambda_{c,GPS})$. El centroide se localiza sobre la superficie del elipsoide. Después, hay que considerar las líneas geodésicas que conectan el centroide con las posiciones $P_i (\varphi_{i,GPS}, \lambda_{i,GPS})$ mediante la resolución del problema inverso sobre el elipsoide: $S_{ci, GPS}$ y $\alpha_{ci,GPS}$.

Las discrepancias $(\varphi_{i,ED-50}-\varphi_{i,GPS})$ y $(\lambda_{i,ED-50}-\lambda_{i,GPS})$ se usarán para calcular los parámetros de transformación en un ajuste por mínimos cuadrados.

Se definen cuatro parámetros: la traslación del centroide $d\varphi_c$ y $d\lambda_c$, la rotación $d\alpha$ de las líneas geodésicas en el centroide y el factor de escala $(1-\Delta)$ de las líneas geodésicas. Todas las líneas geodésicas que pasan por el centroide rotan la misma cantidad en el acimut y son afectadas por el mismo factor de escala.

Ya que todas las geodésicas que parten del centroide giran la misma cantidad y son afectadas por el mismo factor de escala, la siguiente condición es válida:

$$dS_{ci} = \Delta S_{ci}$$

Ec. VIII-19

$$d\alpha_{ci} = d\alpha_c = \text{cte}$$

Ec. VIII-20



donde Δ representa el cambio de escala. Los parámetros a ser estimados son:

$$X = \{d\lambda_c, d\varphi_c, \Delta, d\alpha_c\}$$

Ec. VIII-21

Las observaciones son las discrepancias en las coordenadas elipsoidales:

$$d\lambda_i = \lambda_{i,ED-50} - \lambda_{i,GPS}$$

Ec. VIII-22

$$d\varphi_i = \varphi_{i,ED-50} - \varphi_{i,GPS}$$

Ec. VIII-23

Una vez que se tienen los parámetros ajustados, la longitud y los acimutes de las geodésicas serán:

$$S_{ci,ED-50} = S_{ci,GPS} + \Delta$$

Ec. VIII-24

$$\alpha_{ci,ED-50} = \alpha_{ci,GPS} + d\alpha_c$$

Ec. VIII-25

Las coordenadas del centroide son:

$$\varphi_{c,ED-50} = \varphi_{c,GPS} + d\varphi_c$$

Ec. VIII-26

$$\lambda_{c,ED-50} = \lambda_{c,GPS} + d\lambda_c$$

Ec. VIII-27



Con las cuatro ecuaciones anteriores, se puede calcular ya la posición de las estaciones que forman la red en el datum local, usando el problema directo sobre el elipsoide; se conoce longitud y latitud del centroide en el sistema local, y se conoce la distancia y el acimut de un punto i al centroide en el mismo sistema. Por tanto, se pueden determinar la longitud y latitud de un punto i en el sistema local.

En resumen, los pasos a seguir para desarrollar este método son:

- Obtención de las coordenadas WGS-84 de las estaciones que forman la red: $(x_i, y_i, z_i)_{GPS}$.
- Transformar las coordenadas cartesianas anteriores a coordenadas elipsoidales sobre el elipsoide de Hayford: $(x_i, y_i, z_i)_{GPS} \rightarrow (\varphi_i, \lambda_i, h_i)_{GPS}$.
- Cálculo del centroide de las estaciones, con las coordenadas elipsoidales anteriores.
- Cálculo para cada estación de la longitud de la geodésica y el acimut desde el centroide hasta la estación.
- Planteamiento y resolución del ajuste según el modelo mixto. Puesto que se tienen cuatro parámetros de transformación, que son las incógnitas en el ajuste, el mínimo número de puntos con coordenadas WGS-84 y locales conocidas para la resolución, es de dos. Con dos puntos, no hay ajuste, y los parámetros se obtienen simplemente resolviendo el sistema de ecuaciones que se plantea, mientras que si se tienen más de dos puntos, el problema se resuelve por mínimos cuadrados.
- Con los parámetros de transformación se puede calcular, la posición del centroide en el sistema local, y la longitud de la geodésica y el acimut del centroide a cada punto de la red, también en el sistema local.
- Obtención de las coordenadas longitud y latitud de los puntos de la red en el sistema local, mediante el problema directo sobre el elipsoide.

**VIII.3.1.2. Método 2. Transformación de posiciones planas en áreas pequeñas.**

Este método permite encontrar los parámetros de transformación entre las coordenadas $(\varphi, \lambda)_{\text{WGS-84}}$ y las coordenadas (x, y) cartográficas de los puntos, en nuestro caso, coordenadas UTM (Hofmann-Wellenhof, B. 1993).

A igual que en el método anterior, habrá que obtener previamente una solución WGS-84 para la red, a partir de las observaciones GPS. Se obtienen así las coordenadas cartesianas en el sistema WGS-84 para las n estaciones relacionadas mediante observaciones GPS $(x_i, y_i, z_i)_{\text{GPS}}$.

Estas coordenadas cartesianas se pueden transformar en coordenadas elipsoidales, usando para ello el elipsoide correspondiente al sistema local (elipsoide de Hayford en nuestro sistema local): $(x, y, z)_{\text{GPS}} \rightarrow (\varphi, \lambda, h)_{\text{GPS}}$.

Con las coordenadas elipsoidales obtenidas para cada uno de los puntos de la red, se calculan sus correspondientes proyecciones UTM: $(\varphi, \lambda, h)_{\text{GPS}} \rightarrow (x, y)_{\text{UTM,GPS}}$

Entre estas coordenadas UTM obtenidas a partir de posiciones GPS, $(x, y)_{\text{UTM,GPS}}$, y las coordenadas UTM verdaderas de los puntos $(x, y)_{\text{UTM}}$, se puede establecer una transformación plana para determinar los 4 parámetros que relacionan ambos sistemas planos, transformación que se verá en el apartado siguiente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{UTM,GPS}} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + (1 + \Delta) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{UTM}}$$

Ec. VIII-28

Para la determinación de los parámetros de esta transformación, se requieren al menos dos puntos de coordenadas conocidas en los sistemas WGS-84 y el sistema local. Si se dispone de más de dos puntos, los parámetros se determinan mediante un ajuste



mínimos cuadrados, mientras que si sólo se tienen dos, el resultado se obtiene simplemente, resolviendo el sistema de ecuaciones anterior

Una vez determinados los parámetros de la transformación, para cualquier punto de la red, conocidas sus coordenadas $(x, y)_{UTM,GPS}$, se pueden determinar sus coordenadas UTM en el sistema local sustituyendo en el sistema anterior.

En resumen, los pasos a dar para obtener coordenadas UTM a partir de coordenadas GPS, según este método son:

- Obtención de las coordenadas WGS-84 de las estaciones que forman la red: $(x_i, y_i, x_i)_{GPS}$.
- Transformación de las coordenadas cartesianas anteriores a coordenadas elipsoidales sobre el elipsoide de Hayford: $(x_i, y_i, x_i)_{GPS} \rightarrow (\varphi_i, \lambda_i, h_i)_{GPS}$.
- Transformación de las coordenadas longitud y latitud anteriores a coordenadas UTM: $(x_i, y_i)_{UTM,GPS}$.
- Establecimiento de la transformación plana que relaciona coordenadas $(x_i, y_i)_{UTM,GPS}$ y $(x_i, y_i)_{UTM}$, determinando los parámetros de transformación.
- Obtención de coordenadas UTM a partir de posiciones GPS y conocidos los parámetros de transformación.

VIII.3.1.2.1. Transformación plana.

Igual que se ha establecido una transformación Helmert tridimensional que relaciona dos sistemas de referencia tridimensionales, supuestos dos sistemas de coordenadas planos cualquiera (Figura VIII-2), se puede establecer una transformación que los relacione (Hofmann-Wellenhof, B. 1993):

$$X = T + (1+\Delta)R(\alpha) U$$

Ec. VIII-29

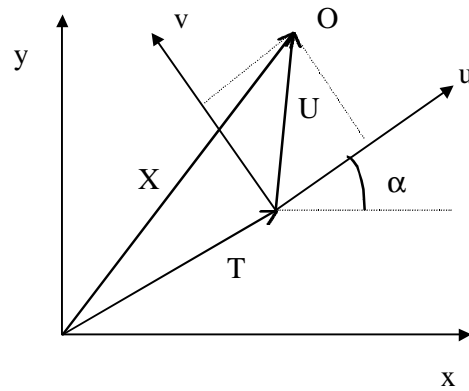


Figura VIII-2. Transformación entre sistemas cartesianos planos.

siendo:

T vector de traslación entre los orígenes de los sistemas

R matriz de rotación

$(1+\Delta)$ factor de escala

La Ec. VIII-29 desarrollada, queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + (1 + \Delta) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Ec. VIII-30

Como la transformación que se plantea tiene cuatro parámetros de transformación (t_1 , t_2 , α , Δ), para obtener dichos parámetros resolviendo el sistema anterior, serán necesarios al menos dos puntos de coordenadas conocidas en ambos sistemas planos.

Para linealizar la expresión Ec. VIII-30 se supone el siguiente cambio de variables:

$$p = (1 + \Delta) \cos \alpha$$

Ec. VIII-31

$$q = (1 + \Delta) \text{sen } \alpha$$

Ec. VIII-32



La Ec. VIII-30 para la transformación plana, ya linealizada después de hacer el cambio Ec. VIII-31 y Ec. VIII-32 queda de la siguiente forma:

$$X = T + HU$$

Ec. VIII-33

siendo H la matriz: $H = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$

La resolución mínimos cuadrados del sistema anterior, para las estaciones de las que se conozcan sus coordenadas en ambos sistemas, nos dará el valor de los parámetros (t_1 , t_2 , p , q). Una vez conocidos p y q , se podrá calcular el valor del factor de escala y el ángulo de rotación según:

$$(1 + \Delta) = \sqrt{p^2 + q^2}$$

Ec. VIII-34

$$\tan \alpha = \frac{p}{q}$$

Ec. VIII-35

VIII.3.1.3. Transformación 1D para altimetría.

En este punto, lo que se pretende es obtener la transformación 1D para altimetría, es decir, el modelo matemático que relaciona la altura ortométrica y la altura elipsoidal de una serie de puntos. En definitiva, el problema será obtener un modelo aproximado de geoide, en aquellos casos que no se disponga de un modelo de geoide local.

- Sea una serie de puntos en los que la elevación (altura sobre el geoide) (H_i) y la altura elipsoidal (h_i) son conocidas. El modelo matemático para la transformación 1D puede venir dado por la expresión siguiente:



$$H_i - h_i = \Delta h - y_i d\alpha_1 + x_i d\alpha_2$$

Ec. VIII-36

donde: Δh = desplazamiento vertical
 $d\alpha_1$ = ángulo de rotación sobre el eje x
 $d\alpha_2$ = ángulo de rotación sobre el eje y
 x_i, y_i = coordenadas de posición del punto

Son necesarios, por tanto, al menos tres puntos para poder establecer un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas ($\Delta h, d\alpha_1, d\alpha_2$):

Geoméricamente, el modelo puede interpretarse como la ecuación de un plano que permite la interpolación de elevaciones en otros puntos. Esta es la llamada transformación lineal (Leick, A. 1995 (4)). Es decir, una vez determinadas las tres incógnitas del sistema de ecuaciones, sólo sería necesario conocer las coordenadas x, y y la altura sobre el elipsoide dada por el GPS, en el punto del que necesitemos conocer su elevación.

- La interpolación podría extenderse a una superficie de mayor orden para poder tener en cuenta más irregularidades que presenta el geoide. Así por ejemplo, si dispusiéramos de un cuarto punto con elevación conocida, podríamos incluir un cuarto parámetro 'dl' modificando la expresión matemática como sigue, en la que intervienen cuatro parámetros ($\Delta h, d\alpha_1, d\alpha_2, dl$):

$$H_i - h_i = \Delta h - y_i d\alpha_1 + x_i d\alpha_2 + y_i \cdot x_i dl$$

Ec. VIII-37

Y así sucesivamente, podríamos ampliar el número de parámetros sin más que aumentar el número de puntos con elevación conocida. Esta estrategia es la llamada transformación polinómica (Hofmann-Wellenhof, B. 1993) en la que podremos ampliar el grado del polinomio para así elevar la precisión en la determinación del geoide.



- Sin embargo, si disponemos de menos de tres puntos de altura ortométrica y altura elipsoidal conocidas, no será posible establecer ni siquiera una transformación lineal. La única solución en estos casos es considerar el geoide paralelo al elipsoide, con una distancia entre ambos constante Δh (Higgins, M.B. 1999):

$$H_i - h_i = \Delta h$$

Ec. VIII-38

VIII.4. Métodos de transformación directos.

Según lo visto anteriormente, para poder pasar de un sistema a otro, es necesario conocer los parámetros de transformación entre ambos sistemas. Si estos parámetros no se conocen previamente, será necesario conocer las coordenadas de una serie de puntos en ambos sistemas, para poder así, determinar los parámetros de dicha transformación en la zona de trabajo.

Sin embargo, se disponen de una serie de aproximaciones que nos permiten pasar de un sistema a otro sin previamente calcular los parámetros de transformación correspondientes. Estos son los denominados métodos de transformación directos.

VIII.4.1. Transformación según los 7 parámetros calculados para el ED-50.

El modelo de transformación tridimensional de Helmert, aplicado entre el sistema WGS-84 y el sistema local ED-50, se puede usar directamente si se conocen los siete parámetros que relacionan ambos sistemas: una traslación (Δx , Δy , Δz), tres rotaciones (α_1 , α_2 , α_3) y el factor de escala ($1+\Delta$). Así, conocida la posición de un punto en uno de los dos sistemas, con los parámetros de transformación, se puede conocer directamente la posición respectiva al otro sistema.



Sin embargo, el sistema definido por la ROI, según el IGN, no es un sistema homogéneo, lo que implica la necesidad del cálculo de los parámetros de transformación locales, es decir, por zonas, según los resultados de ajustes (Capdevila, et al. 1994).

No obstante, a modo de aproximación, para el caso de la transformación entre los sistemas WGS-84 y ED-50 se han calculado unos parámetros que permiten la transformación con una precisión en la posición del punto obtenido de ± 5 m. Los valores para los parámetros de transformación obtenidos son (Torge, W. 1991):

Δx (m)	Δy (m)	Δz (m)	α_1 (")	α_2 (")	α_3 (")	(1+ Δ)
-102	-102	-129	0.4	-0.2	0.4	1.0000025

Tabla VIII-1. Parámetros transformación WGS-84 ED-50 (Torge, W. 1991)

El valor de estos mismos parámetros, calculados por el IGN para España, es:

Δx (m)	Δy (m)	Δz (m)	α_1 (")	α_2 (")	α_3 (")	(1+ Δ) ppm
-131.03	-100.25	-163.35	1.244	0.019	1.144	9.39

Tabla VIII-2. Parámetros transformación WGS-84 ED-50 (IGN)

con rms de 0.70 m en la dirección N/S, 0.71 m en la dirección E/W y de 0.43 m en altimetría (Dalda Monrón, A. 1997).

VIII.4.2. Transformación según los 5 parámetros del IGN.

De igual manera a como se han obtenido los siete parámetros de transformación, vistos anteriormente, el IGN, por su parte, ha calculado una aproximación para la transformación entre los sistemas WGS-84 y el ED-50, para el caso de España, en la que se suponen los giros α_2 y α_3 nulos. Esta transformación es la denominada Transformación de 5 parámetros del IGN, que tiene una indeterminación de 5 m. Los valores para los parámetros son (Capdevila, et al. 1994):



Δx (m)	Δy (m)	Δz (m)	α_1 (")	(1+ Δ)
-125.1	-76.0	-156.2	1.13	1.0000083047

Tabla VIII-3. 5 parámetros de transformación WGS-84 ED-50 IGN.

VIII.4.3. Parámetros de Molodensky.

El método de transformación directo de Molodensky supone que, para áreas pequeñas, los efectos de la rotación entre los ejes de los dos sistemas de referencia son absorbidos por la traslación entre orígenes. Según este método se tienen unos valores tabulados de diferencias de coordenadas entre orígenes de los sistemas WGS-84 y el sistema local, según el elipsoide local y según zonas. Así, por ejemplo, se tiene (DMA, 1991)

Elipsoide Local	Δx (m)	Δy (m)	Δz (m)
ED-50 España y Portugal	-88	-109	-122
ED-50 Valor Medio	-87	-98	-121

Tabla VIII-4. Parámetros de transformación de Molodensky para distintos sistemas locales.

La precisión de este método está en torno a 5-10 m. Este método de transformación directa es el que normalmente está implementado en los GPS comerciales.

VIII.4.4. Método de regresión múltiple.

El método de regresión múltiple para la conversión de datum utiliza un polinomio de noveno orden que ajusta los elipsoides en una zona determinada. Los coeficientes para el polinomio se generan a través de datos obtenidos por estaciones Doppler. A través de estos datos, se ajusta una regresión múltiple.

Estos valores, han sido determinados por la Agencia de Defensa de los EEUU (DMA: Defense Map Agency) para la zona de Europa, y sus valores son (DMA, 1991):



$$\begin{aligned}\Delta\varphi'' = & -2.65468 + 2.05138U + 0.42259V + 0.48984U^2 - 0.73355V^2 + \\ & + 0.90920U^3 + 2.53147U^2V - 0.72020V^2U + 3.86471V^3U - \\ & - 0.59211U^5 - 4.04947U^4V - 3.38467V^5U - 4.77265U^4V^3 + \\ & + 0.54156V^8 + 7.56917U^6V^9\end{aligned}$$

Ec. VIII-39

$$\begin{aligned}\Delta\lambda'' = & -4.45500 - 1.61659U + 1.95078V - 1.81975U^2 + 0.53202VU + \\ & 0.65346U^3 - 3.67576V^2U + 2.10356U^4 + 2.43915V^2U^2 + \\ & + 1.38903V^4 + 1.14509VU^4 + 11.89961V^4U - 8.48517V^6U - \\ & - 0.51702V^8 + 129.330V^4U^6 + 147.344V^8U^6\end{aligned}$$

Ec. VIII-40

$$\begin{aligned}\Delta H_m = & 36.052 - 28.813U - 18.352V + 13.678U^2 + 3.769VU + 3.316V^3 + \\ & + 33.994VU^7 + 5.416V^8 + 129.330V^4U^6 + 147.344V^8U^6\end{aligned}$$

Ec. VIII-41

donde:

$$U = K(\varphi - 52)$$

$$V = K(\lambda - 10)$$

$$K = 0.0523599$$

φ y λ coordenadas ED-50 expresadas en grados decimales.

El error medio cuadrático obtenido con este método, según el DMA, es de 1.2 m.



IX. RESOLUCIÓN DE REDES GEODÉSICAS GPS.

IX.1. Introducción.

El resultado inmediato del procesado de la medida de fase observada con receptores GPS es el vector existente entre las dos estaciones, normalmente expresado como diferencia de coordenadas cartesianas en el sistema WGS-84, y su correspondiente matriz de varianza-covarianza, que refleja la precisión de dicha línea base. Este resultado se obtiene para cada dos receptores GPS observando simultáneamente, procesando cada una de las líneas base que forma una sesión de observación de manera independiente.

En la solución de una sesión, en la que observan R receptores simultáneamente, y las medidas de fase tomadas son procesadas conjuntamente, el resultado es R-1 vectores independientes y una matriz de varianza-covarianza $3(R-1) \times 3(R-1)$.

El objetivo de la solución mínimos cuadrados de la red es combinar los vectores o las sesiones observadas independientemente en una única solución para la red, obteniendo coordenadas ajustadas para las estaciones que forman la red, junto con parámetros adicionales introducidos en el ajuste (Chueca Pazos, M., et al 1996).

Una posibilidad adicional del ajuste de una red es obtener información de precisión, lo que es posible por el hecho de partir de un conjunto redundante de observaciones, precisión de los parámetros obtenidos, pero también precisión real de las observaciones de partida (Vanicek, P., Krakiwsky, E.J. 1986). Cuanto mayor sea la redundancia de las observaciones de la red, mayor será la utilidad del ajuste de la red como medida de la fiabilidad de las posiciones obtenidas. Si no se tiene redundancia, por ejemplo, por tener una única estación común entre sesiones diferentes de observación, la solución de red degenera en un simple algoritmo de concatenación de sesiones (Rizos, C. 1999).



Para conseguir un control significativo, la red de vectores no debe contener ningún vector desconectado, es decir, vector cuyo punto final no esté unido a otra parte de la red. Cada posible subred dentro de la red, debe tener al menos dos estaciones comunes con el resto de la red.

A nivel de red, se puede valorar la calidad de los vectores de observación derivados, se puede analizar la geometría de la red en conjunto, la fiabilidad interna y externa, se pueden detectar y eliminar los errores groseros. Por ejemplo, un error en la medida de la altura de una antena no se detecta al procesar la medida de fase correspondiente a una línea base, pero sí cuando se ajusta la red en su conjunto.

Para el estudio de la precisión de las observaciones que forman la red, es de utilidad el llevar a cabo un ajuste previo de la red, independientemente del sistema de referencia al que se quieran referir los resultados. Esto se consigue con un ajuste mínimo constreñimiento o un ajuste constreñimiento interno, tal como se vio en el capítulo VII.

Estos ajustes son idóneos para el estudio de las precisiones de las observaciones GPS, y el punto ideal para llevar a cabo un proceso de detección y eliminación de posibles errores groseros en las observaciones.

Una vez que, mediante el ajuste anterior, se ha comprobado que el modelo matemático y el modelo estocástico son adecuados, y con información objetiva sobre la calidad de las observaciones de partida, habrá que referir los resultados de una red GPS observada a un sistema de referencia determinado, o lo que es lo mismo, conectarlos a un datum concreto.

En este punto se plantean dos posibilidades: referir los resultados al mismo sistema de referencia al que se refieren las observaciones GPS, el sistema global WGS-84, o referirlos al sistema de referencia local correspondiente. Ambas posibilidades se consiguen introduciendo información en el ajuste, sobre posiciones de estaciones que forman la red en un determinado sistema de referencia. Sin embargo, en el caso del



ajuste en el sistema local, en el modelo matemático utilizado habrá que tener en cuenta la transformación que relaciona el sistema global al que se refieren las coordenadas GPS con el sistema local correspondiente, con parámetros adicionales a estimar en el proceso de ajuste (Leick, A., 1995 (4)).

El problema del uso de las técnicas GPS a la hora de referir las posiciones obtenidas al sistema local, es que se obtienen alturas elipsoidales, por lo que se deben usar diferencias de ondulación del geoide para calcular alturas ortométricas, y viceversa. La clara diferenciación entre alturas ortométricas y elipsoidales empieza a ser importante por el hecho de que con técnica GPS se obtiene la dimensión altura con mucha precisión. Por esto, un posible objetivo de la técnica GPS es la sustitución eventual de los clásicos trabajos de nivelación para determinación de alturas, que resultan caros y dados a errores, por la determinación de alturas con GPS. Sin embargo, para esto, es necesario la disponibilidad de ondulaciones del geoide precisas, cuestión que aún no está totalmente resuelta.

IX.2. Soluciones mínimo constreñimiento y constreñimiento interno con vectores GPS como observables.

Como se ha dicho, el resultado del procesado del conjunto de observaciones de fase GPS entre dos receptores observando simultáneamente, será un vector de posición relativa (Ec. IX-1), junto con la correspondiente matriz de varianza-covarianza (Ec. IX-2):

$$L_b = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad y \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\Delta x} & \sigma_{\Delta x \Delta y} & \sigma_{\Delta x \Delta z} \\ \sigma_{\Delta x \Delta y} & \sigma^2_{\Delta y} & \sigma_{\Delta y \Delta z} \\ \sigma_{\Delta x \Delta z} & \sigma_{\Delta y \Delta z} & \sigma^2_{\Delta z} \end{pmatrix}$$

Ec. IX-1

Ec. IX-2

Si las líneas base que forman una red se calculan de manera independiente, para el posterior ajuste de la misma, se tendrá una matriz de varianza-covarianza diagonal en bloque, es decir, bloques de matrices como la mostrada en la diagonal. Esta matriz de



varianza-covarianza se introducirá en el ajuste para asignar pesos a las observaciones, como se ha visto en el capítulo VII.

En el caso de que se haya obtenido una solución de sesión, es decir, se hayan procesado el conjunto de observaciones que forman n receptores observando simultáneamente, se tendrá como entrada en el ajuste de la red, $n-1$ líneas base independientes, junto con una matriz de varianza-covarianza de dimensión $3(n-1) \times 3(n-1)$ como la siguiente (Leick, A. 1995 (4)) (Harvey, B.R. 1994):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\Delta x1} & \sigma_{\Delta x1\Delta y1} & \sigma_{\Delta x1\Delta z1} & \sigma_{\Delta x1\Delta x2} & \sigma_{\Delta x1\Delta y2} & \sigma_{\Delta x1\Delta z2} & \dots \\ \sigma_{\Delta x1\Delta y1} & \sigma^2_{\Delta y1} & \sigma_{\Delta y1\Delta z1} & \sigma_{\Delta y1\Delta x2} & \sigma_{\Delta y1\Delta y2} & \sigma_{\Delta y1\Delta z2} & \dots \\ \sigma_{\Delta x1\Delta z1} & \sigma_{\Delta y1\Delta z1} & \sigma^2_{\Delta z1} & \sigma_{\Delta z1\Delta x2} & \sigma_{\Delta z1\Delta y2} & \sigma_{\Delta z1\Delta z2} & \dots \\ \sigma_{\Delta x1\Delta x2} & \sigma_{\Delta y1\Delta x2} & \sigma_{\Delta z1\Delta x2} & \sigma^2_{\Delta x2} & \sigma_{\Delta x\Delta y} & \sigma_{\Delta x\Delta y} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ec. IX-3

Esta matriz de varianza-covarianza, entrará en el ajuste para asignar pesos a las observaciones, de modo que cada observación contribuya al ajuste de acuerdo a su precisión. Así, observaciones más precisas, tendrán más peso que observaciones menos precisas (Vanicek, P., Krakiwsky, E.J. 1986).

El modelo matemático que se emplea con observaciones GPS es el modelo de ecuaciones de observación:

$$L_a = F(X_a)$$

Ec. IX-4

siendo L_a el vector de observaciones ajustadas y X_a las coordenadas de las estaciones ajustadas. El modelo anterior es lineal si se usan como parámetros las coordenadas cartesianas. En este caso, el vector observado entre la estación k y m es:



$$\begin{pmatrix} \Delta u_{km} \\ \Delta v_{km} \\ \Delta w_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_m - u_k \\ v_m - v_k \\ w_m - w_k \end{pmatrix}$$

Ec. IX-5

La matriz de diseño A será de la siguiente manera:

$$A_{km} = \begin{matrix} & u_k & v_k & w_k & u_m & v_m & w_m \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ec. IX-6

Cada vector contribuye con tres filas a la matriz de diseño.

Debido a que los vectores observados contienen información sobre la orientación y la escala en la red, para fijar el sistema de referencia, tan sólo será necesario fijar el origen del sistema de coordenadas. El mínimo constreñimiento o lo que es lo mismo, el mínimo número de condiciones para fijar el origen del sistema de coordenadas se consigue tan sólo eliminando las coordenadas de un punto del conjunto de los parámetros, es decir, fijando una estación (Rizos, C., 1999). En caso contrario, se presentaría una singularidad en la matriz normal, que no podría ser invertida, y por tanto, no se podría obtener la solución del ajuste.

Una posibilidad de llevar a cabo una solución con mínimo constreñimiento, como se ha visto en el capítulo VII, es fijar el centroide de la red, lo que se hace en la solución con constreñimiento interno. Esta solución se obtiene imponiendo la siguiente condición (Leick, A. 1995 (4)):

$$EX=0$$

Ec. IX-7

o lo que es lo mismo:



$$AE^T=0$$

Ec. IX-8

Para cumplir esta condición, para el caso del ajuste de una red GPS observada, con una matriz de diseño de la forma de la Ec. IX-6, la matriz auxiliar E debe ser de la siguiente forma:

$$E = ({}_3I_{33} {}_3I_{33} {}_3I_{33} {}_3I_{33} \dots)$$

Ec. IX-9

Es decir, la matriz E consiste en una fila de matrices identidad 3x3. Habrá tantas matrices identidad como estaciones intervengan en el ajuste. La solución mínimos cuadrados con constreñimiento interno está basada en el cálculo de la pseudoinversa de la matriz normal, de la siguiente forma:

$$N^+ = (A^T P A + E^T E)^{-1} - E^T (E E^T E E^T)^{-1} E$$

Ec. IX-10

Si en la solución con constreñimiento interno las coordenadas aproximadas se igualan a cero, lo que se puede hacer por ser el modelo lineal, entonces, el origen del sistema de coordenadas se hace coincidir con el centroide del conjunto de estaciones. Si no se toma como valores aproximados para las coordenadas el valor cero, los valores de las coordenadas para el centroide permanecen invariantes, es decir, sus valores, como calculados con las coordenadas aproximadas son idénticos a los calculados de las coordenadas ajustadas (Leick, A., 1995 (4)).

Esta solución previa, resulta adecuada para hacer un estudio de la calidad de las observaciones, dado que no viene influida por el sistema de referencia utilizado.

Un hecho contrastado es que las matrices de varianza-covarianza estimada por los programa de procesado GPS son demasiado optimistas, es decir, asignan a soluciones



de líneas base una precisión mayor de la real; las soluciones de dobles diferencia con la ambigüedad fija dan como resultado siempre precisiones milimétricas, cuando la precisión real de la línea puede no ser tan elevada en ciertas circunstancias (Rizos, C. 1999) (Harvey, B.R. 1994). Esto quiere decir que la precisión interna obtenida para una línea base procesada no es coherente con la precisión externa cuando se incluye en una red, debido esto a que las observaciones de fase están sometidas a errores sistemáticos, como se vio en el capítulo VI. El procesado de fase de una línea base observada, permite eliminar, o reducir, los errores aleatorios, pero no todos los errores sistemáticos que afectan a las observaciones GPS.

Por esto, cuando el conjunto de líneas base que forman una red, junto con sus matrices de varianza-covarianza, se introducen en el ajuste de una red, lo más frecuente es que dicho ajuste no pase el test chi-cuadrado sobre la varianza de peso unidad.

Para el estudio de la precisión real de las líneas base observadas, será de utilidad este ajuste previo con constreñimiento interno o mínimo constreñimiento, dado que los resultados vendrán influidos tan sólo por la precisión de las líneas base observadas. Así, llevado a cabo este ajuste, se obtendrá un valor a posteriori para la varianza de peso unidad. Este valor podrá servir para estimar la precisión real de las observaciones, siendo una práctica habitual ponderar las matrices de varianza-covarianza de partida (Ec. IX-2 y Ec. IX-3) por el valor estimado de la varianza a posteriori de peso unidad (Rizos, C. 1999).

$$\Sigma_{\text{real}} = \sigma_0^2(\text{estim}) \cdot \Sigma$$

Ec. IX-11

Una vez que se tiene información real de la precisión de las observaciones según la Ec. IX-11, llevado a cabo el ajuste, si el ajuste está bien planteado, se pasará el test chi-cuadrado sobre a varianza de peso unidad.



El siguiente paso sería llevar a cabo un proceso de detección y eliminación de errores groseros, tal como se vio en el capítulo VII. Como mecanismo se propone el test de Baarda, que consiste en un test sobre los residuos ponderados por su precisión. El test de Baarda supone que hay sólo un error grosero en las observaciones, por lo que las observaciones cuyo residuo ponderado supere el valor crítico establecido (3.29 para el 99.9 % de nivel de confianza) habrán de ser eliminadas de una en una, en un proceso iterativo, hasta eliminar todas las observaciones que el ajuste indique como posibles errores groseros.

Una vez que se tiene conocimiento objetivo de la calidad de las observaciones de partida en la red, y que los posibles errores groseros han sido eliminados, como resultados de este ajuste se obtendrá un valor estimado para las coordenadas de las estaciones que forman la red, junto con la precisión de estos parámetros obtenidos, dada por la matriz de varianza-covarianza correspondiente.

Como resumen, el previo ajuste con mínimo constreñimiento o con constreñimiento interno, es de gran utilidad, y necesario, para examinar la precisión de las observaciones, y ver cómo la precisión de estas observaciones influye en la precisión final de la red, independientemente del sistema de referencia utilizado.

IX.3. Solución en el sistema WGS-84.

Las coordenadas determinadas con GPS se refieren al sistema de coordenadas en el que se dan las posiciones de los satélites, el sistema WGS-84. Estas posiciones se pueden transformar a otros sistemas de coordenadas una vez que se conozcan los parámetros de transformación entre ambos sistemas.

Es de destacar que el primer resultado de un trabajo geodésico-topográfico con GPS es un poliedro de estaciones cuya posición relativa ha sido determinada con gran precisión (centimétrica o incluso milimétrica). La orientación del poliedro estará implícita en los vectores observados, pero la traslación del poliedro sólo se tendrá con una precisión del



metro o menor. Aunque se pueden usar técnicas especiales para aumentar la precisión en la determinación de posiciones geocéntricas con GPS, siempre habrá una significativa diferencia entre la precisión obtenida en posicionamiento relativo y la obtenida en posicionamiento absoluto.

Es por ello que para la obtención de coordenadas absolutas precisas de las estaciones que forman una red, haya que integrar el trabajo en el datum correspondiente, el sistema WGS-84.

Esto se hará, una vez llevado a cabo el ajuste con mínimo constreñimiento y eliminadas los posibles errores groseros, introduciendo en el ajuste las coordenadas globales conocidas de al menos una estación. Estas coordenadas se introducirán como observaciones, aumentando los grados de libertad del ajuste (Leick, A. 1995(4)). Entra aquí en juego el concepto de estación fiducial (Seeber, G. 1993), que son aquellas estaciones cuyas coordenadas son conocidas con una determinada precisión. Así, estas estaciones se pueden introducir como fijas, dándoles un peso muy alto, o teniendo información de partida sobre la precisión de las mismas, de modo que en función de dicha precisión, se asignen los pesos correspondientes.

Puesto que la posiciones obtenidas con GPS son posiciones tridimensionales, la manera más fácil de llevar este ajuste será según el modelo expresado en la Ec. IX-5, es decir, realizando el ajuste en coordenadas cartesianas, introduciendo como observaciones las coordenadas de las estaciones conocidas según la Ec. IX-12:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{conocidas}}$$

Ec. IX-12

Como resultado se obtendrán las coordenadas de las estaciones, expresadas ya en el sistema WGS-84, junto con su precisión, que vendrá dada por la matriz de varianza-



covarianza correspondiente. Dicha matriz, en este caso, vendrá influida por (Rizos, C. 1999):

- Geometría de las observaciones.
- Sistema de referencia usado, o lo que es lo mismo, precisión del marco de referencia con el que se ha enlazado el trabajo.
- Modelo estocástico, es decir, precisión de las observaciones de partida.

La matriz de varianza-covarianza vendrá expresada en el mismo sistema de referencia en el que se ha llevado el ajuste, es decir, en coordenadas cartesianas referidas al sistema global. A veces, puede interesar referir estos resultados, tanto de posiciones como de precisión, a componentes elipsoidales o componentes en el sistema geodésico local, lo que se hará según la relación entre los sistemas de coordenadas visto en el apartado IV.5. Modelo Geodésico Local.

El expresar la precisión en componentes del horizonte geodésico local en un punto resulta de gran utilidad, pues permite descomponer la precisión correspondiente a la posición planimétrica (elipse planimétrica de error) y la precisión en la componente altimétrica, expresada por la desviación estándar correspondiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{n,n}^2 & \sigma_{n,e} & \sigma_{n,h} \\ \sigma_{n,e} & \sigma_{e,e}^2 & \sigma_{e,h} \\ \sigma_{n,h} & \sigma_{e,h} & \sigma_{h,h}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \sigma_{n,n}^2 & \sigma_{n,e} \\ \sigma_{n,e} & \sigma_{e,e}^2 \end{pmatrix} \\ \sigma_h \end{cases}$$

Ec. IX-13

En resumen, los pasos a seguir para el ajuste de una red GPS son:

1. Ajuste de la red con constreñimiento interno para el control de calidad de las observaciones, con la detección y eliminación de posibles errores groseros.
2. Ajuste de la red fijando el sistema de referencia con puntos cuyas coordenadas WGS-84 sean conocidas. Este ajuste se llevará a cabo siempre después de comprobar la calidad de las observaciones con el ajuste anterior.



IX.4. Solución en el sistema local.

Una vez llevado a cabo el ajuste con mínimo constreñimiento, y comprobada la calidad interna de las observaciones GPS, otra posibilidad, como alternativa a la solución en el sistema WGS-84 vista en el punto anterior, será obtener la solución, no en el sistema global, sino en el sistema local correspondiente.

En el planteamiento de este ajuste, los parámetros a estimar serán las coordenadas en el sistema local, por lo que para establecer el modelo matemático a utilizar, habrá que tener en cuenta la transformación que relaciona el sistema global y el sistema local.

Considerando el modelo de transformación de Veis, el modelo matemático que relaciona posiciones globales (X) y locales (U) es el que muestra Ec. IX-14:

$$T + U_0 + (1 + \Delta)M(\lambda_0, \varphi_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)(U - U_0) - X = 0$$

Ec. IX-14

Habrà una ecuación del tipo de la anterior para toda estación ocupada con receptor GPS y que formen la red. T representa la traslación entre los orígenes de los sistemas (U) y (X), U_0 la posición del centroide (φ_0, λ_0) o un punto cercano a él en el sistema (U), Δ la diferencia en escala y ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$) los ángulos de rotación expresados en el sistema de coordenadas geodésico local en U_0 , como se vio en el capítulo anterior.

Aplicando la transformación Ec. IX-14 para dos estaciones k y m, y diferenciando se tiene (transformación diferencial):

$$(1 + \Delta)M(\lambda_0, \varphi_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)(U_m - U_k) - (X_m - X_k) = 0$$

Ec. IX-15



El vector de traslación T se ha eliminado, lo que quiere decir que la posición relativa de puntos en dos sistemas de coordenadas no depende de la traslación que relaciona los orígenes de los dos sistemas. La diferencia de coordenadas:

$$\Delta X_{km} = X_m - X_k$$

Ec. IX-16

representa el vector GPS observado entre dos estaciones obtenido del procesado de la medida de fase. Así, el modelo Ec. IX-16 se puede escribir:

$$\Delta X_{km} = (1 + \Delta)M(\lambda_0, \varphi_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)(U_m - U_k)$$

Ec. IX-17

La expresión anterior representa el modelo matemático a utilizar para llevar el ajuste en el sistema local, usando las líneas base GPS como observaciones. Como se ve, además de las coordenadas de las estaciones en el sistema local, parámetros adicionales en el ajuste son tres rotaciones y un factor de escala, que relacionan las posiciones relativas entre estaciones en el sistema local y global.

Sustituyendo en la expresión anterior la matriz M (VIII.2.3. Transformación de Veis), y derivando, se obtienen las derivadas parciales de la matriz de diseño para las incógnitas de posición (Tabla IX-1) y para los parámetros de transformación (Tabla IX-2).

Parametrización	Estación m	Estación k
(U)	$(1+\Delta)M$	$-(1+\Delta)M$
(φ, λ, h)	$(1+\Delta)MJ(\varphi_m, \lambda_m)$	$-(1+\Delta)MJ(\varphi_k, \lambda_k)$
(n, e, h)	$(1+\Delta)MJ(\varphi_m, \lambda_m)H^{-1}(\varphi_m)$	$-(1+\Delta)MJ(\varphi_k, \lambda_k)H^{-1}(\varphi_k)$

Tabla IX-1 Submatriz de diseño para una estación ocupada con receptor GPS.



Δ	α	ξ	η
$U_m - U_k$	$M_\alpha(U_m - U_k)$	$M_\xi(U_m - U_k)$	$M_\eta(U_m - U_k)$

Tabla IX-2. Matriz de diseño para los parámetros de transformación entre sistemas.

A veces, es preferible tomar diferencias de latitud, longitud y altura geodésica como parámetros en vez de las componentes cartesianas (Δu , Δv , Δw). Una de las causas para esta reparametrización es que los cambios en la latitud, longitud y altura se pueden visualizar más fácilmente que los correspondientes valores en coordenadas geocéntricas. Igualmente, puede interesar obtener los parámetros en coordenadas planas cartográficas. Bastará con usar las expresiones de la proyección cartográfica correspondiente. Así, las matrices M y J en las tablas Tabla IX-1 y Tabla IX-2 son las matrices correspondientes para pasar de coordenadas cartesianas a elipsoidales y a componentes en el horizonte geodésico local (IV.5. Modelo Geodésico Local).

El modelo matemático mostrado en la Ec. IX-13 no es lineal, por lo que la resolución del ajuste, será mediante un proceso iterativo (ver apartado VII.3.1.4. Iteraciones).

Este ajuste en el sistema local, tiene la posibilidad de incluir observaciones clásicas, como observaciones de ángulos y distancias. Así, el modelo matemático en esta situación, vendrá dado por expresiones tales como la Ec. IX-18 y Ec. IX-19:

$$L_{1a} = F(X_a)$$

Ec. IX-18

$$L_{2a} = F(\Delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, X_a)$$

Ec. IX-19

La Ec. IX-18 se refiere a las observaciones terrestres. Los parámetros X_a representan las posiciones de las estaciones en el sistema local y otros parámetros adicionales que se



puedan incluir tales como los coeficientes de refracción. La Ec. IX-19, usando el modelo de transformación de Veis, será de la forma de la Ec. IX-17.

La matriz de pesos para los vectores de observación es “diagonal en bloques”; el tamaño de las submatrices en la diagonal depende del número de vectores observados simultáneamente

A la hora de definir el sistema de referencia en un ajuste en el sistema local no bastará con fijar el origen del sistema, como en el caso del sistema WGS-84, sino que será necesario también fijar los tres giros y el factor de escala. Es por ello que sea necesario fijar al menos dos posiciones planimétricas y tres posiciones altimétricas en el sistema local. En el caso de tener puntos de coordenadas locales tridimensionales longitud, latitud y altura elipsoidal conocidas, el mínimo número de puntos necesario para fijar el sistema de referencia es tres. Con dos puntos, tan sólo se tendrían seis componentes conocidas, no pudiendo fijar el sistema de referencia. Se pueden utilizar puntos adicionales para dar redundancia al ajuste (Brockmann, E., Gurtner, W).

Las coordenadas de estos puntos, a igual que en el caso anterior de ajuste en el sistema global, se introducirán como observaciones. Aquí surge de nuevo el concepto de punto fiducial, de modo que estas coordenadas se pueden considerar como puntos fijos en el ajuste, asignando un peso muy grandes comparado con el peso del resto de las observaciones, o asignar un peso de acuerdo a la precisión a priori de estas coordenadas, resultado de una trabajo anterior.

Un aspecto que hay que tener en cuenta, es que en la Ec. IX-19, las posiciones tridimensionales tienen significado geométrico y no físico, lo que quiere decir que las posiciones altimétricas vendrán dadas como cotas elipsoidales y no como cotas ortométricas. Si a partir de estas coordenadas elipsoidales obtenidas del ajuste de una red GPS se quieren obtener cotas ortométricas, será necesario la introducción de un modelo de geoide para la zona en cuestión.



Como resultados de este ajuste, a igual que en los demás casos, junto con las posiciones locales ajustadas para las estaciones que forman la red, se obtienen las matrices de varianza-covarianza correspondientes, como indicadores de la precisión de los resultados obtenidos. Dichas matrices se podrán representar como elipses planimétricas de error y desviación estándar altimétrica, si se transforman al sistema geodésico local.



X. UCORed-GPS. APLICACIÓN INFORMÁTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE REDES GPS.

X.1. Introducción.

Una vez estudiada la metodología para el cálculo y ajuste de redes GPS observadas, se plantea el objetivo de crear una herramienta informática que permita evaluar las diferentes alternativas que se presentan a la hora de resolver estos problemas.

UCORed-GPS se presenta como una aplicación informática, desarrollada en lenguaje de programación orientada a Objetos Delphi v3, para el ajuste de redes GPS observadas, tanto en el sistema de referencia global WGS-84 como en los posibles sistemas de referencia locales.

Delphi es un entorno de desarrollo de aplicaciones basado en componentes, que permite crear, de manera muy rápida y fácil, aplicaciones muy eficientes basadas en Microsoft Windows. Algunas de las principales características de este lenguaje, motivo de su elección, pueden ser:

- Enfoque basado en fichas y orientación a objetos.
- Compilación extremadamente rápida.
- Cercana integración con la programación Windows.
- Basado en el lenguaje Object Pascal.
- Facilidad de uso.

Las características que presenta Delphi hacen que el uso de esta herramienta esté muy extendido, con mucha información para la resolución de problemas concreto, existiendo gran cantidad de librerías para incorporar directamente en programas propios, muchas de ellas de uso público.



En el momento en que se planteó el diseño de esta aplicación informática, se vio que el lenguaje de programación Delphi se adaptaba perfectamente a los objetivos, cubriendo las necesidades de cálculo que llevaban asociados los procesos de ajuste, y proporcionando además facilidad de uso y rapidez en la compilación.

UCORed-GPS es una herramienta fácil de usar a la vez que permite flexibilidad a la hora de poder resolver el mismo problema siguiendo las diferentes estrategias que se pueden plantear en el ajuste de una red GPS observada, tanto en el sistema global, como en los diferentes sistemas locales que puedan interesar. UCORed-GPS pretende ser así una herramienta de utilidad en al ámbito docente.

El principal objetivo en el desarrollo de esta aplicación es disponer de una herramienta que pueda servir de ayuda a la hora de llevar a cabo una comparación de resultados siguiendo diferentes alternativas, de manera rápida y sencilla, que nos pueda llevar así a la obtención de conclusiones para el presente trabajo.

Aunque si es cierto que existen múltiples aplicaciones comerciales para la resolución de redes GPS observadas, es frecuente que no planteen una solución conjunta para los distintos tipos de ajustes considerados aquí, dando poca información de los modelos matemáticos utilizados, la estrategia de ajuste seguida y/o presentándose como entornos de trabajo muy rígidos. Con el programa que se desarrolla dentro del presente trabajo, se pretende aportar una alternativa a estas limitaciones, sin mermar en el rigor en el planteamiento y la solución de los ajustes.

X.2. Criterios de diseño de la interface gráfica de UCORed-GPS.

En general, la elaboración del diseño del entorno gráfico de una aplicación informática es una tarea sujeta a criterios ergonómicos, funcionales y estéticos (García Cortés, S. 2000). El número de controles gráficos disponibles condiciona la solución elegida para



una determinada aplicación pero son siempre posibles múltiples alternativas entre las cuales es necesario escoger solamente una que será la que se implementará.

Los criterios de diseño se pueden agrupar, desde el punto de vista abstracto, en tres grandes categorías como se observa en el Diagrama X-1, y desde el punto de vista cuantitativo, el estimador más empleado es el tiempo de trabajo que se puede necesitar para resolver una tarea en una primera ocasión y una vez que el usuario se ha familiarizado con la interface.

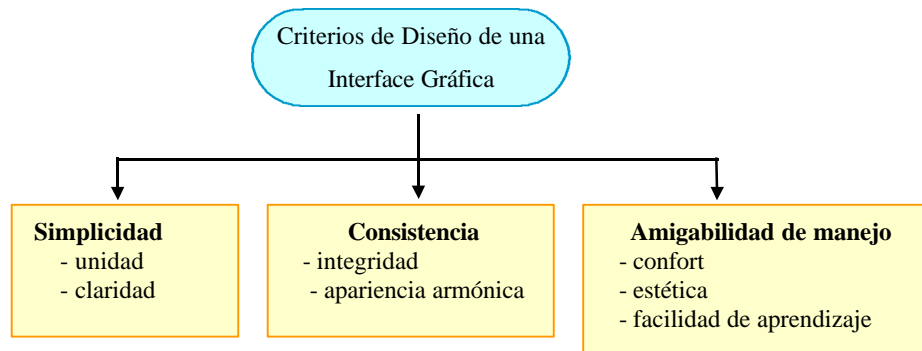


Diagrama X-1 Criterios de diseño de la interface gráfica.

Para la elaboración del programa informático UCORed-GPS, durante la fase de diseño, se planteó cuáles eran los objetivos que se querían lograr con el programa, estableciendo los diferentes tipos de ajuste que se quería resolver. Para cada uno de ellos se identificaron los datos necesarios y los resultados a obtener, así como los procesos necesarios a llevar a cabo.

Posteriormente se trató de definir el flujo de trabajo del programa, para que realizara las tareas necesarias en el orden correcto y que a la vez permitiera implementar las alternativas que en cada caso se definieran. Desde este punto de vista, la programación en un entorno de ventanas permite una gran versatilidad, ya que el programa aparece estructurado en funciones asociadas a dichas ventanas, de forma que el flujo de acciones puede detenerse y permanecer en espera o ser interrumpido mientras el usuario analiza



los parámetros o resultados que se muestran y decide nuevas acciones a ejecutar a continuación.

Tras definir qué tareas se realizarían en cada ventana, se comenzó el diseño de las mismas. Como criterios generales se procuró que el entorno fuera amigable y hasta cierto punto intuitivo (p.e. opciones activadas o desactivadas según la información disponible hasta el momento). En segundo lugar, se buscaron la simplicidad y claridad, con estructuración en bloques, de estructura similar para las diferentes alternativas, con la pretensión de mantener la misma estructura de acciones, dentro de lo posible, en las diferentes variedades de ajuste consideradas. Y en tercer lugar, se persiguió la funcionalidad del programa. La herramienta debe permitir resolver los distintos tipos de ajuste para una red GPS observada sin procesos demasiado tediosos, con la capacidad de variar las condiciones de resolución con agilidad y de la forma más automática posible.

X.3. Estructura general del programa.

Todos los procedimientos y funciones que se incluyen en el programa, han sido desarrollados por el autor de este trabajo. Tan sólo se ha usado la librería TP-Math (<http://ourworld.compuserve.com/homepages/JDebord/tpmath.htm>), de uso público, que es una librería matemática en Pascal, para DOS, Windows y Linux, y compatible con Delphi. Del conjunto de unidades que forman TP Math, tan sólo se han utilizado las siguientes:

- MATRICES.PAS Version 1.9. ©J. Debord, April 1999. Unidad para el cálculo con matrices, permitiendo la asignación dinámica de vectores y matrices.
- DISTR.PAS ©Tue Tjur. 1992. Unidad que permite aplicar distribuciones estadísticas a unos datos dados.

La estructura de los componentes y procedimientos que constituyen la aplicación informática se puede agrupar en los cuatro grandes bloques que se verán a continuación:



- Herramientas para la gestión de los trabajos.
- Procedimientos para la entrada y salida de la información.
- Herramienta gráfica para la visualización de la información de salida.
- Procedimientos de cálculo y ajuste.

X.3.1. Herramientas de Gestión de trabajos de UCOREd-GPS.

La aplicación UCOREd-GPS trabaja con los trabajos incorporados en una estructura de directorios, de manera que todos los archivos asociados a un trabajo están dentro de un directorio concreto, incluidos en un directorio de trabajos, consiguiendo fácil accesibilidad a dichos archivos.

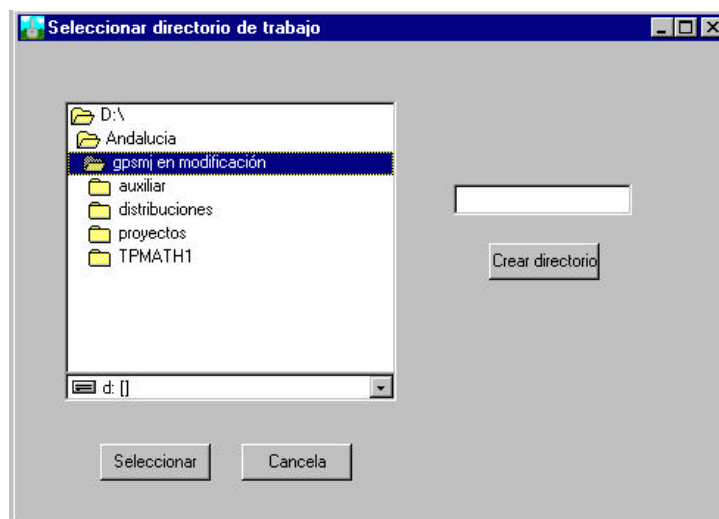


Figura X-1 Ventana de Selección de directorio de trabajo.

Igualmente, para no imponer rigidez en los trabajos creados y hacer posible la incorporación de modificaciones en el diseño de los trabajos, se dispone de un módulo de gestión de líneas base y de estaciones, que permite activar y desactivar línea base o estaciones previamente cargadas (Figura X-2), e incluso su eliminación cuando se considere oportuno.

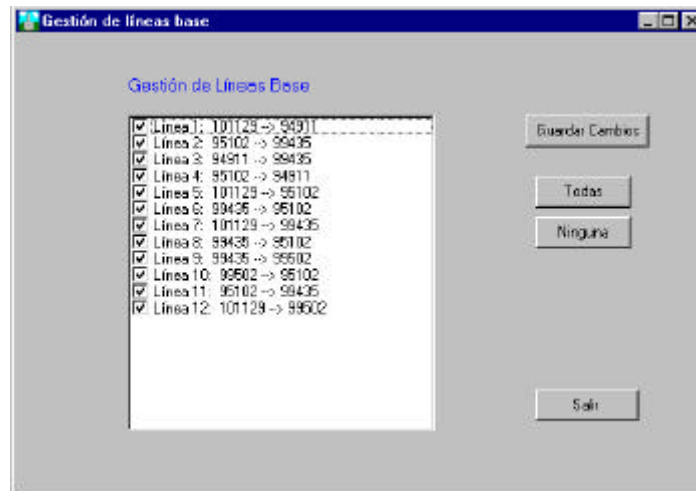


Figura X-2 Ventana Gestión de líneas base.

X.3.2. Entrada de información en UCOREd-GPS.

La información que debe entrar a la aplicación, que conforma la información necesaria para la resolución de problemas de redes geodésicas, es de dos tipos:

- Resultados del procesado de líneas base GPS observadas.
- Información sobre posiciones conocidas.

X.3.2.1. Líneas base GPS observadas.

En primer lugar, será necesario introducir información procedente del procesado de líneas base, junto con información adicional sobre la precisión estimada para cada línea base.

Para ello, la aplicación dispone de un módulo de lectura de datos brutos de líneas base en diferentes formatos:

- Lectura desde teclado, introduciendo las componentes cartesianas de las líneas base observadas, matriz de varianza-covarianza de dicha componentes y coordenadas aproximadas de las estaciones implicadas.



Figura X-3 Ventana Introducción líneas base desde teclado.

- Lectura archivo ascii procedente del software de proceso Ashtech Office Suite (AOS).
- Lectura archivos ascii O*.* resultado procesado software GPPS de Ashtech. Inc
- Lectura archivos ascii *.bal, salida del software comercial de proceso SKI de Leica.
- Lectura de fichero ascii procedente del software comercial de proceso Trimble Geomatics Office (TGO)

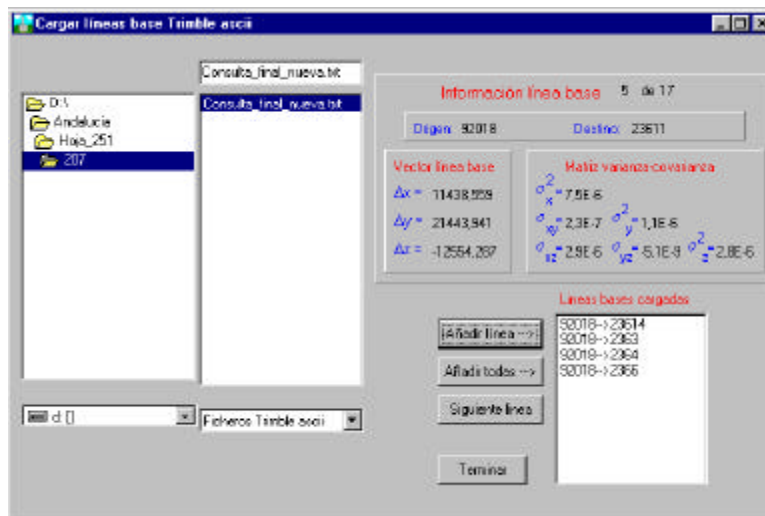


Figura X-4 Ventana de lectura de líneas base procedentes de procesado con TGO.



X.3.2.2. Información sobre posiciones conocidas.

Además de la información referente a líneas base observadas, será necesario introducir información sobre posiciones conocidas de alguna o varias estaciones de la red, en un determinado sistema de referencia. Estas estaciones son las que servirán para encuadrar el trabajo en un determinado marco de referencia.

En este punto se introduce el concepto de punto fijo o punto fiducial. Para ello, además de la posibilidad de introducir las coordenadas de una estación (coordenadas cartesianas, elipsoidales o planas), se da la posibilidad de introducir información sobre la precisión de estas coordenadas. Así, estos puntos de coordenadas conocidas se pueden introducir como puntos fijos, o como puntos fiduciales si se tiene información de precisión en forma de desviación estándar de las componentes de posición.

Para disponer de flexibilidad a la hora de incorporar esta información, se han implementado varios formatos de entrada.

- Lectura de coordenadas desde teclado, junto con sus precisiones, bien en coordenada cartesianas, coordenadas elipsoidales o coordenadas planas.

Fijar puntos de coordenadas elipsoidales WGS-84 conocidas

Punto de coordenadas conocidas

Nombre: 92281

Latitud: 37 51 10,063063 (N/S)

Longitud: 4 53 42,632206 (E/O)

Altura(m): 156,307

Punto fijo

Punto con precisión

$\sigma^2 N (m)$: 0,01

$\sigma^2 E (m)$: 0,01

$\sigma^2 H(m)$: 0,01

Puntos fijados: 92281

Botones: Fijar punto, Terminar, Cancelar

Figura X-5 Ventana de introducción de coordenadas elipsoidales de estaciones fijas.



Un ejemplo de estas ventanas de entrada de datos se muestra en la Figura X-5.

- Lectura desde formato ascii, separados por tabuladores:
 - Fichero *.car para entrada de coordenadas cartesianas.
 - Fichero *.utm para entrada de coordenadas planas
 - Fichero *.alt para entrada de coordenadas altimétricas.
- Lectura desde formato binario *.cor. Este formato es generado en el ajuste de una red, incluyendo las coordenadas ajustadas resultantes junto con la matriz de varianza-covarianza de las tres componentes de posición, resultados que pueden ser incorporados como información de partida para siguientes trabajos.

X.3.3. Herramienta gráfica para la visualización de la información de salida.

Se ha implementado un módulo gráfico que permite la visualización de los trabajos, junto con las precisiones obtenidas en los ajustes correspondientes.

Dichas precisiones se representan en su forma de elipses de error para representar la precisión planimétrica y en forma de desviación estándar altimétrica (r.m.s), como se muestra en la Figura X-6, mostrándonos así mismo en pantalla, si así se desea, los resultados numéricos del ajuste.

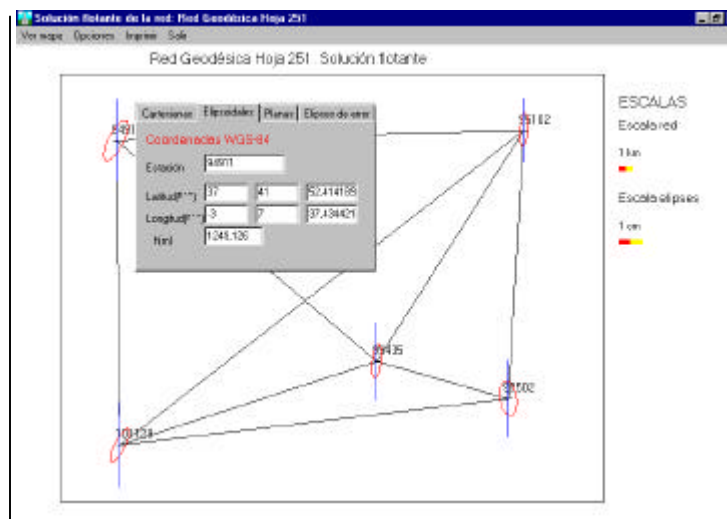


Figura X-6. Visualización en pantalla de la solución ajustada de una red, junto con elipses de error.



observadas. Estos cierres pueden dar idea de las precisiones de las líneas bases disponibles, y de posibles errores groseros. Cierres grandes en triángulos contiguos pueden servir para detectar líneas defectuosas, y cierres grandes en triángulos aislados, pueden indicar error de estacionamiento en diferentes sesiones de observación, o errores en altura de antena. (Figura X-8)

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Inc x (m)	Inc y (m)	Inc z (m)
2<-5->7	95102	99435	95102	-0,0136	-0,0234	-0,0120
2<-9->10	95102	99435	99502	-0,0398	-0,0021	-0,0298
3<-4->8	94911	99435	94911	0,0439	-0,0167	0,0073
5<-8->7	101129	95102	95102	0,0060	-0,0245	0,0120
5<-7->8	101129	95102	99435	-0,0039	-0,0196	-0,0231
5<-10->12	101129	95102	95102	-0,0627	0,0091	-0,0904
7<-9->12	101129	99435	99502	-0,0789	0,0303	-0,0682
8<-9->10	99435	95102	99502	0,0301	-0,0057	0,0409

Figura X-8 Editor de cierre de triángulos.

X.3.4.2. Alternativas a seguir en la resolución de una red GPS.

En el Diagrama X-2 se muestra un esquema general de las alternativas a seguir a la hora de abordar la resolución de una red GPS observada, alternativas desarrolladas en el capítulo anterior.

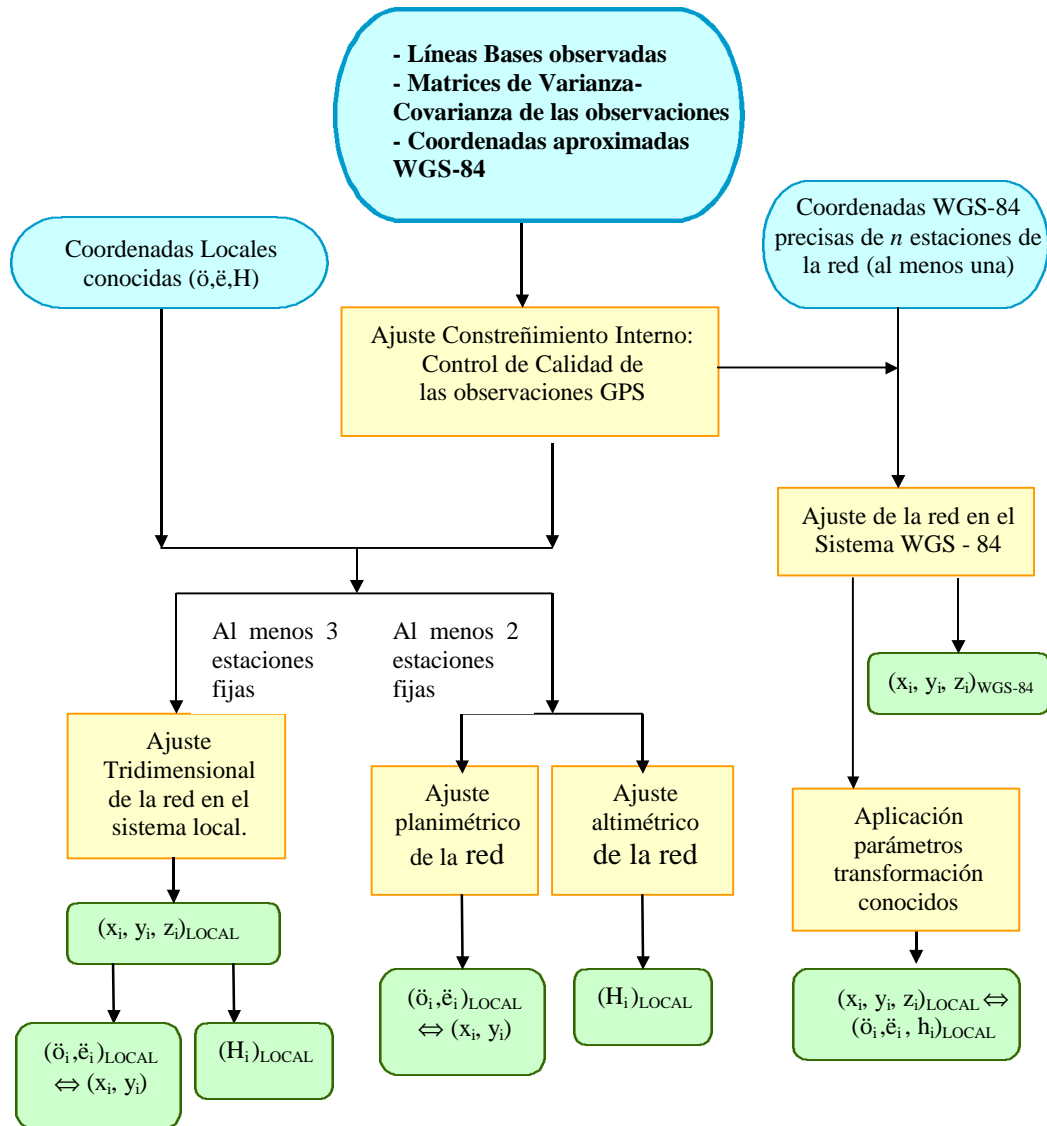


Diagrama X-2. Alternativas de Ajuste de una red GPS Observada.

Como se ha visto en la metodología, el primer paso será llevar a cabo un ajuste con constreñimiento interno para evaluar la calidad de las observaciones, aplicando herramientas estadísticas para la detección de errores groseros que permitan su eliminación dentro del ajuste.



Una vez llevado a cabo este ajuste, sabiendo que no hay errores groseros en las observaciones, habrá que pensar en el sistema de referencia en que queremos obtener los resultados del trabajo. Se presentan dos alternativas:

- Sistema Global WGS-84.
- Sistema Local.

X.3.4.3. Ajuste de la Red con constreñimiento interno.

El primer paso a la hora de obtener el resultado de una red GPS observada será obtener la solución con constreñimiento interno, paso obligado dentro del proceso de cálculo seguido en UCORed-GPS, antes de fijar el sistema de referencia al que se quieren referir los resultados.

La implementación informática se ha realizado según lo visto en la metodología, mediante el cálculo de la pseudoinversa como alternativa a la inversión de la matriz normal en la obtención de la solución mínimos cuadrados. El esquema de los pasos seguidos en esta solución se muestran en el Diagrama X-3. Dicho ajuste parte inicialmente de un valor de varianza a priori de peso unidad igual a 1 ($\sigma_0 = 1$).

Como se ha dicho, este ajuste se lleva a cabo como paso previo con el objeto de tener un control de las calidades de las observaciones que forman la red GPS. Dicho control se consigue con la implementación de dos test estadísticos:

1. Test Chi-cuadrado sobre la varianza de peso unidad.

Como resultado del ajuste se obtiene una estimación para la varianza de peso unidad, σ_0 (estim). Este test consiste en comprobar si este valor es estadísticamente igual al valor de la varianza a priori de peso unidad, por comparación con los valores de la distribución Chi-cuadrado para los grados de libertad correspondientes, y elegido un determinado nivel de confianza (por defecto, 95%).

La Figura X-9 muestra la ventana correspondiente mostrando el resultado del test chi-cuadrado

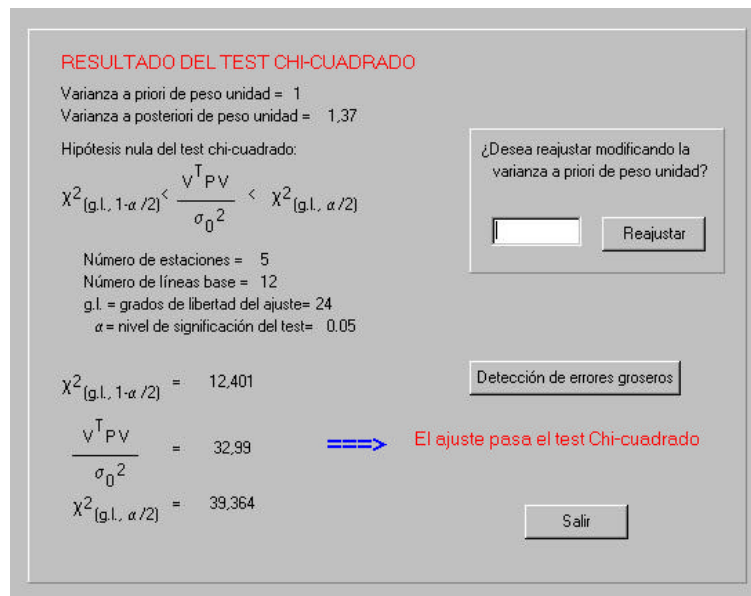


Figura X-9 Ventana Test Chi-cuadrado en Solución mínimo constreñimiento

Como se ha visto en la metodología, los pesos asignados a las líneas base, resultado de un procesado de fase, suelen ser muy optimistas, por lo que será habitual que en el primer ajuste no se pase el test chi-cuadrado (IX.2. Soluciones mínimo constreñimiento y constreñimiento interno con vectores GPS como observables).

Como se ve en la figura anterior, UCORed-GPS permite, conociendo el valor de la varianza a posteriori de peso (resultado del ajuste), reajustar introduciendo un valor para dicha varianza. Con esto se consigue ponderar los pesos de las observaciones, para partir de precisiones de las observaciones más realistas.

Con el test chi-cuadrado se consigue asegurar una coherencia global de la precisión de las observaciones y los resultados del ajuste de la red. Para el estudio de la precisión de cada observación, independientemente, pasado el test chi-cuadrado, UCORed-GPS permite llevar a cabo un test sobre los residuos: test de Baarda.

2. Test de Baarda de detección de errores groseros.

El test implementado en la aplicación informática para realizar un proceso de detección de errores groseros es el test de Baarda visto en el capítulo VII, test sobre los residuos de cada una de las observaciones.



Se calculan los residuos tipificados para cada una de las observaciones, mostrándose como posibles errores groseros aquellos cuyo valor absoluto sea mayor a un determinado nivel crítico (por defecto, 3.29, correspondiente a un nivel de confianza del 99.9%, como se propone en Ferrer Torío R, y otros, 1991). La figura muestra la ventana mostrando los resultados de dicho test.

The screenshot shows a window titled 'Edición de resultados' with a table of test results. The table has columns for 'Desde', 'Hasta', 'w (no x)', 'w (no y)', 'w (no z)', and 'Errores'. The 'Errores' column contains the text 'Posible error' for two rows (487 and 528). A 'Salir' button is visible on the right side of the window.

Desde	Hasta	w (no x)	w (no y)	w (no z)	Errores
452	105293	106500	-0.344	-0.462	-0.441
453	102191	103794	0.105	0.343	-0.038
454	102191	102401	0.123	0.394	0.282
455	106500	102401	0.457	-0.137	0.541
475	105293	103794	0.176	-2.565	0.342
476	103794	102191	0.264	-1.284	-0.302
487	106500	105293	1.613	-3.373	1.393
528	106500	105293	0.539	-5.264	0.710

Test de Baarda de detección de errores groseros.
Nivel crítico de detección de errores groseros: 3.29
Nivel de confianza: 99.9%

Figura X-10 Ventana Test de Baarda de detección de errores groseros.

Hay que tener en cuenta que un error grosero en una línea base observada puede afectar a los residuos de alguna otra de las líneas base observadas, por lo que el proceso de eliminación de estos errores groseros debe ser iterativo. Así, la manera de actuar será: eliminar una observación, la de mayor residuo tipificado, reajustar y volver a analizar los nuevos residuos obtenidos para las observaciones restantes, y así sucesivamente hasta que no se encuentren observaciones posiblemente afectadas por errores groseros.

El Diagrama X-3 muestra el esquema seguido en el ajuste con constreñimiento interno, pudiéndose observar el proceso iterativo de ajuste que conlleva la eliminación de observaciones detectadas por el test de Baarda como posibles errores groseros.

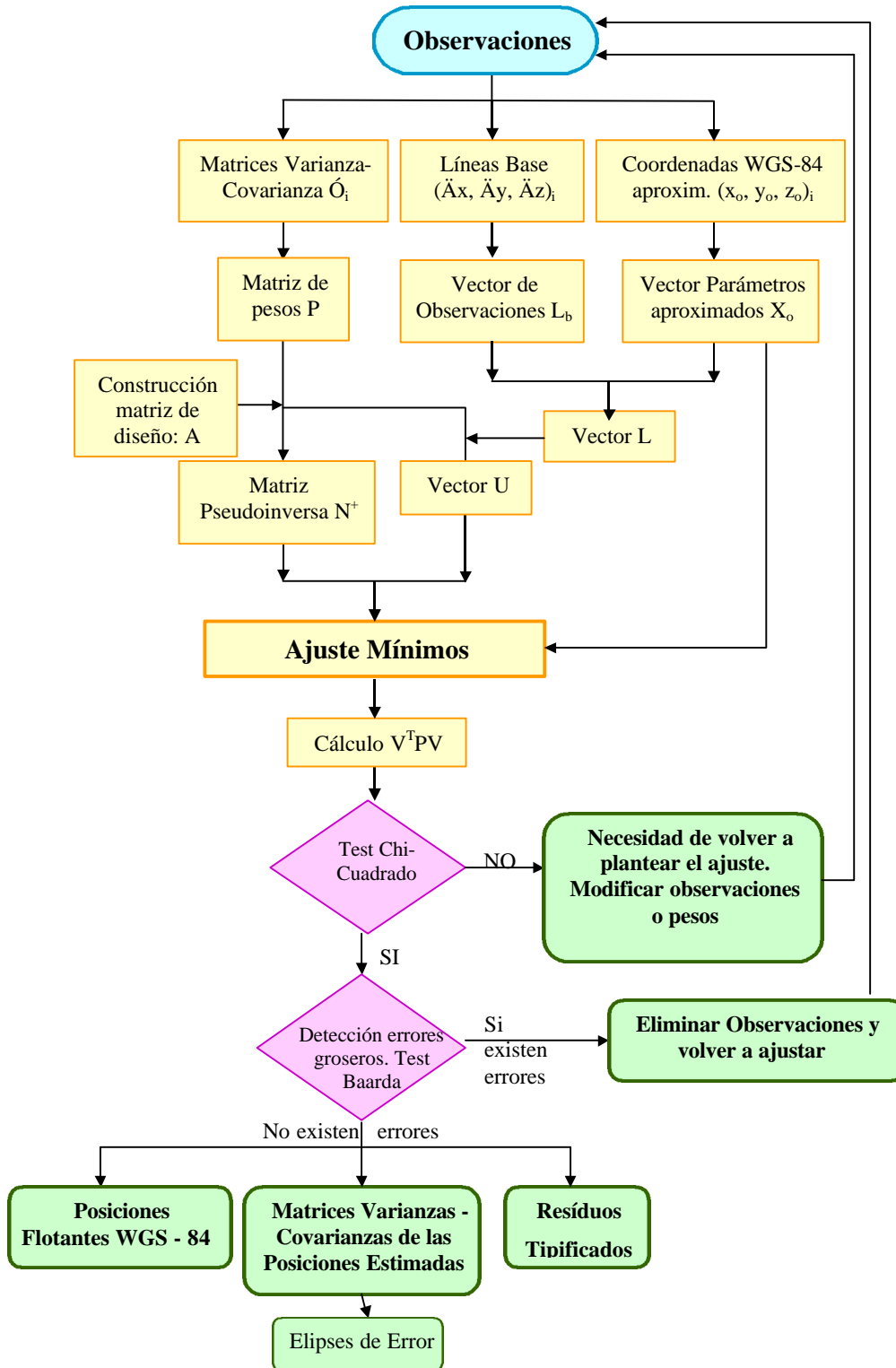


Diagrama X-3 Esquema Ajuste de la Red con constreñimiento interno.



Una vez comprobada la calidad de las observaciones mediante los test anteriores, los resultados que se obtienen del ajuste son:

1. Coordenadas ajustadas de las estaciones en la solución constreñimiento interno.
3. Elipses planimétricas de error junto con rms altimétrico de para cada estación, que dan idea de la precisión intrínseca de la red GPS observada, independientemente del sistema de referencia al que luego se refiera.
4. Residuos asignados por el ajuste a las líneas base para conseguir la solución mínimos cuadrados.

X.3.4.4. Ajuste de la red en el sistema WGS-84.

Completado el proceso de detección de errores groseros y estudiada la precisión intrínseca de la red, se puede pasar a fijar el sistema de referencia, o lo que es lo mismo, integrar el trabajo en el marco de referencia al que queramos referir los resultados. Para enmarcar el trabajo dentro del marco de referencia WGS-84 será necesario introducir en el proceso información sobre posiciones de estaciones en dicho sistema.

Puesto que las observaciones GPS por si mismas definen el factor de escala y la orientación del sistema WGS-84, será suficiente con introducir en el ajuste las coordenadas de una estación en dicho sistema de referencia. Sin embargo, se pueden incluir estaciones adicionales para aumentar la coherencia de la solución obtenida con el marco de referencia en el que se enmarca el trabajo.

Las posiciones de las estaciones conocidas en el sistema global, junto con sus precisiones, se introducen en el ajuste como observaciones (tres ecuaciones de observación por cada estación). Esto se traduce en un aumento de los grados de libertad del ajuste (las mismas incógnitas a obtener pero con más observaciones).

El Diagrama X-4 muestra el esquema del proceso seguido en el ajuste en el sistema WGS-84.

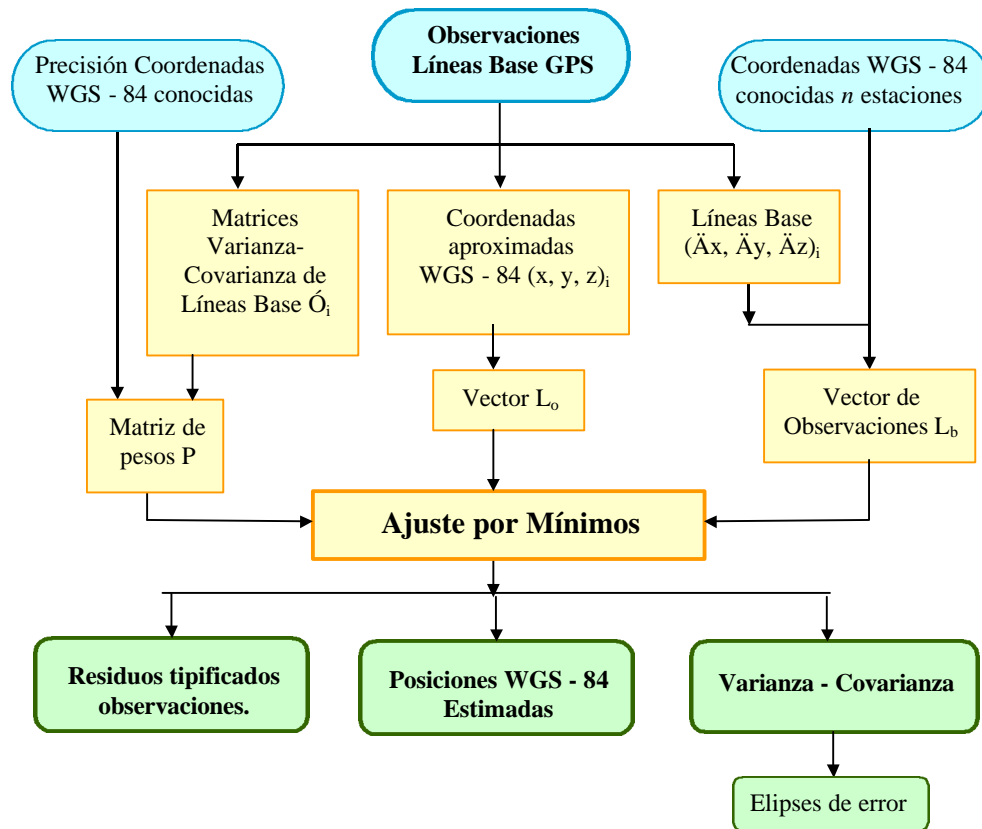


Diagrama X-4 Esquema Ajuste de la Red en el sistema WGS-84.

El modelo implementado es el descrito en la metodología, utilizando las observaciones que han quedado después de aplicar el test de Baarda de detección de errores groseros, con los pesos ponderados hasta que se pasa el test Chi-cuadrado, junto con las observaciones para las coordenadas conocidas.

Respecto a los pesos asignados a las observaciones de coordenadas conocidas, dependerán de si dichas observaciones se han introducido como puntos fijos o como puntos con una determinada precisión (punto fiducial):

- Puntos fijos. Se asignan pesos infinitos respecto a los pesos asignados a las líneas base. Se ha visto que basta con asignar un valor de 10^{10} como peso de las observaciones de coordenadas conocidas de una estación, para que se considere como estación fija en el ajuste.



- Punto fiducial. Se asignan un pesos en función de la precisión en las coordenadas conocidas, de manera inversamente proporcional a la varianza correspondiente.

De este ajuste en el sistema WGS-84 se obtienen los siguientes resultados (Figura X-11):

- Coordenadas ajustadas en el sistema WGS-84 (cartesianas y elipsoidales).
- Precisión de dichas coordenadas, expresadas como elipses planimétricas de error y desviación estándar altimétrica.
- Residuos de las observaciones.
- Residuos tipificados de las observaciones, para observaciones de líneas base y para observaciones de puntos fijos y/o fiduciales.

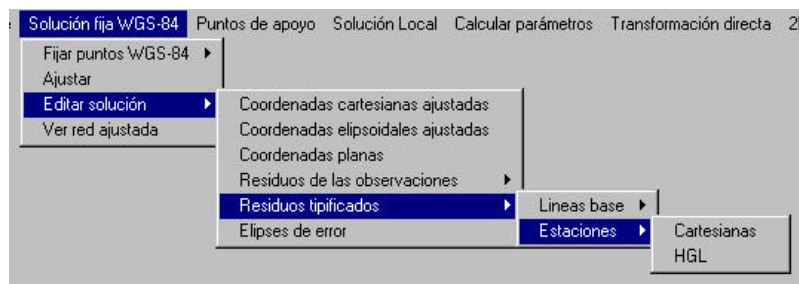


Figura X-11. Opciones de edición de la solución WGS-84.

X.3.4.4.1. Detección de errores groseros en coordenadas conocidas de estaciones en el sistema WGS-84.

En la solución obtenida en el sistema WGS-84, como se ha obtenido mediante un proceso de ajuste, nuevamente se podría aplicar un mecanismo estadístico sobre los residuos obtenidos para las observaciones, con el objeto de detectar posibles errores groseros en dichas observaciones utilizadas.



Se parte del hecho de que previamente se ha llevado un ajuste con constreñimiento interno, en el que se ha aplicado el test de Baarda para eliminar errores groseros en las observaciones de líneas base utilizadas. Así, los posibles errores existentes en las observaciones de este ajuste han tenido que ser introducidos a través de coordenadas erróneas en algún vértice de coordenadas conocidas en el sistema WGS-84.

Por esto, dentro de la aplicación UCORed-GPS, se ha implementado la utilidad de estudio de posibles errores groseros en las coordenadas introducidas en el ajuste, que se presenta como una novedad respecto a los programas informáticos de ajuste de redes existentes en el mercado.

Puesto que las coordenadas de las estaciones conocidas se introducen en el ajuste como observaciones, como resultado del ajuste se obtiene el valor de los residuos correspondientes junto con su matriz de varianza-covarianza indicando la precisión de dichos residuos (VII.3.1.3. Matrices cofactor y covarianza). Con dicha información se obtienen los residuos tipificados para las observaciones de coordenadas, sobre los cuales se aplica de nuevo el test de Baarda de detección de errores groseros.

De nuevo, considerando un nivel de confianza, se podrán considerar coordenadas erróneas aquellas que presenten un residuo tipificado de valor superior al nivel crítico considerado.

En este punto, el concepto de punto fiducial tiene una importancia especial puesto que el valor obtenido para un residuo tipificado dependerá de precisión asignada en el ajuste a dicha observación. Así, en una red determinada, para una misma observación, el residuo tipificado será tanto mayor cuanto mayor sea la precisión de la que se parta.

Es por ello que los conceptos de error grosero y de nivel crítico de detección de errores groseros tienen sentido siempre que se parta de una estimación real de la precisión de las coordenadas utilizadas. Una observación se podrá considerar errónea o no para una determinada precisión de partida.



Este mecanismo es de gran utilidad para detectar incoherencia en la precisión de las coordenadas conocidas de alguna estación, lo que nos advierte, o que bien debemos modificar la precisión de partida de estas coordenadas, o bien eliminar esta estación como fija en el ajuste WGS-84.

Los residuos tipificados calculados se expresan de dos maneras:

- Componentes cartesianas
- Componentes HGL, es decir, residuos tipificados expresados en el sistema geodésico local en cada punto.

Los residuos expresados en componentes HGL permiten diferenciar posibles errores en las componentes planimétricas o en la componente altimétrica de posición de una estación.

Tabla de residuos tipificados de coord. de estaciones fijas. Componentes HGL.

	Estación	N (m)	E (m)	H (m)		
1	92291	-0,680	1,373	-0,112		
2	88757	2,653	1,435	0,885		
3	89051	2,052	-4,638	0,764		
4	83323	-6,516	2,742	-1,457		
5	100535	2,049	0,095	0,233		
6	103794	-0,585	-3,905	-1,142		

Posibles errores groseros

Figura X-12. Ventana edición residuos tipificados en componentes HGL.



En la Figura X-12 se muestra una ventana de edición de residuos tipificados correspondientes a las coordenadas de los puntos fijos en el sistema WGS-84, expresadas en componentes HGL. Se observa que aparecen dos observaciones posiblemente afectadas por errores groseros en las componentes planimétricas, pero no en las componentes altimétricas.

X.3.4.4.2. Cálculo de puntos de apoyo.

Existen situaciones de trabajo concretas en las que puede ser necesario un estudio particular del problema a resolver.

Como caso particular en la aplicación de resolución de redes GPS se plantea el caso de la obtención de coordenadas de puntos de apoyo fotogramétrico, cada día más extendida dada la importancia de las técnicas fotogramétricas para la obtención de cartografía, y dadas las posibilidades que el GPS presenta en este campo.

El proceso habitual para la obtención de los puntos de apoyo necesarios para la resolución de una aerotriangulación, es levantar una red básica en la zona de trabajo, apoyándose en la red geodésica, y a partir de ésta, se levantan los puntos de apoyo y los puntos de control. Aunque tradicionalmente los puntos de apoyo se levantaban desde tan sólo una estación, a modo de radiación, cada vez más se está imponiendo levantar los puntos desde al menos dos estaciones, con el objeto de poder controlar la calidad de las posiciones obtenidas. El Gráfico X-1 muestra un ejemplo de levantamiento de puntos de apoyo desde dos estaciones

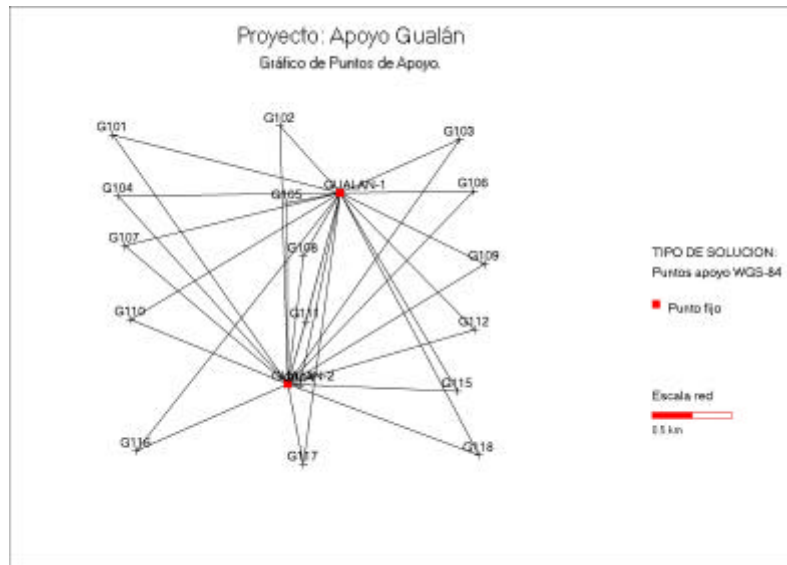


Gráfico X-1. Ejemplo de levantamiento de puntos de apoyo desde dos puntos fijos.

En este caso concreto de aplicación de redes GPS, en realidad no se tiene una única red, sino que se tienen varias redes independientes, un triángulo por cada uno de los puntos de apoyo observados. De este modo, un posible error en alguna de las líneas de un punto no debe afectar a la precisión en la determinación del resto de los puntos de apoyo.

Si todas las observaciones de puntos de apoyo levantados se introdujeran en un ajuste conjunto, el mecanismo mínimos cuadrados provocaría que los errores de las observaciones se repartieran, para que su efecto en un punto concreto fuera menor. En este caso, esto sería erróneo, puesto que el error en un punto no debe afectar al resto de los puntos; es preferible que los errores queden localizados en la estación afectada, reflejándose en su precisión, sin afectar a la precisión en el resto de las estaciones.

Para resolver este problema UCORed-GPS dispone de un módulo para el cálculo de puntos de apoyo, como procedimiento particular distinto al general de ajuste de una red en el sistema WGS-84. El mecanismo consiste en hacer ajustes independientes por cada uno de los puntos, ajustando todos y cada uno de los triángulos formados, pero de manera independiente, y aplicando el test chi-cuadrado para cada uno de ellos. De este



modo la precisión resultante para la posición de cada estación vendrá dada exclusivamente por la precisión de las líneas base en las que interviene, y por la precisión de las coordenadas de los puntos desde los que se levantan, considerándose bien puntos fijos o bien puntos fiduciales, con independencia de la precisión de las observaciones de otros puntos de apoyo.

La comparación de la precisión obtenida calculando los puntos de apoyo independientemente, o calculándolos en un ajuste conjunto se verá en la Aplicación Práctica I para trabajos de apoyo en Guatemala, y en la Aplicación Práctica II para trabajos de apoyo en Andalucía.

X.3.4.5. Obtención de coordenadas en el sistema local correspondiente.

Con el ajuste en el sistema WGS-84 se obtienen posiciones ajustas, muy precisas, en el sistema global, pero puede ocurrir que el sistema local no coincida con este sistema, como en el caso de España.

A la hora de referir los resultados de una red GPS observada al sistema local habrá que tener en cuenta la transformación que relaciona ambos sistemas, global y local. Esto se puede hacer siguiendo distintas alternativas implementadas en UCORed-GPS:

- Ajuste tridimensional local. Llevar a cabo un ajuste de la red en el sistema local, añadiendo al conjunto de incógnitas del ajuste parámetros de transformación correspondientes.
- Cálculo de parámetros locales de transformación. Calcular unos parámetros de transformación locales que relacionen el sistema global y el sistema local para la zona de trabajo, y posteriormente aplicarlos a las posiciones WGS-84 ajustadas.
- Transformación 2D + Transformación 1D.
- Transformación directa. A partir de la solución en el sistema global WGS-84, aplicar unos parámetros de transformación previamente conocidos.



X.3.4.5.1. Ajuste tridimensional local.

Esta primera alternativa consiste en plantear el ajuste mínimos cuadrados considerando como observaciones las líneas base observadas, y como incógnitas, las coordenadas de las estaciones en el sistema local.

El modelo matemático implementado para este ajuste es el desarrollado en la metodología, utilizando la transformación de Veis en términos diferenciales. El esquema correspondiente se muestra en el Diagrama X-5:

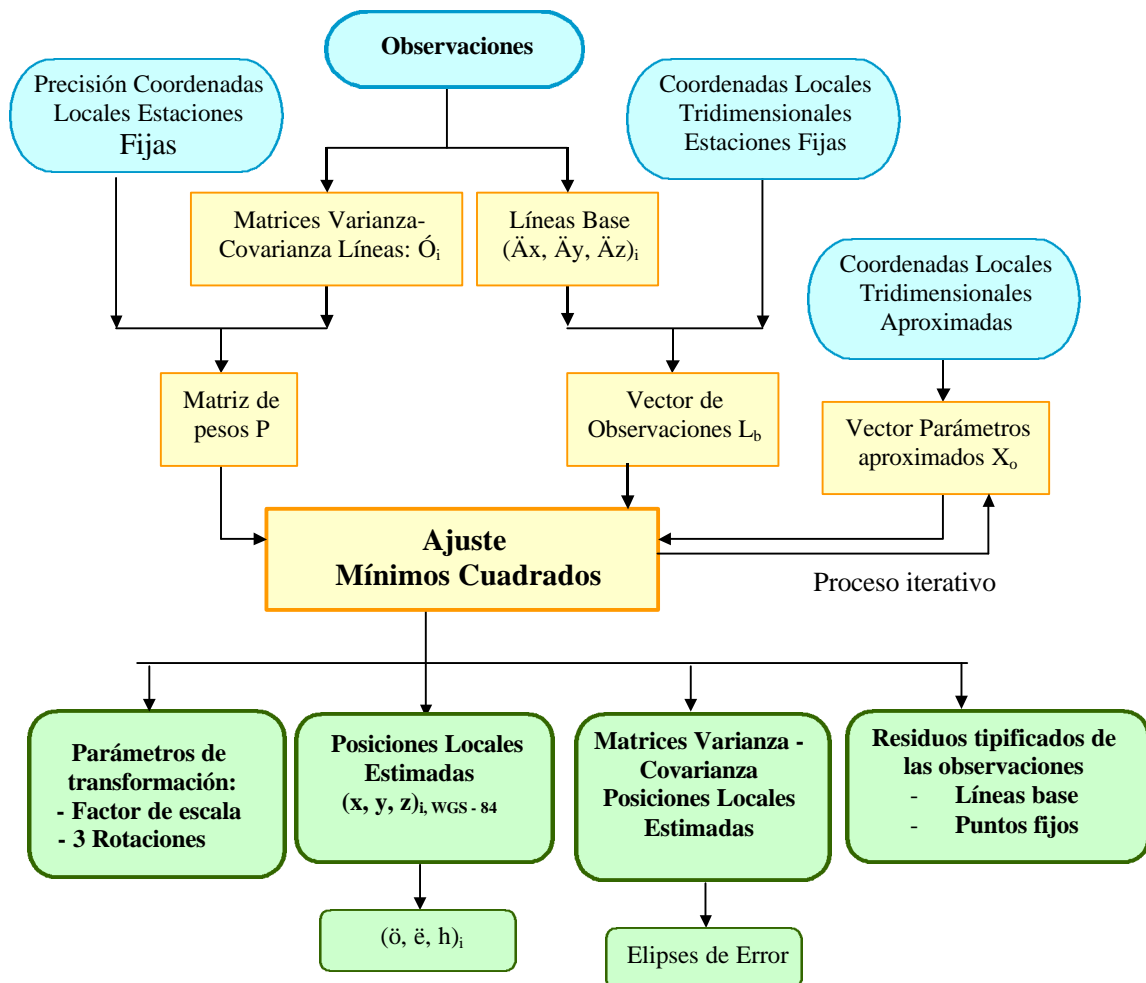


Diagrama X-5. Esquema Ajuste de la Red en el sistema Local.



A diferencia del modelo de ajuste en el sistema WGS-84, en este caso el modelo no es lineal por lo que se requiere un proceso iterativo para obtener la solución mínimos cuadrados.

Dicho proceso iterativo se muestra en el diagrama anterior. Todo proceso de ajuste necesita partir de una solución aproximada. Como coordenadas locales aproximadas se parte de las coordenadas WGS-84 de las estaciones (que está claro que están lejos de ser las correctas), a partir de las cuales se obtiene una solución mínimos cuadrados, que aunque no será la correcta, tiene menor error que la solución de partida. Estas coordenadas obtenidas en el ajuste se introducen como coordenadas aproximadas en un nuevo proceso mínimos cuadrados repitiéndose el bucle hasta que la solución converge. Dicho proceso iterativo lo hace UCORed-GPS de modo automático en el proceso de ajuste en el sistema local.

El criterio impuesto para considerar que el ajuste ha convergido es:

$$\left| (V^T PV)_i - (V^T PV)_{i-1} \right| < 10^{-6}$$

Ec. X-1

es decir, cuando la diferencia entre el valor que toma la suma de cuadrados los residuos ponderados por sus pesos (criterio mínimos cuadrados) respecto al ajuste anterior es menor de 10^{-6} . Se ha comprobado que con el valor 10^{-6} la diferencia en las coordenadas resultantes entre las últimas iteraciones no son significativas.

Por otro lado, para fijar el sistema de referencia local será necesario introducir en el ajuste las coordenadas conocidas de al menos tres estaciones. Mientras que en el ajuste WGS-84 sólo había que definir el origen del sistema de referencia, y para ello bastaba con una estación de coordenadas conocidas, en este caso habrá que definir también la orientación y el factor de escala entre ambos sistemas.



Igual que en la solución WGS-84, estas coordenadas se introducen en el ajuste como observaciones, considerándose aquí también el concepto de punto fijo o punto fiducial. Estas coordenadas conocidas se pueden introducir como coordenadas fijas, de varianza cero, o como puntos fiduciales con una determinada precisión dada por la desviación estándar de las respectivas componentes de posición.

Como resultado de este ajuste, se tienen:

- Coordenadas en el sistema local de las estaciones que forman la red, expresadas en coordenadas cartesianas, elipsoidales o planas en el sistema cartográfico correspondiente.
- 4 parámetros de transformación: tres rotaciones y un factor de escala.
- Precisión de las coordenadas obtenidas, expresadas como elipses planimétricas de error y desviación estándar altimétrica.
- Residuos de las observaciones asignados por la solución mínimos cuadrados.
- Residuos tipificados de las observaciones, expresados en componentes cartesianas y en componentes HGL.

A igual que el ajuste en el sistema WGS-84, los residuos tipificados de las coordenadas de las estaciones consideradas conocidas pueden servir para detectar posibles errores en dichas coordenadas.

De nuevo, hay que dar importancia al concepto de punto fiducial, pues residuos tipificados de valor elevado en las coordenadas de una estación querrán decir mayor probabilidad de error en esas coordenadas considerando la precisión dada a las mismas. Por ello, para intentar detectar posibles errores groseros en las coordenadas locales de un punto, será necesario disponer de información sobre la precisión estimada para estas posiciones.



En este ajuste resulta de especial utilidad evaluar estos residuos tipificados en términos de componentes HGL, pues de este modo se podrán diferenciar errores en componentes planimétricas y errores en componentes altimétricas. Esto es importante por el hecho de que tradicionalmente las posiciones planimétricas se han obtenido con métodos diferentes a los utilizados para las componentes altimétricas, y por tanto, de diferente precisión. Puede que una posición esté afectada de error bien en planimetría o bien en altimetría, de manera independiente.

X.3.4.5.2. Cálculo de los parámetros locales de transformación.

UCORed-GPS permite calcular parámetros de transformación que relacionen los sistemas global y local para una zona en concreto a partir de una red GPS observada. Así, una vez determinados estos parámetros, cualquier trabajo realizado en esta zona se puede referir al sistema local, nada más que aplicando estos parámetros de transformación.

Dichos parámetros son calculados a partir de la solución WGS-84 obtenida de una red, y de las coordenadas locales conocidas de al menos tres estaciones, a través de un ajuste mínimos cuadrados.

El modelo matemático utilizado para el ajuste es el que establece la transformación tridimensional de Helmert, siendo las incógnitas los siete parámetros de transformación entre los sistemas, y las observaciones, las coordenadas WGS-84 calculadas a través del ajuste y las coordenadas locales conocidas para un número de estaciones.

Como se vio en la metodología, los modelos de transformación de Molodensky-Badekas y de Veis permiten resolver posibles problemas de correlación entre los parámetros en áreas locales. El utilizar aquí el modelo de Helmert está justificado por facilitar su aplicación a trabajos posteriores con GPS en el mismo área, puesto que estos parámetros, a diferencia de los obtenidos para los otros dos modelos, no están referidos a un punto concreto de la red.



Estos parámetros son almacenados en un fichero *.p01, que podrá ser leído posteriormente para introducir parámetros de transformación en cualquier otro trabajo.

X.3.4.5.3. Transformación 2D + 1D.

Tanto en el ajuste en el sistema local, como a la hora de calcular parámetros de transformación tridimensionales, los modelos matemáticos utilizados son modelos geométrico y no físicos, por lo que las alturas que relacionan, en sentido riguroso, son alturas elipsoidales.

Una alternativa a la hora de obtener posiciones locales sin información del geoide, será descomponer el problema de posicionamiento en planimetría y altimetría, como se ha venido haciendo tradicionalmente.

Transformación 2D.

En UCORed-GPS se ha implementado un módulo de transformación planimétrica, que consiste en determinar los parámetros de una transformación bidimensional, entre coordenadas planas locales y coordenadas planas globales, obtenidas de aplicar la proyección cartográfica local.

El Diagrama X-6 muestra el esquema del proceso de cálculo y aplicación de los parámetros de la transformación de posiciones planas. Se ha implementado el método de transformaciones de posiciones planas en áreas locales, y no el método de transformación de posiciones elipsoidales, ambos vistos en la metodología. Los resultados que se obtienen con ambos métodos están en el mismo orden de precisión (Aguilera Ureña, M.J. 1997).

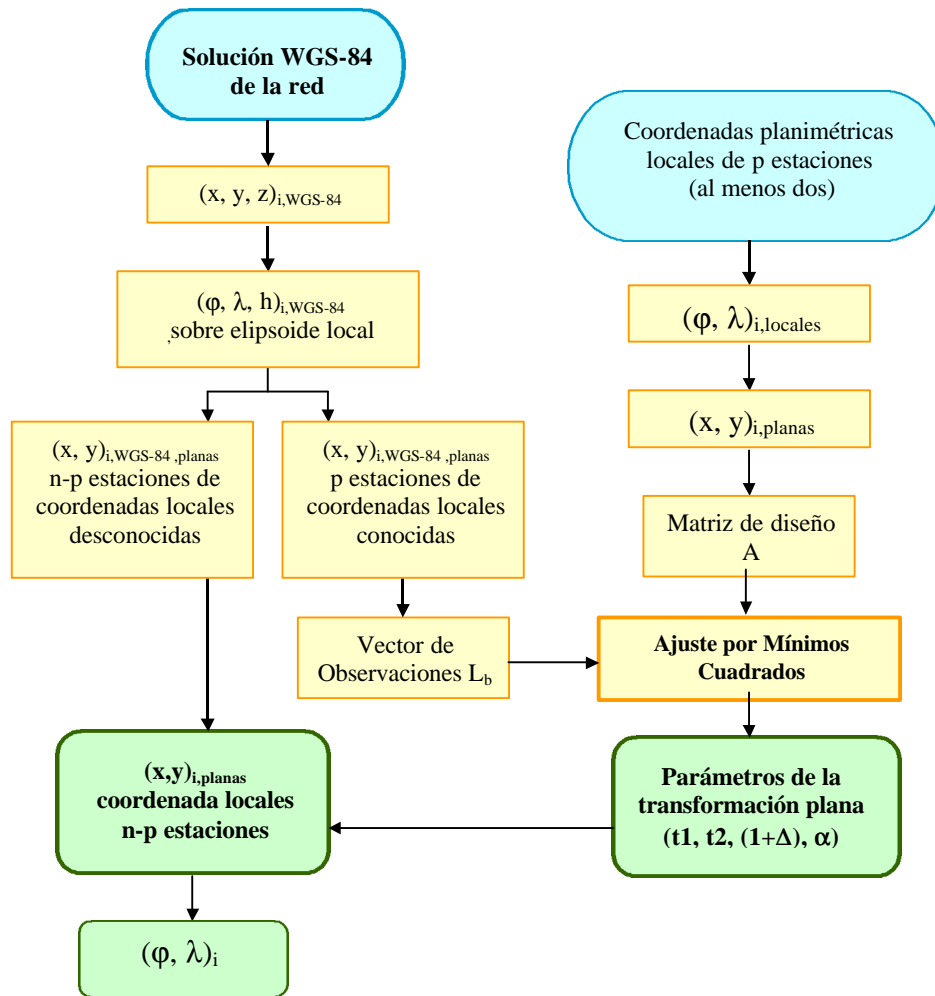


Diagrama X-6. Esquema Transformación plana.

Transformación 1D.

La transformación 1D plantea una transformación entre cotas elipsoidales WGS-84 y cotas ortométricas, a partir de las cotas ortométricas conocidas de algunas estaciones que forman el trabajo.

Esta transformación se plantea según dos modelos vistos en la metodología:



- Modelo lineal de transformación altimétrica, que relaciona alturas ortométricas y elipsoidales WGS-84 según tres parámetros (un desplazamiento y dos giros).
- Elipsoide paralelo al geoide. A partir de las cotas ortométricas de una o varias estaciones se calcula un valor de ondulación del geoide medio para la zona. Este modelo representa una simplificación del anterior, en el que las rotaciones son nulas.

Una vez calculados estos parámetros, se podrán aplicar al resto de los puntos que forman el trabajo, y quedarán almacenados en un fichero *.p02, que se podrá aplicar en trabajos posteriores.

X.3.4.5.4. Transformación directa.

Por último, UCORed-GPS, permite transformar los resultados WGS-84 de un trabajo, al sistema local, introduciendo directamente los siete parámetros de transformación que relacionan dichos sistemas.

Introducir parámetros de transformación

Incremento x (m) Rotacion eje x (°)

Incremento y (m) Rotacion eje y (°)

Incremento z (m) Rotacion eje z (°)

Factor de escala (1+Δ)

Solución a transformar

Solución fija WGS-84

Solución Puntos de Apoyo

Figura X-13. Ventana de introducción de 7 parámetros de transformación.

Estos parámetros se pueden introducir directamente desde teclado, o bien leyendo un fichero que contenga dichos parámetros (fichero *.p01), resultado de un cálculo previo por UCORed-GPS, dentro de este trabajo o en otro trabajo.



Así mismo, incorpora la transformación según varios métodos de transformación directos en España, como son:

- 3 parámetros de Molodensky
- 5 parámetros del IGN
- 7 parámetros del IGN.



XI. APLICACIÓN PRÁCTICA I. GEORREFERENCIACIÓN CON GPS EN GUATEMALA.

XI.1. Introducción.

Las observaciones GPS utilizadas en esta aplicación corresponden a las realizadas dentro del proyecto “Fotocontrol en los Departamentos de Chiquimula y Zacapa”, en Guatemala, adjudicado a la U.T.E Novotecní S.A. El objetivo de este proyecto es la producción de una base cartográfica por medios fotogramétricos para su utilización en el Establecimiento Catastral en los departamentos de Chiquimula y Zacapa, objetivo que se consigue con la obtención de una ortofotografía digital a escala 1:5.000 de un total de 600.000 Has cubriendo el territorio de los departamentos antes mencionados, a partir de un vuelo escala 1:20.000, y ortofotografías a escala 1:1.000 para las áreas urbanas de los municipios de Chiquimula, Esquipulas, Quetzaltepeque, Ipala, Zacapa, Estanzuela, Teculután, Cabañas y Gualán, a partir de vuelos a escala 1:5.000.



Figura XI-1. Mapa de localización de la Aplicación I.



Los puntos de apoyo necesarios para el proceso fotogramétrico son levantados con GPS, de modo que la presente aplicación estudia el cálculo de dichos puntos, así como el ajuste de las redes necesarias para densificar la Red Geodésica existente en Guatemala, y que sirvan de apoyo para el levantamiento de los correspondientes puntos de control. Los puntos de apoyo levantados se agrupan en dos bloques:

- Puntos de apoyo del vuelo alto, para la obtención de la Ortofotografía a escala 1:5.000 de los departamentos de Chiquimula (160 puntos levantados) y Zacapa (80 puntos levantados).
- Puntos de apoyo de los vuelos bajos, para la obtención de las Ortofotografías a escala 1:1.000 de los municipios de Chiquimula, Esquipulas, Quetzaltepeque, Ipala, Zacapa, Estanzuela, Teculután, Cabañas y Gualán.

XI.1.1. Precisiones exigidas.

Según el documento “Especificaciones Técnicas para la toma de Fotografía Aérea y Producción de Ortofotos del Territorio de Chiquimula y Zacapa”, los errores máximos admitidos en las coordenadas absolutas del control terrestre con GPS eran:

- Para las escala de fotografía aérea 1:20.000
 - Planimetría: ± 20 cm.
 - Altimetría: ± 40 cm.
- Para las escala de fotografía aérea 1:5.000
 - Planimetría: ± 5 cm.
 - Altimetría: ± 10 cm.

XI.1.2. Proyección y sistema geodésico de referencia.

Las especificaciones del Sistema Geodésico de Referencia, y del Sistema de Proyección (GTM) son las propuestas por el IGN de Guatemala según resolución normativa n° 01/99:

- Proyección: Transversa de Mercator (tipo Gauss Kruger) en una zona única local.



- Elipsoide: WGS84.
- Longitud de origen: $90^{\circ}30'$ (meridiano central de la proyección).
- Latitud de origen: 0° (el Ecuador).
- Unidades: Metros.
- Falso Norte: 500,000 metros en el meridiano central.
- Factor de escala en el meridiano central: 0.9998
- Numeración de las zonas: No está dentro de la numeración normal de zonas UTM. Se le puede llamar zona 15.5
- Límites de la latitud del sistema: No es aplicable en el Territorio Nacional.
- Límites de las zonas: No es aplicable en el Territorio Nacional.
- Nuevo sistema de referencia geodésico: WGS84 aumentado, basado en ITRF94 época 1997.5 parámetros del elipsoide: semieje mayor 6378137.0 metros, $1/f=298.257223563$.

XI.2. Red Básica.

La primera fase del trabajo para la obtención de las coordenadas de los puntos de apoyo necesarios para el control terrestre dentro del proyecto consiste en el diseño, observación y cálculo de una Red Básica, para la densificación del marco de referencia existente en el país, y que cubra los departamentos de Chiquimula y Zacapa, objeto del trabajo.

Dado el nivel de desarrollo del país, es comprensible la poca densidad que presenta la Red Geodésica nacional, además del mal estado en que se encuentra, como se reflejará en el transcurso del trabajo. Estudiando la Red Geodésica, en el entorno del área del trabajo se encuentran tan sólo cinco vértices que puedan servir para enlazar el trabajo con la estructura geodésica de Guatemala. Así, como objetivo adicional de este trabajo, con la observación y cálculo de la Red Básica se plantea conseguir una densificación de la Red Geodésica, a iniciativa del IGN de Guatemala, con la incorporación de nuevas estaciones, y la observación de estaciones materializadas en el terreno pero sin coordenadas fiables.



Por tanto, para cubrir este objetivo se tuvieron que tener en cuenta las Normas Técnicas de Levantamientos con Sistema de Posicionamiento Global (GPS) del IGN de Guatemala (IGN Guatemala, 2001), debiendo cumplir las especificaciones impuestas para los levantamientos de orden A encaminados a la densificación de la Red Geodésica, con precisiones relativas de 1:10.000.000, o 0.1 ppm, exigiendo la utilización de efemérides precisas.

Los vértices que formaron la Red Básica (Figura XI-2) son:

- Estaciones monumentadas geoposicionadas: ESTOR, LA TINTA, JICARO, ZACAPA y YUPILTEPEQUE.
- Estaciones monumentadas sin geoposicionar: DOÑA MARIA, CAPARJA, CHIQUIMULA, ESQUIPULAS, IPALA y MONJAS.
- Estaciones de nueva implantación: CHANMAGUA y GUIJA.

XI.2.1. Fase de Observación.

Los receptores GPS utilizados para la observación son 4 Receptores GPS geodésicos de doble frecuencia Leica:

- SR9500 N° Serie: 10364.
- SR399 N° Serie: 5168.
- SR399 N° Serie: 3144.
- SR399N° Serie: 544.

Para observar la red constituida por 13 estaciones, con los 4 equipos disponibles, de modo que entre dos sesiones consecutivas haya al menos una línea común, fueron necesarias 6 sesiones de observación (según Ec. III.1):

$$s = \frac{n - m}{r - m} = \frac{13 - 2}{4 - 2} = 5.5 = 6 \text{ sesiones}$$

Ec. XI-1



La Red Básica observada se puede ver en la Figura XI-2:

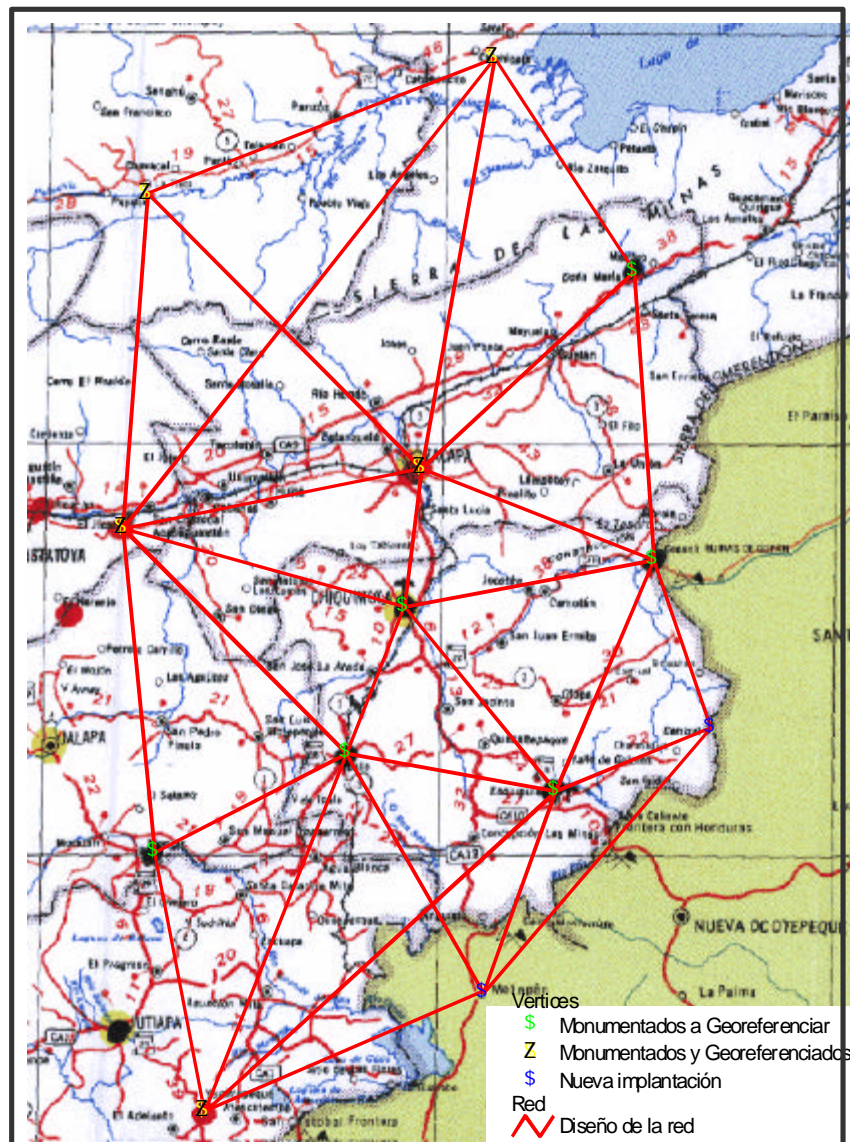


Figura XI-2 Red Básica Observada

Los parámetros que definen los requisitos de la observación fueron:

- Tiempo de observación: Entre 2 y 3 horas.
- N° de satélites: igual o superior a 4
- PDOP < 7



XI.2.2. Procesado de Líneas Base.

El procesado de las líneas base se ha realizado con el software AOS (Ashtech Office Suite), optimizando la resolución de las ambigüedades mediante el cambio del satélite de referencia, variando la máscara de elevación y desechando satélites o porciones de observación dentro de un satélite con información deficiente. Todo ello orientado a conseguir fijar la ambigüedad entera en todas las líneas base, obteniendo la óptima precisión en el procesado de las mismas.

Así mismo, para el procesado se han utilizado efemérides precisas, disponibles a través del IGS (International GPS Service): <ftp://igscb.jpl.nasa.gov/igscb/product>

XI.2.3. Ajuste y cálculo de la red.

El ajuste y cálculo de la Red Básica se ha realizado con el software desarrollado dentro del presente trabajo, UCORed-GPS. Para la validación previa de dicho software, se han comparado los resultados de posiciones y de precisión en el sistema WGS-84 obtenidos con el módulo de ajuste de redes incorporado en el software Ashtech Office Suite (AOS), utilizando en adelante UCORed-GPS por la capacidad adicional de adaptarse al sistema local GTM.

A partir de la información resultante del procesado de las líneas base observadas, para llegar a la solución ajustada de las posiciones de las estaciones correspondientes se ha llevado a cabo un proceso de cálculo y ajuste descompuesto en tres fases:

- Ajuste con constreñimiento interno de la red, con el fin de analizar la precisión de las observaciones de partida.
- Ajuste en el sistema global WGS-84, fijando el sistema con posiciones de la Red Geodésica, que vienen dadas en dicho sistema.
- Obtención de coordenadas locales, mediante una transformación de las coordenadas tridimensionales obtenidas en el ajuste en el sistema WGS-84 al sistema de proyección GTM, y transformación de alturas elipsoidales a alturas ortométricas.



XI.2.3.1. Ajuste con constreñimiento interno.

Como se ha visto en la metodología, en el ajuste de una red geodésica, es necesario llevar a cabo un ajuste previo con constreñimiento interno para comprobar la calidad de las observaciones. Esta comprobación, se lleva a cabo a través de dos test estadísticos:

- Test Chi-cuadrado sobre la varianza a priori.
- Test de Baarda de detección de errores groseros.

El valor de la varianza a posteriori de peso unidad obtenido de la solución con constreñimiento interno es 540, considerando la red formada por todas las líneas base observadas en campo. Es decir, para que los pesos asignados a las observaciones por el programa de procesado de líneas base sean coherentes con los resultados obtenidos en el ajuste mínimos cuadrados, tendríamos que introducir un factor de ponderación en la precisión de las líneas base en su conjunto de 540. Introduciendo este factor de ponderación, y reajustando, se obtiene una solución preliminar para dicho ajuste.

Como resultados de este ajuste se obtienen:

- Posiciones tridimensionales globales ajustadas, expresadas en coordenadas cartesianas.
- Precisión en dichas posiciones, expresadas en elipses de error planimétricas y desviación estándar altimétrica.
- Residuos de las observaciones.
- Residuos tipificados de las observaciones.

Las precisiones obtenidas para las posiciones relativas de las estaciones mediante este ajuste reflejan la calidad intrínseca de las líneas base observadas, independientemente del sistema de referencia elegido. Dichas precisiones se reflejan en el Gráfico XI-1, en forma de elipses de error planimétricas y desviación estándar altimétrica, cuyos valores oscilan entre 0.014-0.029 m en el semieje mayor de las elipses de error planimétrica y 0.064-0.203 para la desviación estándar altimétrica (Tabla XI-1).

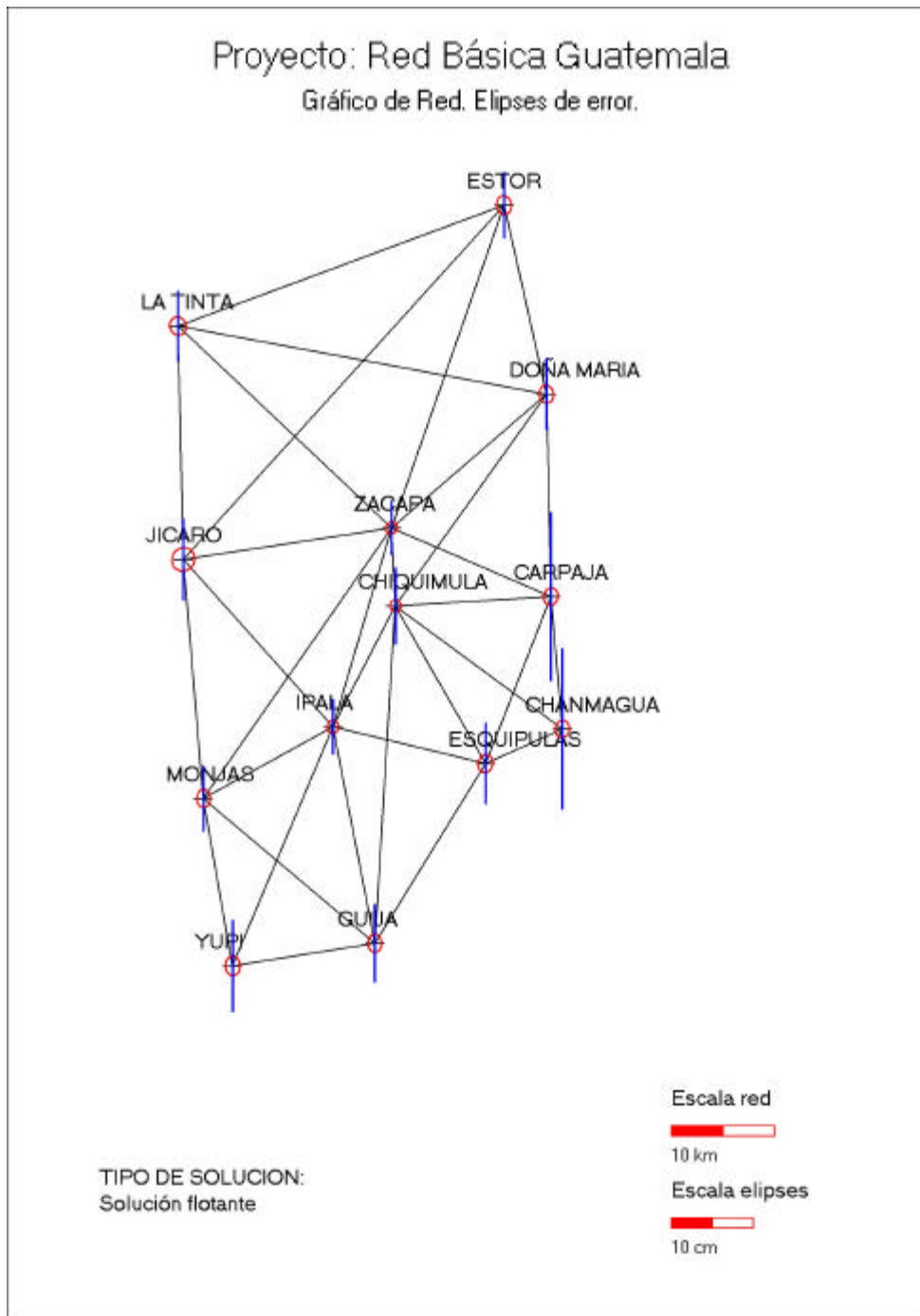


Gráfico XI-1 Elipses de error solución constreñimiento interno Red Básica Guatemala. Solución con todas las líneas base observadas.



Estación	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Orientación(°)	rms altimétrico(m)
JICARO	0,029	0,027	31,355	0,098
MONJAS	0,022	0,016	-0,938	0,079
IPALA	0,016	0,014	3,748	0,065
ZACAPA	0,015	0,013	28,105	0,064
GUIJA	0,022	0,016	-2,074	0,093
YUPI	0,024	0,018	-1,656	0,110
CHIQUMULA	0,015	0,013	-3,064	0,091
ESQUIPULAS	0,022	0,018	11,330	0,097
CHANMAGUA	0,021	0,017	6,819	0,194
CARPAJA	0,021	0,017	8,130	0,203
DOÑA MARIA	0,022	0,017	-5,316	0,085
LA TINTA	0,022	0,020	-22,100	0,084
ESTOR	0,023	0,018	-11,370	0,078

Tabla XI-1. Elipses de error y desviaciones estándar altimétrica Solución constreñimiento interno Red Básica Guatemala. Solución con todas las líneas base observadas

El test de Baarda de detección de errores groseros aplicado en este momento sobre los residuos tipificados (Tabla AI-1), considerando el número crítico de detección de errores groseros igual a 3.29 correspondiente con un nivel de confianza del 99.9%, indica la existencia de posibles errores groseros.

Este test nos muestra posibilidad de errores groseros en aquellas observaciones cuyo residuo tipificado supere un umbral dado, pero un error grosero, puede afectar al residuo tipificado de más de una observación. Es por ello que se deben eliminar las observaciones de una en una, reajustando y aplicando sucesivamente el test de Baarda.

Después de eliminar todos los errores groseros de manera sucesiva, la configuración de la red queda como se ve en la Gráfico XI-2, pudiéndose comprobar cómo las precisiones han mejorado (Tabla XI-2), pasando la máxima desviación estándar en altimetría de 20 cm a 5 cm.

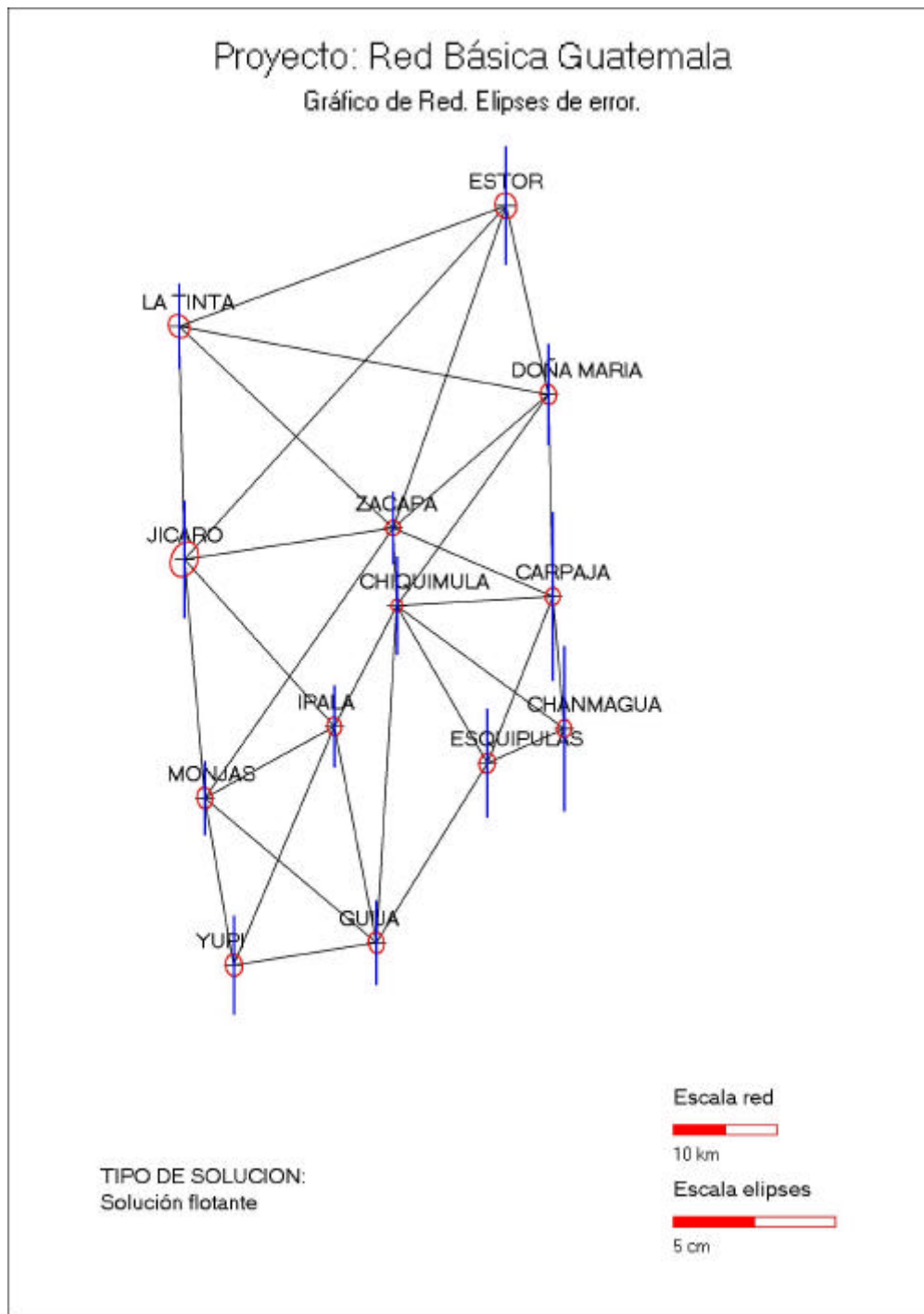


Gráfico XI-2 Elipses de error solución constreñimiento interno Red Basica Guatemala. Solución definitiva.



Estación	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Orientación(°)	rms altimétrico(m)
JICARO	0,011	0,008	22,241	0,036
MONJAS	0,007	0,005	-7,011	0,022
IPALA	0,006	0,004	-10,878	0,025
ZACAPA	0,005	0,004	8,984	0,022
GUIJA	0,006	0,005	-8,066	0,026
YUPI	0,007	0,005	-7,242	0,030
CHIQUMULA	0,004	0,004	-6,722	0,030
ESQUIPULAS	0,006	0,005	11,465	0,033
CHANMAGUA	0,005	0,004	4,854	0,051
CARPAJA	0,005	0,004	6,007	0,052
DOÑA MARIA	0,006	0,005	-10,671	0,031
LA TINTA	0,007	0,006	-33,489	0,026
ESTOR	0,008	0,007	-13,536	0,036

Tabla XI-2. Elipses de error y desviaciones estándar altimétrica Solución constreñimiento interno Red Básica Guatemala. Solución definitiva.

Respecto al test Chi-cuadrado, una vez eliminadas las observaciones erróneas, la varianza a posteriori de peso unidad se ha reducido de 540 a 32. Esto indica que, aun cuando las líneas base introducidas en el ajuste no son tan precisas como muestran los resultados de procesamiento de las mismas, el factor de ponderación que hay que introducir en el ajuste no es tan elevado como el obtenido en la solución preliminar. El hecho de la existencia de líneas erróneas mostraba de una manera falsa, baja precisión de las líneas base de manera global. Es por ello que el proceso de eliminación de errores groseros y la ponderación del peso de las mismas se debe hacer de manera iterativa.

Se **demuestra** con esto la utilidad que tiene el ajuste mínimos cuadrados de una red para detectar líneas base erróneas, líneas dadas que habían sido aceptadas en el procesamiento de línea base. La redundancia inherente al concepto de red es la que nos permite, una vez detectadas estas observaciones afectadas de errores groseros, poder eliminarlas sin que ello afecte a la resolución de la red, si bien además, se consigue aumentar la precisión estimada para las posiciones calculadas.



XI.2.3.2. Solución en el Sistema WGS-84.

Una vez que con el ajuste constreñimiento interno se han eliminado los errores groseros encontrados y se ha determinado la precisión relativa de las posiciones obtenidas para las estaciones que forman la red, independientemente del sistema de referencia, se puede pasar ya a encontrar la solución en el sistema WGS-84. Es decir, se pasa a enlazar la red GPS observada a la Red Geodésica del país, dada en el mismo sistema WGS-84.

Para dicho enlace, se lleva a cabo un ajuste de la red fijando las coordenadas WGS-84 de las estaciones pertenecientes a la Red Geodésica de Guatemala incluidas en la red:

- Júcaro
- Estor
- La Tinta
- Zacapa
- Yupiltepeque

XI.2.3.2.1. Concepto de puntos fijos.

Información adicional necesaria sería la precisión de estas coordenadas, pero como no se dispone de dicha información, se partió, como primera alternativa, introduciendo todos los puntos como puntos fijos. Las precisiones obtenidas fijando las coordenadas de las estaciones anteriores se muestran en la Tabla XI-3. Los resultados obtenidos, comparándolos con los obtenidos en la solución previa, hacen pensar en la existencia de errores en las coordenadas de dichos puntos.

Para el estudio de dichos errores, se vuelve a aplicar el test de Baarda de detección de errores groseros. Puesto que previamente a este ajuste se habían eliminado la líneas base erróneas mediante el ajuste con constreñimiento interno, se puede partir ahora de la hipótesis que cualquier error introducido en el ajuste en el sistema WGS-84 vendrá dado por coordenadas fijas erróneas.



Estación	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Orientación(°)	Rms altimetrico(m)	Tipo de punto
JICARO	----	----	----	----	Punto fijo
MONJAS	0,073	0,049	-1,721	0,299	
IPALA	0,066	0,046	-3,044	0,34	
ZACAPA	----	----	----	----	Punto fijo
GUIJA	0,073	0,049	-3,131	0,367	
YUPI	----	----	----	----	Punto fijo
CHIQUMULA	0,073	0,067	-9,38	0,561	
ESQUIPULAS	0,105	0,087	10,011	0,597	
CHANMAGUA	0,096	0,081	4,329	0,862	
CARPAJA	0,092	0,08	7,586	0,863	
DOÑA MARIA	0,071	0,051	-22,623	0,225	
LA TINTA	----	----	----	----	Punto fijo
ESTOR	----	----	----	----	Punto fijo

Tabla XI-3. Precisiones ajuste WGS-84 fijando las coordenadas de Zacapa, Jicaro, Yupiltepeque, Estor, La Tinta.

Estudiando los residuos tipificados (expresados en componentes NEH del sistema geodésico local en el punto) en las coordenadas introducidas como fijas en el ajuste, se puede observar efectivamente la existencia de errores groseros (Tabla XI-4), mostrándose el mayor residuo en la componente altimétrica del vértice Zacapa.

Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
JICARO	1,37	9,78	38,63
ZACAPA	10,69	12,99	110,38
YUPI	1,43	8,42	31,19
LA TINTA	8,36	34,49	74,18
ESTOR	4,67	30,80	12,70

Tabla XI-4. Residuos tipificados en componentes HGL. 5 vértices fijos.

Eliminando la estación Zacapa como vértice fijo en el ajuste, los nuevos residuos tipificados son los que se muestran en la Tabla XI-5. Se observa la gran reducción en el valor de los residuos tipificados al eliminar Zacapa como estación fija, demostrándose la existencia de errores en sus coordenadas.



Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
JICARO	1,28	7,16	2,05
YUPI	1,33	2,66	2,83
LA TINTA	0,99	30,51	8,14
ESTOR	3,47	39,39	7,04

Tabla XI-5. Residuos tipificados en componentes HGL. Sin Zacapa.

XI.2.3.2.2. Concepto de punto fiducial.

Sin embargo, los residuos tipificados que quedan al eliminar Zacapa aún no están por debajo del número crítico de detección de errores groseros (3.29 para un nivel de confianza del 99.9%); introduciendo sus coordenadas como fijas en el ajuste, se muestran como errores groseros.

Una alternativa es introducir el concepto de punto fiducial; es decir, no considerar estas coordenadas como fijas, sino como coordenadas conocidas con una determinada precisión, pues en efecto, estas coordenadas han tenido que ser calculadas por algún método geodésico con cierta precisión (ningún método geodésico está exento de error).

Diferenciando la precisión planimétrica y altimétrica de los puntos, ajustamos ahora fijando el sistema WGS-84 con las coordenadas de los 5 puntos menos Zacapa, y con una determinada precisión en estas coordenadas.

Como hipótesis de partida, partimos de 3 cm en la precisión de las componentes planimétricas y 6 cm en las componentes altimétricas, obteniendo los residuos tipificados de la Tabla XI-6. Aunque el valor de dichos residuos se ha reducido respecto a considerar los puntos fijos, siguen mostrando presencia de errores groseros. Esto quiere decir, que las precisiones de todos, o alguno de los puntos, son menores de las establecidas en la hipótesis.



Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
JICARO	0,38	4,32	0,02
YUPI	1,13	0,05	2,09
LA TINTA	1,60	4,31	3,58
ESTOR	3,08	8,65	5,38

Tabla XI-6 Residuos tipificados en componentes HGL. Puntos fiduciales con 3 cm precisión componentes planimétrica y 6 cm componentes altimétricas.

Reduciendo las precisiones de partida, a 4 cm en planimetría y 7 cm en altimetría, obtenemos los residuos tipificados que se muestran en la Tabla XI-7, que como se ve, son menores del número crítico de detección de errores groseros considerado (3.29), lo que nos lleva a la conclusión de que las precisiones consideradas son coherentes con las precisiones de las coordenadas conocidas para los cuatro vértices consideradas.

Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
JICARO	0,008	0,001	0,020
YUPI	0,013	0,003	0,037
LA TINTA	0,005	0,001	0,012
ESTOR	0,017	0,003	0,172

Tabla XI-7. Residuos tipificados en componentes HGL. Puntos fiduciales con 4 cm precisión componentes planimétrica y 7 cm componentes altimétricas.

Cabría pensar, que a igual que se ha hecho con Zacapa, eliminándolo, se podría encontrar otro punto de entre estos cuatro que sea de menor precisión que el resto.

Ajustando con la hipótesis de partida de 4 puntos fiduciales con precisiones de 3 cm en componentes planimétricas y 4 cm en componentes altimétricas, los residuos tipificados obtenidos son los que se muestran en la Tabla XI-8, que como se podía esperar, muestran la existencia de errores groseros para estas precisiones de partida.



Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
JICARO	0,28	4,31	0,33
YUPI	0,84	0,01	2,42
LA TINTA	1,45	4,30	5,25
ESTOR	2,64	8,59	7,45

Tabla XI-8. Residuos tipificados en componentes HGL. 4 Puntos fiduciales con 3 cm precisión componentes planimétrica y 4 cm componentes altimétricas.

Como la estación en la que los residuos tipificados son mayores es Estor, las coordenadas de esta estación se muestra como error grosero para estas precisiones, por lo que se podría eliminar como punto fijo en el ajuste, como se hizo con el vértice Zacapa.

Ajustando en el sistema WGS-84, fijando tan sólo Jicaro, La Tinta y Yupiltepeque, con precisiones de 3 cm en componentes planimétricas y 4 cm en componentes altimétricas, obtenemos los residuos tipificados de la Tabla XI-9, que como se ve, pasan el test de Baarda de detección de errores groseros. La precisión en las coordenadas de estas tres estaciones es coherente con las precisiones 3 cm en componentes planimétricas y 4 cm en componentes altimétricas (precisiones expresadas como rms), y para estas precisiones, las coordenadas del vértice Estor se pueden considerar erróneas.

Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
JICARO	0,21	0,22	0,85
YUPI	0,04	0,32	0,17
LA TINTA	0,16	0,08	0,66

Tabla XI-9 Residuos tipificados en componentes HGL. 3 Puntos fiduciales con 3 cm precisión componentes planimétrica y 4 cm componentes altimétricas.

Las precisiones obtenidas para el resto de estaciones de la red, en este último ajuste, se muestran, gráficamente en el Gráfico XI-3 y numéricamente en la Tabla XI-10.

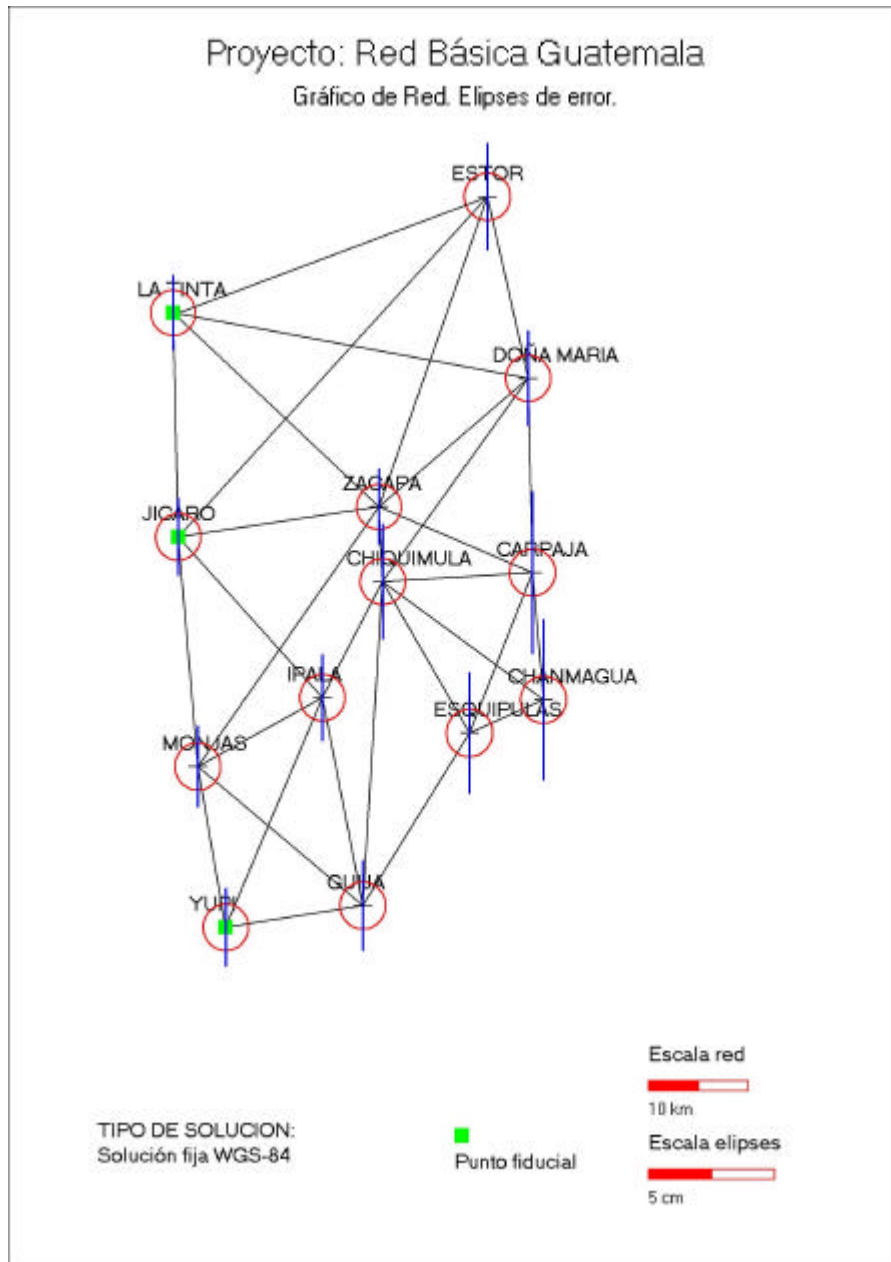


Gráfico XI-3. Precisiones ajuste WGS-84 fijando las coordenadas de Jicaro, Yupiltepeque, La Tinta como puntos fiduciales de precisión $rms=3$ cm componentes planimétricas y 4 cm en componentes altimétricas.



Estación	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Orientación(°)	rms altimétrico(m)
JICARO	0,019	0,018	18,645	0,030
MONJAS	0,019	0,018	-2,651	0,032
IPALA	0,018	0,018	-2,909	0,034
ZACAPA	0,018	0,018	14,186	0,030
GUIJA	0,019	0,018	-3,267	0,035
YUPI	0,018	0,018	-2,444	0,030
CHIQUIMULA	0,018	0,018	4,505	0,045
ESQUIPULAS	0,019	0,018	11,159	0,047
CHANMAGUA	0,019	0,018	6,580	0,063
CARPAJA	0,019	0,018	8,062	0,064
DOÑA MARIA	0,018	0,018	-5,115	0,037
LA TINTA	0,018	0,018	-7,938	0,029
ESTOR	0,019	0,018	-4,877	0,042

Tabla XI-10 Precisiones ajuste WGS-84 fijando las coordenadas de Jicaro, Yupiltepeque, La Tinta como puntos fiduciales de precisión rms=3 cm componentes planimétricas y 4 cm en componentes altimétricas.

Con esto queda demostrada la utilidad de realizar un test de detección de errores groseros en las coordenadas de los puntos considerados como fijos dentro de la red, y la importancia del concepto de punto fiducial. La precisión real de las coordenadas de una estación que introduzcamos como conocida en el ajuste, será aquella para las que después del proceso, el ajuste no muestre errores groseros en las mismas.

Como una conclusión de este trabajo, el test de Baarda utilizado sobre los residuos de las coordenadas WGS-84 consideradas como fijas dentro de una ajuste, se propone como una herramienta válida para la detección de posibles errores en dichas coordenadas.

La solución final adoptada para la Red Básica ha descartado por tanto dos estaciones de coordenadas conocidas, pertenecientes a la Red Geodésica nacional. Esta decisión ha tenido que ser justificada, estudiando los posibles errores encontrados en las coordenadas, tomando una decisión en consenso con el IGN de Guatemala.



En primer lugar, después del ajuste definitivo de la Red, las coordenadas ajustadas del vértice Zacapa muestran un error de más de dos metros respecto a las coordenadas proporcionadas por el IGN, lo que demuestra claramente el error existente. Respecto a la localización del vértice en el terreno, la construcción de una carretera en las inmediaciones se puede hacer pensar que este vértice haya sido destruido, y vuelto a colocar en el terreno, variando su posición. Dado el estado en el que se encuentra la Red Geodésica de Guatemala, con señales pequeñas y poco estables (Figura XI-3 y Figura XI-4) y con un gran número de señales desaparecidas, no se puede descartar ésta como una posibilidad.



Figura XI-3. Ejemplo de observación GPS en estación de la Red Geodésica de Guatemala.



Figura XI-4. Detalle de vértice Red Geodésica Guatemala.

Otra cuestión que hay que tener en cuenta es que el cálculo de la Red Geodésica existente se realizó ajustando un bloque norte de manera independiente al bloque sur.



Esto puede justificar la poca coherencia del vértice eliminado Estor. Otra situación a tener en cuenta es la fuerte orografía de la zona norte, siendo una zona de posible actividad tectónica con un terremoto sufrido recientemente. Como se ve en la Figura XI-2, la Sierra de las Minas separa el vértice Estor del resto de la Red, lo que puede justificar la peor precisión presentada por este vértice.

XI.2.3.3. Solución local.

El último paso en el proceso de obtención de las coordenadas de las estaciones que forman la Red Básica será obtener las coordenadas expresadas en el sistema local, coordenadas locales planas y coordenadas locales altimétricas.

XI.2.3.3.1. Coordenadas locales planimétricas.

Como se ha descrito en el apartado XI.1.2, las coordenadas locales planimétricas serán las coordenadas obtenidas de aplicar la proyección cartográfica GTM a las coordenadas tridimensionales obtenidas sobre el elipsoide global WGS-84.

La proyección cartográfica GTM es un caso particular de proyección Transversa de Mercator, con dos diferencias respecto a la proyección UTM:

- Huso = 15.5.
- El factor de escala = 0.9998.

La herramienta UCORed-GPS tiene la capacidad de adaptarse a este sistema cartográfico, modificando el huso y el factor de escala respecto a la proyección convencional UTM. Así, las coordenadas planas GTM se han obtenido directamente como resultado del ajuste en el sistema WGS-84.

XI.2.3.3.2. Coordenadas locales altimétricas.

Las coordenadas altimétricas locales son alturas ortométricas, es decir, alturas sobre el geoide. La solución adoptada para obtener solución local altimétrica a partir de las



coordenadas ajustadas WGS-84, sin disponer de un modelo de geoide para la zona, ha sido realizar una transformación lineal a partir de las coordenadas ortométricas conocidas de cinco estaciones de la red:

- Jicaro
- Yupiltepeque
- Chiquimula
- Esquipulas
- Doña María

Si estos parámetros obtenidos para la transformación lineal, los aplicamos para obtener cotas ortométricas de las cinco estaciones anteriores a partir de las coordenadas elipsoidales WGS-84 obtenidas en el ajuste, los errores que se obtienen son los siguientes:

Estación	Jicaro	Yupiltepeque	Chiquimula	Esquipulas	Doña María
Error altura ortométrica (m)	0.55	-0.71	-0.26	0.80	-0.58

Tabla XI-11. Errores cometidos de aplicar los parámetros de la transformación lineal altimétrica en los cinco puntos de alturas ortométricas conocidas.

Estos grandes errores nos muestran la irregularidad del geoide en la zona, y la baja precisión por tanto de esta solución. Sin embargo, ante la no existencia de un modelo de geoide en la zona de trabajo, se plantea como la única alternativa para obtener cotas ortométricas partiendo de posiciones elipsoidales. Esta alternativa, sin embargo, habrá que cuestionársela a la hora de obtener cotas ortométricas de los puntos de apoyo.

XI.2.4. Redes de Segundo Orden.

Para el levantamiento de los puntos de control de los vuelos bajos, no es suficiente las estaciones de la Red Básica establecida en el terreno, dada las grandes distancias de sus líneas base (máxima longitud: 92 km, longitud media: 38 Km), y dadas las altas



precisiones exigidas para los correspondientes puntos de apoyo (error de 5 cm en planimetría y 10 cm en altimetría):

El problema se resuelve observando y calculando redes de segundo orden, apoyadas en vértices de la Red Básica calculada, que proporcionen puntos cercanos a las correspondientes zonas de los vuelos bajos. Estas redes de segundo orden suponen una densificación de la Red Básica en la zona de trabajo, estaciones que se utilizarán posteriormente para levantar los puntos de apoyo correspondientes.

Las condiciones de observación y cálculo de las líneas bases observadas son similares a las correspondientes de la Red Básica. La duración de las observaciones se ha reducido dada la menor longitud de las líneas base, con observaciones en torno a una hora de duración.

A modo de ejemplo se verá el proceso de cálculo seguido en la red de segundo Orden Cabañas-Teculután.

XI.2.4.1. Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután.

Para levantar los puntos de apoyo correspondientes a los vuelos bajos en los municipios de Cabañas y Teculután, se plantea la necesidad de una red de segundo orden a partir de las estaciones de la Red Básica. Apoyándose en los vértices de la Red Básica más cercanos (Jicaró y Zacapa) se observa y calcula una red en la que se incluyen las estaciones:

- Palmilla
- Teculután
- Cabañas
- Estanzuela

La red observada se muestra en Gráfico XI-4 y Figura XI-5, con una longitud máxima de línea base de 35 km, y una longitud media de 15 km.



El proceso seguido para dicha resolución es similar al seguido en la Red Básica y se muestra a continuación.

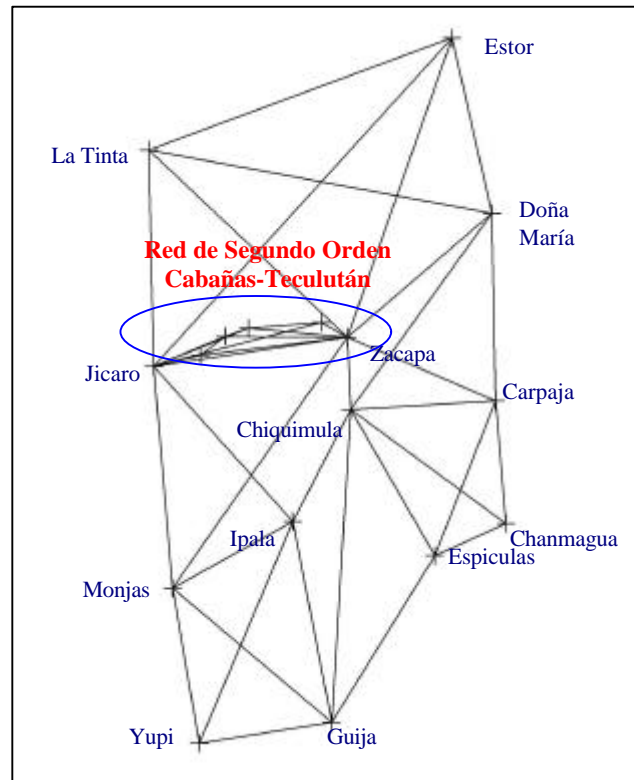


Gráfico XI-4. Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután dentro de la Red Básica.

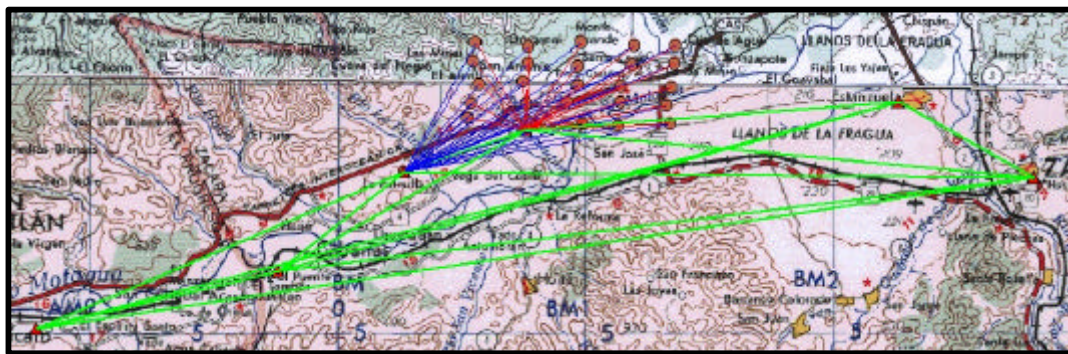


Figura XI-5 Gráfico de la Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután, sobre cartografía 1:100.000 de Guatemala. Puntos de apoyo del vuelo bajo del municipio de Cabañas.



XI.2.4.1.1. Solución con constreñimiento interno.

A igual que se ha hecho en la Red Básica, el primer paso en la resolución de las redes de segundo orden es también hacer un estudio de la calidad de las observaciones a través del ajuste con constreñimiento interno, con el test chi-cuadrado y el test de Baarda. La Tabla XI-12 muestra las precisiones obtenidas en el ajuste, previamente a la eliminación de las posibles observaciones erróneas, y después de su eliminación. Se puede observar el aumento de precisión tras la eliminación de las observaciones erróneas. Estas precisiones se muestran en los Gráfico XI-5 y Gráfico XI-6.

Estación	Con errores groseros			Sin errores groseros		
	Precisión Planimétrica		Precisión Altimétrica	Precisión Planimétrica		Precisión Altimétrica
	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Rms altimetrico(m)	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Rms altimetrico(m)
TECULUTAN	0,014	0,011	0,038	0,011	0,01	0,029
PALMILLA	0,014	0,011	0,036	0,011	0,01	0,024
CABANAS	0,015	0,013	0,049	0,011	0,01	0,027
JICARO	0,036	0,026	0,067	0,019	0,013	0,034
ZACAPA	0,025	0,022	0,052	0,016	0,012	0,031
ESTANZUELA	0,026	0,017	0,055	0,023	0,016	0,045

Tabla XI-12. Comparación precisión solución constreñimiento interno antes y después de eliminación de errores groseros.

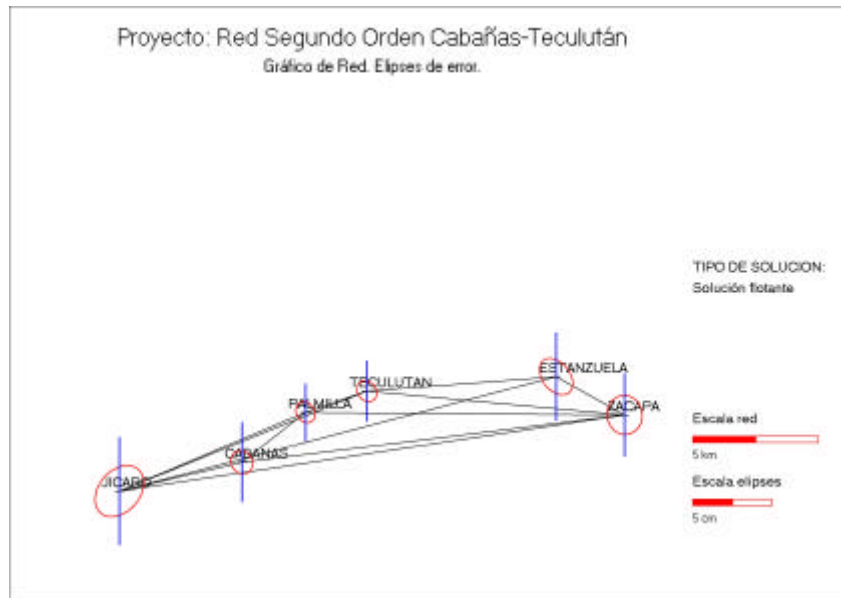


Gráfico XI-5. Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután. Solución constreñimiento interno. Antes de eliminación de errores groseros.

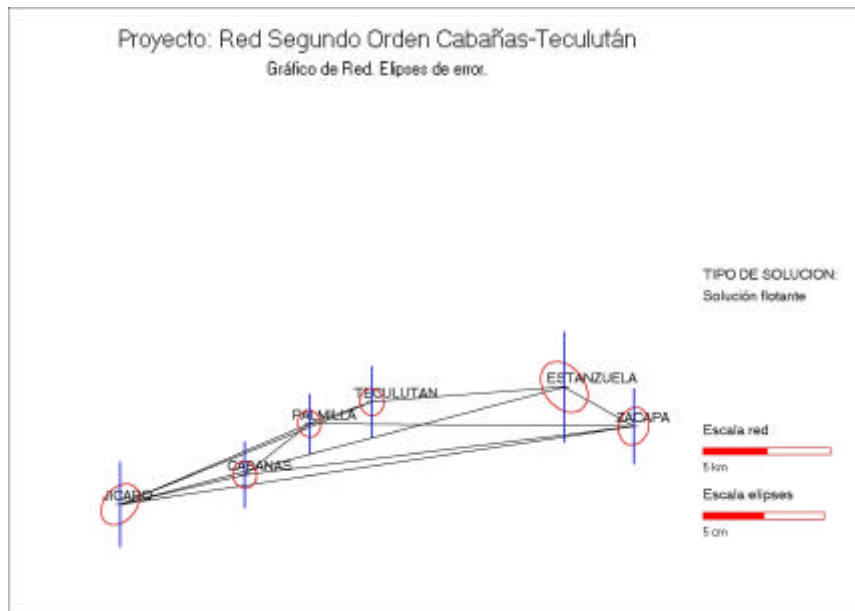


Gráfico XI-6. Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután. Solución constreñimiento interno. Sin errores groseros.



En el proceso de detección y eliminación de errores groseros seguido en el ajuste de esta red, se puede apreciar lo importante que es ir eliminando las observaciones de una en una, y no en un paso todas las que el test de Baarda destaque como posibles errores groseros.

Así, ajustando la red con todas las observaciones, los residuos tipificados obtenidos son los que se presentan en la Tabla AI-2 del Anexo I. En la tabla se puede apreciar que el test destaca dos observaciones como posibles errores groseros:

1. Línea base Teculután-Estánzuela
2. Línea base Cabañas-Zacapa.

Eliminando la primera de las líneas anteriores, que es la que presenta mayor residuo tipificado, y volviendo a ajustar, la tabla de residuos tipificados que se obtiene es la mostrada en la Tabla AI.2. Esta tabla muestra dos líneas base afectadas de posibles errores groseros:

1. Línea base Teculután-Zacapa
2. Línea base Cabañas- Zacapa.

Eliminando la línea de mayor residuo tipificado, ahora la línea Teculután-Zacapa, el nuevo ajuste no muestra existencia de errores groseros. Es decir, la línea Cabañas-Zacapa, que en el primer ajuste se mostraba como posiblemente afectada de errores groseros, no ha sido eliminada del ajuste. Esto es debido a que se veía afectada por los errores groseros de las otras dos líneas que si se han eliminado.

Así, como conclusión, si se hubieran eliminado en un único paso las dos líneas que el test de Baarda mostraba con residuos tipificados mayores del número crítico, habríamos eliminado una línea que realmente no contiene error grosero.



XI.2.4.1.2. Solución WGS-84.

El siguiente paso en la resolución de esta Red de Segundo Orden, será fijar el sistema de referencia. Como las redes de Segundo Orden observadas están apoyadas en la Red Básica, las estaciones de la Red Básica servirán para fijar el sistema de referencia.

Surgen aquí de nuevo las dos alternativas:

- Fijar el sistema de referencia con puntos fijos.
- Fijar el sistema de referencia con puntos fiduciales.

En la Tabla XI-13 se muestra una comparación de las precisiones obtenidas con ambas alternativas, y gráficamente en los Gráfico XI-7 y Gráfico XI-8.

Estación	Puntos fijos			Puntos con precisión		
	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	rms altimetrico(m)	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	rms altimetrico(m)
TECULUTAN	0,041	0,032	0,092	0,034	0,032	0,069
PALMILLA	0,04	0,031	0,083	0,034	0,032	0,064
CABANAS	0,045	0,031	0,083	0,034	0,032	0,064
JICARO	----	----	----	0,025	0,024	0,043
ZACAPA	----	----	----	0,025	0,024	0,043
ESTANZUELA	0,052	0,028	0,100	0,041	0,03	0,075

Tabla XI-13 Comparación precisiones ajuste WGS-84 Red Segundo Orden Cabañas-Teculután, con puntos fijos y con puntos fiduciales.

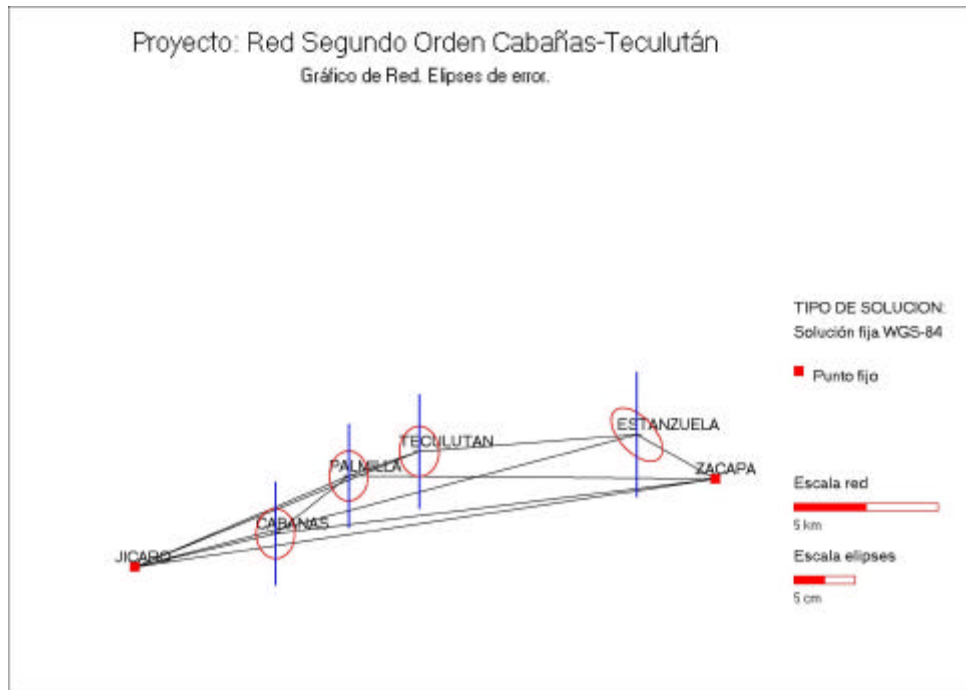


Gráfico XI-7 Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután. Solución WGS-84. Puntos fijos.

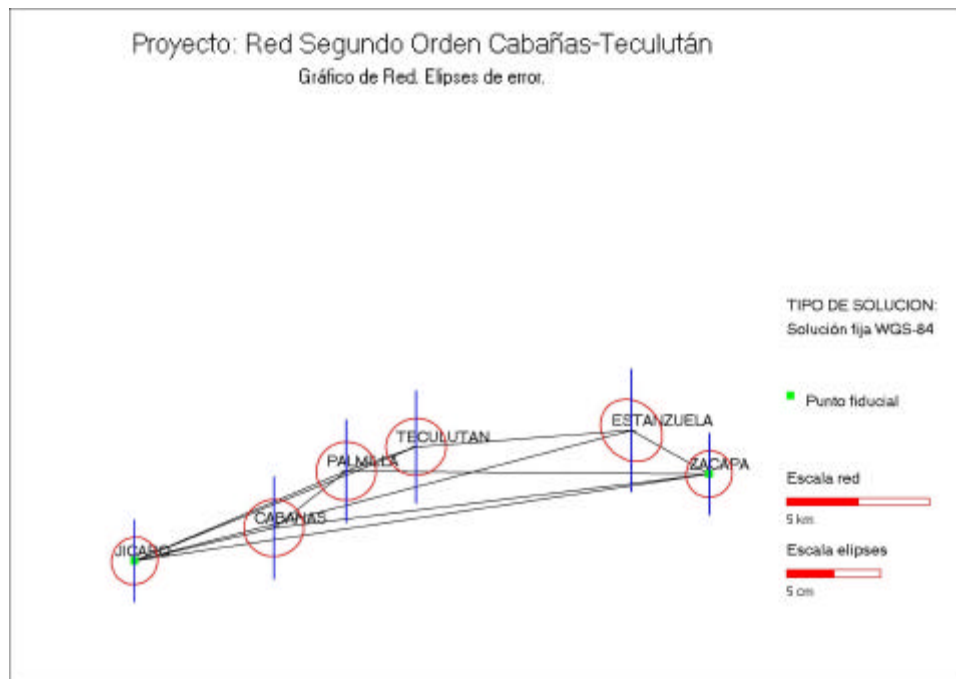


Gráfico XI-8. Red de Segundo Orden Cabañas-Teculután. Solución WGS-84. Puntos fiduciales.



Por otro lado, los residuos tipificados de las observaciones de puntos fijos (Tabla XI-14), indican la existencia de errores groseros, mientras que los residuos tipificados correspondientes a la solución con puntos fiduciales (Tabla XI-15), no muestra existencia de errores groseros.

Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
JICARO	0,336	8,975	3,683
ZACAPA	0,312	8,986	3,560

Tabla XI-14. Residuos tipificados observaciones puntos fijos.

Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
JICARO	0,938	2,995	2,583
ZACAPA	0,950	3,141	2,620

Tabla XI-15. Residuos tipificados observaciones puntos fiduciales.

Esto muestra nuevamente la importancia de utilizar el concepto de punto fiducial, para obtener una estimación certera de la precisión de los resultados de un ajuste.

XI.2.4.1.3. Solución local.

El último paso en la resolución de las redes de segundo orden será obtener coordenadas locales. Como se ha visto en la Red Básica, las coordenadas locales planimétricas se obtienen directamente aplicando la proyección cartográfica GTM a las coordenadas tridimensionales obtenidas en el ajuste WGS-84.

El problema surge con la solución altimétrica, dados los grandes errores que se han obtenido en la Red Básica al aplicar una transformación lineal altimétrica con cinco vértices de coordenadas ortométricas conocidas.

La solución adoptada ha consistido en considerar un modelo de geoide paralelo al elipsoide WGS-84 en cada área local correspondiente a una red de segundo orden, y en consecuencia también para los puntos de apoyo levantados desde cada red. La



separación entre el elipsoide y el geoide se ha calculado a partir del vértice o los vértices de altura ortométrica conocida dentro de la zona. Esto se puede hacer por considerar que en un área local, las irregularidades del geoide son pequeñas, y ante la no disponibilidad de un modelo de geoide preciso para la zona.

XI.2.5. Resolución de puntos de apoyo.

Para el cálculo de puntos de apoyo se ha empleado el módulo de cálculo de puntos de apoyo incorporado en UCORed-GPS. La necesidad de este módulo se planteó cuando se trataron apoyos concretos, en los que se encontraron observaciones de calidades heterogéneas.

Los puntos de apoyo, por especificaciones técnicas, se han levantado desde al menos dos estaciones, por lo que para la resolución de los mismos es necesario un proceso de ajuste.

Se han calculado los apoyos que se muestran en las figuras siguientes, y a modo de ejemplo, se desarrolla el proceso de cálculo seguido en el apoyo de Gualán.

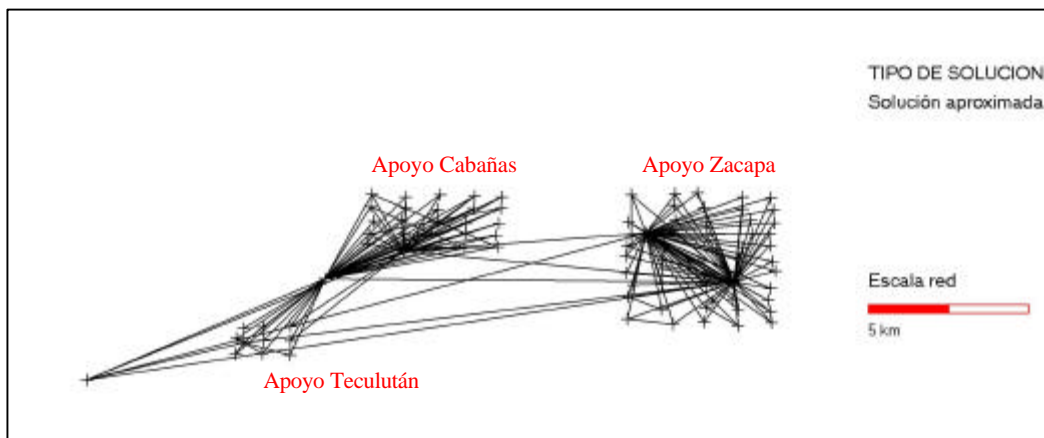


Gráfico XI-9. Apoyos Zacapa, Cabañas y Teculután.

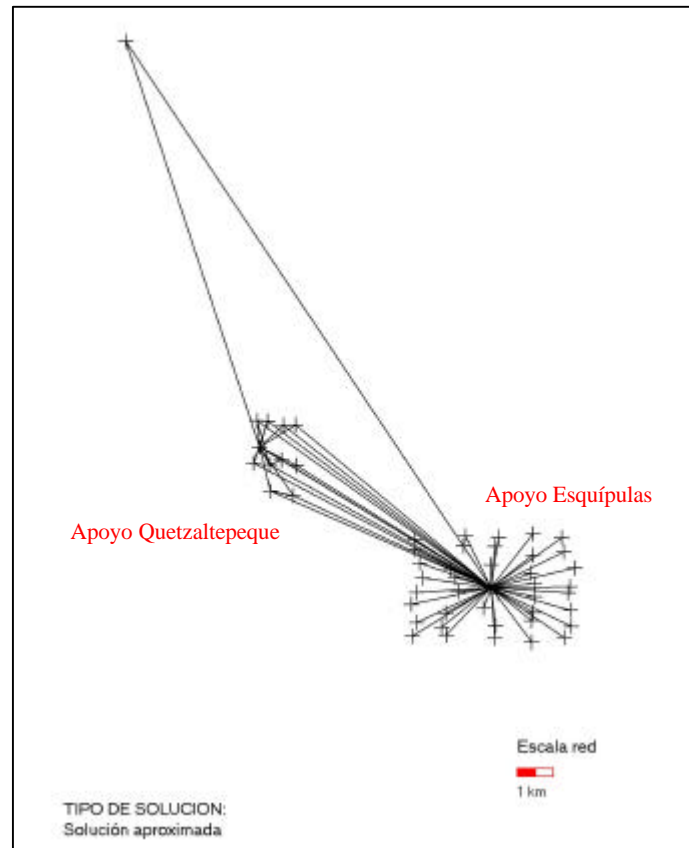


Gráfico XI-10. Apoyos Esquípulas y Quetzaltepeque.

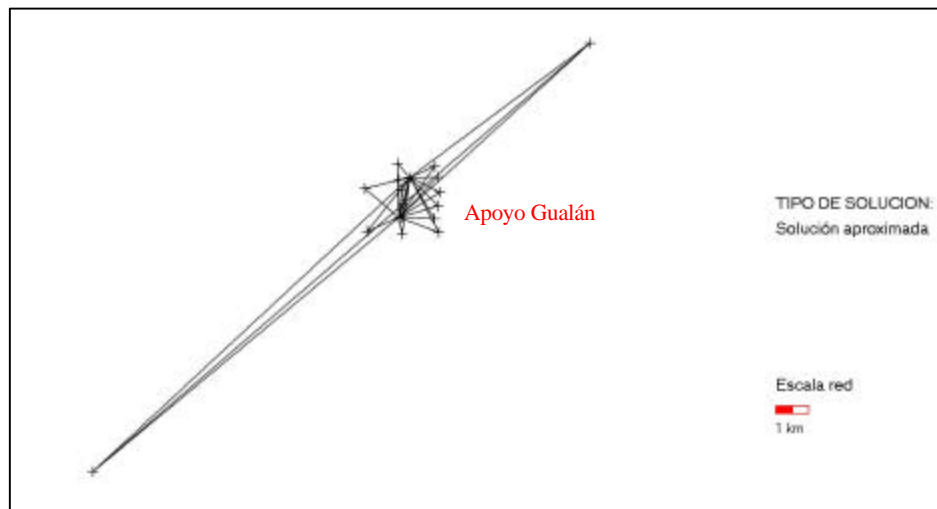


Gráfico XI-11 Apoyo Gualán.

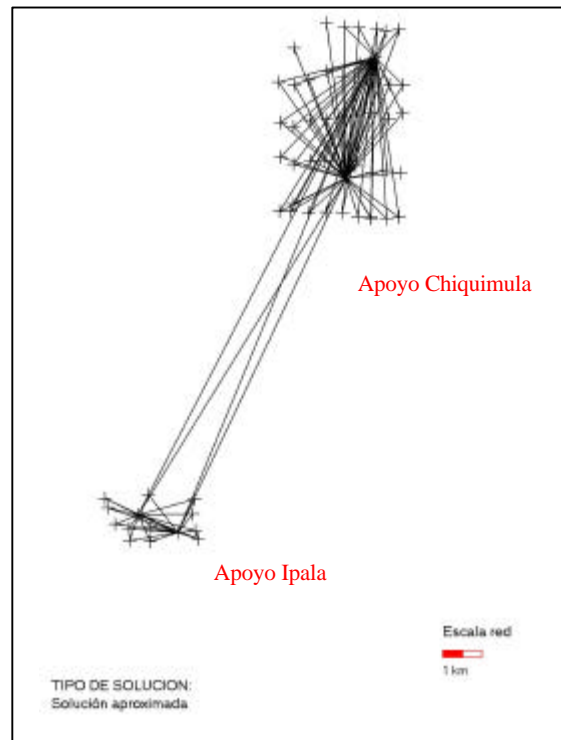


Gráfico XI-12 Apoyos Chiquimula e Ipala.

XI.2.5.1. Apoyo Gualán.

Para este caso concreto, se analizará las diferentes precisiones obtenidas resolviendo los puntos de apoyo con un ajuste en el sistema WGS-84 o resolviéndolos con la metodología propuesta para Puntos de Apoyo.

En los gráficos siguientes (Gráfico XI-13 y Gráfico XI-14) se muestra la representación gráfica de las precisiones en las coordenadas obtenidas según las dos metodologías, precisiones que se muestran numéricamente en la Tabla XI-16.

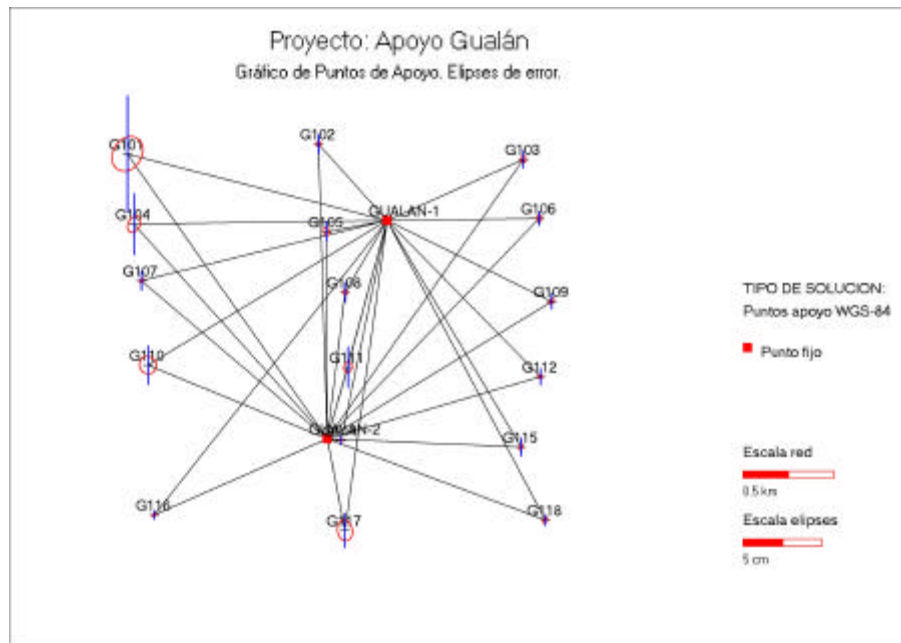


Gráfico XI-13. Elipses de error Puntos Apoyo Gualán. Solución Puntos de Apoyo.

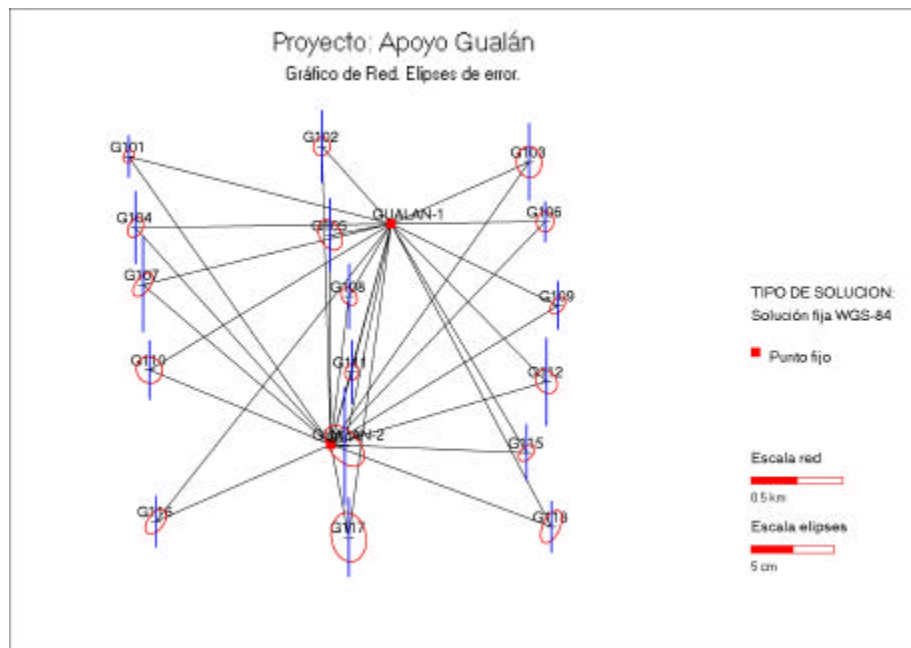


Gráfico XI-14. Elipses de error Puntos Apoyo Gualán. Solución Ajuste WGS-84.



Estación	Solución Puntos de Apoyo			Solución Ajuste WGS-84		
	Precisión planimétrica		Precisión altimétrica	Precisión planimétrica		Precisión altimétrica
	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Rms altimetrico(m)	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Rms altimetrico(m)
G101	0,023	0,018	0,072	0,008	0,006	0,025
G102	0,003	0,003	0,012	0,011	0,010	0,043
G103	0,004	0,003	0,011	0,019	0,015	0,046
G104	0,011	0,007	0,038	0,013	0,008	0,043
G105	0,005	0,004	0,012	0,019	0,013	0,043
G106	0,004	0,004	0,008	0,012	0,010	0,024
G107	0,003	0,002	0,011	0,016	0,009	0,056
G108	0,004	0,003	0,012	0,012	0,008	0,039
G109	0,004	0,002	0,010	0,012	0,007	0,028
G110	0,011	0,010	0,024	0,016	0,015	0,035
G111	0,007	0,005	0,025	0,010	0,008	0,038
G112	0,003	0,002	0,010	0,015	0,012	0,052
G114	0,002	0,001	0,005	0,029	0,017	0,070
G115	0,004	0,002	0,011	0,012	0,007	0,033
G116	0,003	0,002	0,005	0,017	0,010	0,030
G117	0,013	0,009	0,021	0,029	0,021	0,047
G118	0,005	0,002	0,007	0,021	0,010	0,030

Tabla XI-16. Comparación de precisiones obtenidas con solución WGS-84 y solución Puntos de Apoyo. Apoyo Gualán.

Se puede apreciar, como resultado de aplicar la metodología de cálculo de Puntos de Apoyo, que hay una estación (punto de apoyo G101), de precisión significativamente inferior al resto. La menor precisión de este punto también se puede explicar por el hecho de que haciendo un ajuste con constreñimiento interno, las dos líneas base asociadas a esta estación se muestran como posibles errores groseros (Tabla XI-17). Igualmente, de estos residuos tipificados, se puede observar que el error en la línea o líneas base, viene dado por un error en la componente x.



Línea base desde	Línea base hasta	Residuo tipificado x	Residuo tipificado y	Residuo tipificado z
GUALAN-2	G101	5,370	0,172	0,324
G101	GUALAN-1	5,369	0,19	0,313

Tabla XI-17. Residuos tipificados líneas base asociadas a punto de apoyo G101.

Si la resolución de estos puntos de apoyo se lleva a cabo en un ajuste WGS-84 sin eliminar las observaciones del punto G101 aunque se muestren como posibles errores groseros, las precisiones que se obtiene en este ajuste son las que se reflejan en el Gráfico XI-14. Se ve cómo la precisión de todos los puntos disminuye respecto a las precisiones estimadas con la solución de Puntos de Apoyo, y cómo además, el punto erróneo no es ni siquiera el que presenta mayor error. Con este ajuste, lo que se ha hecho es distribuir los errores a lo largo de la red, de modo que el efecto de este error sea menor para todos.

Este hecho demuestra la importancia y necesidad de llevar a cabo un previo proceso de detección y eliminación de errores groseros antes de ajustar en el sistema de referencia global o local, pues los errores groseros que haya en las observaciones, y que no eliminemos, podrán afectar a la precisión de todos los puntos que formen la red.

En el caso concreto de los puntos de apoyo fotogramétrico, no nos interesa eliminar observaciones, pues en este caso tendríamos que prescindir de la solución del punto G101, que sin embargo, con la solución de puntos de apoyo, vemos que es un punto con precisión aceptable según las especificaciones respecto a la precisión de los puntos de control. Lo que nos interesa es disponer de información fidedigna sobre la precisión de cada punto de control en particular.



XII. APLICACIÓN PRÁCTICA II. GEORREFERENCIACIÓN CON GPS EN ANDALUCÍA.

XII.1. Introducción.

Esta segunda aplicación práctica se encuadra dentro del proyecto “Realización de una Ortofotografía color de detalle del conjunto de la región de Andalucía”, de la Consejería de Medio Ambiente, y llevado a cabo por la empresa Stereocarto S. L.

El objetivo del proyecto es la ejecución de todos los trabajos necesarios para la realización de la Ortofoto Digital a escala 1:25.000 del territorio de Andalucía. Para ello se parte de un vuelo fotogramétrico a escala aproximada 1/60.000, siendo necesario su apoyo de campo llevado a cabo con GPS.

Este apoyo de campo consta de las siguientes fases:

- Diseño del trabajo.
- Red básica
- Observación de los puntos de apoyo
- Cálculos y compensaciones.

Según las especificaciones técnicas del proyecto, el Sistema de Referencia y el Sistema Cartográfico en el que tienen que venir dadas las posiciones calculadas para los puntos de apoyo, se definen como:

- Proyección: Universal Transversa de Mercator (UTM)
- Sistema de referencia: ED-50.
- Las observaciones y cálculos se efectuarán en el sistema WGS84, pasando a continuación las coordenadas al sistema ED50.
- Longitud de origen: -9° y -3° (Meridianos centrales de la proyección).



- Latitud de origen: 0° (el Ecuador).
- Unidades: Metros.
- Falso Norte: 500.000 metros en el meridiano central.
- Factor de escala en el meridiano central: 0,9996
- Husos: 29 y 30

Además de las coordenadas locales, también se obtendrán las coordenadas WGS-84 de las estaciones que forman las Redes Básicas y de los puntos de apoyo, así como los parámetros de transformación que relacionan ambos sistemas de coordenadas.

XII.2. Diseño y fase de observación.

El sistema de referencia al que se tienen que referir las coordenadas finales de los puntos de apoyo observados dentro del trabajo es el sistema local ED-50, que como es sabido, difiere del sistema WGS-84 al que se refieren las observaciones GPS. Por ello, la manera de obtener posiciones locales a partir de posiciones globales calculadas con GPS será mediante el cálculo de unos parámetros de transformación entre ambos sistemas.

El problema que surge aquí es que el sistema local en España es muy poco homogéneo, por lo que los parámetros de transformación calculados para España, a la hora de aplicarlos en áreas locales reducidas, no consiguen alcanzar precisiones mejores del orden métrico, como se vio en la metodología.

Para el cálculo de estos parámetros de transformación se plantea estructurar el trabajo por cada hoja del MTN 1:100.000 de Andalucía, calculando para cada una de ellas los parámetros correspondientes.

Las observaciones GPS realizadas dentro de cada Hoja de MTN 1:100.000 se estructuran en:

- Red Básica.



- Puntos de Apoyo.

XII.2.1. Red Básica.

El objeto del establecimiento de una Red Básica es realizar observaciones GPS en una serie de vértices de la ROI, a partir de los cuales, y de sus coordenadas, levantar y calcular los puntos de apoyo, así como calcular los parámetros de transformación correspondientes.

El diseño de esta red básica está formado por cinco vértices de la ROI situados en las zonas próximas a las cuatro esquinas de cada hoja y un quinto vértice en su zona central, coincidente con un vértice de la red Regente o de Iberia-95, siempre que exista en la zona. Los puntos Regente sirven para fijar el sistema de referencia WGS-84 en la red, y a partir de coordenadas WGS-84 calculadas determinar posteriormente los parámetros de transformación correspondientes a cada hoja, a partir de los vértices de la ROI integrados. Los cuatro vértices periféricos de la Red Básica serán comunes entre hojas colindantes, por lo que servirán para enlazar hojas y conseguir la continuidad en las posiciones de puntos de apoyo de diferentes hojas a lo largo del territorio de Andalucía. La Figura XII-1 muestra la distribución de hojas del MTN 1:100.000 en Andalucía, representando la Red Básica observada para la hoja 248.

Como es sabido, el estado actual del marco de referencia Regente lo hace disponible tan sólo en parte del territorio de Andalucía, en la mitad oriental (Figura XII-1). Es por ello que el trabajo se deba empezar en esta parte, para poder luego continuar hacia el oeste “arrastrando” las coordenadas WGS-84 obtenidas para los vértices periféricos de hojas en la que si es disponible un vértice Regente, usando adicionalmente los vértices de IBERIA95 disponibles en Andalucía occidental.

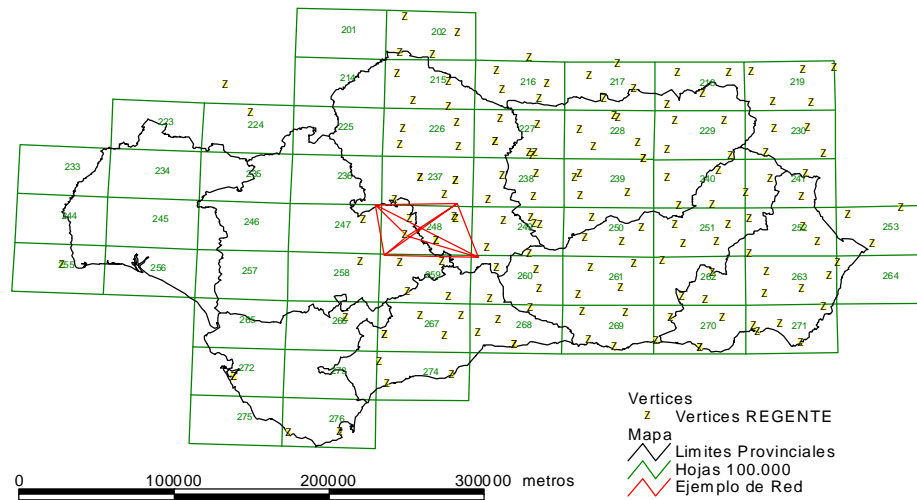


Figura XII-1. Ejemplo Red Básica para una hoja 248 del mapa 1:100.000 en Andalucía.

La observación se realiza con 4 Receptores GPS geodésicos de doble frecuencia Leica:

- SR9500 N° Serie: 20693.
- SR9500 N° Serie: 20709.
- SR9500 N° Serie: 20598.
- SR299 N° Serie: 100065.

Los parámetros que definen los requisitos de la observación fueron:

- Tiempo de observación: Entre 2 y 3 horas.
- N° de satélites: igual o superior a 4
- PDOP < 7

XII.2.2. Puntos de Apoyo.

La distribución teórica de los puntos de apoyo es la que se muestra en la Figura XII-2.

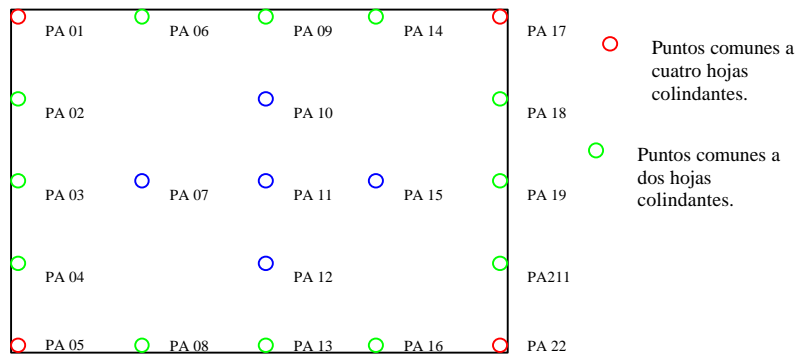


Figura XII-2. Distribución teórica de los Puntos de Apoyo en cada Hoja MTN 1:100.000.

Las observaciones de los puntos de apoyo se realizan en las mismas condiciones que las de la Red Básica, reduciendo el tiempo de observación a una hora.

Cada punto de apoyo se levantará desde al menos dos estaciones de la Red Básica correspondiente para poder tener control en la calidad de los mismos. Las precisiones finales de los puntos de apoyo serán función de la precisión de la red así como de la precisión de los parámetros de transformación calculados, y de las precisiones de las líneas base GPS observadas para su obtención.

XII.2.3. Procesado de Líneas Base.

El procesado de las líneas base se ha realizado con el software AOS (Ashtech Office Suite), optimizando la resolución de las ambigüedades, mediante el cambio del satélite de referencia, variando la máscara de elevación y desechando satélites o porciones de observación dentro de un satélite con información deficiente. Todo ello orientado a conseguir fijar la ambigüedad entera en todas las líneas base, obteniendo la óptima precisión en el procesado de las mismas.

Así mismo, para el procesado se han utilizado efemérides precisas, disponibles a través del IGS (International GPS Service): <ftp://igsb.jpl.nasa.gov/igsb/product>



XII.3. Ajuste del Bloque I.

Antes de desarrollar la metodología propuesta para la resolución de cada hoja del MTN 1:100.000 en las que está estructurado el trabajo, se analizarán los resultados obtenidos en el análisis del bloque formado por las Redes Básicas correspondientes a doce hojas del mapa 1:100.000, y representado en la Figura XII-3, resultados respecto a precisiones en el sistema WGS-84 y respecto a precisiones en el sistema local.

Este análisis servirá como paso previo para justificar la metodología propuesta para la resolución de cada hoja, metodología que se aplicará a la Hoja 237 en el apartado XII.4.

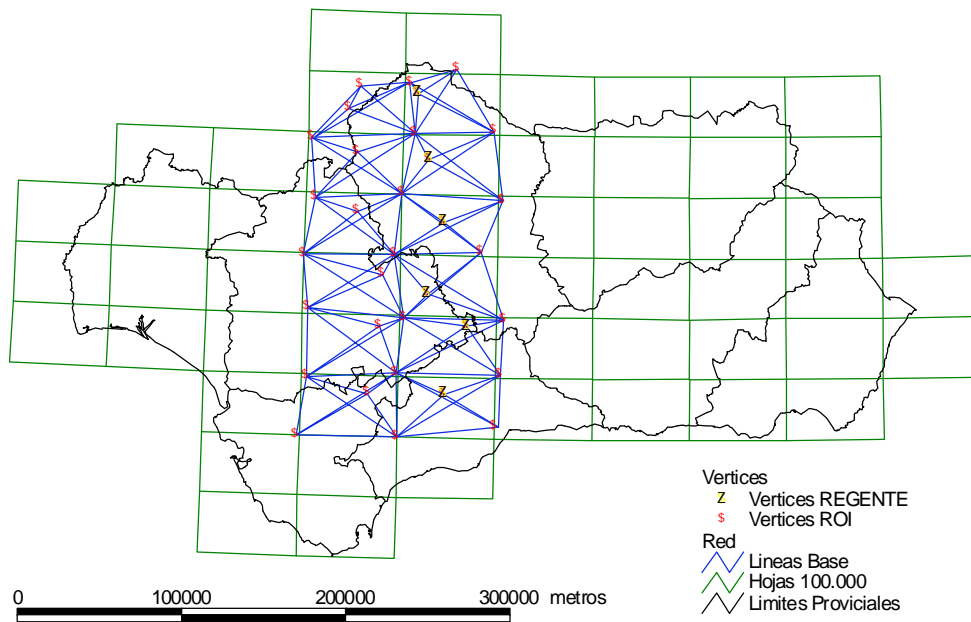


Figura XII-3. Localización Bloque I Andalucía.

XII.3.1. Solución constreñimiento interno.

Como en todas las redes vistas hasta ahora, el primer paso en el proceso de resolución del Bloque I representado en la Figura XII-3 será un ajuste con constreñimiento interno



para evaluar la precisión de las observaciones, mediante el test chi-cuadrado y el test de Baarda de detección de errores groseros.

Los residuos tipificados correspondientes a este ajuste previo (Tabla AII-1 del anexo II) muestran la existencia de posibles errores que distorsionan el ajuste. Así mismo, en la Tabla AII-2 se pueden ver las precisiones obtenidas en este ajuste, y gráficamente en el Gráfico XII-1. Un resumen de estas precisiones se muestra en la tabla siguiente (Tabla XII-1)

	Semieje mayor elipses planimétrica de error (m)	Desviación estándar altimétrica (m)
Valor máximo (m)	0,0090	0,0730
Valor mínimo (m)	0,0040	0,0360
Media (m)	0,0064	0,0500
Desviación estándar (m)	0,0013	0,0082

Tabla XII-1. Resumen precisiones obtenidas Solución constreñimiento interno Bloque I Andalucía. Solución previa a la eliminación de errores groseros.

Llevando a cabo un proceso de eliminación sucesiva de observaciones detectadas como posibles errores groseros considerando un nivel de confianza del 99.9%, la configuración que queda es la que se muestra en el Gráfico XII-2. El valor numérico de las precisiones se muestra en la Tabla AII-3, y el resumen de las mismas en la Tabla XII-2.

	Semieje mayor elipses planimétrica de error (m)	Desviación estándar altimétrica (m)
Valor máximo (m)	0,0070	0,0500
Valor mínimo (m)	0,0030	0,0180
Media (m)	0,0046	0,0290
Desviación estándar (m)	0,0009	0,0067

Tabla XII-2. Resumen precisiones obtenidas Solución constreñimiento interno Bloque I Andalucía. Solución posterior a la eliminación de errores groseros.



Comparando las Tabla XII-1 y Tabla XII-2 se puede ver una vez más la mejora en la precisión que se consigue después del proceso de detección y eliminación de errores groseros en el ajuste con constreñimiento interno.

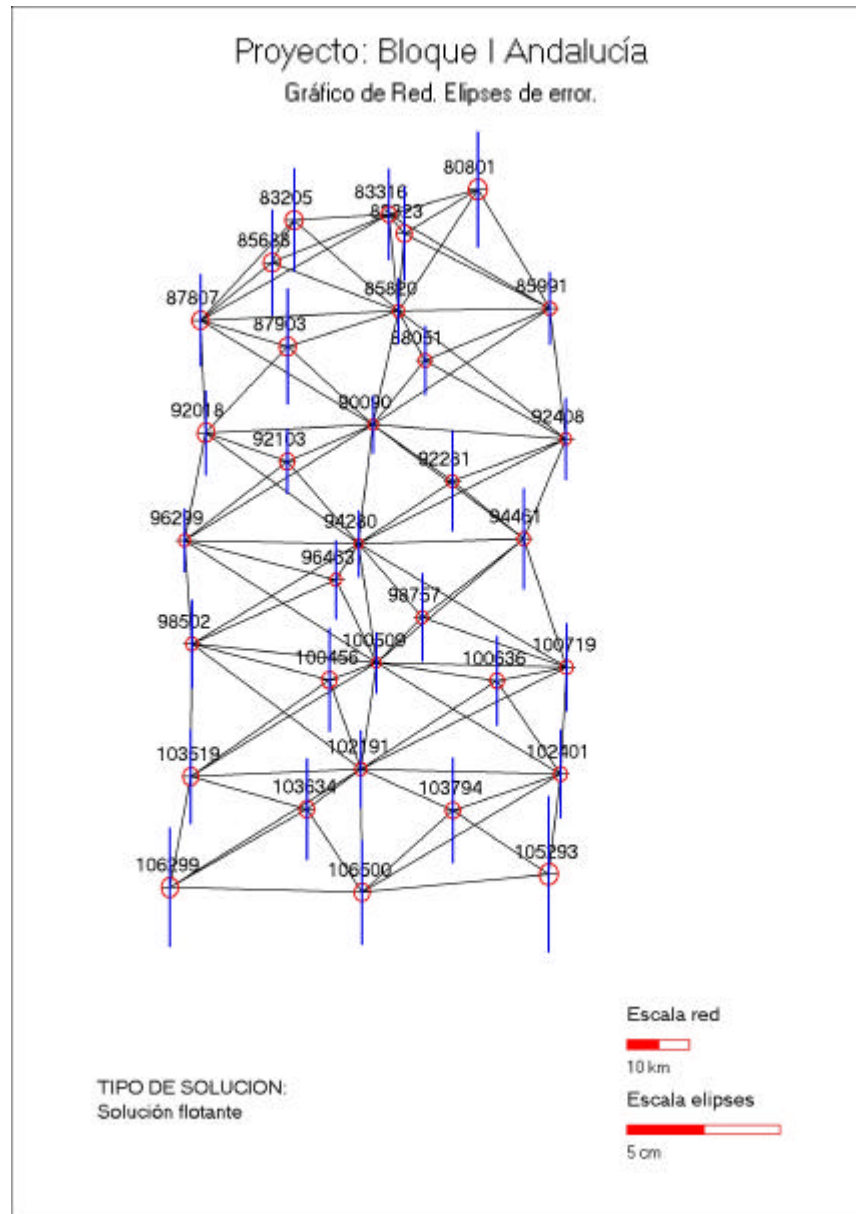


Gráfico XII-1. Gráfico solución constreñimiento interno Bloque I Andalucía previo proceso de eliminación de errores groseros. Elipses planimétricas de error y desviación estándar altimétrica.

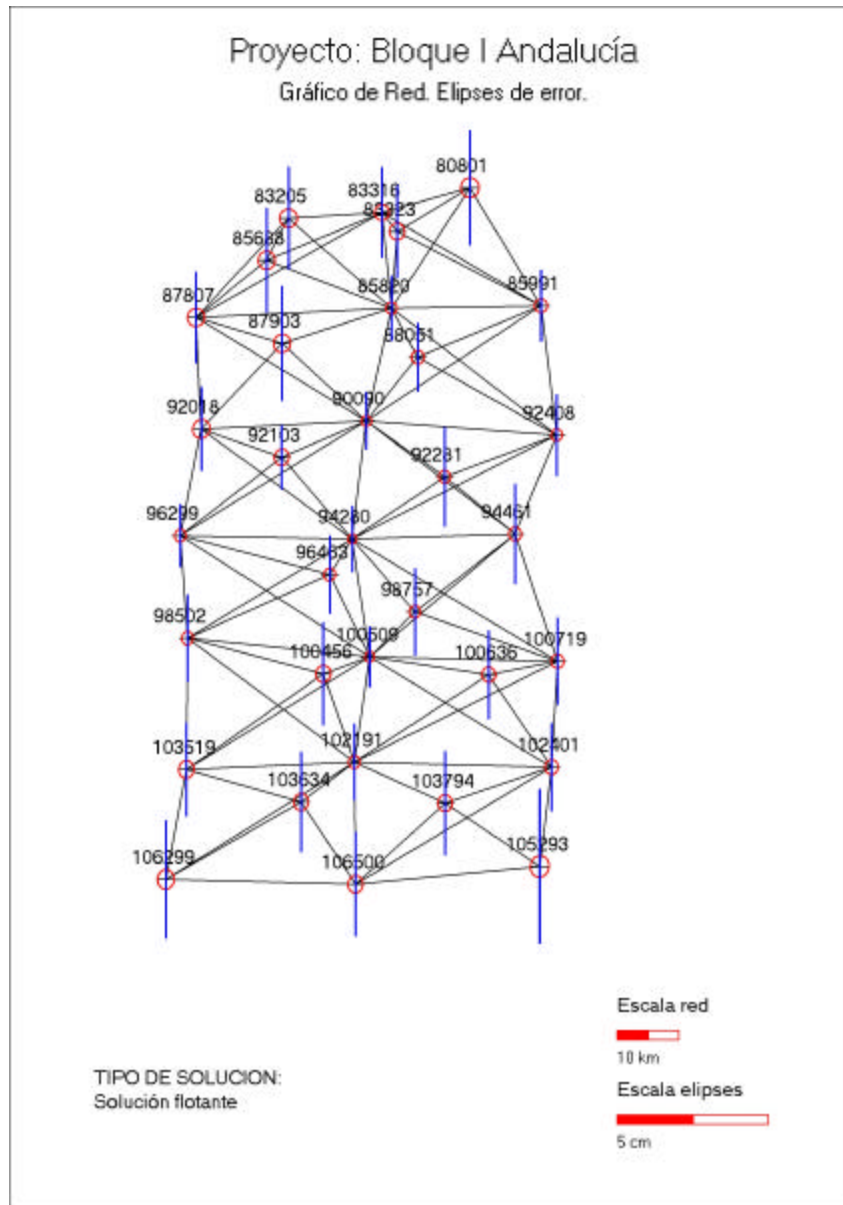


Gráfico XII-2. Gráfico solución constreñimiento interno Bloque I Andalucía. Después de eliminar errores groseros. Elipses planimétricas de error y desviación estándar altimétrica.

Como se observa, las precisiones planimétricas son del orden milimétrico, no llegando el semieje máximo de error al centímetro para ninguna de las estaciones. Sin embargo, las precisiones altimétricas, aunque buenas para las aplicaciones en las que estamos, son bastante peores que las planimétricas. Es cierto que las precisiones altimétricas obtenidas con GPS son menores que las planimétricas (como se ha visto en el capítulo



VI), pero estas diferencias tan altas no se explican. La única explicación para esto es que en la fase de procesado no se haya tenido en cuenta la posición del centro de fase para cada tipo de antena utilizada. Como se dijo al hablar de las causas de error en las medidas GPS, para aplicaciones de gran precisión se tiene que tener en cuenta la posición del centro de fase de la antena, pues esta posición varía de unos tipos de antena a otros.

XII.3.2. Solución WGS-84.

Una vez comprobada la alta calidad intrínseca de las observaciones GPS, independientemente del marco de referencia en el que se integren, el siguiente paso será enlazar esta red con el marco global de referencia existente en la zona. La zona se corresponde con el centro de Andalucía, lugar donde se localiza el límite de la existencia de puntos de Regente en la actualidad. Por ello, sólo existen vértices Regente en la mitad oriental del bloque.

Para el ajuste del bloque en el sistema WGS-84 se pasa al ajuste del mismo fijando las coordenadas WGS-84 de los seis vértices Regente observados dentro del bloque.

En este ajuste se evaluarán las dos alternativas:

- Fijar el sistema de referencia con puntos fijos.
- Fijar el sistema de referencia con puntos considerando su precisión: puntos fiduciales.

XII.3.2.1. Primera Alternativa. Puntos fijos.

Como primera alternativa se plantea el ajuste en el sistema WGS-84 introduciendo los puntos Regente como puntos fijos. Puesto que se parte de una solución constreñimiento interno en la que no hay errores groseros en las líneas, podemos llevar a cabo aquí un estudio de la precisión de las coordenadas de los vértices Regente utilizados.



Los residuos tipificados obtenidos en este ajuste para las coordenadas que se mantienen fijas son los que se muestran en la Tabla XII-3

Estación	Residuo Tipificado Componente N	Residuo Tipificado Componente E	Residuo Tipificado Componente H
92281	0,68	1,37	0,11
98757	2,65	1,43	0,86
88051	2,05	4,64	0,78
83323	6,52	2,74	1,46
100636	2,05	2,10	0,23
103794	0,59	2,91	1,14

Tabla XII-3. Residuos tipificados coordenadas Regente. Estaciones fijas. Componentes HGL.

En la tabla se observa que tan sólo dos de las seis estaciones Regente utilizadas muestran posibilidad de errores groseros en sus coordenadas, considerándolos como puntos fijos en el ajuste.

XII.3.2.2. Segunda Alternativa. Puntos fiduciales.

Con los posibles errores encontrados en los vértices Regente cabría la posibilidad de eliminar puntos fijos en el ajuste hasta que el ajuste no mostrara posibilidad de error. Sin embargo, otra posibilidad es considerar la precisión de sus coordenadas, pues estas coordenadas se han determinado con algún método geodésico, y no hay ninguno exento de error. Como se dijo, la precisión estimada por el IGN para las estaciones Regente es de 5 cm de error medio cuadrático en las tres componentes.

Partiendo a priori de un error medio cuadrático de 1 cm en las tres componentes de posición de los puntos Regente, los residuos tipificados que se obtienen son los que se muestran en la Tabla XII-4, no detectándose ningún residuo que no pase el test de Baarda para un nivel de confianza del 99.9%.



Estación	Residuo Tipificado Componente N (m)	Residuo Tipificado Componente E (m)	Residuo Tipificado Componente H (m)
92281	0,002	0,001	0,011
98757	0,008	0,000	0,008
88051	0,003	0,001	0,019
83323	0,003	0,001	0,016
100636	0,005	0,002	0,010
103794	0,001	0,002	0,001

Tabla XII-4. Residuos tipificados coordenadas Regente. Estaciones fiduciales con 1 cm de error en las tres componentes. Componentes HGL.

Con esto se puede llegar a la conclusión de la alta precisión del marco de referencia Regente, viéndose que en la zona de trabajo la precisión es bastante mayor que la que asegura el IGN, con precisiones mejores de 1 cm en sus tres componentes, en términos de rms.

En el Apéndice II se muestran la Tabla AI-4 con las elipses de error y desviaciones estándar altimétrica en el sistema WGS-84 para los puntos que forman la red, como resultado de este ajuste que es el que se considera como definitivo para el Bloque I. Estas precisiones se muestran de manera gráfica en el Gráfico XII-3

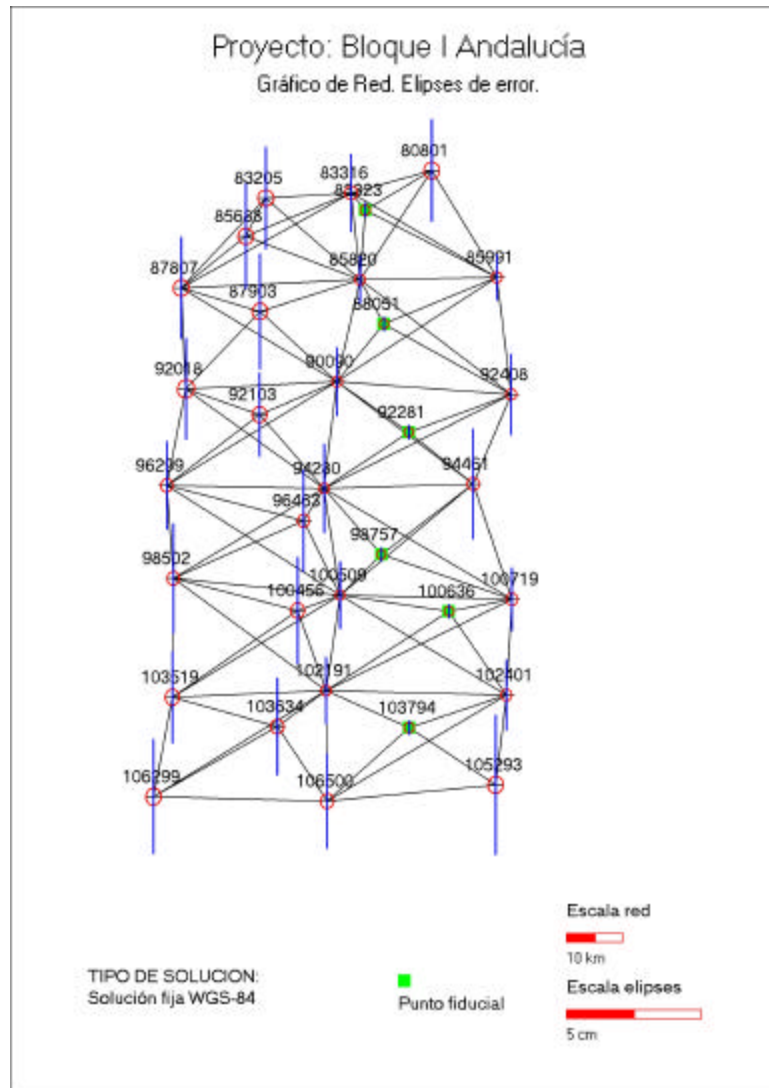


Gráfico XII-3 Gráfico solución WGS-84 Bloque I con puntos fiduciales (1 cm en las tres componentes). Elipses de error y desviaciones estándar altimétrica.

XII.3.3. Solución en el sistema local.

Como se muestra en los resultados obtenidos en el sistema WGS-84, a partir de las observaciones GPS que constituyen el Bloque I se han obtenido las posiciones globales precisas de las estaciones que lo constituyen.



Puesto que las 33 estaciones que forman esta red coinciden con vértices de la ROI, junto con las coordenadas WGS-84 precisas de las mismas tendremos sus coordenadas locales conocidas en el marco de referencia oficial español. Estas coordenadas se van a utilizar para obtener conclusiones sobre las alternativas a la hora de plantear la transformación entre sistemas de referencia global y local.

Para analizar la influencia de la extensión del ámbito de trabajo en las precisiones obtenidas, el Bloque I se ha descompuesto en distintos grupos de bloques más pequeños, formados por 2, 4 o 6 hojas. La distribución de sub-bloques se muestra en el Gráfico XII-4.

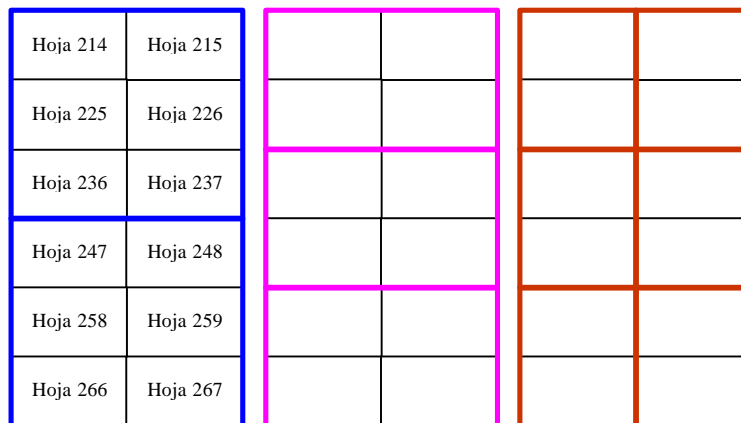


Gráfico XII-4. Distribución de sub-bloques dentro del Bloque I de Andalucía. 12, 6, 4, 2, 1 hojas.

A continuación se van a estudiar los siguientes aspectos sobre la transformación al sistema local:

- Uso de alturas ortométricas frente a alturas elipsoidales para el cálculo de la transformación 3D.
- Precisión de las coordenadas obtenidas aplicando parámetros calculados para distintas extensiones geográficas.
- Comparación de precisiones obtenidas en una transformación tridimensional o descomponiendo en transformación planimétrica 2D + transformación altimétrica 1D.
- Efecto de la aplicación de unos parámetros de transformación fuera de la zona para la que se han calculado.



XII.3.3.1. Uso de alturas ortométricas frente a altura elipsoidales para el cálculo de la transformación 3D.

La transformación tridimensional que relaciona coordenadas globales y locales según el modelo del Helmert, en sentido estricto, relaciona componentes de altura elipsoidal en ambos sistemas. Para establecer dicha transformación se necesitarían por tanto las coordenadas elipsoidales de algunas estaciones sobre el elipsoide ED-50. Estas coordenadas se pueden obtener a partir de las cotas ortométricas sólo si se tiene un modelo de geoide preciso para la zona que relacione cotas ortométricas con alturas elipsoidales sobre el elipsoide local.

Una alternativa que se puede plantear es utilizar las cotas ortométricas como si fueran cotas elipsoidales, de modo que los parámetros de transformación calculados absorban las diferencias entre cotas ortométricas y elipsoidales locales, es decir, las variaciones de geoide en una zona. Una aplicación de esto se puede ver en los parámetros de transformación calculados para cada provincia por el Instituto Cartográfico Valenciano, a partir de la observación de la Red de Cuarto Orden de la Comunidad Valenciana (ICV, 2001).

Para evaluar las precisiones obtenidas con ambas alternativas se calculan los parámetros de transformación 3D para los distintos bloques, considerando alturas ortométricas o alturas sobre el elipsoide ED-50. Para calcular los parámetros de transformación se utilizan tan sólo los vértices localizados en las esquinas de las hojas, dejando los vértices centrales como puntos de control para comparar las coordenadas obtenidas respecto a las conocidas.

Las cotas locales necesarias para plantear la transformación en términos de cotas elipsoidales se han obtenido con el programa `geoparam.exe`, que obtiene cotas elipsoidales sobre el elipsoide local a partir de las correspondientes cotas ortométricas mediante un modelo de geoide aproximado.



El resumen de los resultados obtenidos se presenta en las tablas Tabla XII-5 y Tabla XII-6, en las que se muestran los valores medio, máximo, mínimo y desviación estándar de los errores cometidos en las posiciones planimétricas y altimétricas transformadas respecto a las conocidas, para las transformaciones obtenidas en los diferentes bloques, y según las dos alternativas planteadas.

Bloques	Error 2D				Error 1D			
	Media (m)	Desviación estándar (m)	Máximo (m)	Mínimo (m)	Media (m)	Desviación estándar (m)	Máximo (m)	Mínimo (m)
12 hojas	0,177	0,116	0,38	0,056	1,005	0,753	2,119	0,094
6 hojas	0,171	0,134	0,36	0,043	0,732	0,493	1,586	0,209
4 hojas	0,154	0,148	0,32	0,032	0,539	0,353	1,143	0,016
2 hojas	0,148	0,129	0,37	0,035	0,432	0,278	0,785	0,041
1 hoja	0,141	0,119	0,38	0,011	0,362	0,245	0,726	0,014

Tabla XII-5. Resumen errores cometidos transformación 3D en diferentes bloques. Utilizando cotas ortométricas.

Bloques	Error 2D				Error 1D			
	Media (m)	Desviación estándar (m)	Máximo (m)	Mínimo (m)	Media (m)	Desviación estándar (m)	Máximo (m)	Mínimo (m)
12 hojas	0,179	0,124	0,450	0,046	0,955	0,530	1,713	0,138
6 hojas	0,173	0,134	0,493	0,038	0,687	0,492	1,341	0,063
4 hojas	0,155	0,147	0,480	0,033	0,517	0,321	1,086	0,096
2 hojas	0,149	0,134	0,470	0,019	0,429	0,262	0,864	0,040
1 hoja	0,142	0,120	0,417	0,010	0,359	0,221	0,696	0,036

Tabla XII-6. Resumen errores cometidos transformación 3D en diferentes bloques. Utilizando cotas elipsoidales.

Los valores medios se han representado en los gráficos siguientes:

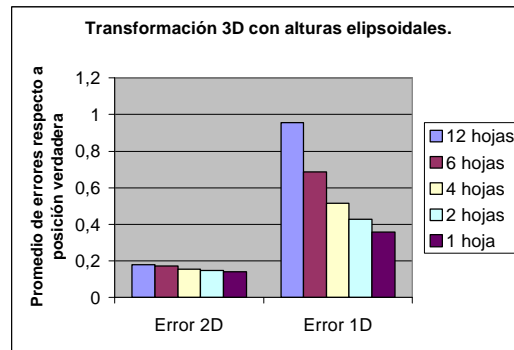


Gráfico XII-5. Desviaciones medias en planimetría y altimetría para transformaciones en diferentes bloques. Transformación 3D con alturas elipsoidales obtenidas con modelo de geoide aproximado.

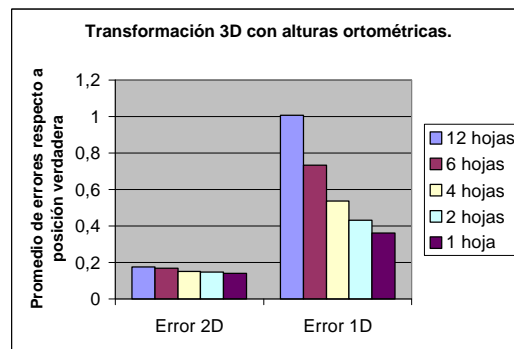


Gráfico XII-6. Desviaciones medias en planimetría y altimetría para transformaciones en diferentes bloques. Transformación 3D con alturas ortométricas.

De los resultados mostrados se puede comprobar que la diferencia de utilizar parámetros de transformación 3D obtenidos a partir de cotas elipsoidales o de cotas ortométricas, no es significativa en ningún ámbito de trabajo, tanto en planimetría como en altimetría. Esto ha sido considerando cotas elipsoidales obtenidas con un modelo de geoide aproximado, pues no se dispone de un modelo preciso.



XII.3.3.2. Precisión de las coordenadas obtenidas aplicando parámetros calculados para distintas extensiones geográficas.

Otra conclusión evidente de los resultados mostrados en los gráficos anteriores es la precisión obtenidas aplicando parámetros de transformación 3D calculados a partir de vértices de la ROI.

La precisión en la posición planimétrica se ve poco afectada por la extensión del área de trabajo, estando sus valores en el orden de magnitud de la precisión planimétrica asegurada para la ROI (rms de 15 cm en componentes planimétricas). Sin embargo, no ocurre lo mismo con las precisiones altimétricas, que disminuyen considerablemente al aumentar la extensión para la que se calculan los parámetros, estando incluso algo por debajo de las precisiones propias de la ROI en ámbitos de una o dos hojas del MTN 1:100.000. Así, aplicando una transformación tridimensional en el bloque formado por las doce hojas, las desviaciones obtenidas en altimetría están en el orden de 1 m de media. La justificación de esto está en las variaciones del geoide, que no son muy apreciables para zonas pequeñas (una o dos hojas del MTN 1:100.000), pero que si tienen que considerarse para ámbitos mayores.

En este punto cabría estudiar si las precisiones altimétricas mejoran con transformaciones para ámbitos menores a una hoja del MTN 1:100.000, cuestión que queda planteada.

XII.3.3.3. Comparación Transformación 3D frente a Transformación 2D + 1D.

Como alternativa a la transformación 3D para pasar de posiciones WGS-84 a locales, dados los errores que se producen en altimetría, se plantea la posibilidad de descomponer esa transformación en una transformación 2D para planimetría más otra transformación 1D para altimetría, como se ha visto en la metodología.



El modelo de transformación 2D aplicado es el de Transformación de posiciones planas visto en la metodología, y el modelo lineal de alturas que relaciona cotas elipsoidales WGS-84 y cotas ortométricas para la transformación 1D.

Para comparar las precisiones obtenidas en ambas transformaciones respecto a las precisiones obtenidas para planimetría y altimetría en la transformación 3D, se ha aplicado una transformación 2D y una transformación 1D para los diferentes sub-bloques en los que se ha dividido el Bloque I de Andalucía, sin utilizar nuevamente los vértices centrales de hoja para el cálculo de dichos parámetros. En la Tabla XII-7 se da un resumen de los errores en las coordenadas transformadas para los vértices centrales de las hojas según los parámetros calculados para cada bloque. La comparación de los errores medios cometidos respecto a los cometidos en la transformación 3D se muestra en los Gráfico XII-7 y Gráfico XII-8.

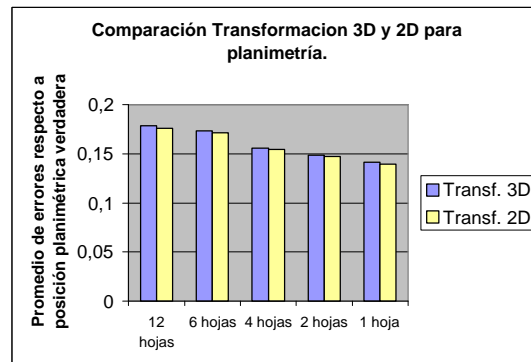


Gráfico XII-7. Comparación transformación 3D y 2D para planimetría en diferentes bloques.

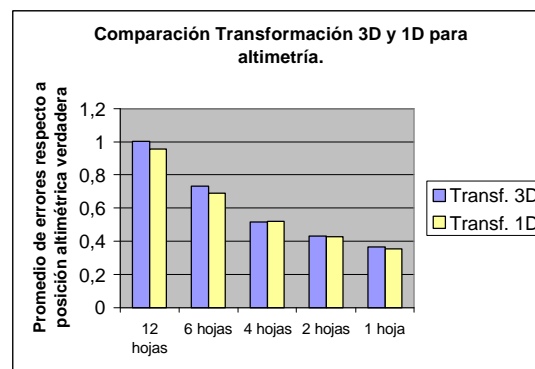


Gráfico XII-8. Comparación transformación 3D y 1D para altimetría en diferentes bloques.



Bloques	Transformación 2D				Transformación 1D			
	Media (m)	Desviación estándar (m)	Máximo (m)	Mínimo (m)	Media (m)	Desviación estándar (m)	Máximo (m)	Mínimo (m)
12 hojas	0,176	0,112	0,443	0,060	0,958	0,532	1,725	0,135
6 hojas	0,171	0,132	0,502	0,042	0,689	0,492	1,350	0,068
4 hojas	0,155	0,146	0,555	0,036	0,520	0,322	1,088	0,096
2 hojas	0,147	0,130	0,470	0,034	0,430	0,263	0,861	0,037
1 hoja	0,139	0,119	0,418	0,010	0,355	0,227	0,697	0,033

Tabla XII-7. Resumen de errores cometidos en la transformación 2D y en la transformación 1D para diferentes bloques.

De los resultados presentados se puede comprobar que las precisiones obtenidas en la transformación 3D son similares a las obtenidas con la transformación 2D para planimetría y la 1D para altimetría, siendo las diferencias no significativas.

Así, respecto a la altimetría, la única alternativa posible para mejorar las precisiones obtenidas a partir de observaciones GPS es la utilización de un modelo de geoide para la zona. El proyecto Regente pretende obtener un modelo de geoide para España, pero mientras no se disponga de un modelo local de precisión, la única posibilidad que tenemos es utilizar un modelo de geoide global. La Tabla XII-8 muestra un resumen de los errores obtenidos en las cotas ortométricas calculadas a partir del modelo de geoide global EGM96 aplicado a las posiciones WGS-84 calculadas (NIMA (3)).

Media (m)	Desviación estándar (m)	Máximo (m)	Mínimo (m)
0,399	0,315	0,923	0,048

Tabla XII-8. Resumen de los errores altimétricos utilizando el modelo EGM96.

De los resultados obtenidos se puede comprobar que para ámbitos mayores de 1-2 hojas del MTN 1:100.000, las precisiones obtenidas aplicando un modelo de geoide global son mejores a las obtenidas en la transformación lineal de alturas, o las precisiones obtenidas para altimetría en la transformación 3D.



XII.3.3.4. Efecto de la aplicación de unos parámetros de transformación fuera de la zona para la que se han calculado.

Hasta ahora se han comprobado los errores cometidos en las coordenadas de los puntos al aplicar unos parámetros de transformación calculados para áreas de diferente extensión, y se ha visto que las mejores precisiones en la transformación se obtiene resolviendo la transformación 3D o 2D + 1D para cada hoja del MTN 1:100.000.

La cuestión que se plantea ahora, y se pretende justificar, es la homogeneidad de las coordenadas locales obtenidas en diferentes hojas; es decir, la continuidad en las posiciones locales obtenidas para los puntos de apoyo de diferentes hojas levantados en Andalucía. Así, los puntos de apoyo que hay en el límite de hojas se podrán calcular con los parámetros obtenidos a partir de las dos hojas contiguas: ¿qué diferencias hay en las posiciones de estos puntos calculados con un conjunto de parámetros o con otro?.

Para analizar esto, las posiciones locales de los puntos de apoyo de cada hoja se han calculado con los parámetros de la hoja correspondiente, y con los parámetros de las hojas contiguas.

Representando las diferencias de coordenadas planimétricas y altimétricas de los puntos de apoyo obtenidas con los parámetros de la hoja contigua respecto a las obtenidas con los parámetros de la hoja correspondiente, en función de la distancia del punto al centroide de la hoja contigua, se obtienen las gráficas mostradas en el Anexo III, en las que se ve que los errores aumentan con la distancia a la hoja. Nuevamente se ve que esta disminución de precisión es mayor para las posiciones altimétricas que para las planimétricas; mientras que los errores máximos en los extremos opuestos de las hojas son como máximo de 45 cm para la posición planimétrica, llegan hasta 2.5 m en la posición altimétrica. Un ejemplo de estas representaciones se muestra en los gráficos siguientes.

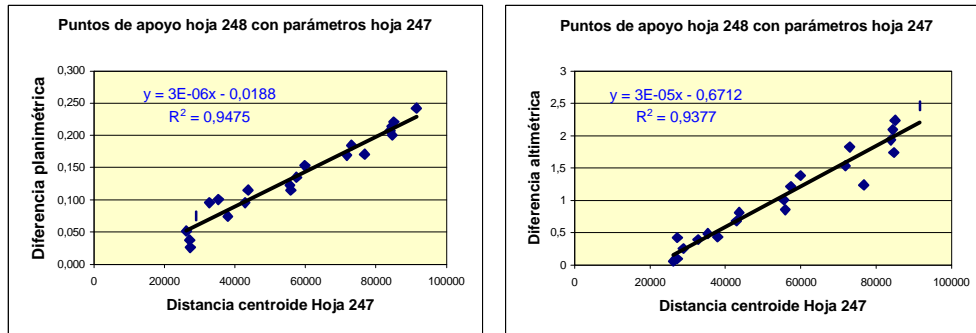


Gráfico XII-9. Desviaciones en coordenadas planimétricas y altimétricas de los puntos de apoyo de una hoja calculados con los parámetros correspondientes y con los de la hoja contigua, en función de la distancia al centroide de la hoja contigua.

Esto justifica la no conveniencia de la utilización de los parámetros de transformación fuera de la zona para la que se han calculado, es decir, para extrapolar posiciones, fundamentalmente en lo que se refiere a posiciones altimétricas.

Los orígenes de las rectas de regresión ajustadas coinciden con los puntos en los límites de hojas. Considerando todos los puntos de apoyo en límite de hojas y calculando los errores de utilizar los parámetros calculados para una hoja o para otra, se obtiene un rms de 14 cm para la posición planimétrica y 20 cm para la posición altimétrica.

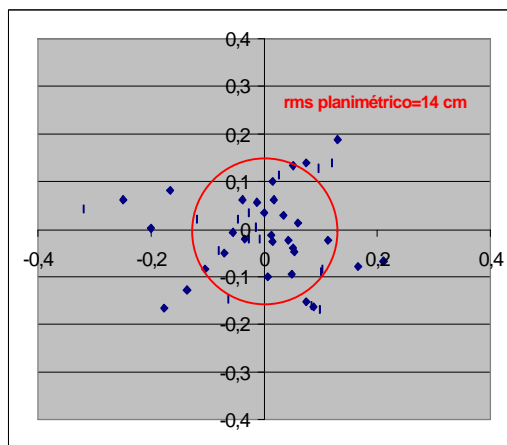


Gráfico XII-10. Representación diferencias posiciones planimétricas con distintos parámetros de transformación para los puntos de apoyo en el límite de hojas contiguas.



El Gráfico XII-10 muestra la representación de los errores obtenidos para las posiciones planimétricas.

Con estos valores de rms planimétrico y altimétrico se comprueba que se está dentro de la precisión de la ROI (rms de 15 cm en planimetría y 30 cm en altimetría), lo que justifica la continuidad de resultados entre hojas diferentes.

XII.4. Resolución Hoja 237.

Como ejemplo del proceso seguido en la determinación de las coordenadas locales para los puntos de apoyo de las diferentes hojas del MTN 1/100.000, se va a ver la aplicación para la hoja 237.

El proceso se descompone en dos fase:

- Resolución de la Red.
- Resolución de los Puntos de Apoyo.

XII.4.1. Resolución de la Red.

Los vértices que forman la Red correspondiente a la hoja 237 del MTN 1:100.000 son (Gráfico XII-11):

- Alcornocosa (90090)
- Alcurrucén (92408)
- Rubio (92281). Vértice Regente.
- Serrezuela (94280)
- Torrecillas (94461)

El proceso seguido para la resolución de la Red será:

- Ajuste con constreñimiento interno, para evaluar la precisión de las observaciones
- Solución WGS-84
- Cálculo de los parámetros de transformación.



XII.4.1.1. Ajuste con constreñimiento interno de la red.

El primer paso en el ajuste de la red observada será llevar a cabo un ajuste con constreñimiento interno para evaluar la precisión interna de las observaciones GPS.

De dicho ajuste, aplicándose un factor de ponderación en la precisión de las observaciones de 83, los resultados obtenidos son los que se muestran en el Gráfico XII-11. Los valores numéricos para las elipses de error y el rms altimétricos se muestran en la Tabla XII-9.

Estación	Precisión planimétrica		Precisión altimétrica
	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Rms altimétrico(m)
92281	0,002	0,002	0,013
94461	0,002	0,002	0,018
92408	0,002	0,002	0,016
94280	0,002	0,002	0,022
90090	0,003	0,003	0,025

Tabla XII-9. Precisión solución constreñimiento interno Red Geodésica Hoja 237.

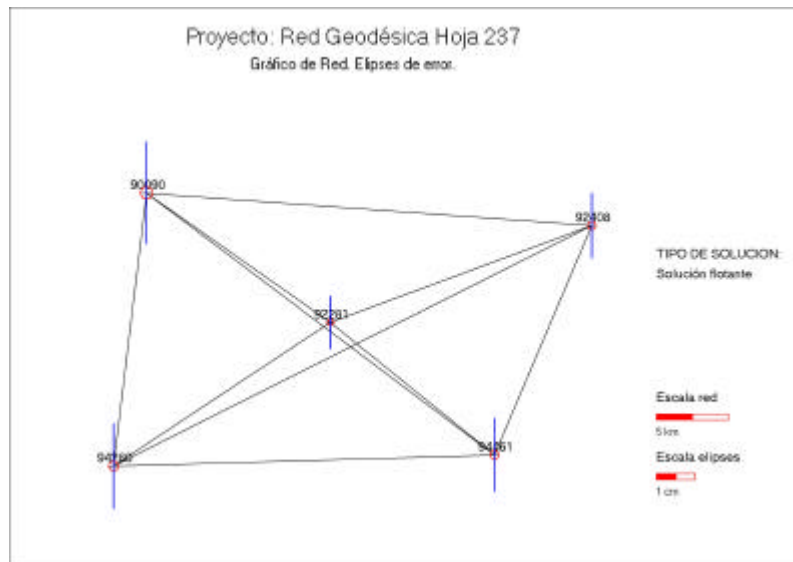


Gráfico XII-11. Solución constreñimiento interno Red Geodésica Hoja 237. Elipses de error y rms altimétrico.



Estudiando el test de Baarda de detección de errores groseros para dicho ajuste con un nivel de confianza del 99.9% (nivel crítico = 3.29), los residuos tipificados obtenidos son los que se muestran en la Tabla AII.5 del anexo II, no mostrándose ninguna posible línea base afectada de errores groseros para las precisiones de partida. En esta situación, se puede pasar al ajuste en el sistema WGS-84.

XII.4.1.2. Solución WGS-84.

Partiendo de la solución con constreñimiento interno, en la que se ha comprobado la alta calidad de las observaciones que forman la red, se pasa a fijar el sistema de referencia WGS-84. Dicho sistema se fija introduciendo en el ajuste las coordenadas globales conocidas de las estaciones Regente incluidas en la red y/o las coordenadas ajustadas de estaciones de hojas colindantes, previamente calculadas.

Para el caso concreto de la hoja 237 se fijará el vértice Rubio, perteneciente a Regente, puesto que fue la primera hoja en ser levantada, y por tanto no se disponían de las coordenadas calculadas de estaciones pertenecientes a hojas colindantes. Esta solución es una solución mínimo constreñimiento, es decir, se ha impuesto la mínima condición para fijar el sistema de referencia WGS-84, y así, las precisiones obtenidas serán las mismas que las obtenidas para la solución con constreñimiento interno (Tabla XII-9).

XII.4.1.3. Cálculo de los parámetros de transformación. Evaluación de las precisiones de los vértices de la ROI que forman la red.

El principal objetivo del levantamiento de la Red Básica es el cálculo de unos parámetros que relacionen coordenadas WGS-84 y coordenadas locales. De las dos alternativas planteadas, transformación 3D o transformación 2D +1D, se ha optado por la transformación 3D, habiéndose justificado antes, dentro del análisis del Bloque I, que las precisiones obtenidas son similares. Igualmente, en el análisis mencionado, se ha visto que las precisiones de la transformación utilizando alturas ortométricas también son similares a las obtenidas utilizando alturas elipsoidales locales a partir de un modelo



de geoides aproximado. Por ello, los parámetros de transformación de la hoja se han obtenido a partir de cotas ortométricas.

Con las coordenadas WGS-84 calculadas en el ajuste anterior y las coordenadas locales conocidas de los vértices de la ROI, se calculan los parámetros para la hoja correspondiente. La precisión de los parámetros obtenidos dependerá por tanto de la precisión de las coordenadas WGS-84, muy altas como se ha visto, y la precisión en las coordenadas de los vértices de la ROI que intervienen.

Para el estudio de la precisión de los vértices de la ROI se utilizará la misma herramienta utilizada en la Aplicación Práctica I para evaluar la precisión de las coordenadas de los vértices de la Red Geodésica integrados en la Red Básica de Guatemala. Planteando un ajuste en el sistema local de la Red Básica de la hoja 237 de Andalucía, tal como se vio en la metodología, e introduciendo los cinco vértices como puntos fijos para fijar el sistema de referencia local, los residuos tipificados de estas observaciones nos pueden servir para llevar a cabo un proceso de detección de errores groseros en los vértices de la ROI, o para evaluar la precisión de sus coordenadas.

Los residuos tipificados obtenidos de dicho ajuste, introduciendo las coordenadas locales de los cinco vértices como puntos fijos, son los que se muestran en la Tabla XII-10.

Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
92281	5,30	22,97	40,47
94461	3,04	48,59	9,06
92408	83,89	44,31	4,33
94280	34,66	8,66	8,93
90090	2,41	12,42	10,07

Tabla XII-10. Residuos tipificados Cinco vértices fijos Hoja 237

Como puede observarse, considerando los puntos fijos se encuentran residuos tipificados muy por encima del nivel crítico de 3.29.



Esto es lógico, pensando que no se ha tenido en cuenta la precisión propia de la ROI. Volviendo a hacer el ajuste en el sistema local, pero considerando un rms de 15 cm para la posición planimétrica y de 30cm para la precisión altimétrica, precisión asegurada por el IGN para la ROI, los nuevos residuos tipificados obtenidos son los que se muestran en la Tabla XII-11.

Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
92281	1,74	0,37	0,30
94461	0,57	1,42	0,13
92408	1,74	0,56	0,09
94280	0,44	1,23	0,15
90090	1,50	0,26	0,12

Tabla XII-11. Residuos tipificados Cinco vértices Hoja 237 (rms planimétrico=15cm, altimétrico=30cm).

De los resultados obtenidos se comprueba que las precisiones de los cinco vértices de la ROI utilizados están efectivamente dentro de la precisión especificada para los mismos. Ni siquiera las componentes altimétricas, posiblemente afectadas por variaciones en la ondulación de geoide al considerar en el ajuste cotas ortométricas en vez de cotas elipsoidales muestran posibilidad de errores groseros, para las precisiones propias de la ROI. Esto justifica el uso de alturas ortométricas en la transformación 3D para una hoja del MTN 1:100.000

XII.4.2. Solución de los puntos de apoyo.

Para obtener la solución de los puntos de apoyo en el sistema WGS-84, solución a la que se le aplicarán los parámetros de transformación calculados a partir de la Red Básica, nuevamente se plantea la necesidad de utilizar el módulo de Puntos de Apoyo de UCORed-GPS, como alternativa a un ajuste en el sistema WGS-84 de los puntos observados para la hoja correspondiente.



La comparación entre ambas soluciones, en términos de precisión obtenida para los puntos de apoyo, se muestra en la Tabla AII.6 del Anexo II. Dichas precisiones se muestran gráficamente en el Gráfico XII-12 y el Gráfico XII-13. Se aprecia fácilmente que la solución de Puntos de Apoyo muestra mejor precisión para la mayoría de las estaciones; mientras que en la solución de Puntos de Apoyo se encuentran muchos puntos con precisiones altimétricas mejores de 2 cm (bastantes por debajo del centímetro), la solución del ajuste WGS-84 muestra precisiones peores para todos los puntos. Esto es debido a que el error en las observaciones de algunos puntos de apoyo (hasta 9cm en altimetría) se reparte a todos los puntos en el ajuste WGS-84, dándonos una estimación falsa de la precisión.

En cuanto a las diferencias de coordenadas obtenidas con ambas opciones, son poco significativas, con variaciones máximas de 1.1 cm en planimetría y de 1.7 cm en altimetría.

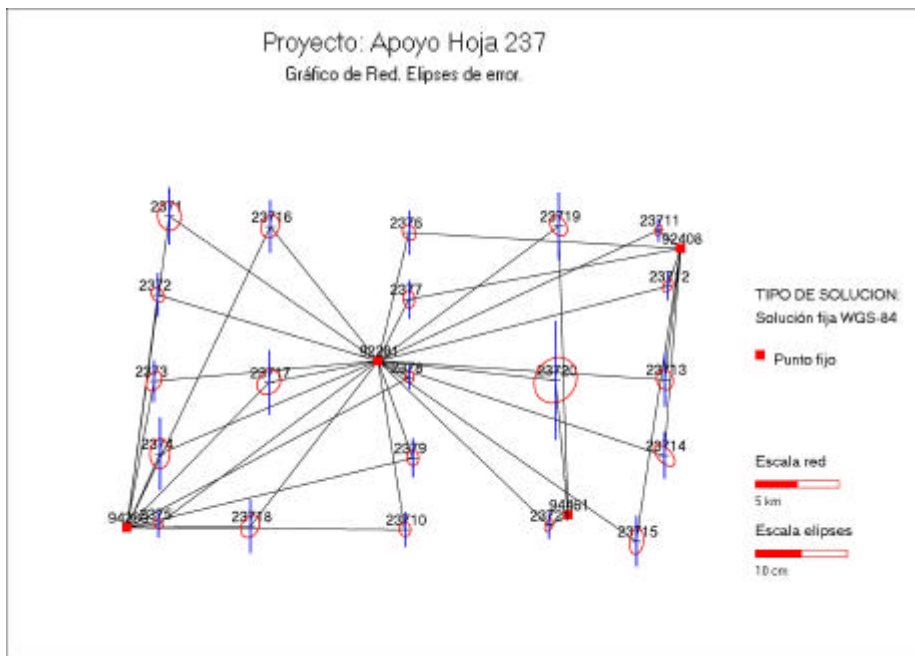


Gráfico XII-12. Solución ajuste WGS-84 para puntos apoyo Hoja 237.

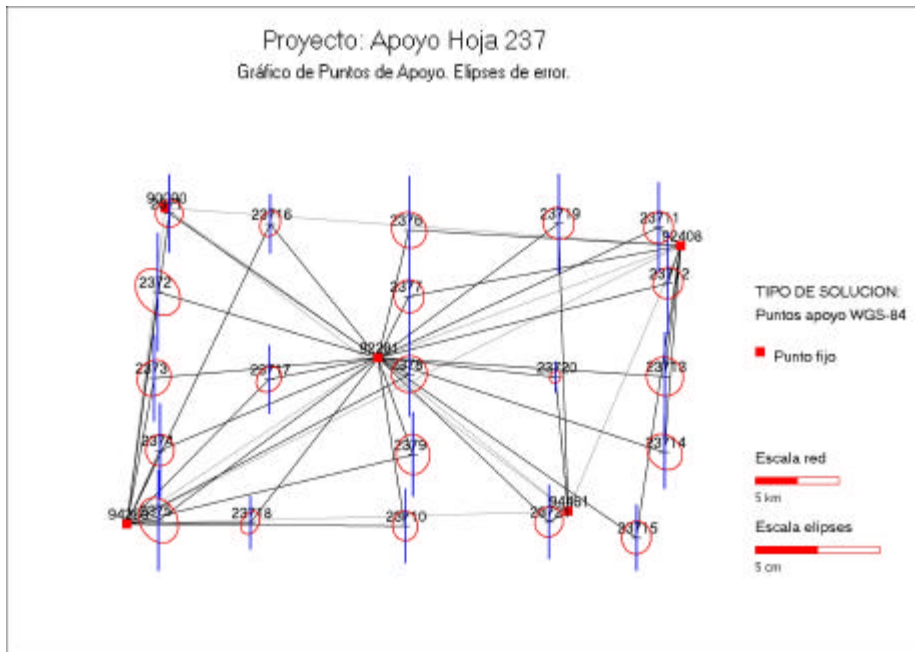


Gráfico XII-13. Solución Puntos de Apoyo Hoja 237.

XII.4.2.1. Solución local de los puntos de apoyo.

La solución local de los puntos de apoyo se obtiene a partir de la solución en el sistema WGS-84, aplicando los parámetros calculados para la hoja correspondiente.

Para evaluar la precisión de estas coordenadas transformadas, puesto que al aplicar los parámetros de transformación no tenemos idea de la precisión de las coordenadas resultantes, se ha llevado a cabo un ajuste en el sistema local, añadiendo a las observaciones de la Red Básica las correspondientes a cada punto de apoyo. Así, se consigue obtener soluciones locales ajustadas de modo independiente para cada uno de ellos. El sistema de referencia se ha fijado con las coordenadas locales conocidas de los vértices que forman la Red Básica. Dichos puntos se han introducido en el ajuste siguiendo dos alternativas:

- Puntos fijos.
- Puntos con la precisión propia de la ROI.

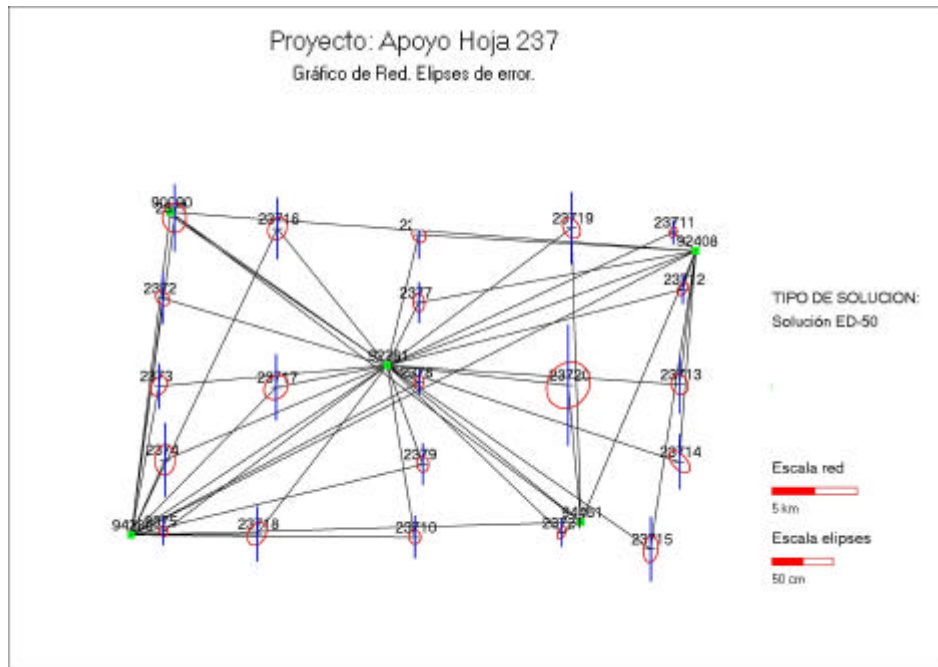


Gráfico XII-14. Precisiones solución local para puntos de apoyo. Ajuste local con puntos fijos.

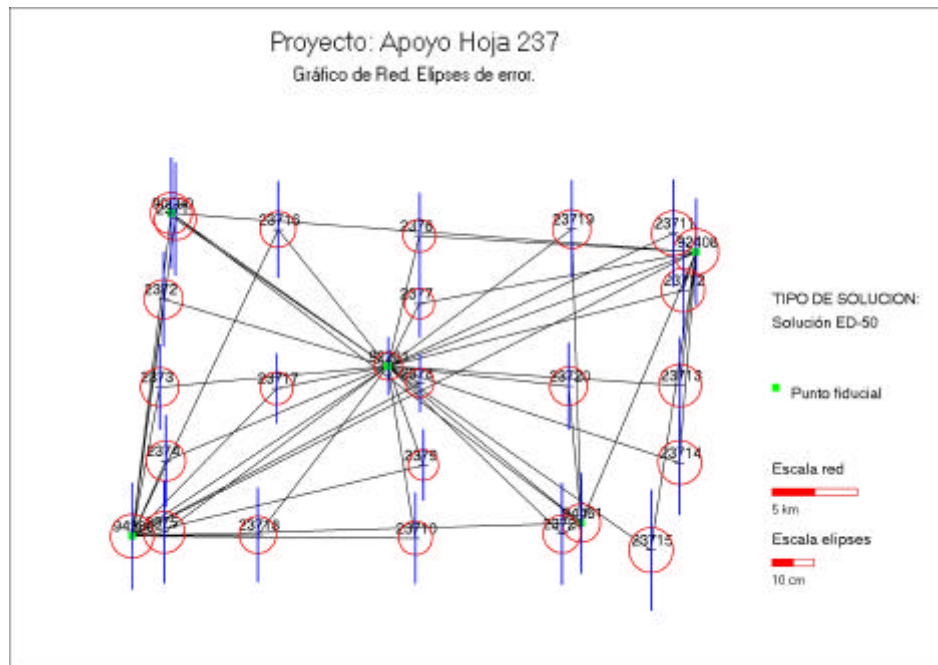


Gráfico XII-15. Precisiones solución local para puntos de apoyo. Ajuste local con puntos fiduciales.



Los resultados obtenidos con ambas alternativas se muestran gráficamente en el Gráfico XII-14 y el Gráfico XII-15, y numéricamente en la tabla AII.7 del anexo II. La tabla siguiente muestra un resultado de dichos resultados. Se comprueba la diferencia sustancial en cuanto a precisiones obtenidas con ambas alternativas, siendo la precisión media resultante con la solución con puntos fiduciales más de dos veces superior a la reflejada en la solución considerando los puntos fijos.

	Puntos fijos		Puntos fiduciales	
	Semieje mayor(m)	rms altimétrico(m)	Semieje mayor(m)	Rms altimétrico(m)
Media (m)	0,171	0,417	0,088	0,211
Desviación estándar (m)	0,072	0,181	0,012	0,037
Máximo (m)	0,395	0,976	0,105	0,278
Mínimo (m)	0,087	0,190	0,067	0,135

Tabla XII-12. Resumen de precisiones Ajuste local puntos de apoyo Hoja 237. Comparación puntos fijos-puntos fiduciales (rms 15 cm en planimetría y 30 cm en altimetría).

Las bajas precisiones obtenidas con la solución resultante del ajuste en el sistema local considerando puntos fijos son debidas a la precisión propia de las coordenadas de los cinco vértices que se han fijado. Como se comprobó en el ajuste local de la Red Básica, las precisiones de estas estaciones están en el orden de magnitud de las precisiones de la ROI. Para encajar las precisas observaciones GPS en las coordenadas de las cinco estaciones consideradas fijas, el ajuste tiene que deformar la red, pensando que la precisión de las líneas es peor de la real, lo que se traduce en la baja precisión resultante para los puntos de apoyo introducidos en el ajuste.

Para evaluar los resultados de ambas alternativas en términos de coordenadas, dichas coordenadas se comparan con las obtenidas aplicando los parámetros de transformación calculados para la hoja correspondiente. La Tabla AII.8 del anexo II muestra las diferencias en coordenadas planimétricas y altimétricas obtenidas respecto a la solución con los parámetros de transformación. La tabla siguiente muestra un resumen de estos resultados.



Estación	Ajuste puntos fijos		Ajuste puntos con precisión	
	Diferencias planimétricas (m)	Diferencias altimétricas (m)	Diferencias planimétricas (m)	Diferencias altimétricas (m)
Media (m)	0,110	0,104	0,0005	0,004
Desviación estándar (m)	0,051	0,081	0,001	0,004
Máximo (m)	0,166	0,316	0,002	0,013
Mínimo (m)	0,015	0,022	0,000	0,000

Tabla XII-13. Resumen de diferencias en coordenadas obtenidas mediante ajuste local, considerando puntos fijos, o considerando puntos con precisión.

Mientras que las coordenadas obtenidas en el ajuste local con puntos fijos difieren hasta 32 cm en planimetría y 17 cm en altimetría, estas diferencias son insignificantes para el ajuste local de los puntos de control considerando las precisiones de las estaciones utilizadas para fijar el sistema de referencia. En decir, el cálculo de parámetros de la transformación 3D y su aplicación en el mismo trabajo es equivalente a llevar a cabo un ajuste de la red en el sistema local, pero introduciendo las coordenadas de los puntos fijos con su precisión correspondiente.

Esto muestra nuevamente la importancia de considerar la precisión de los puntos utilizados para fijar el sistema de referencia a la hora de un ajuste en el sistema local. El considerar o no considerar esta precisión afectará tanto a las precisiones como a las coordenadas resultantes del ajuste para el resto de los puntos incluidos.

XII.5. Detección de errores en las coordenadas de la ROI.

Para el caso de la Red Básica de la hoja 237, analizada en el punto anterior, se han estudiado los residuos tipificados de las coordenadas locales introducidas en el ajuste local, para evaluar la precisión de las coordenadas de los vértices de la ROI. Para el caso de los cinco vértices de la hoja 237 se ha comprobado que su precisión está dentro de las precisiones aseguradas por el IGN para estos vértices.



A continuación se va a analizar otra hoja, las 262, en la que se encuentran problemas en las coordenadas de los vértices de la ROI que constituyen la Red Básica.

Después de haber llevado a cabo el test chi-cuadrado y el test de Baarda de detección de errores groseros para las observaciones que constituyen la Red Básica, la solución obtenida del ajuste con constreñimiento interno para esta hoja es la que se muestra en el Gráfico XII-16.

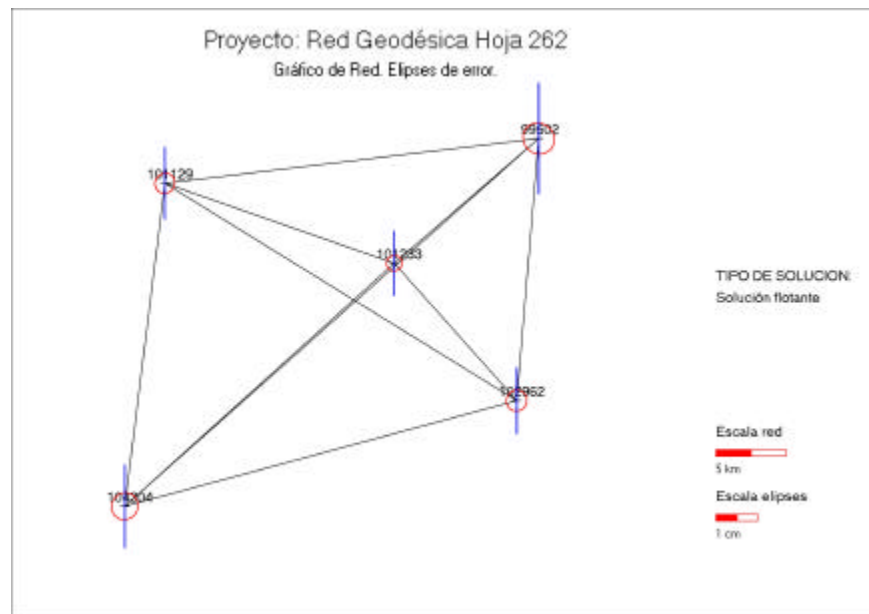


Gráfico XII-16. Solución constreñimiento interno de la hoja 262.

Para controlar la calidad de las coordenadas de los cinco vértices de la ROI que forman la red, igual que se ha hecho en el apartado anterior, se lleva a cabo un ajuste en el sistema local, introduciendo las coordenadas de estas estaciones. Partiendo de la precisión de los vértices de la ROI (rms de 15 cm en planimetría y 30 cm en altimetría), los residuos tipificados en componentes HGL para las coordenadas correspondientes son las que se muestran en la Tabla XII-14. Se puede observar que la componente norte (correspondiente a la componente “y” planimétrica) del vértice 104304 muestra posibilidad de error grosero.



Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
101233	1,30	0,46	2,30
102962	0,98	2,11	2,24
101129	2,55	2,31	2,46
99502	0,91	0,20	0,11
104304	5,00	0,24	1,02

Tabla XII-14. Residuos tipificados coordenadas estaciones ROI hoja 262. Considerando puntos con precisión de 15 cm en planimetría y 30 cm en altimetría.

Eliminando las coordenadas de esta estación en el ajuste, los nuevos residuos tipificados obtenidos (Tabla XII-15) no muestran ya errores en las coordenadas de los cuatro vértices restante, lo que nos puede hacer pensar que existe error en la coordenada “y” de la estación eliminada.

Estación	Residuo Tipificado N	Residuo Tipificado E	Residuo Tipificado H
101233	0,09	0,41	1,60
102962	0,36	0,19	1,37
101129	0,41	0,50	1,61
99502	0,53	0,30	1,65

Tabla XII-15. Residuos tipificados coordenadas estaciones ROI hoja 262.

Para comprobar el error apuntado, calculamos los parámetros de transformación 3D usando tan sólo los cuatro vértices y los aplicamos a las coordenadas ajustadas WGS-84 del vértices 104304. Los errores obtenidos al comparar las coordenadas transformadas del vértice eliminado con las conocidas se muestran en la tabla siguiente:

Estación	Error x (m)	Error y (m)	Error H (m)
104304	-0,028	0,643	0,344

Tabla XII-16. Errores coordenadas estación ROI 104304.



Se aprecia en efecto un error de 64 cm en la componente “y”, no aceptable dentro de la precisión de la ROI.

Se demuestra con esto la utilidad de la aplicación del test de Baarda de detección de errores groseros en un ajuste local, para identificar posibles coordenadas erróneas en los vértices de la Red Geodésica Local, y así poder tomar la decisión de no incluirlos en el cálculo de los parámetros de transformación.



XIII. CONCLUSIONES.

Las conclusiones a las que se ha llegado en el desarrollo de la presente tesis doctoral, se resumen a continuación.

- La metodología propuesta para el ajuste de redes, se muestra como válida para la resolución de redes geodésicas observadas con GPS, en sus diferentes alternativas, y sistemas de referencia.
- La herramienta UCORed-GPS, se presenta como una aplicación integrada para la resolución de redes GPS observadas, siendo de fácil uso, adaptada a un amplio espectro de aplicaciones dentro del campo de la georreferenciación, con la posibilidad de aplicación con diferentes sistemas de referencia. Adicionalmente, la aplicación permite llevar a cabo un estudio de la calidad de las observaciones, así como dar una estimación de la precisión de la solución, en términos de elipses de error y error medio cuadrático altimétrico, con posibilidad de representación gráfica.
- La metodología propuesta para el cálculo de Puntos de Apoyo, considerando ajustes independientes para cada uno de ellos, y no como una red conjunta, se ha demostrado que es la adecuada, al no influir posibles observaciones menos precisas en la precisión de puntos asociados a líneas base de mayor precisión, dándonos como resultados unas precisiones estimadas más fidedignas.
- El método propuesto para la detección de errores en coordenadas conocidas de estaciones mediante la aplicación del test de Baarda de detección de errores groseros, tanto en el sistema global como en los posibles sistemas locales, se presenta como un método de gran utilidad en la detección de coordenadas locales conocidas de menor precisión de la definida.



- Las precisiones alcanzadas al ajustar observaciones GPS en el sistema global son muy altas, del orden centimétrico o incluso milimétrico, muy superiores a las precisiones actuales para los marcos locales de referencia, debido a que dichas posiciones fueron obtenidas con metodologías clásicas menos precisas. Esto lleva a la plena justificación del uso del GPS para la georreferenciación y densificación de los marcos locales de referencia existentes.
- En la aplicación práctica II se ha demostrado la alta precisión del nuevo marco de referencia global que se está estableciendo en España. La precisión a priori asegurada por el IGN para Regente son de cinco centímetros en sus tres componentes, pero en la zona de estudio se ha comprobado que es mejor de 1 cm en sus tres componentes.
- Las precisiones obtenidas en el sistema local para una red GPS están influidas principalmente por la precisión de las coordenadas locales utilizadas para fijar el sistema de referencia, comprobándose la pérdida de precisión de los resultados de una misma red en el sistema local respecto a los mismos en el sistema global.
- Importancia del concepto de punto fiducial, como estación con coordenadas conocidas con una determinada precisión, frente al concepto de punto fijo, a la hora de fijar el sistema de referencia, tanto en el sistema local como en el sistema global. Influencia en términos de coordenadas y de precisión resultante en el proceso de ajuste.
- Las precisiones obtenidas en la aplicación de una transformación tridimensional de posiciones WGS-84 y posiciones locales, utilizando cotas ortométricas locales, son del mismo orden de magnitud a las obtenidas en una transformación 2D para planimetría, y una transformación con modelo lineal de alturas para altimetría, para cualquier extensión geográfica considerada.



- Mientras que la precisión planimétrica se ve poco influida por la extensión del área en la que se aplique la transformación, no ocurre lo mismo con la precisión altimétrica, que disminuye de manera importante con la extensión. Para extensiones superiores a 1-2 hojas del MTN 1:100.000, las precisiones alcanzadas en la transformación altimétrica son similares a las obtenidas con un modelo de geoide global (EGM-96)
- Necesidad de geoide local para obtención de cotas ortométricas precisas a partir de observaciones GPS.



XIV. BIBLIOGRAFÍA

- AFNOR (Association Française de Normalisation) 1995. *Geographic Information-Referencing-Position*. CEN/TC 287/WG 4
- Aguilera Ureña, M.J. 1997. *El Sistema GPS en Aplicaciones Geodésicas y Cartográficas*. Evaluación de una metodología de Cálculo de Redes y de Transformación entre Sistemas de Referencia. Trabajo Profesional Fin de Carrera. ETSIAM.
- Aguilera Ureña, M.J., Meroño de Larriva, J.E. Manzano Agugliaro, F. 2001. *Densificación del Marco de Referencia WGS-84 en Andalucía mediante la Observación de una Red GPS*. Actas XIII Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. Bádajoz, Junio 2001.
- Alamini, Z., Boucher, C. 1996. *International Terrestrial Reference Frame*. GPSWord. Septiembre 1996. pp 71-74.
- Altshuler E.E. y Kalagham P.M. 1974. *Tropospheric Range Error Correction for the Navstar System*. Microwave Physics Laboratory, Air Force Cambridge Laboratories, April 1974.
- Anderson A.J., Cazenave A. 1986. *Space Geodesy and Geodynamics*. Academic Press.
- Ashkenazi V. 1998. *GPS for Environmental Monitoring*. Conferencia invitada. Sistemas de Referencia y Geodesia Espacial. I Asamblea Hispano Portuguesa de Geodesia y Geofísica. Aguadulce (Almería). Febrero de 1998.
- Ashtech, Inc. 1999. *Ashtech Office Suite, Use's Manual*. Spectra Precision Terrasat GmbH, Germany and Ashtech, Inc, USA.
- Berman A.L. 1976. *The prediction of Zenit Refraction from Surface Mesurments of Meteorological Parameters*. JPL TR-32-1602. California Institute of Technology, Jet Propulsion Laboratory, Psadena, C. A, 1976.
- Black H. D. y Eisner A. 1984. *Correcting Satellite Doppler Data for Tropospheric Effect*. Journal of Geophysical Research, Vol. 89 1984.
- Bomford, G. 1980. *Geodesy*. Fourth Edition. Clarendon Press. Oxford.
- Borland International. 1995. *Dephi User's Guide*. USA.



- Boucher C., Altamimi Z., Feissel M., Sillard P. 1996. *Results and Analysis of the ITRF94*. IERS Technical Note 20, Central Bureau of the International Earth Rotation Service, Observatoire de Paris, Francia. Marzo 1996.
- Boucher C., Pascal W. 1988. *The Use of GPS at IGN: Geodesy, Geophysics, Engineering*. Lectures Notes in Earth Science, Vol. 19: GPS-Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Proceedings of the International GPS-Workshop Damstadt.
- Bowen R., et al. 1986. *GPS Control System Accuracies*, Global Positioning System Papers, Vol. III, Institute of Navigation, Washinton, DC, 1986.
- Brockmann, E., Gurtner, W. *Combination of GPS solution for Densifications of the European Network : Concepts and Results derives from the European Associated Analysis Center*. Ftp ://ftpserver.oma.be/KSB-ORB/EUREF/eurefhome2.html.
- Canas, J.A. 1999. *El Instituto Geográfico Nacional realiza con técnicas digitales el mapa de España*. Revista fuentes estadísticas. Estadística y geografía. Nº 38. Octubre 1999.
- Cantú, M. 1998. *La Biblia del Delphi 3*. Anaya Multimedia. Madrid.
- Capdevila, et al. 1994. *Curso sobre Técnicas GPS*. Palencia, Septiembre 1994.
- Caturla, J.L. 1988. *Sistema de Posicionamiento Global (GPS)*. MOPU.
- Chueca Pazos, M., Herráez Bosquera, J., Berné Valero, J.L. 1996. *Tratado de Topografía 3. Redes Topográficas y locales. Microgeodesia*. Paraninfo, Madrid,
- Committee on the Future of the Global Positioning System. 1995. *The Global Positioning System*. Commission on Engineering and Technical Systems, National Research Council. National Academy Press. Wasington, D.C.
- Cross P. A., Sellers P.C. 1988. *GPS as Local Geological Control and National Geodetic Control*. Lectures Notes in Earth Science, Vol. 19: GPS-Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Proceedings of the International GPS-Workshop Damstadt. 1988.
- Dalda Monrón, A. 1997. *DGPS y Levantamientos Topográficos. Su empleo en actualización y control de Mapa Topográfico Nacional*. Mappì ng Mayo 1997.
- Diggelen F. V. 1998. *GPS Accuracy: Lies, Damn Lies, and Statistics*. GPS World Enero 1998.



- DMA. 1991. *World Geodetic System 1984. Its Definition and Relationship with Local Geodetic Systems*. DMA Technical Report. DMA TR 8350.2, Washington, DC. Second Edition.
- Featherstone, W., Langley R.B. 1997. *Coordinates and Datums and Maps ¡Oh My !*. GPSWord. Enero 1997. Páginas 34-41.
- Federal Geodetic Data Committee (DGDC). 1998. *Geospatial Positioning Accuracy Standards*. FGDC-STD-007-1998. <http://fgdc.er.usgs.gov/fgdc.html>
- Ferrer Torio, R. et al. 1991. *Sistema de Posicionamiento Global (GPS)*. Departamento de Ingeniería Geográfica y Técnicas de Expresión Gráfica. Universidad de Cantabria. Documentación de Cursos de Verano de Laredo. Universidad de Cantabria. Laredo 1991.
- Ferrer Torio, R.; Piña Patón, B. 1992. *Geodesia Geométrica*. Servicio de Publicaciones ETSICCP. Santander.
- Gant, D.B., Pearse, M.B. 1995. Proposal for a Dynamic Geodetic Datum for New Zealand. XXI Asamblea General del IUGG. Boulder, Colorado, USA. Julio 1995.
- García Cortés, S. 2000. *Diseño y Ajuste de Redes Topográficas en Ingeniería. Una Aplicación Informática*. Tesis doctoral. Universidad de Oviedo.
- Geiger A. 1988. *Modeling of Phase Center Variation and its Influence on GPS-Positioning*. Lectures Notes in Earth Science. Vol. 19: GPS- Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Proceedings of the International GPS-Workshop. Darmstadt.
- Gómez, A. 1989 *Estudio comparativo de modelos de triangulación aérea, estudio de densificación de la red geodésica española*. Madrid 1989. 271 p. Tesis doctoral.
- Grafarend, E.W., Sansó, F. 1985. *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.
- Gubler, E. 1999. *EUREF89*. Resumen del Work Group VIII on Geodesy for the Year 1999. http://www.eurogeographics.org/WorkGroups/WG8/WG8_rep1999.html
- Gurtner, W. *Guidelines for a Permanent GPS Network*. <http://www.oma.be/KSB-ORB/EUREF/permgps.html>.
- Hartl P. 1988. *System and Hardware oriented aspects of GPS Applications*. Lectures Notes in Earth Science , Vol. 19: GPS-Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Proceedings of the International GPS-Workshop Damstadt. 1988.



- Harvey, B.R. 1986. *Transformation of 3D coordinates*. Aust. Surveyor, 33(2). Pp 105-125.
- Harvey, B.R. 1994. *Practical Least Squares and Statistics for Surveyors*. Monograph 13. School of Geomatic Engineering. The University of New South Wales. Segunda edición.
- Heiskanen W.A. Moritz H. 1967. *Physical Geodesy*. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.
- Higgins, M.B. 1997. *Recent Trends in Reference Systems and Heighting*. 64 FIG PC Meeting and International Symposium, Singapur, 11-16 Mayo 1997.
- Higgins, M.B. 1999. *Reference Systems and Heighting*. <http://www.uq.net.au/~zzmhiggi/Profesinal/t1.htm>
- Hofmann-Wellenhof, B. 1993. *Global Positioning System. Theory and practice*. Springer-Verlag Wien. New York.
- Hopfield H. S., 1969. *Two Quartic Tropospheric Refractivity Profile for Correcting Satellite Data*. Journal of Geophysical Research, April 1969.
- Hopfield H. S. 1970. *Tropospheric Effect on Electromagnetically Measured Range: Prediction from Surface Weather Data*. Applied Physics Laboratory, Johns Hopkins University, Baltimore, MD, July 1970.
- Hopfield H. S. 1972. *Tropospheric Range Error Parameter- Further Studies*. Applied Physics Laboratory, Johns Hopkins University, Baltimore, MD, June 1972.
- ICV. 2001. *Red Geodésica de 4º Orden de la Comunidad Valenciana*. Página web Instituto Cartográfico Valenciano. <http://www.gva.es/icv/4ORDEN.HTM>
- IGN. 2000. *La Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales (Regente)*. Bolletín Informativo Instituto Geográfico Nacional. Ministerio de Fomento. N°4. Octubre-Diciembre 2000.
- IGN. 2001. *Red Española de Nivelación de Alta Precisión. (RED-NAP)*. Bolletín Informativo Instituto Geográfico Nacional. Ministerio de Fomento. N°6. Abril-Junio 2001.
- Janes H. W, Langley R.B. y Newby S.P. 1991. *Analisis of Tropospheric Delay Prediction Models*. Bulletin Géodésique, Vol 65, 1991.
- Joosten, P., Tiberius, C. 2000. *Fixing the Ambiguities. Are You Sure They're Right?.* GPS WORLD. Mayor 2000.



- Joyanes Aguilar, L. 1993. *Programación en Turbo Pascal. Versiones 5.5,6.0 y 7.0.* Segunda edición. McGraw-Hill. Madrid.
- Junkins D., Garrand G. 1998. *Demystifying Reference Systems. A Chronicle of Spatial Reference Systems.* Geodetic Survey Division Geomatics Canada. <http://www.geod.nrcan.gc.ca>
- Kearsley, A.F.W. 1988. *Geodetic Surveying.* Monograph 8. School of Surveying. University of New South Wales.
- Klobuchar J.A., 1987 (1). *A First-Order, World Wide, Ionospheric Time Delay Algorithm.* AFCRL-TR-75-0502, AD A018862. Defense Technical Information Center, Cameron Station, Alexandria, VA 22304.
- Klobuchar J.A., 1987 (2) *Ionospheric Time-Delay Algorithm for Single-Frequency GPS Users.* IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol AES-23, n° 3, 1987.
- Kösters, A.J.M. 1992. *Some Aspects of a 3-Dimensional Reference System for Surveying in the Netherlands.* Delft University of Technology. Report of the Faculty of Geodetic Engineering Mathematical and Physical Geodesy. Delft, The Netherlands.
- Langley, R. B. 1997. *The GPS Error Budget.* GPS WORLD. Marzo 1997.
- Langley, R. B. 1999 (1). *The Integrity of GPS.* GPS WORLD. Marzo 1999.
- Langley, R. B. 1999 (2). *Dilution of Precision.* GPS WORLD. Mayo 1999.
- Leick, A. 1992 (1). *Introducing GPS Survey Techniques.* ACSM Bulletin, Julio/Agosto.
- Leick, A. 1992 (2). *Delineating Theory for GPS Surveying.* Surveying Engineering, 118(2).
- Leick, A. 1993 (1). *The Least-Squares Tool Box (I).* ACSM Bulletin, Julio/Agosto 1993.
- Leick, A. 1993 (2). *The Least-Squares Tool Box (II).* ACSM Bulletin, Septiembre/Octubre 1993.
- Leick, A. 1993 (3). *The Least-Squares Tool Box (III).* ACSM Bulletin, Noviembre/Diciembre 1993.
- Leick, A. 1994 (1). *GPS Vector Networks.* ACSM Bulletin, Enero/Febrero 1994.
- Leick, A. 1995 (1). *GPS on the Infobahn.* ACSM Bulletin, Enero/Febrero 1995.



- Leick, A. 1995 (3). *Using GPS to Facility Accuracy Standards*. ACSM Bulletin, Mayo/Junio 1995.
- Leick, A. 1995 (4). *GPS Satellite Surveying*. J. Wiley and Sons. New York. Segunda Edición.
- Lichten S. M. 1991. *High Precision Applications of the Global Positioning System*. Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology, Pasadena California. National Aeronautics and Space Administration, Washington, Technology 2000, Vol. 2.
- Lohmar F. J. 1988. *World Geodetic System 1984-Geodetic Reference System of GPS Orbits*. Lectures Notes in Earth Science. Vol. 19: GPS – Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Proceedings of the International GPS-Workshop. Darmstadt.
- López Curvo, S. 1993. *Topografía*. Ediciones Mundi-Prensa. Madrid.
- Maling, D.H. 1992. *Coordinate Systems and Map Projections*. Pergamon Press. Oxford.
- Malys S, Jensen P. 1994. *Maintenance and Enhancement of the World Geodetic System 1984*. Instituto de Navegación, ION GPS 94. Salt Lake City, Utah, Septiembre 1994.
- Manzano Agugliaro, F., Aguilera Ureña, MJ., Meroño de Larriva, JE. 1998. *Estudio de alternativas en al Transformación de Coordenadas para la Densificación de Redes Geodésicas Levantadas con GPS*. Mapping, Noviembre 1998.
- Manzano Agugliaro, F. 1999. *Aplicación del Sistema de Posicionamiento Global GPS a la Georreferenciación y Control Geométrico en la Ingeniería*. Tesis Doctoral, Universidad de Córdoba.
- Marini J.W. 1972. *Correction of Satellite Tracking data for an Arbitrary Tropospheric Profile*. Radio Science, Vol 7. 1972.
- Martín Asín, F. 1983. *Geodesia y Cartografía Matemática*. Paraninfo, Madrid.
- Marth R.B. 1991. *Topographic Surveyor - Transitioning to the 90s*. U. S. Army Engineer Topographic Laboratory (USAETL). Topographic Developments Laboratory, Surveying Division, Tactical Positioning Branch, Fort Belvoir, Virginia.
- Marth R.B. 1992. *GPS Army research and applications*. U. S. Army Topographic Engineer Center (TEC). Topographic Developments Laboratory, Surveying Division, Tactical Positioning Branch, Fort Belvoir, Virginia.



- Nard G. P. 1988. *GPS Geodesy and Kinematic Topography measurements and data procesing*. Lectures Notes in Earth Science , Vol. 19: GPS-Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Proceedings of the International GPS-Workshop Damstadt. 1988.
- NIMA (1). *Satellite Geodesy. SP3 Format Description*.
<http://164.214.2.59/GandG/sp3format.html>
- NIMA (2). *Geodesy for the Layman*. Technical Report 80-003.
<http://164.214.2.59/GandG/geolay/TR80003A.htm>
- NIMA (3). *NIMA/NASA EGM96, N=M=360 Earth Gravity Model*.
<http://www.nima.mil/GandG/wgs-84/egm96.html>
- Pachelski W. 1994. *Possible Uses of Natural (Baricentric) Coordinates for Positioning with the GPS*. Technical Reports. Department of Geodesy. Universität Stuttgart.
- Parkinson B.W., Spilker, J.J. 1996. *Global Positioning System: Theory and Applications*. Progress in Astronautics and Aeronautics. Volume 163
- Piriz Mira, G., et al. 1999. *Efemérides Precisas GPS por Internet*. Mapping Enero 1999.
- Rapp, R. H., Wang, Y. M. Pavlis, N.K. 1991 (1). *The Development of the Nasa GSFC and DMA Joint Geopotencial Model*. Simposium Internacional de Gravimetría, Geoide y Geodesia Marina. Tokio, Japón. Septiembre 1996.
- Rapp, R. H., Wang, Y. M. Pavlis, N.K. 1991 (2). *The Ohio State 1991 geopotencial and Sea surface topography haronic coefficient models*. Report 410. Department of Geodetic Science, Ohio State Univesity, Columbus, Ohio.
- Remondi, B.W. 1984 *Using the Global Positioning System (GPS) Phase Observable for Relative Geodesy : Modeling, procesing and Result*. Ph. D. Dissertation, the University of Texas at Austin. Texas, 1984.
- Remondi, B. W. 1985 (1) *Performing centimeter accuracy relative surveys in seconds using GPS carrier phase*. Proceedings of the First International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Rockville, Md, U.S.A. April, Vol II.
- Remondi, B. W. 1985 (2) *Modeling the GPS carrier phase for geodetic applications*. Proceedings of the First International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Rockville, Md, U.S.A. April, Vol I.
- Remondi, B. W. 1985 (3). *Using the Global Positioning System (GPS) phase observable for relative geodesy: Modeling, processing, and results*. Ph. D.



- Dissertation, Center for Space Research, The University of Texas at Austin, Austin, Tx, U.S.A, May. Available from National Geodetic Information Center, N/CG17x2, Rockville, Md 20852, U.S.A.
- Richardus, P. 1974. *Map Projection for Geodesists, cartographers and geographers*. North-Holland/ American Elsevier. Amstendam.
- Rizos, C. 1999. *Principles and Practice of GPS Surveying*. SNAP-UNSW. http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/gps/gps_survey/principles_gps.htm
- Robertson K. D. 1985. *The Potential of the Navstar Global Positioning System for the Corps of Engineers, Civil Works*. U. S. Army Engenieer Topographic Laboratories. Fort Belvoir, VA.
- Rodriguez-Solano R. 1994. *Aplicación de los Sistemas GPS para la Evaluación de Zonas Afectadas por los Incendios Forestales*. Tesis Doctoral. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes. Universidad Politécnica de Madrid.
- Saastamoinen J. 1972. *Atmospheric Correction for the Troposphere and Stratosphere in Radio Ranging of Satellites*. Geophysical Monograph 15, American Geophysical Union, Washinton, DC.
- Saastamoinen J. 1973. *Contribution to the Theory of Atmospheric Refraction*. Bulletin Géodésique, Vol 105, Sept. 1972. Vol 106, Dec. 1972. Vol 107, March 1973.
- Schwarz, K.P., Sideris, M.G., Forsberg, R. 1990. *The use of FFT in physical geodesy. Review paper*. Geophysical Journal International. Vol. 100. N°3.
- Seeber, G. 1993. *Satellite Geodesy. Foundations, Methods and Applications*. Walter de Gruyter. Benlín-New York.
- Seeger, H. 1994. *The New European Reference Datum and its Relationship to WGS84*. FIG XX Congress, Commission 5. Melbourne, Australia. Marzo 1994.
- Shaowein H., Rizos, C. 1997. *Comparing GPS Ambiguity Resolution Techniques*. GPSWORLD Octubre 1997.
- Shinkle K. 1998. *A GPS How-TO: Conducting Highway surveys the NYSDoT way*. GPSworld. Febrero 1998.
- Snyder, J.P. 1989. *Map Proyection. A Working Manual*. U S Geological Survey Profesional Papers 1395. U S Government Printing Office. Washington D. C.
- Spilker Jr. 1996. *Tropospheric Effects on GPS*. Chapter 13. Parkinson B.W.1996.



- Stiller A.H. 1988. *Technological Utilization of Space with special regard to Navigation Satellite Systems*. Lectures Notes in Earth Science , Vol. 19: GPS-Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Proceedings of the International GPS-Workshop Darmstadt. 1988.
- Stöker-Meiner E. 1988. *Relativistic Models of Phase and Doppler Observations of electromagnetic signals*. Lectures Notes in Earth Science. Vol. 19: GPS-Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Proceedings of the International GPS-Workshop. Darmstadt.
- Strang, G., Borre, K. 1997. *Linear Algebra, Geodesy and GPS*. Wellesley-Cambridge Press.
- Sundakov Ya. A. 1981. *Trabajos Geodésicos en la Construcción de Grandes Obras Industriales y Altos Edificios*. Ed. Mir.
- Sunkel, H. 1996. *International Geoid Commission Activity Report, 1991-1995*. Comisión XII de la Sección III de la Asociación Internacional de Geodesia.
- Teunissen, P.J.G., Kleusberg, A. 1998. *GPS for Geodesy*. Segunda edición. Springer-Verlag. Berling, Heidelberg, New York.
- Teunissen, P.J.G. 1998. *Success probability of integer GPS ambiguity rounding and bootstrapping*. Journal of Geodesy (1998) 72.
- Teunissen, P.J.G. 1999. *The probability distribution of the GPS baseline for a class of integer ambiguity estimators*. Journal of Geodesy (1999) 73.
- Thornton C.L., Melbourne, W.G., Dixon, T.H. 1986. *NASA GPS- based geodetic program in México and the Caribbean*. Proceedings of the Fourth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, University of Texas. 1986.
- Tiberius, C., Jonkman, N., Kenselaar, F. 1999. *The Stochastics of GPS Observables*. GPS WORLD Febrero.
- Torge, W. 1991. *Geodesy*. Walter de Gruyter, Berlín.
- Torrecillas Lozano, C. 1998. *Resolución de Ambigüedades GPS. Técnicas Empleadas y Estudios Futuros*. Mapping. Octubre 1998.
- Trimble Navigation Limited. 1992. *TRIMNET-plus for GPSurvey*.
- Vanicek, P., Krakiwsky, E.J. 1986. *The Geodesy: The concepts*. North-Holland, Amsterdam.



- Wells D., N. Beck, D. Delikaraoglou, A. Kleusberg, E.J. Krakiwsky, G. Lachapelle, R. B. Langley, M. Nakiboglu, K.P. Schwarz, J.M Tranquilla and P. Vanicek. 1986. *Guide to GPS Positioning*. Canadian GPS Associated, Fredericton, N.B. Canada.
- White House. 2000. *Statement by the president regarding the united states decision to stop degrading global positioning system accuracy*. Office of the Press Secretary, 1 de Mayo de 2001.
- Wormley, S.J. 2001, *GPS Errors & Estimating Your Receiver's Accuracy. What's the difference between repeatability and accuracy?*. Iowa State University. http://www.cnde.iastate.edu/staff/swormley/gps/check_sa.html
- Wu J., Lin S.G. 1995. *Height accuracy of one and a half centimetres by GPS rapid static surveying*. International Journal of Remote Sensing, vol 16, nº 15, 2863 - 2874.
- Zhu .S.Y., Groten E. 1988. *Relativistic effects in GPS*. Lectures Notes in Earth Science. Vol. 19: GPS- Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Proceedings of the International GPS-Workshop. Darmstadt.

**AI. TABLAS APLICACIÓN PRÁCTICA I. GUATEMALA.****Tabla AI-1. Valores de los residuos tipificados solución flotantes Red Básica Guatemala. Solución con todas las líneas base observadas.**

Estación desde	Estación hasta	Residuo $\Delta x(m)$	Residuo $\Delta y(m)$	Residuo $\Delta z(m)$	Residuo tipificado $\Delta x(m)$	Residuo tipificado $\Delta y(m)$	Residuo tipificado $\Delta z(m)$
JICARO	MONJAS	0,118	-0,019	0,035	0,143	0,051	0,190
JICARO	IPALA	0,194	0,062	-0,008	0,200	0,143	0,039
ZACAPA	IPALA	0,055	0,024	0,021	1,618	0,276	0,481
ZACAPA	MONJAS	-0,144	-0,029	0,041	0,426	0,206	0,483
MONJAS	IPALA	0,097	0,017	-0,020	0,325	0,050	0,196
JICARO	ZACAPA	0,099	-0,064	0,045	1,717	0,397	0,583
IPALA	GUIJA	0,003	0,014	-0,007	0,139	0,110	0,184
IPALA	MONJAS	0,002	0,015	-0,007	0,143	0,144	0,208
IPALA	YUPI	0,002	0,009	-0,004	0,066	0,070	0,112
GUIJA	MONJAS	0,000	0,009	-0,002	0,018	0,068	0,055
GUIJA	YUPI	-0,001	0,000	0,001	0,048	0,000	0,030
MONJAS	YUPI	0,000	-0,010	0,003	0,015	0,074	0,085
IPALA	GUIJA	0,029	0,055	0,018	0,118	0,097	0,091
GUIJA	CHIQUMULA	0,078	-0,100	-0,015	0,328	0,176	0,071
ESQUIPULAS	CHIQUMULA	-0,010	0,009	-0,013	0,188	0,074	0,201
ESQUIPULAS	IPALA	0,105	-0,007	0,000	1,934	0,048	0,006
ESQUIPULAS	GUIJA	-0,030	-0,057	-0,004	0,482	0,355	0,057
CHIQUMULA	IPALA	-0,035	-0,004	-0,012	1,699	0,014	0,154
CHANMAGUA	CARPAJA	0,006	0,019	-0,005	0,225	0,071	0,066
CHANMAGUA	CHIQUMULA	-0,006	0,005	-0,001	0,439	0,031	0,030
CHANMAGUA	ESQUIPULAS	0,011	-0,051	0,014	0,310	0,128	0,124
CARPAJA	CHIQUMULA	-0,012	-0,013	0,003	0,413	0,040	0,034
CHIQUMULA	ESQUIPULAS	0,018	-0,048	0,014	0,469	0,109	0,120
CARPAJA	ESQUIPULAS	0,001	-0,064	0,004	0,026	0,125	0,027
CHIQUMULA	CARPAJA	-0,089	-0,073	0,039	0,116	0,059	0,135
CHIQUMULA	DOÑA MARIA	0,059	-0,346	0,104	0,178	0,420	0,487
DOÑA MARIA	ZACAPA	0,007	0,126	-0,051	0,184	0,237	0,296



CHIQUIMULA	ZACAPA	0,017	0,009	0,006	0,774	0,030	0,059
CARPAJA	ZACAPA	0,019	0,052	-0,013	0,494	0,117	0,091
CARPAJA	DOÑA MARIA	0,014	0,006	0,024	0,221	0,008	0,106
LA TINTA	ESTOR	-0,216	0,220	-0,075	4,128	2,417	1,579
LA TINTA	ZACAPA	0,030	-0,083	0,041	1,070	1,467	0,995
ESTOR	DOÑA MARIA	-0,003	0,033	-0,024	0,076	0,569	1,020
ESTOR	ZACAPA	-0,002	0,054	-0,024	0,067	1,400	1,389
DOÑA MARIA	ZACAPA	0,006	0,044	-0,012	0,167	0,084	0,081
LA TINTA	DOÑA MARIA	0,019	-0,071	0,035	0,628	0,912	0,923
ESTOR	LA TINTA	-0,200	-0,187	0,147	4,625	0,324	0,872
ZACAPA	LA TINTA	0,151	-0,130	0,011	3,431	0,122	0,036
JICARO	LA TINTA	0,113	0,000	0,015	1,428	0,000	0,029
ESTOR	JICARO	-0,010	-0,179	0,018	0,112	0,121	0,044
JICARO	ZACAPA	-0,211	0,165	0,018	4,824	1,316	0,249
ESTOR	ZACAPA	0,046	-0,121	0,038	1,082	0,213	0,245
ZACAPA	DOÑA MARIA	-0,023	-0,030	0,002	0,323	0,261	0,059
ZACAPA	JICARO	-0,170	-0,017	0,006	2,859	0,089	0,062
JICARO	ZACAPA	-0,055	-0,051	0,080	0,565	0,225	0,520
ESQUIPULAS	CHIQUIMULA	-0,017	0,022	-0,010	0,200	0,148	0,120
IPALA	CHIQUIMULA	0,019	-0,010	-0,028	0,311	0,063	0,406



Tabla AI-2. Residuos y residuos tipificados Red de segundo orden Cabañas-Teculután con todas las líneas base observadas.

Estación desde	Estación hasta	Residuo $\Delta x(m)$	Residuo $\Delta y(m)$	Residuo $\Delta z(m)$	Residuo tipificado $\Delta x(m)$	Residuo tipificado $\Delta y(m)$	Residuo tipificado $\Delta z(m)$
PALMILLA	CABANAS	-0,005	0,001	0,001	0,577	0,015	0,033
PALMILLA	TECULUTAN	0,001	0,012	-0,004	0,159	0,190	0,188
PALMILLA	TECULUTAN	0,004	0,007	-0,004	0,271	0,098	0,179
JICARO	ZACAPA	-0,051	0,054	0,035	0,792	0,349	0,488
PALMILLA	CABANAS	-0,001	-0,011	-0,015	0,026	0,132	0,329
PALMILLA	CABANAS	-0,007	-0,006	0,005	0,434	0,047	0,124
TECULUTAN	PALMILLA	-0,004	-0,012	0,003	0,520	0,183	0,132
TECULUTAN	PALMILLA	-0,007	-0,010	0,004	0,464	0,126	0,178
ZACAPA	JICARO	-0,365	-0,317	0,062	0,241	0,487	0,183
ESTANZUELA	ZACAPA	0,129	-0,049	0,041	3,126	0,617	0,847
JICARO	CABANAS	0,023	-0,045	-0,014	0,261	0,326	0,165
JICARO	PALMILLA	0,059	0,000	-0,005	0,728	0,003	0,065
TECULUTAN	JICARO	-0,358	-0,220	0,020	1,400	0,656	0,094
TECULUTAN	ZACAPA	0,166	-0,029	0,057	2,255	0,238	0,648
CABANAS	ZACAPA	-0,195	-0,126	0,221	3,455	1,121	1,909
PALMILLA	ZACAPA	-0,152	-0,104	0,149	2,645	0,841	1,362
ESTANZUELA	JICARO	0,064	0,114	0,004	1,191	0,756	0,070
TECULUTAN	ESTANZUELA	0,067	0,063	-0,013	3,998	1,209	0,669

**Tabla AI-3 Residuos y residuos tipificados Red de segundo orden Cabañas-Teculután. Sin línea Teculután-Estanzuela.**

Estación desde	Estación hasta	Residuo $\Delta x(m)$	Residuo $\Delta y(m)$	Residuo $\Delta z(m)$	Residuo tipificado $\Delta x(m)$	Residuo tipificado $\Delta y(m)$	Residuo tipificado $\Delta z(m)$
PALMILLA	CABANAS	-0,002	0,009	-0,002	0,254	0,137	0,103
PALMILLA	TECULUTAN	-0,001	0,004	-0,001	0,181	0,077	-0,059
PALMILLA	TECULUTAN	0,002	-0,001	-0,001	0,145	0,026	0,065
JICARO	ZACAPA	-0,050	0,091	-0,011	1,055	0,785	0,212
PALMILLA	CABANAS	0,002	-0,003	-0,018	0,060	0,044	0,529
PALMILLA	CABANAS	-0,004	0,002	0,002	0,318	0,016	0,064
TECULUTAN	PALMILLA	-0,002	-0,003	0,000	0,310	0,068	0,015
TECULUTAN	PALMILLA	-0,005	-0,001	0,001	0,409	0,015	0,066
ZACAPA	JICARO	-0,366	-0,354	0,108	0,324	0,729	0,428
ESTANZUELA	ZACAPA	0,025	-0,041	0,005	1,175	1,043	0,185
JICARO	CABANAS	-0,046	-0,042	-0,003	0,718	0,418	0,058
JICARO	PALMILLA	-0,014	-0,006	0,008	0,232	0,059	0,153
TECULUTAN	JICARO	-0,284	-0,206	0,004	1,492	0,828	0,024
TECULUTAN	ZACAPA	0,242	0,022	-0,005	4,537	0,255	0,076
CABANAS	ZACAPA	-0,125	-0,092	0,165	3,107	1,121	1,964
PALMILLA	ZACAPA	-0,079	-0,063	0,090	1,926	0,696	1,140
ESTANZUELA	JICARO	-0,041	0,085	0,014	1,170	0,826	0,363

**Tabla AI-4. Residuos y residuos tipificados Red de segundo orden Cabañas-Teculután. Sin línea Teculután-Estanzuela y sin línea Teculután-Zacapa.**

Estación desde	Estación hasta	Residuo $\Delta x(m)$	Residuo $\Delta y(m)$	Residuo $\Delta z(m)$	Residuo tipificado $\Delta x(m)$	Residuo tipificado $\Delta y(m)$	Residuo tipificado $\Delta z(m)$
PALMILLA	CABANAS	0,000	0,011	-0,003	0,098	0,236	0,188
PALMILLA	TECULUTAN	-0,002	0,001	0,000	0,608	0,032	0,010
PALMILLA	TECULUTAN	0,000	-0,004	0,000	0,024	0,109	0,026
JICARO	ZACAPA	-0,025	0,095	-0,023	0,781	1,219	0,661
PALMILLA	CABANAS	0,004	-0,001	-0,018	0,174	0,025	0,798
PALMILLA	CABANAS	-0,002	0,003	0,001	0,229	0,046	0,069
TECULUTAN	PALMILLA	0,000	-0,001	-0,001	0,117	0,020	0,099
TECULUTAN	PALMILLA	-0,003	0,002	0,000	0,414	0,047	0,029
ZACAPA	JICARO	-0,391	-0,358	0,120	0,508	1,081	0,698
ESTANZUELA	ZACAPA	0,033	-0,043	0,003	2,280	1,617	0,168
JICARO	CABANAS	-0,071	-0,043	-0,002	1,629	0,622	0,046
JICARO	PALMILLA	-0,041	-0,008	0,010	1,023	0,119	0,285
TECULUTAN	JICARO	-0,255	-0,201	0,001	1,967	1,188	0,008
CABANAS	ZACAPA	-0,075	-0,088	0,152	2,843	1,634	2,724
PALMILLA	ZACAPA	-0,026	-0,056	0,076	0,994	0,983	1,465
ESTANZUELA	JICARO	-0,058	0,079	0,024	2,468	1,138	0,937

**A.II. TABLAS APLICACIÓN PRÁCTICA II. ANDALUCÍA.****Tabla AII-1. Residuos y residuos tipificados solución constreñimiento interno Red Bloque I Andalucía.**

Estación desde	Estación hasta	Residuo Ä x(m)	Residuo Ä y(m)	Residuo Ä z(m)	Residuo tipificado Ä x(m)	Residuo tipificado Ä y(m)	Residuo tipificado Ä z(m)
96299	92018	-0,005	-0,010	0,005	-0,077	-0,874	0,102
96299	92103	0,035	0,001	0,027	0,487	0,084	0,517
96299	92103	-0,019	0,006	-0,037	-0,471	0,294	-1,489
96299	90090	0,033	0,011	0,016	0,631	1,123	0,387
92018	92103	0,043	0,014	0,025	0,508	0,992	0,405
92018	94280	0,040	0,044	0,007	0,276	0,755	0,092
92103	90090	-0,039	0,014	-0,033	-0,464	0,982	-0,504
92103	90090	0,009	0,014	0,004	0,336	0,953	0,224
92018	90090	0,000	0,012	-0,018	0,001	0,136	-0,093
96299	94280	-0,165	-0,046	-0,085	-0,395	-0,856	-0,277
94280	90090	-0,009	-0,014	-0,009	-0,048	-0,614	-0,062
92103	94280	-0,072	0,027	-0,054	-0,400	1,176	-0,411
92018	92103	0,051	-0,006	0,035	0,776	-0,494	0,654
92018	92103	0,027	0,012	0,039	0,313	1,052	0,602
92281	94461	0,004	0,008	-0,003	0,056	0,673	-0,05
92281	92408	0,034	0,010	0,023	0,390	0,745	0,327
92281	94280	0,019	-0,005	0,009	0,183	-0,264	0,105
92281	90090	0,030	0,005	0,026	0,288	0,278	0,309
94461	94280	0,012	-0,011	0,009	0,114	-0,644	0,107
94461	92408	0,025	0,002	0,021	0,322	0,146	0,345
94461	90090	0,024	-0,002	0,027	0,219	-0,105	0,314
92408	94280	-0,014	-0,010	-0,011	-0,105	-0,481	-0,106
92408	90090	-0,002	-0,004	0,005	-0,019	-0,189	0,053
94280	90090	0,010	0,008	0,016	0,071	0,370	0,145
94280	92281	0,006	0,002	-0,001	0,046	0,130	-0,009
92408	92281	0,021	0,005	0,016	0,433	0,720	0,445
92281	94280	-0,028	0,016	-0,024	-0,175	0,750	-0,192
92281	94461	-0,053	-0,002	-0,023	-0,162	-0,061	-0,092
94280	98502	0,019	-0,010	0,013	0,190	-0,585	0,167
94280	96299	-0,004	-0,004	-0,007	-0,047	-0,309	-0,094
94280	100509	0,003	-0,011	0,013	0,033	-0,827	0,190
94280	96463	0,014	-0,007	0,005	0,258	-0,846	0,114
98502	100509	-0,020	-0,001	-0,002	-0,215	-0,068	-0,026
98502	96299	-0,031	0,006	-0,025	-0,377	0,458	-0,370
98502	96463	-0,018	0,003	-0,021	-0,268	0,301	-0,382
96299	100509	0,010	-0,007	0,021	0,135	-0,578	0,358
96299	96463	0,017	-0,003	0,006	0,242	-0,284	0,113



100509	96463	0,003	0,004	-0,018	0,051	0,351	-0,323
96463	94280	0,013	-0,003	-0,013	0,303	-0,333	-0,368
98502	96463	-0,011	0,008	0,010	-0,154	0,735	0,178
98757	100719	0,005	0,012	0,004	0,048	0,815	0,056
98757	94461	0,017	0,005	0,018	0,176	0,329	0,226
98757	100509	0,002	0,008	0,001	0,036	0,811	0,013
100719	94461	0,022	-0,008	0,018	0,213	-0,520	0,221
100719	100509	-0,014	-0,002	-0,010	-0,130	-0,093	-0,117
94461	100509	-0,028	0,005	-0,023	-0,227	0,270	-0,240
98757	100509	-0,010	0,000	-0,014	-0,170	0,029	-0,336
98757	100719	0,026	-0,001	0,016	0,246	-0,121	0,195
98757	94280	-0,027	-0,014	-0,004	-0,143	-0,655	-0,027
94280	100719	-0,006	0,020	-0,022	-0,013	0,500	-0,064
100719	98757	0,001	-0,004	-0,008	0,049	-0,198	-0,476
87903	92018	-0,045	-0,011	-0,057	-0,054	-0,031	-0,111
87807	92018	0,010	-0,012	-0,014	0,288	-0,709	-0,759
87903	90090	-0,012	0,000	-0,016	-0,159	-0,011	-0,278
90090	85820	0,027	-0,009	0,029	0,372	-0,748	0,495
87807	87903	-0,009	0,011	-0,022	-0,067	0,600	-0,207
87903	92018	-0,014	0,007	-0,035	-0,046	0,158	-0,146
87807	90090	-0,116	-0,145	-0,119	-0,261	-2,457	-0,333
85820	92018	-0,245	0,237	-0,241	-0,682	4,643	-0,841
87903	85820	0,000	-0,002	0,003	0,002	-0,156	0,029
87807	85820	0,015	-0,134	0,034	0,040	-2,771	0,112
90090	92018	0,121	0,084	0,055	1,582	2,812	0,908
87903	85820	0,006	0,005	0,005	0,172	0,621	0,191
88051	85820	-0,028	0,003	-0,031	-0,384	0,216	-0,515
88051	90090	0,010	-0,004	0,009	0,211	-0,571	0,239
85820	85991	0,036	-0,010	0,028	0,540	-0,811	0,515
85820	90090	0,030	-0,007	0,030	0,494	-0,604	0,597
85991	92408	-0,013	0,006	-0,006	-0,220	0,483	-0,121
85820	92408	0,018	-0,009	0,021	0,215	-0,761	0,312
88051	85991	0,019	-0,007	0,006	0,174	-0,450	0,067
90090	92408	-0,004	0,003	-0,004	-0,043	0,232	-0,056
88051	92408	0,001	-0,002	-0,004	0,016	-0,174	-0,052
90090	85991	0,012	-0,003	0,004	0,129	-0,188	0,054
88051	85820	0,020	-0,012	0,028	0,269	-1,237	0,483
88051	85820	0,010	0,001	0,006	0,476	0,075	0,384
85991	88051	-0,021	-0,007	-0,019	-0,422	-0,867	-0,464
85820	83205	0,002	-0,005	0,002	0,039	-0,548	0,045
85820	83316	0,014	-0,005	0,016	0,227	-0,415	0,323
85820	85688	0,004	-0,006	0,004	0,075	-0,536	0,087
87807	85688	0,013	0,008	0,015	0,237	0,686	0,330
83205	83316	0,007	0,000	0,009	0,133	0,039	0,215
83205	85688	0,003	0,000	0,003	0,083	-0,016	0,080
83205	87807	-0,008	-0,008	-0,011	-0,142	-0,64	-0,222
83316	85688	-0,028	0,001	-0,027	-0,428	0,116	-0,494
85820	87807	-0,011	-0,012	-0,011	-0,108	-0,755	-0,136
87807	83316	0,017	0,007	0,020	0,175	0,512	0,250



83316	83323	0,011	0,001	0,016	0,205	0,089	0,350
83316	85820	0,012	0,001	0,024	0,132	0,074	0,320
83316	80801	0,006	-0,002	0,011	0,069	-0,142	0,147
83316	85991	0,008	-0,009	0,031	0,087	-0,581	0,417
83323	85820	0,005	0,002	0,014	0,079	0,153	0,307
83323	85991	-0,001	-0,009	0,019	-0,013	-0,764	0,401
83323	80801	0,002	-0,002	0,011	0,033	-0,200	0,240
85820	85991	-0,004	-0,010	0,007	-0,061	-0,853	0,136
85820	80801	-0,004	-0,004	-0,004	-0,067	-0,337	-0,098
80801	85991	-0,004	-0,007	0,009	-0,072	-0,575	0,179
83323	83316	-0,035	-0,005	-0,019	-0,551	-0,519	-0,372
83323	85991	0,022	0,012	-0,009	0,443	1,228	-0,229
85991	88051	0,013	-0,013	0,007	0,881	-1,108	0,445
100509	100456	-0,005	0,004	0,010	-0,064	0,341	0,191
103519	100456	-0,048	-0,002	-0,036	-0,646	-0,160	-0,641
98502	100456	0,006	-0,011	0,001	0,056	-0,780	0,008
98502	103519	0,074	-0,014	0,049	0,694	-1,008	0,607
98502	100509	0,033	-0,014	0,012	0,242	-0,794	0,117
100456	102191	-0,020	0,024	-0,020	-0,094	1,010	-0,127
102191	100509	0,035	-0,027	0,025	0,155	-1,088	0,143
102191	103519	0,089	-0,028	0,071	0,398	-1,030	0,419
102191	98502	0,011	-0,012	0,019	0,055	-0,490	0,122
100509	103519	-0,163	0,126	-0,093	-0,341	2,389	-0,258
100456	102191	-0,022	-0,024	-0,002	-0,523	-3,076	-0,057
100456	102191	-0,003	0,014	-0,009	-0,076	1,858	-0,303
100719	100636	0,007	-0,006	-0,006	0,130	-0,542	-0,125
100719	102401	-0,004	0,007	-0,013	-0,081	0,706	-0,323
100509	100636	-0,003	-0,010	-0,001	-0,057	-0,937	-0,023
100509	102401	-0,009	0,002	-0,003	-0,130	0,153	-0,059
100509	102191	-0,011	-0,020	-0,002	-0,213	-1,876	-0,053
102191	100636	0,009	0,010	0,002	0,173	1,031	0,062
100636	102401	-0,012	0,011	-0,002	-0,279	1,418	-0,056
100719	102191	0,000	0,070	0,032	0,001	2,078	0,192
102191	102401	0,034	-0,048	-0,011	0,165	-1,630	-0,069
100719	100509	0,069	0,073	0,080	0,164	1,475	0,244
100636	102401	0,016	-0,009	0,002	0,349	-1,452	0,069
106299	103519	0,041	-0,011	0,032	0,727	-1,144	0,734
106299	106500	-0,022	-0,003	-0,015	-0,374	-0,287	-0,338
106299	102191	-0,006	-0,009	-0,009	-0,114	-0,881	-0,211
103519	106500	-0,158	-0,142	-0,128	-0,764	-4,113	-0,811
103519	102191	-0,060	0,009	-0,046	-0,928	0,855	-0,929
103519	103634	-0,055	0,011	-0,043	-0,744	0,939	-0,737
106500	103634	0,000	0,004	0,001	-0,004	0,332	0,009
106500	102191	0,000	0,002	-0,001	-0,004	0,188	-0,028
103634	103519	-0,045	-0,014	-0,031	-0,961	-0,54	-0,941
102191	103519	-0,060	-0,001	-0,042	-1,381	-0,033	-1,580
103634	102191	0,003	0,000	0,004	0,070	0,023	0,109
106299	103634	-0,035	0,003	-0,031	-0,481	0,304	-0,535
102191	103634	0,003	-0,005	0,005	0,066	-0,659	0,136



106500	103794	0,008	0,017	-0,001	0,133	1,562	-0,017
106500	102191	-0,010	0,002	-0,005	-0,166	0,221	-0,100
102401	103794	0,042	-0,008	0,014	0,556	-0,556	0,247
102401	105293	-0,015	0,012	-0,026	-0,205	0,820	-0,463
105293	103794	-0,008	-0,005	-0,020	-0,067	-0,325	-0,231
105293	106500	-0,023	-0,014	-0,023	-0,200	-0,912	-0,255
102191	103794	0,006	0,007	-0,001	0,086	0,804	-0,028
102191	102401	0,008	0,005	0,017	0,074	0,398	0,203
106500	102401	0,049	-0,006	0,047	0,316	0,301	0,386
105293	102191	0,080	0,124	0,042	0,705	5,624	0,471
105293	103794	0,017	-0,032	0,023	0,176	-2,742	0,323
103794	102191	0,007	-0,012	-0,007	0,194	-1,559	-0,236
106500	106299	0,211	-0,088	0,141	1,235	-3,265	1,065
106500	105293	0,061	-0,088	0,062	0,371	-3,701	0,488



Tabla AII-2.Elipses de error y desviaciones estándar altimétrica solución constreñimiento interno
Bloque I Andalucía. Previo eliminación errores groseros.

Estación	Semieje mayor (m)	Semieje menor (m)	Orientación(°)	Rms altimetrico(m)
96299	0,005	0,005	10,406	0,039
92018	0,008	0,007	16,499	0,045
92103	0,007	0,006	6,767	0,040
90090	0,005	0,004	1,824	0,036
94280	0,004	0,004	1,129	0,040
92281	0,005	0,005	-3,678	0,055
94461	0,006	0,005	-7,814	0,055
92408	0,005	0,005	1,345	0,047
98502	0,006	0,005	8,991	0,049
100509	0,004	0,004	6,527	0,038
96463	0,005	0,005	10,339	0,045
98757	0,005	0,005	4,682	0,049
100719	0,006	0,005	-5,569	0,049
87903	0,008	0,007	11,459	0,061
87807	0,008	0,007	12,193	0,050
85820	0,005	0,005	4,491	0,040
88051	0,006	0,005	2,284	0,041
85991	0,006	0,005	-3,215	0,043
83205	0,008	0,007	-3,426	0,056
83316	0,007	0,006	5,782	0,051
85688	0,008	0,007	4,565	0,057
83323	0,007	0,007	-8,138	0,052
80801	0,008	0,008	-1,116	0,061
100456	0,007	0,006	6,327	0,052
103519	0,007	0,006	7,510	0,052
102191	0,005	0,005	1,771	0,044
100636	0,006	0,006	-7,328	0,050
102401	0,006	0,006	-1,352	0,050
106299	0,008	0,007	4,460	0,062
106500	0,007	0,006	4,624	0,056
103634	0,007	0,006	2,258	0,055
103794	0,007	0,006	3,039	0,056
105293	0,009	0,008	8,837	0,073



Tabla AII-3. Elipses de error y desviaciones estándar altimétricas Solución constreñimiento interno
Bloque I Andalucía. Después de eliminación de errores groseros.

Estación	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Orientación(°)	rms altimétrico(m)
96299	0,004	0,004	10,220	0,020
92018	0,006	0,006	15,860	0,027
92103	0,005	0,005	6,249	0,021
90090	0,004	0,003	1,126	0,018
94280	0,003	0,003	0,998	0,021
92281	0,004	0,004	-3,794	0,032
94461	0,004	0,004	-7,886	0,033
92408	0,004	0,004	0,802	0,026
98502	0,004	0,004	8,898	0,028
100509	0,003	0,003	6,444	0,019
96463	0,004	0,004	10,260	0,025
98757	0,004	0,004	4,654	0,028
100719	0,005	0,004	-5,591	0,028
87903	0,006	0,005	11,413	0,037
87807	0,006	0,006	12,400	0,030
85820	0,004	0,004	3,387	0,021
88051	0,005	0,004	1,815	0,022
85991	0,004	0,004	-3,899	0,023
83205	0,006	0,006	-3,909	0,033
83316	0,005	0,005	5,478	0,029
85688	0,006	0,006	4,256	0,034
83323	0,005	0,005	-8,502	0,030
80801	0,007	0,006	-1,392	0,037
100456	0,006	0,005	6,454	0,033
103519	0,006	0,005	7,489	0,030
102191	0,004	0,004	1,002	0,025
100636	0,005	0,005	-7,530	0,029
102401	0,005	0,004	-1,644	0,029
106299	0,007	0,005	4,324	0,038
106500	0,006	0,005	4,342	0,034
103634	0,006	0,005	2,020	0,033
103794	0,005	0,005	2,558	0,034
105293	0,007	0,006	9,094	0,050



Tabla AII-4. Elipses de error y desviaciones estándar altimétricas Solución WGS-84 Bloque I Andalucía. Puntos fiduciales (1 cm en las tres componentes).

Estación	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	Orientación(°)	rms altimétrico(m)	Tipo de punto
96299	0,005	0,004	9,550	0,032	
92018	0,007	0,006	15,213	0,037	
92103	0,006	0,005	5,941	0,031	
90090	0,004	0,004	4,566	0,025	
94280	0,004	0,004	-1,409	0,033	
92281	0,004	0,003	-2,877	0,009	Punto fiducial
94461	0,005	0,004	-14,584	0,041	
92408	0,004	0,004	7,169	0,030	
98502	0,005	0,004	8,103	0,040	
100509	0,004	0,003	4,535	0,025	
96463	0,005	0,004	9,173	0,038	
98757	0,003	0,003	2,975	0,007	Punto fiducial
100719	0,005	0,004	-4,600	0,023	
87903	0,006	0,006	9,708	0,043	
87807	0,006	0,006	7,526	0,037	
85820	0,004	0,004	-2,732	0,017	
88051	0,004	0,003	-0,784	0,008	Punto fiducial
85991	0,004	0,004	-11,167	0,017	
83205	0,006	0,006	-19,182	0,038	
83316	0,005	0,005	4,606	0,029	
85688	0,006	0,006	-0,660	0,039	
83323	0,004	0,004	-11,875	0,008	Punto fiducial
80801	0,006	0,006	-4,295	0,038	
100456	0,006	0,005	5,649	0,039	
103519	0,006	0,005	8,062	0,034	
102191	0,004	0,004	0,244	0,025	
100636	0,004	0,004	-7,006	0,009	Punto fiducial
102401	0,004	0,004	-0,220	0,026	
106299	0,006	0,006	5,182	0,042	
106500	0,006	0,005	6,115	0,035	
103634	0,006	0,005	2,210	0,036	
103794	0,004	0,004	3,321	0,007	Punto fiducial
105293	0,006	0,006	11,472	0,052	

**Tabla AII-5. Residuos tipificados para líneas base. Solución constreñimiento interno Hoja 237.**

Estación desde	Estación hasta	Residuo tipificado x	Residuo tipificado y	Residuo tipificado z
92281	94461	0,378	1,534	0,081
92281	92408	0,820	1,520	0,688
92281	94280	0,360	0,179	0,192
92281	90090	0,361	0,545	0,228
94461	94280	0,016	1,142	0,059
94461	92408	0,433	0,102	0,563
94461	90090	0,005	0,458	0,116
92408	94280	0,262	0,691	0,264
92408	90090	0,331	0,507	0,324
94280	90090	0,040	0,451	0,007
94280	92281	0,134	0,172	0,014
92408	92281	0,965	1,693	0,990
92281	94280	0,398	1,906	0,432
92281	94461	0,277	0,078	0,147
92281	94461	0,399	0,730	0,203



Tabla AII-6. Precisiones solución WGS-84 puntos de apoyo hoja 237. Comparación solución del ajuste WGS-84 y solución Puntos de Apoyo.

	Ajuste WGS-84			Solución Puntos de Apoyo		
	Precisión planimétrica		Precisión altimétrica	Precisión planimétrica		Precisión altimétrica
	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	rms altimétrico(m)	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	rms altimétrico(m)
2371	0,026	0,021	0,052	0,031	0,025	0,061
2372	0,014	0,011	0,039	0,021	0,015	0,057
2373	0,019	0,013	0,037	0,048	0,033	0,095
2374	0,028	0,018	0,066	0,033	0,021	0,078
2375	0,010	0,007	0,024	0,019	0,015	0,047
2376	0,015	0,011	0,040	0,005	0,004	0,013
2377	0,016	0,010	0,034	0,003	0,002	0,007
2378	0,010	0,009	0,021	0,005	0,004	0,010
2379	0,014	0,011	0,034	0,018	0,013	0,044
23710	0,013	0,011	0,031	0,012	0,010	0,030
23711	0,010	0,006	0,021	0,003	0,002	0,006
23712	0,013	0,008	0,025	0,003	0,002	0,006
23713	0,019	0,015	0,049	0,006	0,005	0,015
23714	0,025	0,013	0,042	0,006	0,003	0,009
23715	0,024	0,013	0,045	0,003	0,002	0,006
23716	0,021	0,016	0,048	0,011	0,008	0,024
23717	0,024	0,019	0,058	0,011	0,009	0,027
23718	0,022	0,015	0,048	0,010	0,007	0,021
23719	0,020	0,014	0,060	0,003	0,002	0,010
23720	0,044	0,037	0,108	0,005	0,004	0,012
23721	0,012	0,006	0,024	0,002	0,001	0,005

**Tabla AII-7. Precisiones Ajuste local puntos de apoyo Hoja 237. Comparación puntos fijos-puntos fiduciales (rms 15 cm en planimetría y 30 cm en altimetría).**

	Puntos fijos			Puntos fiduciales		
	Precisión planimétrica		Precisión altimétrica	Precisión planimétrica		Precisión altimétrica
	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	rms altimétrico(m)	Semieje mayor(m)	Semieje menor(m)	rms altimétrico(m)
2371	0,237	0,191	0,544	0,098	0,097	0,259
2372	0,130	0,097	0,409	0,092	0,091	0,217
2373	0,170	0,117	0,354	0,092	0,091	0,200
2374	0,249	0,163	0,594	0,093	0,092	0,207
2375	0,087	0,067	0,217	0,098	0,098	0,239
2376	0,134	0,103	0,384	0,076	0,076	0,196
2377	0,143	0,094	0,322	0,070	0,070	0,154
2378	0,093	0,079	0,197	0,067	0,067	0,135
2379	0,130	0,096	0,332	0,071	0,071	0,163
23710	0,114	0,096	0,334	0,078	0,078	0,210
23711	0,090	0,053	0,190	0,105	0,105	0,249
23712	0,115	0,072	0,232	0,102	0,102	0,230
23713	0,169	0,133	0,465	0,099	0,099	0,220
23714	0,221	0,114	0,443	0,102	0,101	0,241
23715	0,217	0,118	0,516	0,104	0,104	0,278
23716	0,193	0,146	0,492	0,083	0,083	0,219
23717	0,218	0,174	0,527	0,074	0,073	0,153
23718	0,200	0,139	0,440	0,086	0,085	0,216
23719	0,180	0,125	0,576	0,090	0,090	0,222
23720	0,395	0,334	0,976	0,083	0,082	0,178
23721	0,111	0,057	0,218	0,089	0,088	0,235



Tabla AII-8. Diferencias de posiciones Ajuste local puntos de apoyo (puntos fijos o puntos con precisión) respecto a solución obtenida con parámetros de transformación calculados.

Estación	Ajuste puntos fijos		Ajuste puntos fiduciales	
	Diferencias planimétricas (m)	Diferencias altimétricas (m)	Diferencias planimétricas (m)	Diferencias altimétricas (m)
2371	0,166	0,176	0,001	0,006
2372	0,140	0,064	0,000	0,006
2373	0,143	-0,042	0,002	0,013
2374	0,131	-0,044	0,000	-0,002
2375	0,124	-0,077	0,002	-0,008
2376	0,033	0,076	0,000	0,004
2377	0,019	0,025	0,000	0,001
2378	0,148	-0,078	0,000	-0,003
2379	0,151	-0,126	0,000	-0,013
23710	0,153	-0,259	0,000	-0,001
23711	0,097	0,055	0,001	0,004
23712	0,106	0,022	0,001	0,002
23713	0,015	-0,135	0,000	0,001
23714	0,026	-0,194	0,000	-0,002
23715	0,034	-0,316	0,001	-0,006
23716	0,124	0,162	0,000	0,005
23717	0,145	-0,022	0,001	-0,001
23718	0,126	-0,106	0,000	-0,006
23719	0,155	0,142	0,001	0,004
23720	0,143	0,033	0,000	0,000
23721	0,131	0,029	0,000	-0,006



AIII. GRÁFICOS APLICACIÓN PRÁCTICA II. ANDALUCÍA.

Representación de la desviación de las posiciones locales calculadas con parámetros de la hoja contigua, respecto a las calculadas con parámetros de la hoja correspondiente, en función de la distancia al centroide de la hoja contigua. Desviación en posiciones planimétricas y posiciones altimétricas.

