SOBRE LA UTILIZACION DEL SIMBOLO "dx"

Grupo Límite - Córdoba :
Juan Antonio Caballero Molina
Jesús González Contreras
Angel Martínez Páez

I. INTRODUCCION

Venimos observando desde hace unos años que en algunos textos de Bachillerato se nota la integral de una función sin hacer uso del símbolo dx,aunque,posteriormente,en el desarrollo de la teoría,por regla general se vuelve a la notación tradicional. Puede verse esto mismo en diferentes textos de Análisis Matemático.

Para niveles de enseñanza superior,donde el estudiante está en disposición de comprender y manejar el concepto de función diferenciable,no nos parece tan trascendente la cuestión;incluso la consideramos despreciable. Pero no así en las enseñanzas medias.

Desde la perspectiva de estas nos hemos situado y,movidos fundamentalmente por intereses de tipo didáctico,la cuestión planteada nos ha llevado a una serie de preguntas y reflexiones.

La tesis de este artículo es mantener que en las condiciones del actual Bachillerato y de quienes en su mayoría lo realizan,es más didácticamente adecuado suprimir en toda la teoría de la integración el símbolo dx en la notación de la integral. Y argumentamos las siguientes razones didácticas :

a) Sobre el concepto de función diferencial:

Haber constatado que la gran mayoría de los alumnos acaban sus estudios medios sin una idea medianamente seria del significado de dx. Si bien es verdad que en el programa de 3º de B.U.P. viene incluido el concepto de función diferencial, este supone un serio obstáculo de comprensión en la edad en que se realizan estos estudios, además de una nada despreciable cantidad de tiempo destinado no sólo al desarrollo del tema, sino también a la preparación del terreno. En definitiva, todo lo que implicaría el manejo de funciones de más de una variable real.

Por otro lado, no incluirlo en la programación -lo que sería posible, ante lo extenso del cuestionario y la urgencia de otros temas- significaría en la práctica renunciar al intento de hacer comprensible de manera no difusa el símbolo de que tratamos.

Entendemos que en el Bachillerato no se debe sobrepasar el estudio de las funciones de variable real y, en concreto, de las racionales, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas de expresión y uso fácil. Sabemos que el concepto de función diferenciable cobra verdadero interés para funciones de más de una variable real. Planteadas así las cosas, quedaría justificada su exclusión del B.U.P.

¿Minusvaloramos la idea de *diferencial* ? Todos estamos de acuerdo en que es más trascendente que la de derivada. Pero esta afirmación es, digamos, técnica; y no olvidemos que planteamos el asunto como una cuestión didáctica.

Dónde alojar un concepto, cuya primera aproximación al mismo sería de desear realizara el alumno antes de acudir a una Facultad de Ciencias? Pues, precisamente, en el curso que lo prepara para ello. Un tema sobre funciones de dos y tres variables podría ser incluido en la programación de C.O.U.; y ello, sin un excesivo rigor.

b) Sobre el problema del cálculo de primitivas:

La mayor dificultad radica en el método de integración por cambio de variable. En este caso, entendemos que el alumno no es consciente de que está utilizando un teorema que relaciona la derivación compuesta y el concepto de primitiva. Simplemente utiliza un mecanismo que ha aprendido por reiteración. No pretendemos que todos nuestros alumnos comprendan el teorema del cambio de variable,pero sí que lo conozcan y sepan aplicarlo;lo que,desde nuestro punto de vista,es de un valor didáctico superior al del simple conocimiento de una mecánica de resolución.

II. EL PROBLEMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

El problema del cambio de variable se plantea formalmente así:

Supongamos que deseamos calcular $\int f(x)\,dx$ y que es de difícil obtención,siendo sin embargo fácil de calcular

$\int f(\,g(t)\,)\,.\,g'(t)\,dt = G(t) + K$, donde $g(t) = x$

Entonces

$\int f(x)\,dx = F(x) + K$, siendo $F(x) = G(\,g^{*}(x)\,)$ y $g^{*}(x)$ la función recíproca de $g(t)$.

Ante la dificultad de comprensión del teorema,se opta en la práctica por informar al alumno de que,tras hacer la sustitución $x=g(t)$, "obtenga" dt en función de dx colocándolo como factor en la integral, llegándose de esta forma a la

$\int f(\,g(t)\,)\,.\,g'(t)\,dt$

A continuación,se le pide que calcule esta última integral y, finalmente,para obtener una primitiva F de $\int f(x)\,dx$,se le dice que "deshaga" el cambio.

Puestas así las cosas,entendemos que la dificultad del teorema ha sido canjeada por dos mecanismos de los cuales el alumno desconoce sus fundamentos: uno el utilizado para obtener dt ,y otro el procedimiento empleado.

Nosotros proponemos actuar de la siguiente forma :

1º) Enunciar el teorema del cambio de variable así:

Supongamos que deseamos calcular $\int f(x)$, que ella es de difícil obtención y,por el contrario,es fácil el cálculo de

$\int f(\,g(t)\,)\,.\,g'(t) = G(t) + K$, donde $g(t) = x$

Entonces, si $F(x) = G(\ g^*(x)\ )$, se cumple que

$\int f(x) = F(x) + K$, que podemos razonar de la forma siguiente:

Sea f una función real definida en un intervalo I y g una función biyectiva y derivable de un intervalo J en I. Si F es una primitiva de f, esto es, $F' = f$, tenemos, por el teorema de la derivación compuesta, que

$$D\ (f \circ g)(t) = F'(\ g(t)\ )\ .\ g'(t) = f(\ g(t)\ )\ .\ g'(t)\ , \quad \forall t \varepsilon J$$

Luego $(F \circ g)$ es una primitiva en J de la función

$f(\ g(t)\ )\ .\ g'(t)$.

Escribimos

$$(F \circ g) = (\int f) \circ g = \int f(\ g(t)\ )\ .\ g'(t)$$

Y, por ser g biyectiva, podemos componer a la derecha con g^* :

$$(\ (\int f) \circ g\ ) \circ g^* = \left[\int f(\ g(t)\ )\ .\ g'(t) \right] \circ g^*$$

$$\int f \circ (g \circ g^*) = G \circ g^*$$

$$\int f = G \circ g^* = F$$

Esta última relación nos indica que para hallar una primitiva en I de la función f, bastará componer g^* con una primitiva de la función

$f(\ g(t)\ )\ .\ g'(t)$ en J.

2º) Exigir al alumno que en la aplicación del método de cambio de variable siga una a una las instrucciones del teorema.

Para el logro de estos objetivos sugerimos seguir el siguiente proceso :

<u>Teoría</u>		<u>Práctica</u>
	(1)	
$f(x)$		$\int \frac{\ln(3-x)}{3-x}$
f: definida y continua en I		$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{3-x}$ definida y continua en $I =]\leftarrow, 3[$

(2)

g: una función biyect.

y derivable de J en I

$x = g(t)$

Hacemos:

$x = g(t) \qquad x = 3 - e^t$

g biyectiva en

$J =]\leftarrow, \rightarrow[$ sobre $I =]\leftarrow, 3[$

---

(3)

$\int f(g(t)) \,.\, g'(t) =$

$= G(t) + K$

$$f(\ g(t)\ ) = \frac{\ln(3-3+e^t)}{3-3+e^t} =$$

$$= \frac{t}{e^t}$$

$$g'(t) = -\ e^t$$

$$\int \frac{t}{e^t}(-e^t) = -\int t =$$

$$= \frac{t^2}{2} + K$$

$$G(t) + K = -\frac{t^2}{2} + K$$

---

(4)

$F(x) = G(\ g^*(x)\ )$

$\int f(x) = F(x) + K$

$t = g^*(x) \qquad t = \ln(3-x)$

$F(x) = G(\ \ln(3-x)\ ) =$

$= -\ 1/2\ (\ \ln(3-x)\ )^2$

$$\int \frac{\ln(3-x)}{3-x} =$$

$$= -1/2(\ \ln(3-x)\ )^2 + K$$

Cuando se trata de una integral definida, el teorema del cambio de variable queda expresado así :

$$\int_a^b f(x) = \int_{g^*(a)}^{g^*(b)} f(\ g(t)\ ) \,.\, g'(t) = G(\ g^*(b)\ ) - G(\ g^*(a)\ )$$

Veamos la aplicación a un caso concreto :

Teoría	Práctica
	(1)
$\int_a^b f(x)$	$\int_0^1 +\sqrt{1-x^2}$
f: continua en $[a\ ,\ b]$	$f(x) = +\sqrt{1-x^2}$ continua en $[0,1]$
	(2)
$x=g(t)$	$x=g(t)$ $\qquad$ $x=sen\ t$
g: función biyectiva	$t=g^*(x)$ $\qquad$ $t=arc\ sen\ x$
en $[\alpha\ ,\ \beta]$ sobre	g: biyect. en $[\ g^*(0)\ ,\ g^*(1)\ ]=$
$[a\ ,\ b]$	$= [\ 0\ ,\ \pi/2\ ]$ sobre $[\ 0\ ,\ 1\ ]$
$\alpha = g^*(a)$ y $\beta = g^*(b)$	
	(3)
$\int_a^b f(x) =$	$f(\ g(t)\ ) = +\sqrt{1-sen^2 t} = cos\ t$
	$g'(t) = cos\ t$
$=\int_{g^*(a)}^{g^*(b)} f(\ g(t)\ )\ .\ g'(t)$	$\int_0^{\pi/2} cos^2\ t = \left[\frac{t}{2} + \frac{sen\ t\ cos\ t}{2}\right]_0^{\pi/2}$
$\int_a^b f(x)=G(\ g^*(b)\ )-G(\ g^*(a)\ )$	
	$\int_0^1 +\sqrt{1-x^2} = \pi/4$

Los restantes métodos de integración que son objeto de estudio en el programa de 3º de B.U.P. no se incluyen en este trabajo por considerar que la supresión del símbolo dx no introduce cambio conceptual ni operativo.

En cuanto a las cuestiones que pueden presentarse al utilizar este método de cálculo de primitivas en la Física de este nivel, estimamos que no aparecen inconvenientes de tipo didáctico que dificulten su comprensión y resolución.

BIBLIOGRAFIA

ETAYO,J. , COLERA,J. y RUIZ,A. - Matemáticas:Manuales de

Orientación Universitaria - Anaya, 1978

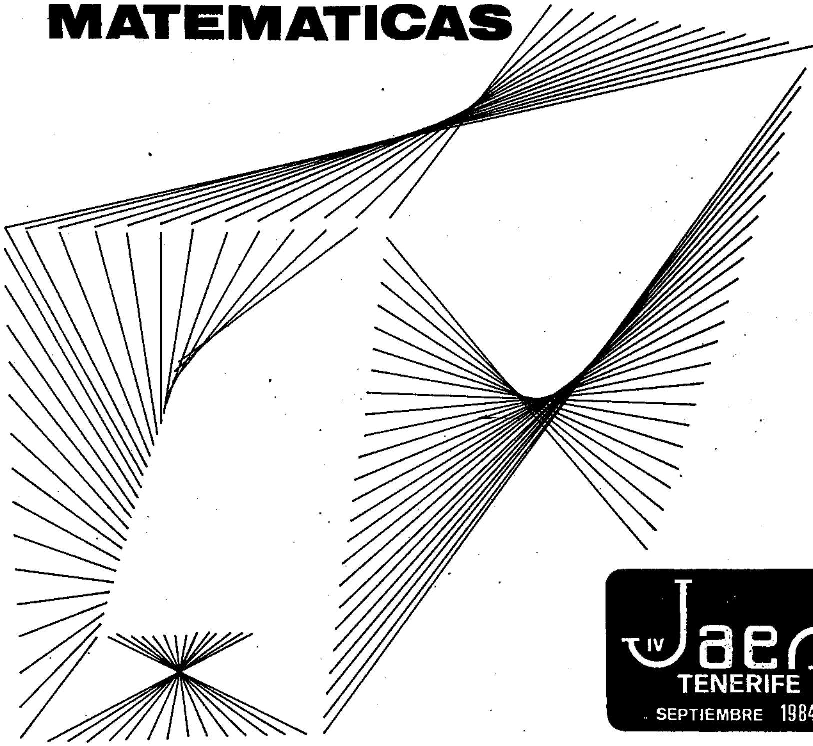
VIZMANOS, ANZOLA y PRIMO - Funciones, 3 - Ediciones S.M., 1981

FERNANDEZ VIÑA, J.A. - Lecciones de Análisis Matemático I - Tecnos, 1976

GARCIA CASTRO, F. y GUTIERREZ GOMEZ, A. - Cálculo Infinitesimal I, II - Ediciones Pirámide S.A., 1980

PINILLA y otros - Introducción al Análisis real - Alianza Universidad.

IV JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS



IV JAEM
TENERIFE
SEPTIEMBRE 1984

1984
SEPTIEMBRE

SANTA CRUZ DE TENERIFE
ISLAS CANARIAS