

Universidad de Córdoba

Departamento de Física



Contribución a la modelización numérica de fibras ópticas microestructuradas

ANTONIO M. DÍAZ SORIANO

Tesis dirigida por:

Dr. D. Antonio Dengra Santa-Olalla

Memoria presentada para optar al grado de Doctor

por la Universidad de Córdoba

Córdoba 2014

TITULO: *Contribución al diseño y caracterización de fibras de cristal fotónico.*

AUTOR: *Antonio Manuel Díaz Soriano*

© Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba. 2014
Campus de Rabanales
Ctra. Nacional IV, Km. 396 A
14071 Córdoba

www.uco.es/publicaciones
publicaciones@uco.es



TÍTULO DE LA TESIS: CONTRIBUCIÓN A LA MODELIZACIÓN NUMÉRICA DE FIBRAS ÓPTICAS MICROESTRUCTURADAS

DOCTORANDO/A: ANTONIO M. DÍAZ SORIANO

INFORME RAZONADO DEL/DE LOS DIRECTOR/ES DE LA TESIS

(se hará mención a la evolución y desarrollo de la tesis, así como a trabajos y publicaciones derivados de la misma).

El trabajo de Tesis presentado por el doctorando realiza cuatro aportaciones muy importantes en el campo de la modelización numérica de fibras ópticas microestructuradas. Como primera aportación señalaría los dos primeros capítulos, en los que se realiza una extensa revisión de la formulación general de la ecuación de propagación, de las características y propiedades de las fibras de cristal fotónico (PCFs), para finalizar, en el capítulo segundo, con la revisión de las distintas técnicas numéricas empleadas en la resolución de la ecuación de propagación. Como segunda aportación, destacaría el desarrollo de una nueva técnica numérica, basada en esquemas de diferencias finitas, que permite el análisis modal de una PCF. Esta técnica posibilita la caracterización completa de la fibra a través del cálculo de sus parámetros característicos. Como tercera aportación, recogida en el capítulo cuarto, se ha realizado un análisis comparativo de rendimiento de todas las técnicas numéricas empleadas en la resolución de la ecuación de propagación en PCFs, encontrando los mejores resultados para las técnicas que emplean esquemas de diferencias finitas. Por último, como cuarta aportación, señalaría la propuesta y análisis de nuevas estructuras para PCFs basadas en diseños fractales. Estas fibras presentan unas propiedades muy especiales que les confieren un gran interés en muchas aplicaciones tecnológicas.

Parte de los resultados de esta Tesis han sido publicados como artículos en Microwave and Optical Technology Letters y Optical Fiber Technology, éste último en fase de publicación.

Considero, por tanto, que la Tesis presentada reúne los requisitos de originalidad e innovación necesarios y posee méritos científico-técnicos suficientes.

Por todo ello, se autoriza la presentación de la tesis doctoral.

Córdoba, 2 de Junio de 2014

Firma del/de los director/es

Fdo.: Prof. Dr. Antonio Dengra Santa-Olalla

A mis padres

23

En cuanto comenzamos a programar nos sorprendió que no fuese tan fácil como habíamos imaginado conseguir que los programas funcionasen correctamente. Aún debía ser descubierto el proceso de depurado. Puedo recordar el momento exacto en que me di cuenta de la gran parte de mi vida que iba a pasar buscando errores en mis propios programas.

(Maurice Wilkes, sobre el descubrimiento del proceso de depuración, 1949)

What I am going to tell you about is what we teach our physics students in the third or fourth year of graduate school... It is my task to convince you not to turn away because you don't understand it. You see, my physics students don't understand it... That is because I don't understand it. Nobody does.

(Richard P. Feynman, QED: The Strange Theory of Light and Matter)

Si no eres capaz de explicarlo de manera sencilla, es que aún no lo comprendes suficientemente bien.

(Albert Einstein)

Índice de contenido

Agradecimientos.....	1
Resumen.....	7
Introducción.....	13
Capítulo 1. Fundamentos teóricos.....	19
1.1 Caracterización de una fibra mediante sus parámetros característicos.....	21
1.1.1 Ecuaciones de Análisis Modal.....	23
1.1.2 Tipos de soluciones: modos de propagación.....	27
1.2 Formulación de la ecuación de propagación.....	31
1.2.1 Obtención de la Ecuación No Lineal de Schrödinger.....	33

1.2.2 Propagación no lineal de pulsos.....	35
1.2.3 Relación con las soluciones de las Ecuaciones de Análisis Modal.....	43
1.3 Breve introducción a las Fibras de Cristal Fotónico (PCFs).....	46
1.3.1 Origen, definición y aplicaciones de las Fibras de Cristal Fotónico.....	47
1.3.2 Mecanismos de guiado.....	48
1.3.3 Propiedades ópticas.....	50
1.3.4 Aplicaciones.....	51
1.3.4.1 PCFs de alta área efectiva.....	51
1.3.4.2 PCFs de núcleo hueco.....	52
1.3.4.3 PCFs compensadoras de la dispersión.....	53
1.3.4.4 PCFs que mantienen la polarización.....	54
1.3.4.5 Otro tipo de PCFs.....	55
Capítulo 2. Técnicas clásicas de resolución.....	59
2.1 Consideraciones generales.....	60
2.2 Precisión de los resultados.....	61
2.2.1 Diferencias finitas.....	63
2.2.2 Métodos espectrales.....	65
2.3 Coste computacional.....	66
2.3.1 Diferencias finitas.....	67
2.3.2 Métodos espectrales.....	70
2.4 Condiciones de contorno.....	71
2.5 Paquetes numéricos: FFT y LAPACK.....	72
2.5.1 Paquete FFT.....	73
2.5.2 Paquete LAPACK.....	74
2.6 Resolución numérica de las Ecuaciones de Análisis Modal.....	75

2.6.1 Método general.....	76
2.6.2 Coste computacional.....	80
2.7 Resolución numérica de la ecuación de propagación.....	81
2.7.1 Método Split-Step.....	81
2.7.2 Coste computacional.....	86

Capítulo 3. Análisis modal de PCFs mediante una nueva técnica basada en diferencias finitas

centradas de órdenes superiores.....	89
3.1 Esquemas de diferencias finitas centradas de órdenes superiores.....	91
3.2 Derivación espectral.....	94
3.3 Matriz dieléctrica.....	97
3.4 Nuevo esquema de resolución propuesto.....	98
3.5 Validación de resultados mediante solución analítica.....	99
3.6 Aplicación al análisis de una Fibra de Cristal Fotónico. Comparación de rendimientos.....	105
3.7 Determinación de los parámetros de la PCF.....	109

Capítulo 4. Análisis comparativo de las técnicas numéricas en el estudio de la propagación en Fibras de Cristal Fotónico.....

4.1 Fórmula de Baker-Hausdorff.....	117
4.2 Coste computacional.....	119
4.3 Esquemas pseudo-espectrales de integración Split-Step.....	120
4.3.1 Split-Step básico (SSFM).....	121
4.3.2 Split-Step simetrizado (S-SSFM).....	124
4.3.3 Split-Step con integradores simplécticos (SI-SSFM).....	127
4.4 Esquema Split-Step pseudo-espectral de diferencias finitas (DF-SSFM).....	130
4.4.1 Coste computacional y restricciones de mallado.....	131

4.4.2 Planteamiento.....	132
4.4.3 Aplicación.....	136
4.5 Comparativa de rendimiento.....	138
4.5.1 Propagación solitónica.....	138
4.5.2 Resultados.....	142
Capítulo 5. Análisis de una nueva Fibra de Cristal Fotónico basada en un diseño fractal.....	153
5.1 Diseño fractal: la alfombra de Sierpinski.....	154
5.1.1 Conjunto de Cantor.....	155
5.1.2 Alfombra de Sierpinski.....	158
5.1.3 Diseño de una nueva fibra de cristal fotónico basada en estructuras fractales.....	161
5.2 Caracterización de las Ffibras propuestas a partir de sus parámetros.....	163
5.2.1 Estudio de la dispersión.....	165
5.2.2 Estudio de la no linealidad.....	168
5.2.3 Estudio del rendimiento.....	171
5.2.4 Estudio del área efectiva.....	173
5.3 Comparación de la nueva fibra con una Fibra de Cristal Fotónico de tipo no fractal.....	175
5.3.1 Confinamiento del campo.....	176
5.3.2 Dispersión.....	178
5.3.3 No linealidad.....	182
5.3.4. Resumen de propiedades.....	184
5.4 Propagación a través de la fibra propuesta.....	185
Conclusiones.....	193
Apéndice.....	201

Bibliografía.....211

 Capítulo 1.....213

 Capítulo 3.....217

 Capítulo 4.....219

 Capítulo 5.....221

Agradecimientos

Resulta paradójico que las primeras líneas que aparecen en una tesis sean las que uno reserva para escribir al final de la misma, cuando puede volver la vista atrás y reflexionar globalmente sobre la empresa que emprendió hace mucho tiempo. Ha sido un camino largo y plagado de dificultades, donde los momentos de desánimo fueron abundantes y la tentación de abandonar surgió con más frecuencia de la deseada. Es, por tanto, justo agradecer ahora a aquellas personas que, de una forma u otra, confiaron en mí más que yo mismo en esos momentos difíciles y me hicieron seguir hacia delante. También aquellos que facilitaron mi tarea con su consejo u orientación merecen ahora su pedacito de gratitud.

En primer lugar, y como no podría ser de otra manera, he de mencionar a Antonio Ortiz Mora, colega profesor del Departamento de Física, compañero de fatigas y, sobre todo, amigo.

Puede decirse sin faltar a la verdad que hemos recorrido este camino a la par, cada uno por un sendero diferente, pero compartiendo las mismas penalidades y, también, satisfacciones similares cuando, por fin, una pequeña parte del puzzle encajaba y el final se veía un poco más cercano. Ambos nos hemos beneficiado de la experiencia y conocimientos mutuos y, sin lugar a dudas, esta tesis, tal y como ha resultado ser, no sería hoy una realidad sin su ayuda y apoyo. Dicen que las amistades más fuertes son las que se forjan en las dificultades, en ese caso la nuestra debe ser más resistente que el grafeno.

En cuanto a Antonio Dengra Santa-Olalla, decir que no podría haber elegido un mejor director de tesis se queda corto. Aparte de su eficaz orientación y experto consejo, he de agradecerle su comprensión ante mi *compleja* situación laboral y su total disponibilidad para hacer un hueco y comentar cualquier tema cuando mi horario me lo permitía. Si a día de hoy tuviese que volver a comenzar de nuevo este trabajo no dudaría ni un instante en escogerlo otra vez como director del mismo. Pero por encima del aspecto académico he de agradecerle todo lo que he aprendido de él como persona, como la buena persona que es.

El profesor Rafael Gómez Alcalá, de la Universidad de Cáceres, estuvo presente en la génesis de esta tesis y, aunque posteriormente sus obligaciones laborales le apartaran de la codirección de la misma, es de justicia agradecerle ahora su orientación inicial y la atención que me dedicó en aquellos primeros momentos, sus conocimientos técnicos me ahorraron muchas horas de búsquedas infructuosas.

No puedo dejar de mencionar tampoco a Mercedes Marín Beltrán, profesora del Departamento de Análisis Numérico de la Universidad de Córdoba. Me temo que mi amistad con

ella le ha supuesto unas cuantas tardes perdidas discutiendo sobre métodos numéricos y cuestiones matemáticas. Siempre estuvo dispuesta a atenderme y solventar mis dudas aunque me presentase sin previo aviso, también soportó con la paciencia y saber estar que la caracterizan los bombardeos de correos electrónicos a los que, a veces, la sometí. Por todo ello su nombre debe figurar ahora en estos agradecimientos, y no precisamente entre los menos destacados.

También quiero hacer presentes aquí a mis compañeros del Departamento de Física de la Universidad de Córdoba por el interés mostrado en la evolución de esta tesis. Siempre me han facilitado en todo momento el desarrollo de mi labor docente e investigadora y su compatibilización con mis otros trabajos. Mencionar especialmente a mis compañeros de despacho: Manuel Castro, José Manuel Alcaraz y Pedro Rodríguez; los meses de julio en el Departamento no serían los mismos sin su buen humor y numerosas anécdotas.

Por último, pero no por ello menos importante, he de agradecer a mi familia la confianza y paciencia que han tenido conmigo durante estos años. Han sido muchas las horas robadas y los momentos en que no se veía el final, su apoyo y fe en mi fueron decisivos para conseguir alcanzarlo. Puede que no hayan contribuido de forma directa en esta tesis, pero su aportación no deja de ser por ello menos valiosa que las demás.

Comencé estos agradecimientos hablando sobre las dificultades y desánimos sufridos a lo largo de estos años, no sería justo terminarlos pasando por alto las numerosas satisfacciones también vividas. Es impagable esa sensación de triunfo cuando, después de muchos intentos y fracasos, un código por fin funciona, unos datos cuadran con lo esperado o das con esa idea que te permite avanzar un paso más hacia la meta final. Pero la mayor satisfacción, sin duda alguna, es la

de ver al fin completado este trabajo y saber que todo el esfuerzo realizado ha tenido su recompensa.

Puede que éste sea el final de un camino pero, sin duda alguna, es el punto de partida para muchos otros que se han abierto a lo largo de estos años. La ciencia es un camino apasionante en constante descubrimiento, que te sorprende y reta a cada paso, no es mi intención, en absoluto, abandonarlo.

Resumen

Uno de los campos que mayor desarrollo ha tenido en las pasadas décadas es el de las telecomunicaciones, la sociedad de la información así lo ha demandado, dando lugar a espectaculares avances en la cantidad y calidad de la transmisión de datos a través de redes de satélites y fibra óptica. Ésta última, en concreto, se ha diversificado en diferentes familias y tipos, aumentado su velocidad de transmisión e introduciendo multitud de nuevas propiedades inimaginables en los primeros momentos de su desarrollo, las cuales han acabado encontrado aplicación directa en numerosas áreas distintas de las telecomunicaciones.

Uno de los objetivos de la presente tesis es contribuir al estudio de la caracterización de fibras ópticas y la transmisión de señales a través de las mismas. Para ello, se ha partido de las técnicas clásicas de análisis numérico y se han implementado mejoras en cuanto a precisión de los

resultados y disminución del tiempo de cómputo. La simulación del comportamiento de las fibras antes de su fabricación es vital, ya que dicho proceso es complejo y caro, por lo que un conocimiento previo de las propiedades del diseño deseado evita costes innecesarios.

Las técnicas más extendidas en el análisis y simulación de sistemas ópticos (entre ellos las fibras ópticas) son de tipo pseudo-espectral, es decir, basadas en un análisis de los mismos a nivel de frecuencias para después volver al dominio temporal. Dicho paso de un dominio a otro se realiza a través de la transformada de Fourier, lo cual conlleva un alto coste computacional, el cual puede aliviarse mediante el uso de la transformada rápida de Fourier (FFT). No obstante, pese a la velocidad ganada con el uso de dicho algoritmo, las técnicas pseudo-espectrales siguen presentando un elevado número de operaciones, lo cual implica un mayor tiempo de cálculo hasta obtener los resultados y un incremento en el error asociado a los mismos. La presente tesis propone una serie de técnicas numéricas que permiten atenuar este problema mediante la aplicación de esquemas de diferencias finitas centradas de órdenes superiores de manera exclusiva (caracterización) o en combinación con las técnicas pseudo-espectrales (propagación).

Como podrá apreciarse, los resultados obtenidos mediante la aplicación de dichos algoritmos permiten alcanzar en menos tiempo unos resultados más precisos que los suministrados por las técnicas clásicas de tipo pseudo-espectral. Dicha comparación se ha realizado a través de la simulación de fibras de salto de índice y también de fibras de cristal fotónico (PCF). Éstas últimas son una familia de fibras introducidas a finales de los años noventa, caracterizadas por una serie de capilares rellenos de aire (u otras sustancias) practicados en su interior y que modifican sus propiedades de manera determinante.

Durante la pasada década el estudio de este tipo de las fibras de cristal fotónico fue uno de los campos de mayor desarrollo dentro del ámbito de la fotónica, prolongándose dicho interés hasta nuestros días, con multitud de publicaciones y estudios de nuevos diseños propuestos cada año. Si las fibras ópticas convencionales abrieron sus campos de actuación a muchos otros distintos del de las telecomunicaciones, las fibras de cristal fotónico diversificaron aún más sus posibles aplicaciones así como sus efectos en cada una de ellas. La versatilidad de estas fibras es su punto fuerte y lo que las ha convertido en una de las áreas de investigación puntera en fotónica en la actualidad.

Es por todo lo anterior que, como último objetivo y aplicación práctica de las anteriores aportaciones numéricas antes señaladas, se propone también en la presente tesis un nuevo tipo de fibra de cristal fotónico basada en un diseño fractal. Ésta del diseño fractal es una línea de investigación que se ha abierto recientemente en su aplicación a las fibras de cristal fotónico, teniendo su origen en los trabajos previos realizados durante la pasada década en el ámbito exclusivo de los cristales fotónicos. Se trata, por tanto, de una propuesta totalmente innovadora realizada en un campo en plena eclosión, dando lugar, como se verá, a un tipo de fibra que presenta a su vez bajos efectos dispersivos y no lineales en la propagación de pulsos a través de ella, por lo que sus aplicaciones pueden ser múltiples.

Más en concreto, la nueva fibra propuesta se enmarcaría dentro de la familia de fibras de cristal fotónico de alta área efectiva. Dichas fibra permiten la transmisión de gran cantidad de potencia a través de ellas gracias a la enorme porción de sección transversal que ocupa, de manera focalizada, la luz al propagarse a través de ellas. El diseño fractal de la fibra permite, al igual que ocurre en los cristales fotónicos, concentrar la luz en su interior y hacer que esta área pueda ser

mayor que en las fibras convencionales o de cristal fotónico de diseño no fractal. A partir de este fenómeno físico se deducen los bajos valores de los parámetros dispersivo y no lineal asociado a esta nueva fibra propuesta.

En resumen, el presente trabajo recoge tanto una contribución a las técnicas numéricas de simulación de fibras ópticas como una propuesta de un nuevo tipo de fibra de cristal fotónico basada en un diseño fractal. Los objetivos de reducir tiempos de cómputo y errores asociados a los métodos podrán apreciarse en el desarrollo de la tesis, así como las propiedades y ventajas asociadas al nuevo tipo de fibra propuesto.

Introducción

Vivimos inmersos en la era de la información y la sociedad en la que habitamos ha cambiado de forma drástica y para siempre. La última mitad del siglo XX fue testigo de un enorme boom en las telecomunicaciones, el mundo jamás había dispuesto de una capacidad de comunicación tal como la que conllevó la invención y desarrollo de la fibra óptica, el láser y los satélites. Estas nuevas tecnologías permitieron a los ordenadores y otros dispositivos conectarse en redes, multiplicando así sus capacidades y compartiendo información entre sí de manera casi instantánea. El uso de Internet (la red mundial) se generalizó, al igual que las comunicaciones inalámbricas. El planeta entero se interconectó mediante ondas electromagnéticas, ya viajasen por fibra óptica o a través de la atmósfera hasta el sistema de satélites de comunicaciones que rodean la tierra. En pocos años, los nuevos teléfonos inteligentes permitieron fusionar ambas tecnologías, de manera que a principios ya del siglo XXI una persona puede disponer de prácticamente cualquier

información en segundos mediante un dispositivo que cabe en su bolsillo.

Pero con estas nuevas capacidades surgieron también nuevas necesidades. El mundo tecnológico está en continua evolución, los mercados exigen mejoras constantes en los productos para un consumidor siempre ávido de novedades. El correo postal ha quedado prácticamente en desuso y el electrónico es hoy en día el más extendido, pero la aparición de la mensajería instantánea está poco a poco desbancando también a éste último. La carrera por la innovación es continua e incesante, y la fotónica es hoy en día uno de los campos más estudiados y en los que se están realizando mayores inversiones.

La búsqueda de nuevos diseños que permitan una mejora en las comunicaciones ha llevado en los últimos años al estudio de fibras de cristal fotónico (PCFs), es decir, fibras ópticas con simetría longitudinal que presentan capilares de aire o cualquier otro material que permiten modificar sus propiedades casi a placer. La idea es incorporar las enormes posibilidades de los cristales fotónicos a la transmisión de datos. No obstante, las posibles aplicaciones abarcan campos como la medicina, la astronomía,...

El principal problema a la hora de investigar las PCFs es, como en las fibras tradicionales, la dificultad y los enormes gastos asociados a la fabricación de las mismas. La alternativa obvia es realizar una simulación previa de los parámetros asociados al tipo concreto de fibra que se esté estudiando. Son varios los métodos numéricos empleados tanto en la simulación de la distribución de campo en el interior de la fibra como en la propagación de éste a lo largo de la misma, y el ahorro derivado de un estudio simulado previo de un tipo concreto de fibra puede resultar enorme. No obstante, existe un problema, el volumen de cálculos asociado a dichas simulaciones es enorme,

por lo que los tiempos de simulación pueden extenderse durante horas o incluso días en función de la precisión deseada.

El presente trabajo pretende contribuir a la mejora de dichas simulaciones. Para ello se han modificado dos de los métodos numéricos más extendidos en dicho campo, el de diferencias finitas para la caracterización modal (FDMS) de la fibra y el Split Step basado en la transformada de Fourier (SSFM) en la propagación de la luz a través de ella. Como se podrá comprobar, las modificaciones introducidas permiten ahorrar tiempo de cómputo manteniendo la misma o mayor precisión en los resultados, lo cual es vital debido al enorme coste computacional asociado a una simulación de este tipo.

Una vez verificada la validez de las mejoras introducidas en dichos métodos se han aplicado al estudio de las características de una nueva PCF basada en un diseño fractal, otro de los objetivos de la presente tesis. Dichas fibras están comenzando ahora a ser estudiadas, obteniéndose resultados prometedores. La idea es combinar la versatilidad de las PCFs con las innovadoras propiedades que los fractales han demostrado tener en el campo de los cristales fotónicos. La fusión de ambos campos puede dar lugar a una nueva generación de fibras ópticas de propiedades totalmente innovadoras. Concretamente, la PCF propuesta en esta tesis permite realizar la propagación de pulsos en condiciones de dispersión y efectos no lineales muy bajos.

En resumen, el trabajo contenido en esta tesis se orienta a mejorar y facilitar la caracterización de los parámetros de las PCFs, así como el estudio de la propagación de pulsos a través de ellas. Este es un tema de total relevancia hoy en día debido al auge que está viviendo el sector de las telecomunicaciones, además de las nuevas aplicaciones que fuera de dicho campo se le

están comenzando a dar a las PCFs. El ahorro computacional conseguido mediante los métodos propuestos significa una ventaja a la hora del diseño de cualquier PCF y, por lo tanto, un factor determinante en la investigación en este campo. Así mismo, como ya se ha comentado, el nuevo diseño de la PCF fractal propuesto presenta unos valores tanto en sus parámetros dispersivo como no lineal, por lo que dichos efectos tendrán poco impacto en la propagación de pulsos a través de la misma; su alta área efectiva le permite, a su vez, emplearla en la transmisión de altas potencias.

En el apartado de conclusiones, aparte de los resultados obtenidos ya mencionados, se presentarán varias posibles líneas de investigación a seguir en el futuro a partir del punto donde finaliza esta tesis.

Capítulo 1. Fundamentos teóricos.

La simulación de la transmisión de una señal luminosa a través de una fibra óptica, sea del tipo que sea, se apoya en dos ejes fundamentales: el conocimiento de sus parámetros característicos y el proceso de propagación de los campos en su interior. Ambos aspectos se encuentran interrelacionados entre sí de manera esencial, ya que es imposible conocer y aplicar los mecanismos que intervienen en la propagación de la luz sin haber estudiado y medido previamente la estructura y características del medio por el que se propaga. Es por ello fundamental disponer de unas herramientas adecuadas y precisas que permitan extraer la información necesaria de la geometría y componentes de una fibra óptica y, posteriormente, aplicarlos en un modelo que simule el comportamiento del campo electromagnético al transmitirse a través de ella.

Como en cualquier problema de carácter electromagnético, serán las ecuaciones de Maxwell

las que encierran la clave del estudio de los dos problemas antes planteados. Posteriormente se verá que, una vez particularizadas según las condiciones de estudio, dichas ecuaciones carecerán de solución analítica, pero serán ellas el núcleo matemático sobre el que se apliquen los métodos numéricos que permitan resolver el estudio referido. El punto de partida queda, por tanto, claro y el desarrollo se realizará a partir de aquí.

En este capítulo se mostrará como las ecuaciones de Maxwell se entrelazan para alcanzar, tras aplicar una serie de aproximaciones, las ecuaciones de Helmholtz que caracterizan por completo a la fibra mediante sus parámetros de transmisión. Se hará una revisión de su planteamiento como problema de autovalores, y se estudiará la clasificación de sus soluciones, conocidas como modos de propagación. Así mismo, se analizará el carácter general de estas ecuaciones y se explicará como se pueden particularizar a cualquier fibra que se desee estudiar variando tan sólo la definición del parámetro de dieléctrico.

En cuanto a la propagación, de sobra es conocido cómo las ecuaciones de Maxwell llevan de forma natural a la ecuación de onda que caracteriza a la luz como tal. En el caso de una fibra óptica, dicha ecuación se convierte en no lineal debido a los efectos que se producen en su interior, y es conocida como la Ecuación No Lineal de Schrödinger (NLSE), que gobierna la propagación de la luz a través de cualquier fibra óptica. Se analizarán así mismo la manera de introducir la dispersión y los efectos no lineales en dicha ecuación, estudiando su influencia en la propagación de los pulsos.

Todo este trasfondo teórico puede aplicarse, tal y como se mencionó antes, a cualquier tipo de fibra óptica incluidas las PCFs. De nuevo, será el parámetro asociado al dieléctrico la clave en

función de la cual las ecuaciones ofrecerán la solución asociada a cada PCF concreta.

El objetivo de esta tesis, a parte de contribuir a la mejora de los métodos numéricos de resolución de las ecuaciones de Helmholtz y Schrödinger, es la caracterización de una nueva PCF de diseño fractal propuesta aquí por primera vez. Conviene, por tanto, finalizar el capítulo realizando una pequeña introducción al mundo de las PCFs, definiendo qué se entiende por PCF, explicando los mecanismos de guiado que permite su geometría y algunas de las características que suelen llevar asociada este tipo de fibras.

1.1 Caracterización de una fibra mediante sus parámetros característicos

Como ya se ha comentado, los fenómenos electromagnéticos se rigen por las ecuaciones de Maxwell, siendo su forma expresada mediante operadores vectoriales de sobra conocida. Su combinación en las circunstancias concretas de cada problema las modificará adecuándolas a las soluciones particulares requeridas.

En el caso de una fibra óptica se trabaja en ausencia de fuentes y cargas libres, así como en régimen sinusoidal permanente, con lo que el conjunto inicial de cuatro ecuaciones puede reducirse a dos:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}\end{aligned}\quad (1.1)$$

En dichas ecuaciones se ha supuesto además la isotropía de los materiales constitutivos de la fibra, que quedarán caracterizados a partir de la constante dieléctrica $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ y la permeabilidad magnética $\mu = \mu(\mathbf{r}, \omega)$. Ésta última se iguala a la unidad en problemas de fibra óptica ya que los materiales involucrados no presentan propiedades magnéticas.

La ausencia de cargas eléctricas y magnéticas antes mencionada se refleja en las ecuaciones asociadas a la divergencia de los campos:

$$\begin{aligned}\nabla(\epsilon \mathbf{E}) &= 0 \\ \nabla \mathbf{H} &= 0\end{aligned}\quad (1.2)$$

Aplicando un rotacional en ambos miembros de las ecuaciones (1.1) y sustituyendo las ecuaciones (1.2) se llega a las conocidas como ecuaciones de Helmholtz vectoriales:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \epsilon \mathbf{E} = -\nabla\{\nabla[(\ln \epsilon) \mathbf{E}]\} \quad (1.3)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \epsilon \mathbf{H} = -\nabla(\ln \epsilon) \times \nabla \times \mathbf{H} \quad (1.4)$$

donde $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ es la constante de propagación en el vacío.

Como puede apreciarse, el acoplo entre los campos eléctrico y magnético ha desaparecido debido a que se está trabajando con medios homogéneos en condiciones de divergencia nula. Ésto facilitará la resolución de las mismas de manera considerable, aunque la geometría del problema puede afectar a dicha separación.

Estas expresiones de las ecuaciones de Helmholtz son el punto de partida para caracterizar una fibra óptica a partir de sus parámetros específicos, tanto lineales como no lineales. El siguiente paso será escoger un sistema de coordenadas y expresar los operadores y campos en él. Al hacer ésto será necesario tener en cuenta tanto la geometría del problema como las técnicas numéricas que se emplearán en la resolución del mismo, una expresión sencilla de las ecuaciones analíticas no implica necesariamente una fácil implementación en el ordenador para su resolución.

1.1.1 Ecuaciones de Análisis Modal

La simetría cilíndrica de una fibra óptica nos sugiere utilizar coordenadas cilíndricas para estudiar el problema, lo que complica, a priori, un poco los cálculos a nivel de operadores, dado que las relaciones vectoriales son más complejas expresadas en este sistema de coordenadas. Por otro lado, resolver analíticamente las ecuaciones de Maxwell para una simetría cilíndrica en coordenadas cartesianas acoplaría las diferentes componentes de forma que las ecuaciones resultantes serían muchísimo más complejas

La figura 1.1 muestra la estructura típica de una fibra de salto de índice. En ella puede apreciarse la división clara entre el núcleo interno de la fibra y la cubierta exterior, dos medios de materiales distintos y con sus correspondientes índices de refracción. Cualquier fibra óptica, sea de salto de índice o PCF, presentará esta geometría cilíndrica y con simetría longitudinal, de ahí que, tal y como se ha dicho, sea el sistemas de coordenadas cilíndricas, pese a la complejidad que pueda añadirse debido a los operadores, el ideal para resolver de manera analítica la propagación de un campo electromagnético a través de ella.

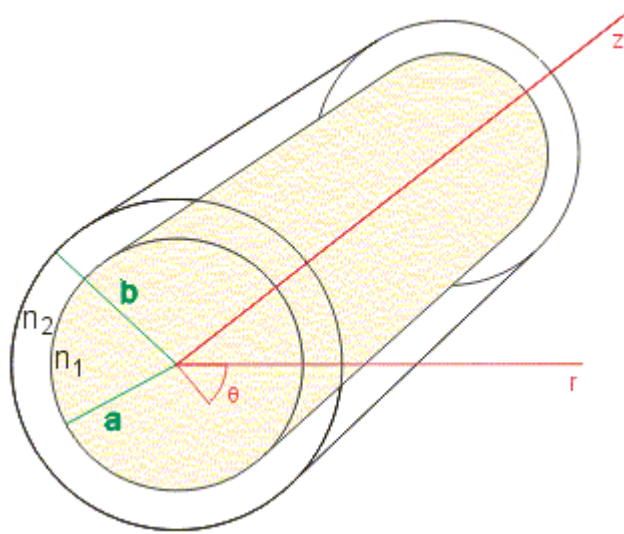


Fig. 1.1. Estructura de una fibra óptica de salto de índice

Por otro lado, si bien es cierto que los campos se acoplarán dentro de las ecuaciones diferenciales en el sistema cartesiano, la definición de un mallado en coordenadas cilíndricas resultará mucho más complejo que en cartesianas. Ya se ha comentado la imposibilidad de resolver analíticamente las ecuaciones de Helmholtz en las condiciones del problema, siendo necesario recurrir a técnicas numéricas a tal efecto. Es, por tanto, este detalle el que determina de manera definitiva la adopción de las coordenadas cartesianas como esquema de trabajo en la presente tesis. Todos los desarrollos teóricos y numéricos que se planteen se encontrarán encuadrados en el marco cartesiano.

Una vez adoptado este convenio, se definen x e y como las coordenadas transversales del problema y z la longitudinal. Los campos quedarían, por tanto, expresados como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_z \quad (1.5)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_z \quad (1.6)$$

En cuanto a los operadores operador de derivación:

$$\begin{aligned} \nabla_t &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u}_y \\ \nabla_z &= \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (1.7)$$

En aquellas fibras que presentan simetría longitudinal las ecuaciones (1.3) y (1.4) pueden desacoplarse en cuanto a componentes longitudinales y transversales [1]. La manera mas extendida de trabajar es usar su expresión mediante componentes transversales:

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t + k_0^2 \varepsilon \mathbf{E}_t = -\nabla_t \{ \nabla_t [(\ln \varepsilon) \mathbf{E}_t] \} \quad (1.8)$$

$$\nabla_t^2 \mathbf{H}_t + k_0^2 \varepsilon \mathbf{H}_t = -\nabla_t (\ln \varepsilon) \times \nabla_t \times \mathbf{H}_t \quad (1.9)$$

Tal y como se había predicho, las ecuaciones obtenidas presentan un desacoplo total entre campos, por lo que podrá elegirse trabajar en formulación de campo eléctrico o magnético indistintamente, lo cual simplifica el problema al disminuir el número de ecuaciones totales.

Una vez elegida una formulación de campo para trabajar y resuelta su ecuación correspondiente, se encuentra que la ecuación escogida presenta un conjunto de soluciones denominadas *modos de propagación*. Dichos modos de propagación se caracterizan individualmente por su distribución transversal de campo y su contante de propagación compleja. Las expresiones de estas soluciones modales vendrían dadas por las ecuaciones:

$$\mathbf{E}_t^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{e}_t^{(m)}(x, y) e^{\mp \gamma_m z} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{H}_t^{(m)}(x, y, z) = \pm \mathbf{h}_t^{(m)}(x, y) e^{\mp \gamma_m z} \quad (1.11)$$

donde

$$\gamma_m = \alpha_m + j\beta_m \quad (1.12)$$

y α hace referencia a la constante de atenuación de la fibra, β es la constante de fase y el índice m indica el modo de propagación que se esté estudiando.

En estas expresiones queda identificada perfectamente la separación entre componentes transversales y longitudinales. La parte vectorial se corresponde con la distribución transversal del campo, mientras que la constante de propagación se asocia a la dirección del eje longitudinal Z . Sustituyendo a continuación (1.10) y (1.11) en las ecuaciones (1.8) y (1.9) se llega las siguientes expresiones de la ecuación de onda:

$$\{\nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon + \nabla_t [\nabla_t (\ln \varepsilon)]\} \mathbf{e}_t = -\gamma^2 \mathbf{e}_t \quad (1.13)$$

$$[\nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon + \nabla_t (\ln \varepsilon) \times \nabla_t \times] \mathbf{h}_t = -\gamma^2 \mathbf{h}_t \quad (1.14)$$

Ambas formulaciones quedan reducidas, por tanto, a un problema de autovalores, donde la distribución de campo escogido será el autovector del sistema y la constante de propagación el autovalor correspondiente de dicha solución. Los operadores serían la parte contenida dentro de los corchetes en las dos ecuaciones.

Cada modo de propagación tendrá asociado una distribución de campo y su constante de propagación que será la misma indistintamente de la formulación de campo que se haya elegido para trabajar [2]. En las ecuaciones (1.10) y (1.11) puede apreciarse claramente cómo ambas formulaciones (campo eléctrico y magnético) comparten la misma constante de propagación longitudinal.

Una vez resuelta una de las ecuaciones de Helmholtz y obtenido el modo de propagación deseado, se puede deducir la solución de la otra ecuación aplicando las expresiones

$$\mathbf{e}_t^{(m)} = \frac{\mathbf{u}_z}{j k_0 \gamma_m} \times [\nabla_t \times \frac{1}{\epsilon} \nabla_t \times \mathbf{h}_t^{(m)} - k_o^2 \mathbf{h}_t^{(m)}] \quad (1.15)$$

$$\mathbf{h}_t^{(m)} = \frac{-\mathbf{u}_z}{j k_0 \gamma_m} \times [\nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{e}_t^{(m)} - k_o^2 \mathbf{e}_t^{(m)}] \quad (1.16)$$

y las componentes longitudinales de cada campo mediante

$$e_z^{(m)} = \frac{1}{\gamma_m} [\nabla_t \cdot \mathbf{e}_t^{(m)} + \nabla_t \cdot (\ln \epsilon) \mathbf{e}_t^{(m)}] \quad (1.17)$$

$$h_z^{(m)} = \frac{1}{\gamma_m} \nabla_t \cdot \mathbf{h}_t^{(m)} \quad (1.18)$$

1.1.2 Tipos de soluciones: modos de propagación

Como se ha mencionado antes, la resolución de las ecuaciones de Helmholtz de análisis

modal se basa en encontrar las soluciones de un problema de autovalores estándar. No obstante, la complejidad de las ecuaciones propuestas impide la resolución analítica de las mismas, por lo que será necesario aplicar técnicas numéricas para obtener los modos de propagación. Una manera de apreciar dicha complejidad es desarrollar la ecuación (1.13) en función de las componentes transversales de los vectores.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + k_0^2 \varepsilon E_x + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} \right] \right\} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} = -\gamma^2 E_x \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k_0^2 \varepsilon E_y + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} \right] \right\} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} = -\gamma^2 E_y \quad (1.20)$$

Tal y como se vio en el anterior punto, los campos se encuentran desacoplados en las dos ecuaciones, pero no así las derivadas espaciales. Ésto es debido a la elección realizada con anterioridad del sistema cartesiano para expresarlas. No obstante, la complejidad en las ecuaciones quedará compensada por una mayor sencillez a la hora de definir el mallado de simulación en los algoritmos numéricos.

Existen simplificaciones que pueden aplicarse en determinado tipo de fibras y condiciones de estudio, pero ya se comentó que, en general, será necesario recurrir a técnicas numéricas para encontrar las soluciones de las ecuaciones (1.19) y (1.20). Las más habituales son las diferencias y elementos finitos, así como las técnicas espectrales. En el próximo capítulo se tratará este tema.

En cuanto a las soluciones en sí, ya se ha explicado que se les denomina modos de propagación y se obtienen como solución de un sistema de autovalores. Cada modo tendrá asociada una distribución transversal de campo (autovectores) y su correspondiente constante de propagación

(autovalor). A la hora de caracterizar la fibra ambos datos serán necesarios, ya que proporcionarán la información relativa a la dispersión de la fibra y la influencia del efecto Kerr no lineal.

Se denomina *índice efectivo* del modo a:

$$n_{eff} = -\frac{j}{k_0} \gamma = -\frac{j}{k_0} (\alpha + j\beta) = \frac{\beta}{k_0} - j \frac{\alpha}{k_0} \quad (1.21)$$

donde γ era la constante de propagación compleja del modo correspondiente tal y como se definió en (1.12). El índice efectivo determina el índice de refracción que experimenta un modo de propagación en razón de su velocidad de grupo. También suele conocerse con el nombre de *índice modal*, ya que depende no sólo de la longitud de onda sino también del modo de propagación de la luz β .

Los modos de propagación pueden clasificarse en función de este índice efectivo en modos guiados, radiados y leaky.

- Modos guiados: Son aquellos que presentan únicamente parte real, y ésta se encuentra comprendida entre los valores del índice de refracción del núcleo y la cubierta. El campo se concentra en el núcleo y disminuye exponencialmente en la cubierta. Al presentar constante de atenuación nula, se propagan sin sufrir pérdidas.
- Modos radiados: Presentan únicamente una de las componentes, real (se propagan) o compleja (evanescentes), y nunca aparecen aisladamente. Se asocian a las pérdidas de potencia cuando la fibra se excita con un campo arbitrario o existen discontinuidades en la

dirección de propagación.

- Modos leaky: Se encuentran situados en el plano complejo y, por tanto, presentan un índice efectivo con componente tanto real como compleja. No se identifican exactamente como modos en sí, ya que crecen de manera exponencial en la cubierta, sino como modos situados por debajo de la frecuencia de corte que pueden evolucionar hacia modos guiados si esta se supera.

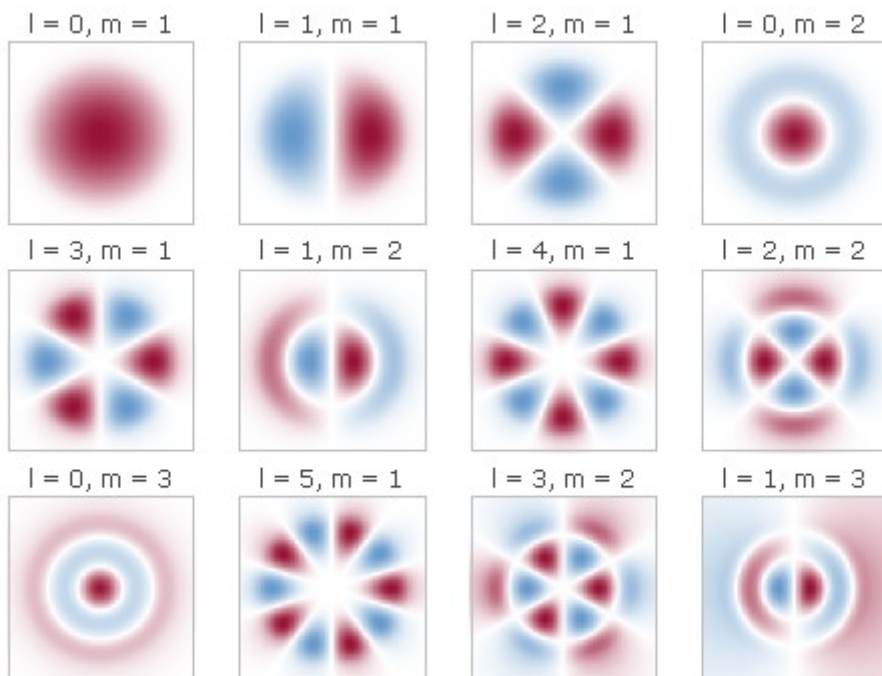


Fig. 1.2. Diferentes tipos de modos linealmente polarizados (LP)

Experimentalmente se encuentra que los modos guiados y radiados pueden representar cualquier distribución de campo en fibras con o sin pérdidas. Los modos leaky se emplean sólo en determinados casos particulares. Así mismo, en el laboratorio se encuentran generalmente combinaciones lineales de varios modos degenerados que resultan prácticamente imposibles de separar en la práctica. En la figura 1.2 pueden apreciarse varios de estos *modos linealmente*

polarizados (LP).

1.2 Formulación de la ecuación de propagación

La ecuación que permite modelar el fenómeno de propagación de la luz a través de una fibra óptica de cualquier tipo es la ecuación de propagación. Dicha ecuación puede presentar múltiples términos, asociados cada uno de ellos a alguno de los efectos que sufren los pulsos ópticos al propagarse por ella. Estos efectos no siempre se hacen presentes, ya que su rango de aplicación en cuanto a características del pulso está muy delimitado, por lo que la ecuación puede presentarse en diferentes formas dependiendo de las condiciones que se deseen simular.

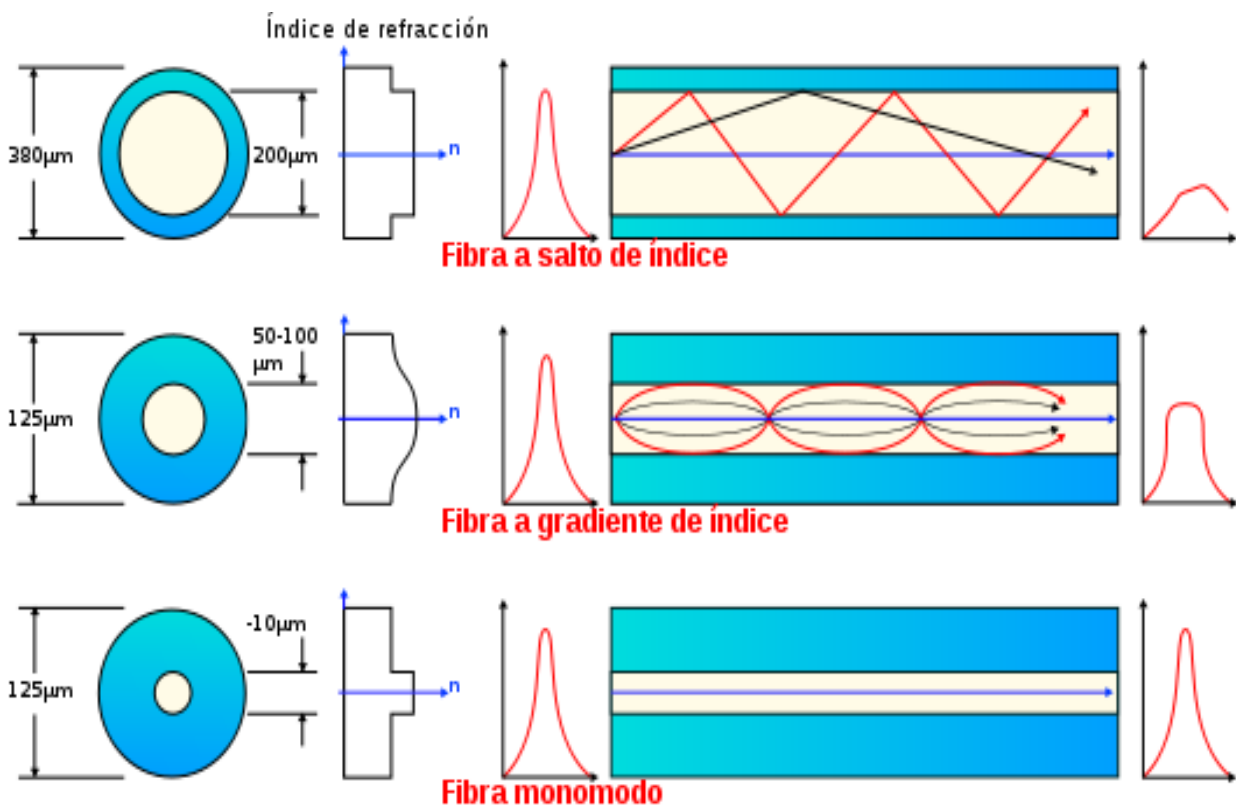


Fig. 1.3. Propagación de pulsos a través de diferentes tipos de fibras. La ecuación de propagación permite obtener los perfiles de salida de los pulsos en cada caso.

Esta tesis se centra exclusivamente en el estudio de la dispersión lineal de segundo orden y la influencia del efecto Kerr no lineal, por lo que la ecuación de propagación en su forma más simple viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial z} A = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} A + i \gamma |A|^2 A \quad (1.22)$$

tal y como será derivada en el siguiente apartado tras pasar por una versión más general de la misma. No se han incluido pérdidas en ninguno de los apartados del trabajo. Se han considerado prácticamente debido a que la aplicación final de los métodos desarrollados será simular una PCF y, en la practica, las distancias de propagación usadas en este tipo de fibras son muy cortos y las pérdidas pueden despreciarse.

En la ecuación (1.22) el primer termino del segundo miembro describe la dispersión lineal de segundo orden de la fibra, que vendrá determinado por el material y la configuración geométrica de la misma. El segundo término se refiere a la no linealidad de la fibra, que depende de la polarizabilidad del material a través de $\chi^{(3)}$ y se escala con la tercera potencia del campo eléctrico. El estudio detallado de este parámetro sera de vital importancia, ya que, como se mencionó con anterioridad, las PCF se pueden diseñar de manera que contengan un único modo fundamental con una pequeña área transversal, permitiendo concentrar grandes intensidades en el interior de la fibra, de ahí la importancia de los efectos no lineales a la hora de describir el comportamiento de una PCF.

La ecuación no lineal de Schrödinger se ha venido aplicado a las fibras ópticas desde

principios de los 80, cuando se usó para describir la primera observación experimental de solitones en una fibra óptica por Mollenauer [3]. Los *solitones* se definen como ondas solitarias que se propagan sin deformarse por un medio no lineal. Este tipo de pulsos se obtienen como solución natural de la ecuación no lineal de Schrödinger, ya que el término no lineal y la dispersión se balancean entre sí produciendo el efecto de compensado en sus efectos.

En las PCFs juega un papel importante, por ejemplo, en el estudio de la generación de supercontinuo y la generación y decaimiento de solitones como se verá más adelante.

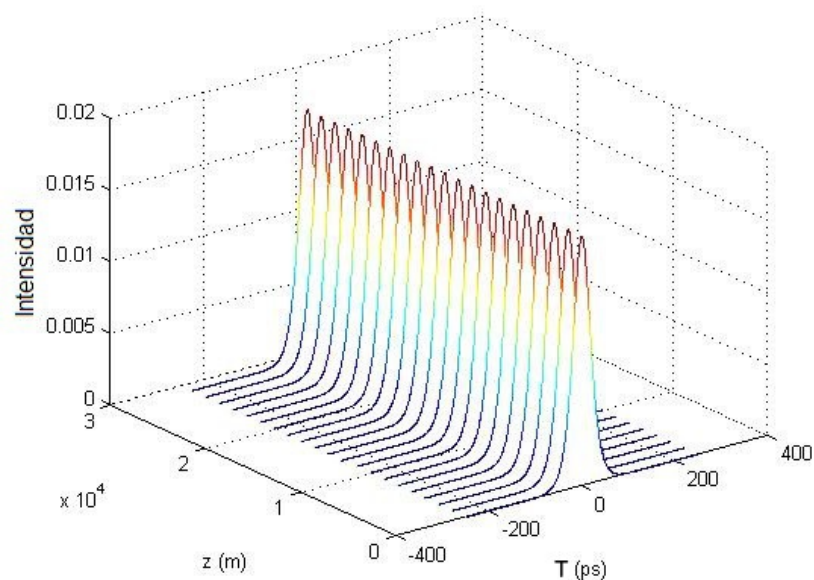


Fig. 1.4. Propagación de un solitón a través de una fibra óptica. Se observa como el pulso no se deforma.

1.2.1 Obtención de la Ecuación No Lineal de Schrödinger

De nuevo, el punto de partida para obtener la expresión de la ecuación de propagación serán las ecuaciones de Maxwell. En este caso se dará por supuesto el realizar todas las deducciones y

simulaciones en función del campo eléctrico, una vez alcanzadas las soluciones se deduciran las correspondientes al campo magnético mediante las ecuaciones de transformación adecuadas [4].

Suponiendo la ausencia de corrientes y cargas libres (los materiales constitutivos de las fibras carecen de ellas) es fácil desacoplar las ecuaciones de Maxwell para obtener la siguiente ecuación de campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (1.23)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) \quad (1.24)$$

donde $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ es la polarización, que presenta dos tipos de contribución, una de carácter lineal con la susceptibilidad $\chi^{(1)}(t-t_1)$ y otra no lineal con la susceptibilidad $\chi^{(3)}$, que puede aproximarse por

$$\chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) = \chi^{(3)} g(t-t_1) \delta(t-t_2) \delta(t-t_3) \quad (1.25)$$

donde δ es la función Delta de Dirac y $g(t-t_1)$ la función de retardo, mediante la cual se puede incluir la interacción de la luz con los modos vibracionales del sílice (scattering Raman).

La susceptibilidad puede aproximarse por tres funciones delta tan sólo en el caso en que se quiera tener en cuenta la respuesta del material a nivel electrónico, ya que es prácticamente instantáneo (no linealidad de tipo Kerr). La polarización de segundo orden desaparece debido a la

simetría de inversión del sílice constituyente de la fibra.

Si se desprecian las cargas inducidas en las interfases de aire y sílice, lo cual equivale a asumir que $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$, se llega a la siguiente aproximación:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx -\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.26)$$

Usando las ecuaciones (1.23) y (1.24), esta última ecuación puede escribirse como:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (1.27)$$

donde la relación entre ambas polarizaciones y el campo eléctrico viene dada por las ecuaciones

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \quad (1.28)$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (1.29)$$

1.2.2 Propagación no lineal de pulsos

Para poder resolver la ecuación (1.27) es necesario aplicar varias suposiciones previas:

- La polarización no lineal se considerará como una perturbación de la lineal, ya que los cambios en el índice de refracción debido a efectos no lineales en la práctica son de una magnitud $<10^{-6}$.
- Para considerar válida la aproximación escalar se asume también que la polarización del campo se mantiene a lo largo de la longitud de la fibra.
- Se considera que el pulso es cuasi monocromático, es decir, que el ancho espectral del mismo es despreciable.

Además de las anteriores simplificaciones, en la aproximación de envolvente de variación lenta se separa la parte del campo que varía con rapidez escribiéndolo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_x [E(\mathbf{r}, t) \exp(-i \omega_0 t) + c.c.] \quad (1.30)$$

donde \mathbf{u}_x es el vector unitario de polarización y $E(\mathbf{r}, t)$ la función de variación lenta del campo con el tiempo (relativa al periodo óptico). Ambas componentes de la polarización pueden escribirse de forma similar

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_x [P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i \omega_0 t) + c.c.] \quad (1.31)$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_x [P_{NL}(\mathbf{r}, t) \exp(-i \omega_0 t) + c.c.] \quad (1.32)$$

Sustituyendo la ecuación (1.31) de la polarización lineal en la (1.28) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 P_L(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{.xx}^{(1)}(t-t') E(\mathbf{r}, t') \exp[i\omega_0(t-t')] dt' = \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{.xx}^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega
 \end{aligned}
 \tag{1.33}$$

donde $\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega)$ es la transformada de Fourier de $E(\mathbf{r}, t)$.

Para obtener la contribución no lineal de la polarización basta con sustituir la ecuación (1.32) en la (1.29). Si se considera que la respuesta es instantánea y, por lo tanto, las tres funciones dependientes del tiempo se asumen como deltas de Dirac, la simplificación conseguida es notable

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E(\mathbf{r}, t) E(\mathbf{r}, t) E(\mathbf{r}, t) \tag{1.34}$$

Asumir la respuesta instantánea permite discriminar la contribución de la vibración molecular de la no linealidad (efecto Raman). La respuesta electrónica a nivel nuclear es no lineal en ambos casos, pero la de los núcleos es comparativamente lenta comparada con la de los electrones. Esta aproximación es válida para pulsos de un ancho superior a 1 ps.

Sustituyendo la ecuación (1.30) en la (1.34), se observa que la polarización no lineal presenta un término oscilante en ω_0 y otro en el tercer armónico de frecuencia $3\omega_0$. Este último término se puede despreciar en las fibras ópticas, por lo que usando la ecuación (1.32), la contribución de la polarización no lineal queda como

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) \approx \epsilon_0 \epsilon_{NL} E(\mathbf{r}, t) \quad (1.35)$$

donde la parte no lineal de la constante dieléctrica viene dada por

$$\epsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (1.36)$$

Es conveniente trabajar en el espacio de frecuencias para simplificar el estudio de la ecuación de onda para la amplitud $E(\mathbf{r}, t)$. La transformada de Fourier se define como

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{r}, t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt \quad (1.37)$$

La expresión (1.36) muestra la dependencia de ϵ_{NL} con la intensidad del campo, quedando claro el carácter no lineal de dicho parámetro. Para evitar este problema se suele tomar como constante en la deducción de la ecuación de propagación, aproximación totalmente justificada debido al carácter perturbativo de P_{NL} [5], [6].

Sustituyendo las ecuaciones (1.30) y (1.32) en la (1.27) se llega a

$$\nabla^2 \tilde{E} + \epsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E} = 0 \quad (1.38)$$

donde $k_0 = \omega/c$ y

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL} \quad (1.39)$$

es la constante dieléctrica cuya parte no lineal viene dada por la ecuación (1.36).

La ecuación (1.39) puede usarse para definir el índice de refracción \tilde{n} y el coeficiente de absorción $\tilde{\alpha}$, ambos dependientes de la intensidad debido a la parte no lineal de la constante dieléctrica.

$$\tilde{n} = n + n_2 |E|^2 \quad (1.40)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2 |E|^2 \quad (1.41)$$

Se puede demostrar que el coeficiente n_2 y el coeficiente de absorción α_2 vienen dados por

$$n_2 = \frac{3}{8n} \Re(\chi_{xxxx}^{(3)}) \quad (1.42)$$

$$\alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc} \Im(\chi_{xxxx}^{(3)}) \quad (1.43)$$

Este último coeficiente de absorción es relativamente pequeño para fibras de sílice, por lo que se suele despreciar. El índice n_2 mide la no linealidad de la fibra, y no debe confundirse con el índice de la cubierta de la fibra.

La ecuación (1.38) puede resolverse aplicando separación de variables. Para ello se supone la solución

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z) \quad (1.44)$$

donde $\tilde{A}(z, \omega)$ es una función de variación lenta de z y β_0 es el número de onda que se determinará con posterioridad. Al sustituir la ecuación (1.44) en la (1.38) se obtienen las ecuaciones separadas

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2]F = 0 \quad (1.45)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2) \tilde{A} = 0 \quad (1.46)$$

A la hora de deducir la ecuación (1.46) se ha despreciado la segunda derivada $\partial^2 \tilde{A} / \partial z^2$ ya que se asume la aproximación de variación lenta.

La ecuación (1.45) no es otra que la ecuación modal de Helmholtz (1.13) escrita en otra forma distinta. El número de onda $\tilde{\beta}$ se determina encontrando los autovalores que resuelven la ecuación para los modos de propagación de la fibra, y la constante dieléctrica que aparece en la ecuación se puede aproximar por

$$\varepsilon = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n \Delta n \quad (1.47)$$

donde Δn es una pequeña perturbación dada por

$$\Delta n = n_2 |E|^2 + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0} \quad (1.48)$$

La ecuación (1.45) se puede resolver aplicando teoría de perturbaciones de primer orden [7]. No obstante, ya se mencionó que en la práctica se usa alguna técnica numérica a fin de obtener una solución más exacta.

En cuanto a la envolvente del pulso, será necesario resolver la ecuación (1.46). Para ello es conveniente aplicar la transformada de Fourier y trabajar en el espacio de frecuencias, así mismo, conviene expandir el número de onda como

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3\beta_3 + \dots \quad (1.49)$$

donde

$$\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (m=1,2, \dots) \quad (1.50)$$

Se suele despreciar del término cúbico en adelante siempre que se verifique que $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Si $\beta_2 \approx 0$ para algunos valores específicos de ω_0 , si ha de incluirse el término cúbico.

Una vez aplicadas estas transformaciones a la ecuación (1.46), y tras volver al espacio

temporal, el resultado final es la ecuación de propagación [8]

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A \quad (1.51)$$

donde el parámetro no lineal γ se define como

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{eff}} \quad (1.52)$$

Para obtener la ecuación (1.51) se ha de asumir que la amplitud del pulso A está normalizada, por lo que $|A|^2$ representa la potencia óptica. La cantidad $\gamma |A|^2$ se mide en m^{-1} si n_2 se expresa en m^2/W [9]. Por otro lado, el área efectiva se define como

$$A_{eff} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^4 dx dy} \quad (1.53)$$

Obviamente, es necesaria la distribución modal del campo sobre la sección de la fibra para poder evaluar esta área efectiva. Para ello, tal y como se explico en el apartado de ecuaciones modales, se resolverá la ecuación (1.13) ó (1.45) con alguna técnica numérica que permita obtener tanto los valores de la contante de propagación como de la distribución de campo asociada a ella. Cada PCF tendrá asociada una contante dieléctrica que variará de una a otra en función de la distribución geométrica de los capilares de aire.

La ecuación no lineal de Schrödinger dada por (1.51) gobierna la propagación de un pulso a través de una fibra óptica mono modo. Incluye los efectos de las pérdidas a través de α , la dispersión cromática a través de β_1 y β_2 , y los efectos no lineales a través del parámetro γ .

Al tratar el tema del coeficiente de atenuación en la presentación de la ecuación de propagación, se justificó el trabajar con valores nulos de α en la presente tesis debido a las cortas distancias empleadas con PCFs.

El término de β_1 puede eliminarse de la ecuación (1.51) sin más que pasar a un sistema de referencia en movimiento con el pulso a la velocidad de grupo. Dicho marco de referencia se conoce como *retardado*, ya que su transformación es $T = t - z/v_g = t - \beta_1 z$, con lo que ecuación (1.51) queda simplificada en:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = i\gamma |A|^2 A \quad (1.54)$$

De esta manera, los únicos efectos a tener en cuenta en la resolución numérica de la ecuación de propagación (1.54) serán el de dispersión de segundo orden de tipo lineal y el efecto Kerr no lineal, dependiente de la intensidad del pulso..

1.2.3 Relación con las soluciones de las Ecuaciones de Análisis Modal

Tal y como se vio en el punto 1.1.2, las ecuaciones de análisis modal se resuelven como un problema de autovalores clásico y sus soluciones se denominan modos de propagación. Dichos

modos están directamente relacionados con la distribución de campo en el interior de la fibra (autovectores) y la constante de propagación compleja (autovalores).

El valor del índice efectivo de la fibra queda fijado a partir de la constante de propagación compleja según la ecuación (1.21). El valor del parámetro de dispersión D puede deducirse a partir de la parte real del índice efectivo, estando la parte imaginaria directamente relacionada con el coeficiente de pérdidas asociado al modo [9].

$$D = \frac{-\lambda}{c} \frac{d^2 \Re(n_{eff})}{d\lambda^2} \quad (1.55)$$

$$\alpha = -j \Im(n_{eff}) \quad (1.56)$$

Así mismo, la ecuación (1.52) muestra la dependencia del parámetro no lineal γ con el área efectiva de la distribución de campo en el interior de la fibra. Dicha área efectiva se calcula aplicando la ecuación (1.53) a la distribución de campo obtenida al encontrar el modo de propagación.

Tal y como se comentó en el apartado anterior, se va a trabajar aplicando la ecuación (1.54) en situaciones en las que no existan pérdidas y los efectos dispersivos predominantes sean los de segundo orden. Por tanto, a la hora de resolver las ecuaciones modales, habrá que restringir la búsqueda de soluciones a modos guiados, en los que la parte imaginaria del índice efectivo (coeficiente de pérdidas) es nula. Una vez encontrado el modo, se despejará el valor de la constante dispersiva del índice efectivo, y se integrarán las distribuciones de campo para obtener el parámetro no lineal.

De manera esquemática, la simulación de una propagación a través de una fibra óptica concreta seguiría los siguientes pasos:

1. Definición de la geometría característica de la fibra mediante la constante (matricial) dieléctrica ε .
2. Resolución de las ecuaciones (1.13) y (1.14) como problema de autovalores teniendo en cuenta la caracterización hecha de la fibra en el primer punto.
3. Deducción de la constante lineal a partir de la ecuación (1.55), y de la no lineal mediante las ecuaciones (1.52) y (1.53).
4. Resolución de la ecuación (1.54) para simular la propagación de un pulso de entrada dado, aplicando las constantes obtenidas en el tercer punto.

Como se ha comentado con anterioridad respecto a ambas ecuaciones de caracterización y propagación, no presentan solución analítica, por lo que es necesario recurrir a técnicas numéricas para encontrar sus soluciones. Ésto afecta al anterior esquema de trabajo en cuanto a que habrá que repetir los puntos segundo y tercero varias veces para diferentes valores de $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ a fin de poder contar con un ancho de banda de valores de los parámetros lo bastante grande para que contemple la ventana de propagación empleada.

En el siguiente capítulo se realizará una descripción de los métodos clásicos de resolución

de ambas ecuaciones y, en el tercero, se desarrollará la nueva implementación del método de diferencias finitas aplicando fórmulas centradas de orden superior que se propone por primera vez en esta tesis.

1.3 Breve introducción a las Fibras de Cristal Fotónico (PCFs)

Todo el desarrollo analítico y numérico desarrollado en este capítulo en torno a la caracterización y propagación a través de una fibra óptica ha tenido un carácter general, es decir, en ningún momento se ha supuesto ningún diseño geométrico concreto de fibra.

Dichas ecuaciones y métodos pueden aplicarse, por tanto, a cualquier tipo de fibra que se deseé, sin más que definir adecuadamente la distribución geométrica de materiales que la componen. Toda esta información se encuentra almacenada en el parámetro de dieléctrico que aparece en las ecuaciones de análisis modal y será la expresión de éste la que permita trabajar con un tipo de fibra u otra.

Tal y como se explicó en la introducción, las PCFs son uno de los campos de la fotónica con mayor desarrollo en los últimos años. La presente tesis, como también se indicó, realiza una aportación al campo de las PCFs proponiendo un nuevo diseño basado en una estructura fractal. Es por ello que resulta conveniente terminar este capítulo realizando una breve introducción a las PCFs así como sus principales características y aplicaciones.

1.3.1 Origen, definición y aplicaciones de las Fibras de Cristal Fotónico

La idea de una PCF fue propuesta por primera vez por Yeh et al. [10] en 1978 como una estructura en 1D. No fue hasta 1992 que P. Russell propone un estructura en 2D con núcleo de aire, pero habría que esperar aún hasta 1996 [11] para que se fabricase.

Las PCFs combinan características de fibras ópticas y cristales fotónicos, dotándolas de unas características únicas que las fibras clásicas no poseen. Son fibras modificadas con una estructura interna de capilares de aire que se ordenan en estructuras hexagonales. Cuando uno o más de estos capilares no se efectúa se dice que la fibra presenta un defecto, siendo dichos defectos la zona por donde se propaga la luz. La longitud de onda deberá ser del orden de la microestructura de la fibra.

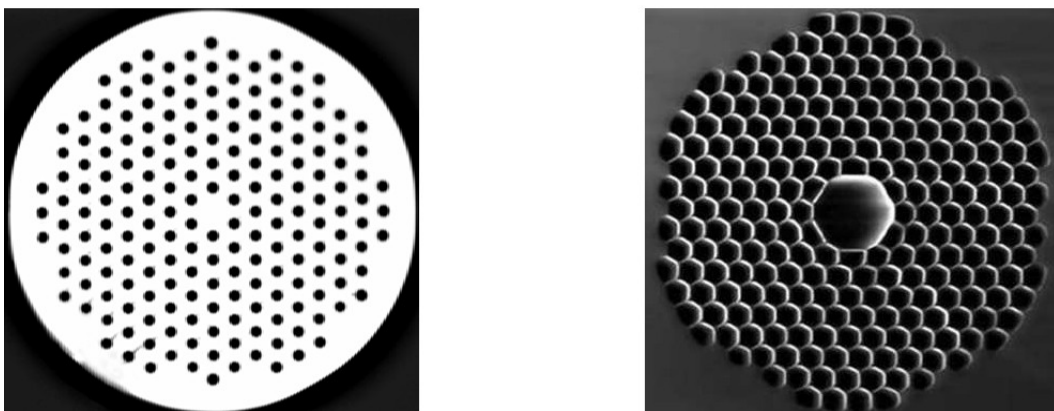


Fig. 1.5. Diferentes tipos de PCFs.

Las fibras clásicas se han adaptado muy bien a las necesidades de los problemas concretos en los que se han empleado, ya fuesen referentes a telecomunicaciones o no, pero presentan una serie de requisitos básicos en su diseño que las limita mucho en cuanto a su ampliación a nuevas aplicaciones (diámetro del núcleo, longitud de onda de corte, especificidad de los materiales empleados en la fabricación,...).

Las PCFs, en cambio, presentan una gran versatilidad en cuanto a su diseño y los parámetros que se pueden variar: tipo y densidad de la estructura de agujeros de aire, el diámetro y forma de los mismos y el índice del cristal. Un ejemplo de las posibilidades que ofrece esta libertad de diseño es la posibilidad de fabricar fibras que siempre trabajan en un único modo de propagación, en las cuales no aparece ninguna longitud de onda de corte.

Manipulando la estructura se pueden conseguir las propiedades dispersivas deseadas, desde PCFs con dispersión nula, baja o anómala, hasta hacer que esta alcance un alto rango de influencia. La combinación de la dispersión anómala con secciones efectivas pequeñas en la propagación de los modos está dando lugar a propiedades novedosas y muy interesantes en el campo de las fibras no lineales.

1.3.2 Mecanismos de guiado

Es importante describir los mecanismos mediante los cuales la luz se propaga a través de una PCF y que, a diferencia de en una fibra clásica, son dos: el clásico guiado mediante reflexión total y el guiado mediante bandas fotónicas (*photonic band gap*, PBG) exclusivo de las PCFs.

El guiado clásico se basa en la diferencia entre el índice del núcleo y el resto de la fibra, lo que permite que se produzca el efecto de reflexión total y la luz quede confinada por completo en el núcleo. Esto es lo que ocurre con el modo fundamental de propagación, que no puede escapar fuera ya que no sería solución de las ecuaciones de Maxwell. Los modos superiores de propagación, en

cambio, si pueden encontrarse en soluciones que escapan del núcleo. En una PCF, si se dispone de un número lo bastante elevado de pequeños agujeros de aire, la fibra puede permanecer mono modo a cualquier longitud de onda, es lo que se conoce como *endlessly single mode fiber*.

El otro mecanismo de guiado es exclusivo de las PCFs. El PBG presenta la característica de que sólo unas longitudes de onda características pueden ser transmitidas. En una PCF lo que ocurre es que la luz que intenta escapar del núcleo es devuelta a él mediante un fuerte proceso de scattering con los capilares de aire. Para algunas longitudes de onda concretas el proceso de scattering resulta en una interferencia constructiva de las ondas reflejadas al núcleo.

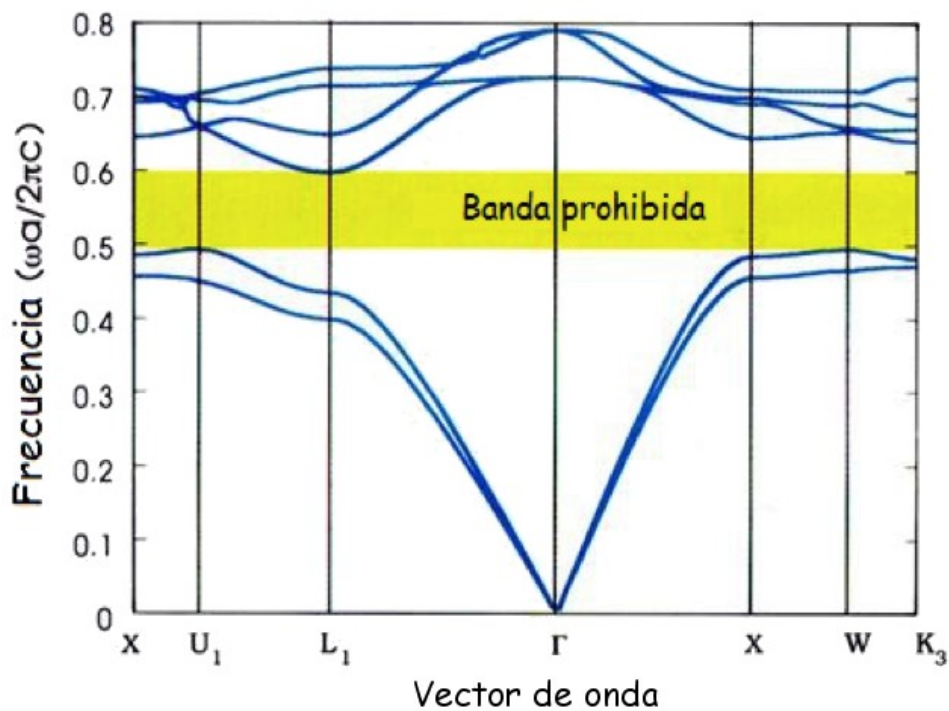


Fig. 1.6. Estructura de bandas para una PCF ejemplo. Se aprecia la banda de frecuencias prohibidas resaltada en amarillo.

El proceso de guiado mediante PBG permite fabricar PCF con núcleo hueco, algo impensable en las fibras tradicionales, ya que para que se produzca el fenómeno de refracción total

es necesario que la cubierta presente un índice inferior al del núcleo y, al tratarse de aire, esto es imposible.

1.3.3 Propiedades ópticas

Las dos principales propiedades que distinguen las PCFs de las fibras tradicionales son la existencias de bandas de frecuencias prohibidas debido al guiado basado en PBG, y la posibilidad de fabricación de fibras mono modo sin las restricciones que imponen las fibras tradicionales.

Como ya se ha comentado, el fenómeno de guiado mediante PBG que presentan las PCFs permite fabricar fibras con propiedades que controlan de manera muy específica la radiación electromagnética. De manera general, lo que ocurre es que hay ciertas bandas de frecuencias prohibidas que no pueden propagarse dentro de la fibra, por lo que pueden diseñarse fibras que propaguen solamente determinadas frecuencias. El fenómeno es similar al que se da en estado sólido con las bandas de conducción de electrones. La manera de conseguir en la práctica este efecto es sustituir el defecto central de la PCF por un capilar de aire de mayor diámetro que el resto de los capilares [12].

La otra propiedad destacable de las PCFs es que pueden usarse para fabricar fibras mono modo. Para ello basta con no incluir el defecto central de la fibra, de manera que los capilares exteriores actúen sobre los modos superiores debilitándolos hasta eliminarlos, y concentrando el modo fundamental en el núcleo [13,14]. Cuando se trabaja con longitudes de onda cortas en fibras normales suelen aparecer varios modos simultáneamente, de ahí la importancia de esta propiedad de

las PCFs, que permite trabajar con un sólo modo sin solapamiento con otros modos espúreos. Además, las PCFs no presentan restricciones en cuanto a su tamaño como les pasa a las fibras normales que se diseñan para ser mono modo, lo cual las hace especialmente apropiadas para aplicaciones de transmisión de altas potencias.

1.3.4 Aplicaciones

Son varios los efectos novedosos que pueden conseguirse diseñando PCFs en función de las dos propiedades antes vistas. Esta versatilidad las ha convertido en uno de los campos más estudiados dentro de la fotónica actual, y sus aplicaciones pueden encontrarse en multitud de campos.

A continuación se hará una breve revisión de algunos tipos de PCFs y sus aplicaciones. Ya se ha comentado que en el capítulo 4 se propondrá un nuevo tipo de PCF, su diseño fractal la hará especialmente adecuada para la transmisión de señales de alta potencia.

1.3.4.1 PCFs de alta área efectiva

Ya se ha comentado que existen PCF que soportan un único modo de propagación sin importar el tamaño del núcleo o la longitud de onda. Éstas se fabrican rodeando un núcleo sólido de capilares de aire.

Este tipo de fibras se emplean en fibras y amplificadores en líneas de transmisión de señales

de alta potencia. Al transmitir más potencia que una fibra convencional, la distancia entre repetidores puede hacerse mayor, con lo que el coste del sistema disminuye. Las pérdidas asociadas a este tipo de fibras son inferiores a 1 dB/km, lo cual contribuye también al espaciado antes referido.

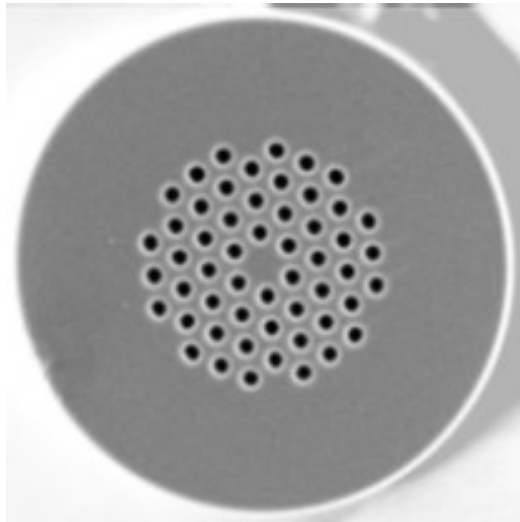


Fig. 1.7. PCF de alta área efectiva. Se observa como el núcleo es sólido y se encuentra rodeado de capilares.

Al ser fibras fabricadas exclusivamente con sílice tienen una utilidad y grado de aplicación enorme en la fabricación de sensores e interferómetros.

1.3.4.2 PCFs de núcleo hueco

El guiado de ondas mediante el fenómeno de PBG requiere de una estructura de capilares rodeando un núcleo de aire en el interior de la fibra. En la figura 1.8 puede apreciarse como la densidad de capilares en torno al núcleo es muy alta.

Como la mayor parte del campo se propaga por el núcleo hueco, el efecto de las no linealidades del material sobre éste se reducen drásticamente al igual que las pérdidas, ya que se trata de un medio no sólido.

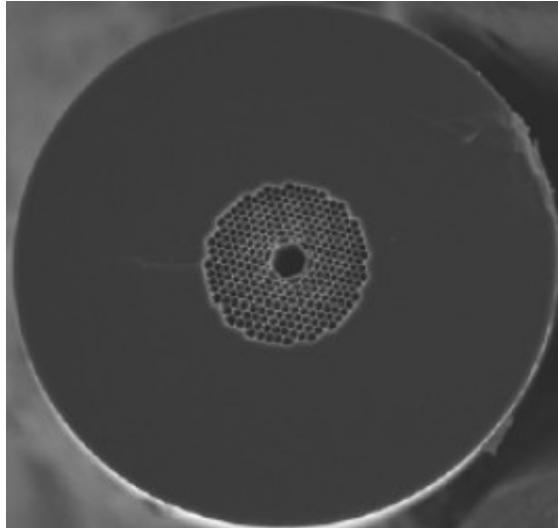


Fig. 1.8. Ejemplo de PCF de núcleo hueco.

Las bajas pérdidas asociadas a este tipo de fibras hacen que sean ideales para transmisiones a largas distancias. Cuando los costes de fabricación de las mismas se normalicen serán las sustitutas naturales de las actualmente existentes.

1.3.4.3 PCFs compensadoras de la dispersión

La longitud de onda de trabajo empleada tradicionalmente en los sistemas de transmisión era de 1,3 micras. Hoy en día las preferencias se han trasladado a las 1,55 micras, una longitud de onda que tiene asociadas considerables efectos dispersivos.

Las PCFs pueden diseñarse de manera que compensen la dispersión y estos efectos

negativos para la transmisión se reduzcan o, incluso, se eliminen por completo. De manera general, a mayor compensación de la dispersión, menor longitud de la PCF. La principal ventaja de las técnicas de compensación de la dispersión que usan PCFs es que el rango de longitudes de onda sobre las que actúan es mucho mayor que en las fibras tradicionales. Ésta propiedad reviste una mayor importancia cuando se trabaja en sistemas multicanal, en los que la dispersión afecta a varias señales en longitudes de onda diferentes.

El intervalo de longitudes de onda a las cuales la dispersión puede compensarse está relacionado directamente con el contraste entre sus índices de refracción. La manera de aumentar este contraste en las PCFs es aumentar el tamaño de los capilares de aire.

1.3.4.4 PCFs que mantienen la polarización

El fenómeno de la birrefringencia aparece en las fibras debido a las tensiones que sufren los materiales durante el proceso de fabricación. Lo que ocurre es que se forman diferentes ejes ópticos que afectan a la propagación de la luz. El plano de luz polarizada que penetra en la fibra se dividirá en los dos ejes y se propagará a velocidades diferentes, quedando elípticamente polarizada la luz. Esta polarización de la luz genera un retraso en la señal óptica, efecto conocido como dispersión por polarización y que tiene importantes efectos a tener en cuenta a altas tasas de transmisión.

Las PCF diseñadas para el mantenimiento de la polarización presentan ventajas sobre las fibras tradicionales, la mayor de ellas es de nuevo su capacidad para mantener la transmisión mono modo en un amplio espectro de frecuencias. Suelen utilizarse en giroscopios e interferómetros.

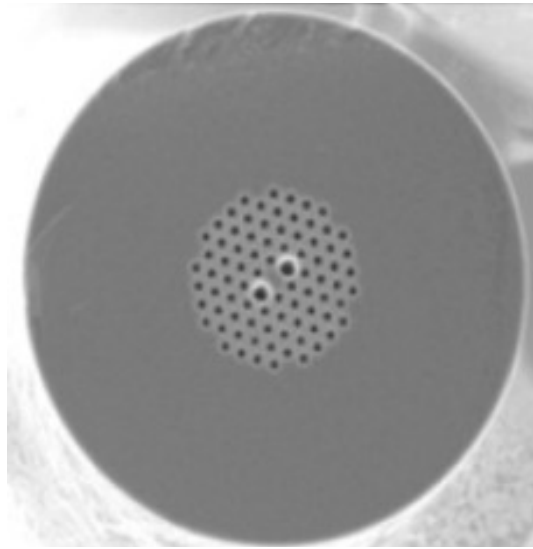


Fig. 1.9. PCF diseñada para controlar la polarización en la propagación.

1.3.4.5 Otro tipo de PCFs

Existen muchos más diseños y aplicaciones de las PCFs. Uno de los diseños que más se están estudiando son los de PCFs que permiten guiar la luz con tan sólo unos pocos capilares pero mucho más gruesos de lo que suele ser habitual., lo cual disminuye las pérdidas y favorece la formación del modo de propagación deseado [15]. Una fibra de este tipo será estudiada en el capítulo dos para validar los nuevos algoritmos numéricos propuestos en esta tesis.

Por último, mencionar que las PCFs con diseño fractal están siendo uno de los nuevos campos de estudio que se han abierto. Estas fibras combinan las propiedades de las PCFs con las de los fractales, obteniéndose propiedades muy novedosas [16].

En el capítulo 5 se propone un nuevo tipo de PCF con diseño fractal que presenta al mismo

tiempo propiedades de baja dispersión y alta área efectiva. Se hará un análisis pormenorizado de las propiedades de esta nueva fibra de alta área efectiva.

Capítulo 2. Técnicas clásicas de resolución

En el anterior capítulo se han planteado las ecuaciones que caracterizan una fibra de cara a propagar un pulso a través de ella. En ambos casos la complejidad de las mismas impide su resolución analítica, por lo que sus soluciones se han de buscar aplicando métodos numéricos. Dentro del enorme abanico de técnicas disponibles, las más usadas con estas ecuaciones son las espectrales, diferencias finitas y elementos finitos, si bien éstos últimos tan solo para las ecuaciones de análisis modal.

En general, la elección de un algoritmo concreto para la resolución de un problema dependerá de la naturaleza de éste, las condiciones particulares pueden llevar a usar técnicas diferentes para distintas condiciones de un mismo problema. También influirá la precisión que se quiera alcanzar en los resultados del problema, ya que la complejidad de un método suele ir pareja a

la precisión del mismo, si no son necesarios unos resultados muy precisos se podrá escoger una técnica de más fácil implementación.

En esta tesis se ha optado por trabajar con los métodos de diferencias finitas y espectrales. La relación entre precisión y complejidad de los mismos es muy buena, siendo métodos robustos y ampliamente verificados. Como se verá a lo largo del capítulo, las modernas técnicas de tratamiento de matrices y transformación de Fourier contribuyen además a acelerar dichos métodos teniendo en cuenta y aprovechando la propia estructura de los mismos.

2.1 Consideraciones generales

La resolución numérica de cualquier ecuación diferencial requiere una discretización previa de las funciones empleadas en dicho problema. Ya sea en el dominio del tiempo para diferencias finitas o en el de las frecuencias para métodos espectrales, el mallado de trabajo definido será determinante a la hora de alcanzar la precisión deseada en las soluciones, así como en el tiempo de cómputo empleado. Son éstos los dos aspectos clave a tener en cuenta a la hora de plantear una estrategia numérica para resolver un problema dado. De nada sirve un resultado instantáneo si los resultados carecen de la precisión requerida. Igualmente, una espera de a veces días tampoco es necesaria si no se requiere una precisión excesiva en la solución.

Por otro lado, un mallado poco denso alcanzará rápidamente la solución del problema, pero puede dar lugar a bajas precisiones en los resultado o, incluso, problemas de convergencia. En cambio, un mallado muy denso asegurará la convergencia del problema y una alta precisión en los

resultados, no obstante, el tiempo de computo asociado puede dispararse de manera desproporcionada. Resulta, por tanto, fundamental encontrar un equilibrio entre precisión y coste computacional. Es imposible establecer apriori este límite, por lo que será el método de prueba y error el empleado a la hora de buscar unas dimensiones adecuadas a la discretización del problema.

A lo largo de la tesis se han empleado diferentes densidades de mallado en la resolución de un mismo problema, la idea es estudiar las precisiones y tiempos de convergencia para cada uno y poder así encontrar una solución de compromiso entre ambos parámetros. No obstante, como método general, siempre que se desee estudiar un problema concreto conviene simular con mallados de poca densidad un caso cuya solución sea conocida, e ir incrementando los mallados hasta alcanzar la precisión deseada.

Los dos siguientes puntos se dedicarán, dada la importancia del tema, a realizar una revisión de los métodos empleados en el presente trabajo en cuanto a estos dos aspectos de importancia capital: precisión y coste computacional.

2.2 Precisión de los resultados

Toda técnica numérica tiene asociado un error en sus resultados consecuencia del paso de trabajar con ecuaciones continuas a puntos muestreados a partir de las mismas. Y no son sólo las funciones las que sufren este proceso de muestreado, sino que los operadores que intervengan en la ecuación también deberán discretizarse apropiadamente.

El primer paso en la discretización será siempre la elección de una ventana de cómputo donde enmarcar las simulaciones. Dicha ventana deberá plantearse en función de las longitudes características del problema y de las condiciones de contorno impuestas. A este respecto, suele ser aconsejable tomar ventanas grandes mejor que demasiado ajustadas a los datos del problema, ya que se corre el riesgo de que las soluciones se salgan de la ventana cuando comiencen las simulaciones. Esto es aplicable especialmente en los métodos espectrales, donde la transformada de Fourier puede dar problemas de colas al trabajar con los datos laterales junto a los bordes de la ventana de trabajo.

Una vez dimensionada la ventana, habrá que decidir el número de puntos con el que se va a formar el mallado. La imposición de dicho mallado dentro del marco de la ventana de cómputo lleva aparejado el establecimiento de una distancia entre puntos conocida como *paso de discretización*:

$$h = \frac{T_v}{N} \quad (2.1)$$

donde T_v es el tamaño de la ventana y N el número de puntos del mallado.

Los mallados serán de una o varias dimensiones, pudiéndose establecer diferentes pasos en cada una de ellas sin más que escoger un número de puntos diferente en función de las necesidades del problema. Así mismo, pueden definirse mallados no uniformes e incluso adaptativos, que van variando a lo largo del método según los requerimientos de precisión en cada momento.

La precisión de un método numérico está directamente relacionada con el tamaño del paso

empleado. Mientras más bajo sea éste más precisos serán los resultados, ya que la densidad de puntos será mayor. Si los puntos tomados son escasos, el tamaño del paso aumentará con la consecuente pérdida de precisión en la solución del problema.

2.2.1 Diferencias finitas

En el caso de los métodos de diferencias finitas no son solo las funciones las que sufren un proceso de discretización, ya que, como se ha comentado antes, los operadores también sufren el suyo propio. A la hora de discretizar un operador habrá que tener en cuenta el mallado realizado sobre las funciones, pero además podrá elegirse, como norma general, entre diferentes órdenes de aproximación que requerirán distintas cantidades de puntos en su formulación.

El punto de partida a la hora de construir los operadores de derivación en los métodos de diferencias finitas es siempre el desarrollo en serie de Taylor de la función caso de estudio

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \dots \quad (2.2)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \dots \quad (2.3)$$

Los operadores derivada se obtienen a partir de diferentes truncamientos de los desarrollos (2.2) y (2.3), además de en función del número de puntos que se quieran emplear en el cómputo de la derivada (precisión de la aproximación) [1].

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + O(h) \quad (2.4)$$

$$f'(x_0) = \frac{\frac{1}{2}f(x_0 + h) - 2f(x_0) + \frac{3}{2}f(x_0 - h)}{h} + O(h^2) \quad (2.5)$$

Las dos expresiones anteriores, por ejemplo, efectúan la derivada primera de una función en un punto. No obstante, la fórmula empleada en (2.5) ofrece una precisión del orden del paso elevado al cuadrado, mientras que la (2.4) es tan sólo del orden del tamaño del paso. Podrían deducirse fórmulas de mayor orden de precisión para esta derivada primera sin más que seguir incluyendo puntos, con sus correspondientes coeficientes, en el cálculo de las mismas.

Como se puede apreciar, la precisión de un operador depende tanto del tamaño del paso de discretización empleado como de la manera en que se han truncado los operadores, lo cual viene a su vez determinado por el número de puntos disponibles para realizar las aproximaciones. Mientras mayor precisión se deseé en el operador, mayor número de puntos habrá que tener en cuenta en su cálculo.

Obviamente, y teniendo en cuenta si se trabaja con diferencias finitas laterales o centradas, en los laterales de la ventana no podrán emplearse siempre todos los puntos, sino que habrá que realizar la implementación de manera gradual.

En general, el orden de precisión del operador viene dado por la potencia en h del término en el que se han truncado los desarrollos (2.2) y (2.3). De ahí que mientras más términos se incluyan, mayor será la precisión del operador.

2.2.2 Métodos espectrales

En los métodos espectrales la dependencia de la precisión de los resultados con el tamaño de la muestra es diferente. La derivación espectral se basa en la propiedad de la transformada de Fourier que dice

$$F\left[\frac{d}{dt}x(t)\right]=i\omega\tilde{x}(\omega) \quad (2.6)$$

donde $\tilde{x}(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función temporal $x(t)$.

La fuente de error aquí no será la derivación en sí, ya que se reduce a un mero producto de vectores en el espacio de frecuencias, sino al que lleva aparejado la transformación de las funciones del dominio del tiempo al de frecuencias.

Las funciones han de ser muestreadas y, sobre estos datos, aplicar una transformada discreta de Fourier. A la hora de realizar este proceso habrá que tener cuidado de tomar un muestreo lo suficientemente denso y enmarcado en una ventana de simulación lo bastante amplia como para que no se produzcan problemas de solapamiento en el espectro. De no ser así, no sería la precisión el único parámetro afectado, ya que podrían producirse incluso problemas de convergencia a una solución correcta.

Las técnicas actuales de transformación discreta de Fourier presenta un error relativo muy bajo, del orden de $O(\varepsilon \cdot \log N)$, donde ε es la precisión de la máquina empleada y N el número de

puntos discretizados. El problema no viene tanto de la transformación en sí como de la elección de la ventana de cómputo y la densidad de mado que, a su vez, está relacionado con el tamaño del paso. Así, de una manera indirecta en este caso, el valor del paso h también deberá ser tenido en cuenta a la hora de trabajar con métodos espectrales y será determinante en la convergencia o no del método..

Como se verá en el siguiente punto, la principal desventaja de los métodos espectrales es más su coste computacional que una escasa precisión en los resultados, ya que, aunque el número de operaciones requeridas es relativamente bajo, sigue siendo elevado y puede introducir errores en los datos en sucesivas aplicaciones de la transformada de Fourier.

2.3 Coste computacional

El análisis del coste de un algoritmo puede efectuarse en cualquiera de los ámbitos de su uso. Los dos más frecuentes son el análisis de coste computacional, que mide la eficiencia de coste temporal de los algoritmos, y el análisis de consumo de memoria, que, como su nombre indica, mide la cantidad de memoria consumida por un algoritmo.

Resulta obvio que el tiempo empleado en resolver un problema numérico variará de una maquina a otra que empleen el mismo algoritmo, de ahí que, a la hora de establecer el coste computacional de dicho algoritmo, se mida el número de operaciones empleadas y no el tiempo de cálculo. De esta forma se podrá comparar la eficiencia de varios algoritmos con independencia de cualquier característica que no sea la rapidez con que el algoritmo alcanza la solución teórica del

problema. Por otro lado, estas operaciones siempre vendrán determinadas por la cantidad de datos con los que trabaje el algoritmo, por lo que el número de operaciones (coste computacional) se expresará siempre en función del tamaño de los datos de entrada.

A la hora de medir la cantidad de operaciones se suele tener en cuenta que las sumas y diferencias no representan, comparativamente, ningún peso de cómputo frente a las multiplicaciones y divisiones, de ahí que sean éstas exclusivamente las que se usen para medir el coste computacional del algoritmo. Obviamente, el problema de mesurar el coste de un algoritmo resulta mucho más complejo y se basa en más parámetros que el número de multiplicaciones y divisiones que implica, pero para los objetivos de esta tesis será suficiente tener en cuenta dicho criterio.

También hay que tener presente que, aunque un algoritmo siempre sea optimizable, en la práctica existe una oposición entre tiempo de computación y consumo de memoria. Es decir, a mayor eficiencia computacional, mayor consumo en memoria y viceversa. Un almacenamiento de datos extra en memoria puede ayudar a disminuir el número de operaciones en la mayoría de algoritmos, pero la posibilidad de realizar ésto dependerá de las características de la máquina empleada en el cómputo, pudiendo ser la memoria un factor determinante o no.

2.3.1 Diferencias finitas

Como se vio en el anterior apartado, al aplicar diferencias finitas a un operador derivada éste se define sobre los nodos que constituyen en el mallado. Ésto permite transformar un problema

continuo de derivación en otro discreto de ecuaciones algebraicas.

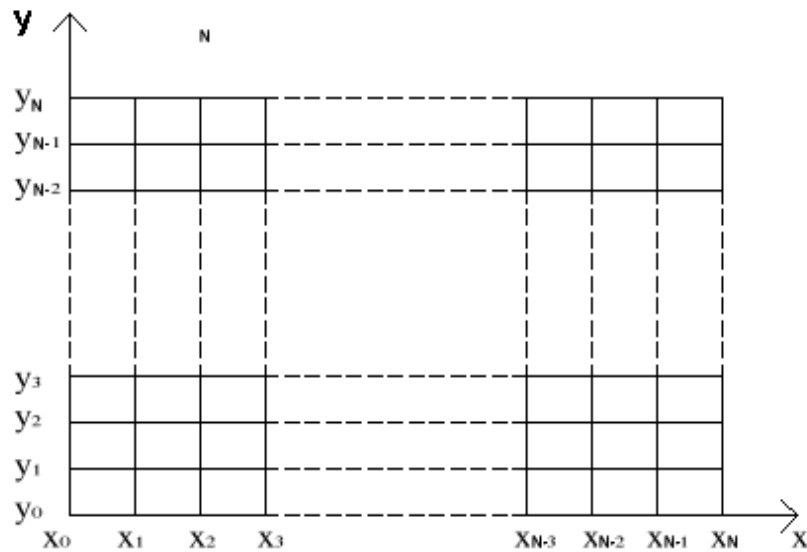


Fig. 2.1. Definición de un malla en coordenadas cartesianas. Cada nodo se asocia a un par de coordenadas, planteándose un sistema de ecuaciones algebraicas en vez de un problema de ecuaciones diferenciales.

Como se verá más adelante en este capítulo, las ecuaciones de Helmholtz conducen a un tipo de problema algebraico muy concreto: el de la búsqueda de los autovalores del sistema. La ecuación matricial asociada a éste es:

$$D\Phi = \varphi\Phi \quad (2.7)$$

donde D es la matriz que contiene los coeficientes de las diferencias finitas y φ es el autovalor asociado a cada autovector Φ que es solución del sistema. La manera de resolver estos problemas mediante técnicas numéricas es aplicando métodos iterativos.

Es decir, si el malla es cuadrado, se dispondrá de una matriz de $N \times N$ coeficientes que habrá que multiplicar por el vector solución sucesivamente si se emplea un método iterativo. El

número de operaciones será de N^2 , y el coste computacional, por tanto, de $O(N^2)$ en cada iteración.

No obstante, las matrices de diferencias finitas empleadas suelen ser matrices dispersas, entendiéndose por tales aquellas matrices que presentan una gran cantidad de ceros y estructura de banda en los coeficientes no nulos. Existen técnicas específicas para dicho tipo de matrices y que permiten reducir el tiempo de cómputo al trabajar con ellas [2,3], su aplicación permite reducir considerablemente el almacenamiento en memoria y el número de operaciones.

La matriz de diferencias se obtiene de los coeficientes en que se desarrolla el operador derivada. En el punto 2.2.1 se vio que un mismo operador podía definirse para diferentes órdenes de precisión introduciendo más puntos en su fórmula. La densidad de la matriz de diferencias finitas dependerá directamente del grado de precisión con el que se quiera trabajar, a mayor grado mayor densidad y, por lo tanto, mayor coste tanto en memoria como en número de operaciones. No obstante, el empleo de técnicas para matrices dispersas hace prácticamente despreciable el incremento que puede suponer incluir más términos en los desarrollos de órdenes superiores para los operadores de diferencias finitas.

Queda, por tanto, claro que los requerimientos de un método de diferencias finitas se reducen al almacenamiento de una matriz dispersa en memoria y a su multiplicación por el vector solución en cada una de las iteraciones de la resolución del sistema de ecuaciones asociado. Como se ha comentado, al aplicar rutinas numéricas específicas para matrices dispersas, no será necesario almacenar la matriz cuadrada en memoria, por lo que el coste total dependerá del número de elementos no nulos en ella.

2.3.2 Métodos espectrales

Los métodos espectrales también transforman los problemas de ecuaciones diferenciales en problemas de sistemas de ecuaciones lineales, no obstante lo hacen aplicando una transformación de Fourier para pasar al espacio de frecuencias. Más concretamente, una transformada discreta de Fourier, ya que se trabaja con muestras discretas de la función de entrada.

La aplicación de una transformada de Fourier de manera directa resulta muy costosa en términos computacionales. Básicamente se trata de la multiplicación de una matriz llena por el vector que se desea transformar, por lo que ni siquiera pueden aplicarse las técnicas diseñadas para matrices dispersas mencionadas en el anterior apartado. Sin embargo, en 1965 Cooley y Tukey consiguieron implementar un algoritmo al que llamaron *transformada rápida de Fourier* (FFT) que permite reducir drásticamente el número de operaciones requerido así como el error global del método [4].

De nuevo será necesario aplicar un método iterativo para encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales, ya que esta parte del algoritmo no varía en absoluto. La diferencia es la manera de definir los operadores derivada, que, como se verá en el próximo capítulo, serán más un proceso que una matriz en sí. Habrá que realizar varias iteraciones para encontrar la solución y, a su vez, varias FFTs con sus correspondientes transformadas inversas en cada una de ellas.

El coste de cada FFT (o su inversa) será de $N \log_2 N$, donde N es el número de puntos del vector a transformar. Una restricción que presenta la FFT en su aplicación es que dicho vector

deberá estar formado por un número de elementos que sea potencia de dos $N=2^n$, si éste no fuese el caso bastará con añadir ceros en ambas colas del vector.

Como se puede apreciar, el ahorro de memoria y número de operaciones es considerable si se aplica la FFT. Su efecto es similar al que implica el uso de técnicas de matrices dispersas en los métodos de diferencias finitas.

2.4 Condiciones de contorno

En los problemas de simulación de fibras ópticas hay que tener especial cuidado con las condiciones de contorno aplicadas en su resolución. La estructura propia de la fibra implica un decaimiento asintótico a cero de los campos a medida que se alejan del núcleo y se adentran en la cubierta. Como se vio en el punto 1.1.2, éstos eran los conocidos como modos de propagación guiados y, aunque los modos radiados y *leaky* presentaban excepciones a esta condición, éstos últimos se trataban tan sólo de soluciones que permitían estudiar ciertos comportamientos anómalos o extraordinarios dentro de la fibra.

La condición esencial, a parte de la continuidad de los campos en su interior, es la de campo nulo donde acaba la fibra. Dicha condición puede plantearse de varias maneras: conductor perfecto (eléctrico o magnético), impedancia, periódicas, PML,... De todas éstas, quizá las más usadas sean las PML, también conocidas como *Condiciones de Contorno Absorbentes Perfectamente Adaptadas*, cuya principal ventaja es tratar de manera adecuada el comportamiento de la radiación electromagnética en los bordes de la ventana de simulación.

En la presente tesis, sin embargo, se ha tenido en cuenta la nulidad de los campos en los bordes de la fibra tomando una ventana de cómputo lo bastante grande como para que los campos decaigan a cero de manera natural. Si en alguna simulación esta condición de campo cero no se cumpliera en los bordes habría que redimensionar la ventana o aplicar condiciones de contorno, pero, tal y como se verá en los resultados de las simulaciones, en todos los casos el comportamiento del campo ha sido el esperado sin más que tomar bastante mallado en la zona de la cubierta.

Así pues, a la hora de implementar los operadores de diferencias finitas no ha sido necesario definir coeficientes especialmente adaptados en los bordes de la matriz, ya que la tendencia natural de las iteraciones ha llevado al comportamiento asintótico antes expresado.

En cuanto a los métodos espectrales, también se ha tenido cuidado de tomar una ventana de cómputo lo suficientemente grande tanto en la caracterización de la fibra como en la propagación. En estos métodos este tema es especialmente delicado, ya que si no se toma el suficiente *espacio* en los bordes del problema, la propia estructura de la transformada de Fourier puede inducir a la aparición de colas numéricas en dichos extremos y conducir a soluciones erróneas.

2.5 Paquetes numéricos: FFT y LAPACK

En el anterior punto se ha explicado el papel crucial que juega la FFT en los métodos de simulación espectrales. Así mismo, las ecuaciones modales se plantearon como problemas de autovalores, por lo que será necesario la aplicación de un paquete numérico que permita su

resolución.

A la hora de programar los diferentes métodos empleados en la tesis se ha trabajado con Octave, una versión libre del conocido software informático Matlab. Por tanto, han sido su implementación de la FFT y el paquete LAPACK, incorporado en el mismo, los encargados de realizar las transformadas y realizar la búsqueda de autovalores respectivamente.

2.5.1 Paquete FFT

La principal característica de la FFT empleada en las simulaciones es, como ya se comentó, que trabaja sólo con vectores cuyo número de componentes es potencia de dos. Ésto establece una restricción a la hora de elegir los mallados a aplicar sobre la ventana de simulación. La posible alternativa, también antes sugerida, es tomar mallados de cualquier número de puntos y añadir ceros allí donde sean necesarios. Dicha técnica recibe el nombre de *zero padding* y se explicará con detalle en el capítulo tercero.

La definición de frecuencias se realizará generando un vector con la siguiente estructura:

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{2\pi n}{N\Delta} \quad (2.8)$$

$$n = \frac{-N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$$

donde N es el número total de muestras tomadas y Δ el paso del muestreo. Hay que tener

cuidado con esta definición de frecuencias, ya que la FFT empleada en las subrutinas de Octave lleva a cabo una inversión en el orden de los coeficientes de Fourier obtenidos, de ahí que sea necesario efectuar el mismo proceso con el vector de frecuencias (existe una subrutina dentro de Octave expresamente para ello).

Por supuesto, la vuelta al dominio del tiempo se realizará mediante la transformada inversa correspondiente, para la cual se aplican los mismos criterios que los tenidos en cuenta para la FFT y sus frecuencias.

2.5.2 Paquete LAPACK

El paquete matemático LAPACK contiene una colección de subrutinas orientadas a la resolución de problemas de álgebra lineal. Entre ellas se encuentra la que se ha utilizado para resolver el problema de autovalores asociado a las ecuaciones de análisis modal. Dicha subrutina se basa en el método de Arnoldi-Lanczos [5] de carácter iterativo. En realidad todos los métodos de búsqueda de autovalores son iterativos, en este caso el término es más específico y se refiere al hecho de que se obtiene una solución parcial después de unas pocas iteraciones, al contrario del resto de métodos que requieren completar el ciclo completo de iteraciones. Este método presenta además la ventaja de estar especialmente indicado para matrices dispersas, como son las que se obtienen al aplicar diferencias finitas a las ecuaciones modales.

A la hora de resolver las ecuaciones, se le ha indicado a la subrutina que se deseaban encontrar los autovalores con parte imaginaria nula (o lo más próxima posible a cero), ya que estas

soluciones son las que se corresponden con los modos de propagación guiados. Conviene recordar que los autovalores obtenidos se correspondían con la constante de propagación compleja de las soluciones modales, mientras que los autovectores suministraban las distribuciones de campo asociadas a dichas soluciones.

2.6 Resolución numérica de las Ecuaciones de Análisis Modal

A la hora de resolver las ecuaciones de análisis modal son varias las técnicas numéricas empleadas, siendo las más extendidas, como ya se comentó, las basadas en diferencias finitas, el análisis espectral y los elementos finitos. A continuación se dará una idea general sobre el funcionamiento de las dos primeras más que un análisis pormenorizado de las mismas. Será en el próximo capítulo donde se desarrollen en detalle las implementaciones del método de Fourier y el de diferencias finitas, así como la mejora de éste propuesta en la presente tesis.

Los métodos basados en diferencias finitas suelen presentar una mayor facilidad de adaptación a la hora de resolver ecuaciones diferenciales con derivadas parciales tal y como la aquí estudiada. Son cómodos de implementar y suelen ofrecer buenos resultados si el mallado es convenientemente denso.

Los métodos espectrales, en cambio, presentan una mayor especificidad en su aplicación, debiéndose preparar la ecuación escogida adecuadamente antes de implementarse. A cambio, suelen ofrecer una mayor precisión en los resultados y, gracias a la aplicación de la transformada rápida de Fourier (FFT), un coste computacional relativamente bajo.

2.6.1 Método general

El punto de partida común para cualquier método empleado son las ecuaciones (1.19) y (1.20). Dichas ecuaciones son las ecuaciones de análisis modal expresadas en formulación del campo eléctrico. Recordar, por otro lado, que una vez obtenidas las soluciones de éstas basta con aplicar las ecuaciones (1.16) a (1.18) para obtener las distribuciones completas de ambos campos.

El primer paso será expresar las ecuaciones en mediante operadores de carácter general en vez de con derivadas más específicas. De esta manera, se puede escribir:

$$\hat{D}_y^{(2)} E_x + k_0^2 \epsilon E_x + \hat{D}_x \{ \epsilon^{-1} [\hat{D}_x (\epsilon E_x) + \hat{D}_y (\epsilon E_y)] \} - \hat{D}_x \hat{D}_y E_y = -\gamma^2 E_x \quad (2.9)$$

$$\hat{D}_x^{(2)} E_y + k_0^2 \epsilon E_y + \hat{D}_y \{ \epsilon^{-1} [\hat{D}_x (\epsilon E_x) + \hat{D}_y (\epsilon E_y)] \} - \hat{D}_x \hat{D}_y E_x = -\gamma^2 E_y \quad (2.10)$$

donde \hat{D}_x y $\hat{D}_x^{(2)}$ con $\alpha = x, y$ hacen referencia a las derivadas primera y segunda en una u otra dirección. Son estos operadores los que deberán adaptarse a diferencias finitas o derivación espectral según el método numérico que se desee emplear.

En cuanto a los parámetros ϵ y ϵ^{-1} , son las matrices dieléctrica y su inversa, y contienen toda la información relativa a los materiales constitutivos de la fibra que se esté estudiando. La dimensión de estas matrices coincide con la del mallado realizado y asignan a cada uno de los nodos el valor del dieléctrico del material sobre el que se encuentra situado dicho nodo. Son, por tanto, la clave que permite aplicar este método general a cualquier tipo de fibra con nada más que

adaptarlas a su estructura concreta.

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) pueden expresarse de manera más clara como problema de autovalores adoptando la forma [6]

$$A \mathbf{E} = \gamma^2 \mathbf{E} \quad (2.11)$$

que puede desarrollarse en

$$\begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

donde

$$A_{xx} = \hat{D}_x^{(2)} + k_0^2 \epsilon + \hat{D}_x \epsilon^{-1} D_x \epsilon \quad (2.13)$$

$$A_{yy} = \hat{D}_y^{(2)} + k_0^2 \epsilon + \hat{D}_y \epsilon^{-1} D_y \epsilon \quad (2.14)$$

$$A_{xy} = \hat{D}_x \epsilon^{-1} \hat{D}_y \epsilon - \hat{D}_x \hat{D}_y \quad (2.15)$$

$$A_{yx} = \hat{D}_y \epsilon^{-1} \hat{D}_x \epsilon - \hat{D}_y \hat{D}_x \quad (2.16)$$

Una vez definida las matrices de la ecuación (2.12) según el método escogido y los parámetros asociados a los materiales de la fibra que se esté estudiando, bastará con introducirlas en la subrutina de cálculo de autovalores para obtener los modos y constantes de propagación correspondientes.

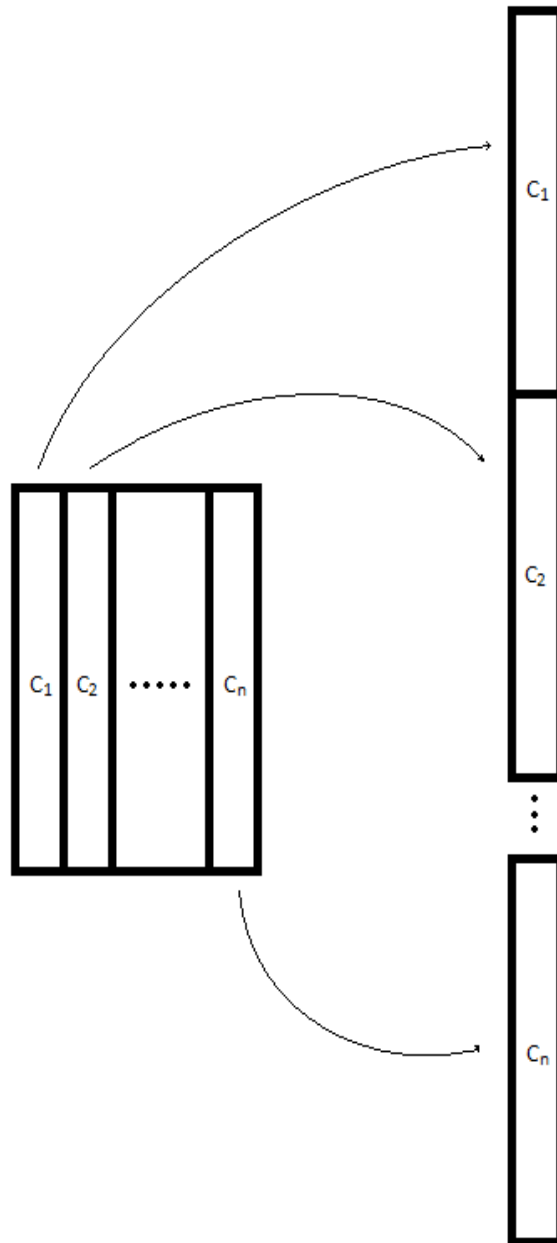


Fig. 2.2. Reorganización de las matrices de campo eléctrico. Las columnas se colocan una debajo de otra formando un vector columna.

Respecto a la definición de matrices antes mencionada, conviene hacer una aclaración sobre la forma de hacerlo. Como se puede apreciar en la ecuación (2.11), los campos eléctricos aparecen como si de las componentes de un vector (el autovector) se tratasen y, sin embargo, cada componente es en realidad una matriz de dos dimensiones correspondiente a la distribución de campo sobre el mallado definido. Por tanto, será necesario *estirar* estas matrices $N \times N$ hasta formar

con ellas un vector de N^2 elementos por cada componente del campo, es decir, un vector de un total de $2N^2$ elementos. La manera de hacerlo será colocar columna por columna las matrices de campo una debajo de la otra, realizando una vez encontrada la solución la inversión correspondiente para reconstruir las matrices de campo.

En el capítulo tercero se verá cómo este proceso de redimensionado es sólo necesario en los pasos que se esté trabajando con la rutina de búsqueda de autovalores, ya que ésta trabaja con vectores y no con matrices (de campo). Cuando se apliquen los operadores derivada será más cómodo y ahorrará más memoria hacerlo en la forma matricial de los campos. Por lo tanto, el redimensionado se irá intercalando, en un sentido u otro, en la resolución del problema en función de en qué fase se encuentre el método en cada momento, pasando de la matriz de campo al vector o viceversa según qué forma se requiera en cada momento.

Existen gran variedad de métodos basados en las diferencias finitas orientados a la resolución de ecuaciones diferenciales [7,8,9,10]. La gran mayoría se basan en la definición de unas fórmulas para los operadores derivada tales como la (2.4) o la (2.6), que se escogerán en función de la precisión y el número de puntos efectivos con que se deseé trabajar.

La idea básica, tal y como se explicó antes, se basa en definir dichos operadores como unas matrices de derivación que actúen sobre los puntos del mallado. El orden de las derivadas y su grado de precisión antes mencionados serán los que determinen los coeficientes de dichas matrices.

En cualquier caso, en el punto 2.3.1 ya se comentó que serán matrices dispersas de tipo banda, por lo que podrán emplearse técnicas específicas de este tipo de matrices para ahorrar tiempo

de cómputo.

2.6.2 Coste computacional

El coste computacional asociado a la resolución de las ecuaciones de análisis modal provendrá de dos fuentes distintas: la aplicación de los operadores y la búsqueda de autovalores.

El coste de la aplicación de los operadores estará ligado al método aplicado en su cálculo, el de diferencias finitas o la derivación espectral de Fourier. Como ya se vio en el punto 2.3, aplicando las técnicas de tratamiento de matrices dispersas en diferencias finitas y la FFT en las espectrales, ambos métodos acarrearán un coste computacional similar.

í habrá que tener en cuenta que la derivación espectral es una técnica que no permite elegir el grado de precisión con la que se emplea (más allá de aumentar el número de puntos usados en la discretización del problema), mientras que los operadores definidos en diferencias finitas sí pueden aplicarse en varios órdenes de precisión. No obstante, el incremento de operaciones debido a la inclusión de algunos puntos más en la definición del operador no es significativa en el coste global del método.

El factor determinante aquí será el número de iteraciones que tarda la búsqueda de autovalores en converger a una solución válida. Éste estará relacionado con la precisión y exactitud de los datos alcanzados en cada iteración, los cuales dependerán, a su vez, de la técnica empleada al definir los operadores derivada. En el capítulo tres se hará un estudio en detalle sobre este

importante factor a la hora de realizar el análisis modal de una fibra óptica.

2.7 Resolución numérica de la ecuación de propagación

La resolución numérica de la ecuación de propagación puede llevarse a cabo también mediante métodos de diferencias finitas o espectrales. En este caso, no obstante, es un método espectral (pseudo-espectral en realidad) el que se encuentra más extendido. Dicho método se conoce como método *Split-Step* de Fourier (SSFM) [11], y debe su nombre a que divide cada paso de simulación en una parte lineal y otra no lineal. Será la parte lineal la que se calcule mediante tratamiento espectral, mientras que la no lineal se aplica en el dominio del tiempo, es por esto que se habla de método pseudo-espectral.

Esta técnica resulta fácil de implementar y combina rapidez de cálculo con precisión, por lo que su difusión ha sido muy amplia. Es cierto que presenta algunas limitaciones dentro de su ámbito de aplicación (no puede simular ondas en contrapropagación, por ejemplo) que los métodos de diferencias finitas no tienen, pero se adapta sobradamente bien al marco más general de las comunicaciones por fibra óptica [12].

2.7.1 Método Split-Step

La ecuación a simular aquí será la (1.54), donde ya se comentó que el término de β_2 modela la dispersión cromática de segundo orden y el de γ corresponde a la no linealidad debida al efecto Kerr. Dicha ecuación puede expresarse mediante operadores, con lo que adquiere la forma:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i \gamma |A|^2 A \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N}) A \quad (2.17)$$

donde los operadores lineal (\hat{D}) y no lineal (\hat{N}) quedan definidos según las expresiones:

$$\hat{D} = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

$$\hat{N} = i \gamma |A|^2 A \quad (2.19)$$

La ecuación (2.17) presenta una solución analítica que viene dada por

$$A(z, t) = e^{(\hat{D} + \hat{N})z} A(z_0, t) \quad (2.20)$$

A la hora de simular, se discretiza el pulso de entrada en N puntos temporales y M puntos espaciales que cubren toda la longitud de la fibra. Existirán pues, dos pasos en juego (h el espacial y τ el temporal) que no deben ser confundidos entre sí.

Si se realiza una partición de la longitud de la fibra en los pasos de tamaño h antes mencionados, la ecuación (2.20) se escribiría

$$A(jh, t) = e^{(\hat{D} + \hat{N})h} A((j-1)h, t) \quad (2.21)$$

donde j es el índice que hace referencia al paso en el que se encuentra la simulación.

La exponencial de los operadores puede aproximarse de la siguiente manera:

$$e^{(\hat{D}+\hat{N})h} \approx e^{\hat{D}h} \cdot e^{\hat{N}h} \quad (2.22)$$

Esta aproximación introduce error dentro del cálculo, ya que los operadores no conmutan entre sí ($[\hat{D}, \hat{N}] \neq 0$). El error asociado a dicha separación viene dado por la fórmula de Baker-Hausdorff y, como se verá en el capítulo cuatro, influye decisivamente en la precisión del método [13].

A la hora de aplicar la parte no lineal de la exponencial sobre el vector A hay que tener en cuenta que el operador (\hat{N}) está directamente relacionado con el módulo de dicho vector y se trata de una magnitud escalar, por lo que se trata de una matriz diagonal y puede aplicarse la siguiente propiedad de la exponencial de una matriz [14]:

$$e^{diag(A)} = diag(e^A) \quad (2.22)$$

donde la notación $diag(X)$ hace referencia a que la matriz que se encuentra entre paréntesis es diagonal. Por tanto, la aplicación del operador no lineal se resume en la multiplicación de dos vectores de tamaño N , es decir, un coste de N^2 operaciones.

El operador lineal es, en cambio, más complejo de calcular. Las derivadas segundas que

incluye en su interior lo convierten en una matriz no diagonal, cuya exponenciación sería muy costosa numéricamente hablando. Sin embargo, dicho operador expresado la base del espacio de frecuencias de Fourier se transforma en una matriz diagonal y podría aplicarse, por tanto, la siguiente propiedad de las matrices diagonalizables:

$$\text{Si } A = TDT^{-1} \Rightarrow e^A = Te^D T^{-1} \quad (2.23)$$

donde A es una matriz diagonalizable en D , T la matriz al cambio de base diagonal y T^{-1} la inversa de dicha matriz. En este caso ya se ha dicho que el cambio de base se realiza mediante una transformada, por lo que la el cálculo a realizar vendría dado por

$$e^{\hat{D}(i\omega)} = F \exp^{\hat{D}(t)} F^{-1} \quad (2.24)$$

Los coeficientes de la matriz diagonal obtenida en el dominio de las frecuencias serían las frecuencias dadas por (2.8), ya que el proceso de derivación es similar al de las ecuaciones de Helmholtz. La matriz quedaría:

$$e^{\hat{D}(i\omega)} = \exp[\text{diag}(i\omega_{-N/2}, i\omega_{-(N/2)-1}, \dots, i\omega_{(N/2)-1}, i\omega_{N/2})] \quad (2.25)$$

Introduciendo las ecuaciones (2.22) en (2.21) se llega a:

$$A(jh, t) = e^{\hat{D}h} e^{\hat{N}h} A((j-1)h, t) \quad (2.26)$$

Si ahora se introducen matrices identidad y se descomponen

$$A(jh, t) = I e^{\hat{D}h} I e^{\hat{N}h} A((j-1)h, t) \quad (2.27)$$

$$A(jh, t) = (F^{-1} F) e^{\hat{D}h} (F^{-1} F) e^{\hat{N}h} A((j-1)h, t) \quad (2.28)$$

$$A(jh, t) = F^{-1} (F e^{\hat{D}h} F^{-1}) F e^{\hat{N}h} A((j-1)h, t) \quad (2.29)$$

$$A(jh, t) = F^{-1} e^{\hat{D}(i\omega)h} F e^{\hat{N}h} A((j-1)h, t) \quad (2.30)$$

Es esta última ecuación (2.30) la que se usará en el SSFM. La división del paso a la que hace referencia el nombre del método es clara en dicha ecuación, la parte lineal se trabaja en el dominio de las frecuencias, mientras que la no lineal se resuelve en el del tiempo.

El procedimiento a seguir en la simulación sería el siguiente:

1. Discretizar el pulso de entrada.
2. Generar el vector de frecuencias de derivación.
3. Calcular la exponencial no lineal y multiplicarla por el pulso.
4. Aplicar la FFT al pulso transformado.
5. Multiplicar por la exponencial lineal para derivar.
6. Realizar la FFT inversa para obtener el pulso de salida.
7. Repetir desde el paso 3 hasta recorrer la fibra por completo.

El número de iteraciones dependerá del mallado que se haya definido sobre la longitud total de la fibra.

A mayor densidad de mallado mayor precisión en los resultados obtenidos, pero también

mayor cantidad de operaciones asociadas con el consiguiente incremento de tiempo de cómputo asociado.

2.7.2 Coste computacional

El coste computacional del SSFM se deriva directamente de la aplicación de la FFT y su inversa. La multiplicación de las exponenciales, tanto lineal como no lineal, representan un total de N operaciones (multiplicación de dos vectores). Frente a esto, la FFT (o su inversa) requieren un total de $N \log_2 N$ operaciones, tal y como se vio en el punto 2.3.2, pero en cada paso de propagación han de realizarse dos FFTs, una directa y otra inversa. El número total de operaciones por paso en el SSFM *básico* es, por tanto, de $(2 + \log_2 N) N$.

En el capítulo cuatro se estudiarán diversas variantes del método SSFM que permiten mejorar la precisión del método alterando el orden y tamaño de los pasos de discretizado de la longitud de la fibra. Allí se tratará con más detalle el tema del coste computacional de cada una de las implementaciones del SSFM

Capítulo 3. Análisis modal de PCFs mediante una nueva técnica basada en diferencias finitas centradas de órdenes superiores

En los anteriores capítulos se sentaron las bases teóricas y numéricas sobre las que se realiza el estudio de la transmisión de datos a través de fibras ópticas. En concreto, en el capítulo uno, se estudió su caracterización mediante las ecuaciones de análisis modal y la propagación de pulsos a través de ellas mediante la ecuación de propagación, ambos sistemas de ecuaciones fueron planteados. Así mismo, y ya que esta tesis se orienta al estudio de las mismas, se presentaron las PCFs así como sus principales características y ventajas frente a las fibras tradicionales. En el segundo capítulo, se plantearon dos de las principales técnicas numéricas que se emplean en su

resolución: diferencias finitas y análisis espectral. El presente capítulo introduce la primera de las contribuciones que este trabajo realiza al campo de las telecomunicaciones: la optimización de la técnica numérica de caracterización de una fibra antes mencionada para obtener un mayor rendimiento en menos tiempo.

Como ya se explicó en el punto 2.3, los dos puntales básicos sobre los que se apoya un algoritmo numérico son la precisión del mismo y su coste computacional. El objetivo será siempre obtener la mayor precisión en el menor tiempo posible (bajo coste computacional). A tal efecto, se han refinado las técnicas existentes sin modificar su estructura básica pero introduciendo mejoras significativas en el diseño de los operadores y el mallado.

Estas nuevas implementaciones han sido verificadas mediante la simulación de un caso con solución teórica conocida (fibra de salto de índice) y otro del cual se dispone de solución suficientemente contrastada en la bibliografía (PCF hexagonal). La validez de las simulaciones llevadas a cabo con estos métodos permitirá aplicarlos en el último capítulo a un nuevo tipo de PCF con estructura fractal diseñado especialmente para la presente tesis.

A continuación se va a introducir el método de diferencias finitas expresando los operadores mediante diferencias centradas de órdenes superiores, algoritmo que no se había usado nunca hasta el momento en éste tipo de estudios. Dicho método se comparará con el basado en análisis espectral y la FFT. Para ello se calcularán las soluciones analíticas de una fibra de salto de índice y se simulará una PCF de diseño hexagonal ya estudiada.

Se compararán precisiones y tiempos de cómputo de ambos métodos para los dos casos de

comparación, verificándose la bondad de la nueva implementación en diferencias finitas propuesta en esta tesis.

3.1 Esquemas de diferencias finitas centradas de órdenes superiores

Ya se vio en el primer capítulo que, a la hora de obtener los parámetros característicos de una fibra óptica, es necesario recurrir a las ecuaciones de análisis modal. De hecho, dichas ecuaciones se expresaron de la forma más general mediante operadores en (2.9) y (2.10) a fin de poder resolverse con diferentes métodos sin más que cambiar la expresión de los operadores.

En el punto 2.1.1 se explicó la manera en que se definen los operadores de diferencias finitas. Baste recordar aquí que son matrices generadas a partir de una fórmula por inducción que se obtiene del truncamiento de la serie de Taylor. Dichas matrices variarán su diseño en función del orden de precisión con el que se deseé trabajar.

Por tanto, la idea general es elegir un conjunto de operadores derivada concreto y sustituirlo en las ecuaciones (2.8) y (2.9), para aplicar a continuación un método general de búsqueda de autovalores. Las diferencias finitas centradas emplean puntos a ambos lados del punto estudiado para calcular la derivada, de ahí que ofrezcan una mayor fiabilidad que las diferencias laterales.

La Tabla 3.1 presenta los coeficientes asociados a las primera derivada para varios órdenes de precisión, mientras que en la Tabla 3.2 se pueden observar los de la segunda derivada [1].

Precisión	Coeficientes								
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2°	0	0	0	-1/2	0	1/2	0	0	0
4°	0	0	1/12	-2/3	0	2/3	-1/12	0	0
6°	0	-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60	0
8°	1/280	-4/105	1/5	-4/5	0	4/5	-1/5	4/105	-1/280

Tabla 3.1. Coeficientes de la derivada primera.

Precisión	Coeficientes								
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2°	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
4°	0	0	-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12	0	0
6°	0	1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90	0
8°	-1/560	8/315	-1/5	8/5	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560

Tabla 3.2. Coeficientes de la derivada segunda.

Las matrices de derivación son matrices banda que se construyen a partir de los anteriores coeficientes. Como ejemplo se muestra a continuación la matriz correspondiente al operador derivada primera de cuarto orden de precisión:

$$D_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -1/12 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/12 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 2/3 & -1/12 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/12 \\ 1/12 & -2/3 & 0 & 2/3 & -1/12 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 2/3 & -1/12 \\ -1/12 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -2/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & -1/12 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1/12 & -2/3 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Como puede observarse, los coeficientes de la tabla se ordenan en forma de matriz banda en la que los elementos situados en la columna encabezada “0” corresponden a la diagonal principal, ordenándose los demás en torno a éste a la izquierda si son negativos y a la derecha los positivos.

En el punto 2.5.1 se explicó cómo las matrices de campo eléctrico han de reorganizarse en forma de vectores columna a fin de poder aplicar la subrutina de búsqueda de autovalores. Obviamente, este ordenamiento afecta también a la estructura de las matrices de derivación, que deberían adaptarse a la forma del vector de campo. Una forma de obviar este problema es aplicar los operadores sobre las matrices de campo directamente, y transformar éstas en vectores columna solamente cuando se vaya a realizar una iteración en la subrutina de autovalores. Este procedimiento resulta más adecuado, ya que permite evitar definir operadores extra a la hora de derivar en las dos direcciones posibles X e Y .

La manera de aplicar el operador derivada se simplifica considerablemente si se aplica sobre matrices de campo tal y como se haya definido en (3.1). Al efectuar su multiplicación matricial por la matriz de campo obtendríamos la derivada de ésta según el eje Y

$$\frac{dE_{\alpha}}{dy} = D_n^{(1)} E_{\alpha} \quad (3.2)$$

$\alpha = x, y$

donde n hace referencia a la precisión del operador.

Para calcular la derivada según el eje X , bastará con aplicar el operador sobre la matriz traspuesta del campo eléctrico y volver a realizar la traspuesta de la matriz obtenida

$$\frac{dE_{\alpha}}{dx} = (D_n^{(1)} E_{\alpha}^t)^t \quad (3.3)$$

$$\alpha = x, y$$

donde t hace referencia a la trasposición de la matriz.

Este procedimiento es general y puede aplicarse con cualquier operador derivada de cualquier orden de precisión que se haya escogido. Si se hubiese elegido trabajar con el vector columna de campo eléctrico habría sido necesario definir dos operadores derivada en vez de uno sólo debido al ordenamiento de los coeficientes.

3.2 Derivación espectral

Ya se introdujo el método de derivación espectral en el punto 2.1.2. La idea básica era transformar la función que se desea derivar al dominio de las frecuencias y multiplicar por $j\omega$, al volver al dominio del tiempo la función obtenida es la derivada.

Al realizar la discretización de la fibra, los campos eléctricos quedan expresados mediante matrices, tal y como ya se ha visto. La transformada de Fourier aplicada deberá ser, por tanto, en dos dimensiones. Dicha transformación bidimensional puede realizarse aplicando una transformación de una sola dimensión por filas y, a continuación, por columnas o usando una subrutina en dos dimensiones de las ya existentes [2]. En concreto, y como también se explico en el punto 2.2.2, el uso de la FFT en dos dimensiones permitirá agilizar los cálculos de manera

determinante y disminuir así el coste computacional de la derivación.

Una de las características de la FFT era que estaba diseñada para trabajar con vectores cuyo número de componentes fuese potencia de dos $N=2^n$. Ya se explicó que ésto no implica que los mallados escogidos deban de cumplir forzosamente dicha restricción, bastará con añadir ceros en los márgenes de los datos hasta alcanzar unas dimensiones adecuadas, dicho proceso es conocido como *zero-padding* [3]:

$$E_\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\alpha = x, y$$

donde los ceros son matrices nulas de la dimensión adecuada para que la matriz final presente una potencia 2^n tanto de filas como de columnas.

Una vez realizada la derivación y la transformación inversa para volver al dominio del tiempo, bastará con eliminar los ceros y volver a una matriz con las dimensiones originales. Este proceso ayuda también a no introducir error numérico en los datos, ya que la propia estructura de la FFT puede generar ruido en las colas de la ventana de cómputo. De esta manera, al eliminar los coeficientes del *zero-padding*, también se está suprimiendo la posible distorsión que hubiese introducido los procesos de transformación directa e inversa de Fourier.

La definición del vector de frecuencias por el que se multiplica para la derivación se realiza según la ecuación (2.7), y habrá que tener en cuenta los ceros añadidos si ese fuera el caso.

$$\omega = \frac{2\pi}{L} \cdot \left(\frac{-N}{2}, \frac{-N}{2} + 1, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} \right) \quad (3.5)$$

$$N = 2^n$$

A la hora de multiplicar las matrices transformadas de campo por las frecuencias definidas en (3.5), éstas se ordenarán en forma de matriz diagonal, de manera que cada coeficiente de cada columna quede multiplicado por su frecuencia correspondiente:

$$\omega = \frac{2\pi}{2} \begin{pmatrix} -N/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(N/2)+1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (N/2-1) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & N/2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Al igual que en diferencias finitas, la manera de derivar según la dirección Y o X es multiplicar directamente por la matriz de campo o su traspuesta respectivamente. En el caso de haber hecho la traspuesta, habrá que volver a realizar la antes de aplicar la FFT inversa.

El proceso de derivación espectral queda, por tanto, resumido en la figura 3.1:

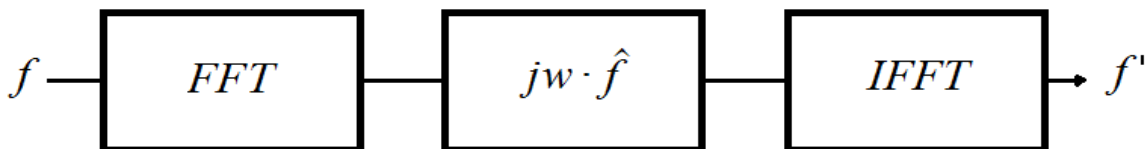


Fig. 3.1. Esquema de derivación mediante transformadas de Fourier. Se aplica la FFT en el proceso de transformación.

donde f hace referencia a la función que se desea derivar [4]. En el caso del campo eléctrico

sería su respectiva matriz.

En dicho esquema se ha supuesto que la función cumple el requisito de número de coeficientes de la FFT, si no fuera el caso se aplicaría el *zero-padding*.

3.3 Matriz dieléctrica

Ya se mencionó en el capítulo primero la importancia del parámetro de dieléctrico como almacén de la información sobre la geometría y componentes de la fibra. Cuando se realiza la discretización del problema, es en la matriz dieléctrica donde a cada nodo se le asocia un valor de dieléctrico correspondiente al material sobre el que se encuentra situado el nodo.

En aquellas fibras de diseño sencillo como las de salto de índice las matrices dieléctricas no serán especialmente complejas. En las PCFs, sin embargo, habrá que utilizar una densidad adecuada de mallado a fin de que queden adecuadamente representados todos los detalles del diseño interno de capilares de la fibra. Existen métodos específicos de suavizado que pueden aplicarse para atenuar los errores asociados a las zonas de transición entre un material y otro [5,6], no obstante, tomando un mallado lo suficientemente grande será posible aplicar directamente las ecuaciones sin mayor complicación.

Cuando se usan diferencias finitas laterales existe el riesgo de que se produzcan saltos bruscos en las regiones de transición entre materiales. Una de las ventajas del uso de las diferencias finitas centradas propuestas en esta tesis es que, al tomar valores a ambos lados del nodo estudiado,

realizan una especie de suavizado al promediar puntos de los dos materiales en las zonas fronterizas. Por tanto, el uso de diferencias finitas centradas y un mallado lo suficientemente denso permite evitar recurrir a métodos de suavizado previos a la resolución de las ecuaciones de análisis modal.

Mencionar, por último, que a la hora de multiplicar la matriz dieléctrica por la de los campos en la ecuación modal, se realizará una multiplicación elemento a elemento y no de tipo matricial. Es decir, cada elemento de la matriz de campo se multiplicará por su equivalente en la matriz dieléctrica. De esta manera queda asociado cada componente del campo al material sobre el que se está propagando.

3.4 Nuevo esquema de resolución propuesto

Una vez desarrollada la manera de aplicar los operadores derivada en cada método y explicado el significado de la matriz dieléctrica y su relación con las matrices de campo, se va a plantear a continuación el esquema de actuación a la hora de resolver las ecuaciones de análisis modal.

El objetivo final será obtener el índice efectivo (autovalor) y la distribución de campo (autovector) asociada al modo guiado correspondiente. Cada longitud de onda tendrá un modo de propagación asociado, por lo que, para tener datos suficientes a la hora de aplicarlos en una simulación realista, habrá que realizar un barrido en longitudes de onda y obtener dichos valores en cada caso.

Una vez en posesión de dicha información, se podrán calcular las constantes de dispersión D y no lineal γ a partir de ellos mediante las ecuaciones (1.55) y (1.53) respectivamente, con lo que quedará caracterizada la fibra en función de sus parámetros característicos en el rango de longitudes de onda estudiado [7].

Los pasos a seguir serían los siguientes:

- 1° Definición de las matrices asociadas a los diferentes operadores derivada.
- 2° Definición de la matriz dieléctrica.
- 3° Elección de una longitud de onda y cálculo de k_0 a partir de ella.
- 4° Aplicación de la subrutina de búsqueda de autovalores.
- 5° Repetición de los pasos 3° y 4° hasta completar el barrido.

Una vez caracterizada mediante sus parámetros, podrán aplicarse en la propagación de cualquier pulso a través de la misma mediante la ecuación de propagación.

3.5 Validación de resultados mediante solución analítica

Antes de proceder a la aplicación del método sobre una PCF sin solución analítica, se aplicó a una fibra de salto de índice de la cual se conocen sus resultados teóricos [8]. En concreto, se trataba de un núcleo rodeado de aire con $n_{core}=1,45$ y radio $r_{core}= 6 \mu\text{m}$. La longitud de onda de trabajo fué $\lambda= 1,5 \mu\text{m}$.

El índice de refracción efectivo de esta fibra se puede obtener de manera analítica y presenta un valor de $n_{eff} = 1,438604$. La distribución radial de campo también presenta solución teórica, por lo que se pudo comparar con la obtenida en las simulaciones.

Como se explicó en el punto 2.3, no se han impuesto condiciones de contorno específicas en los bordes de la ventana de cómputo. Esto es así debido a que se ha tomado una distancia lo suficientemente grande entre la zona central de la fibra y los bordes de la ventana como para que el campo tienda de manera natural a cero sin necesidad de aplicar ninguna condición específica.

Las simulaciones se llevaron a cabo en mallados cuadrados con los métodos de diferencias finitas de 4°, 6° y 8° orden además del método espectral de Fourier. Además de validar el correcto funcionamiento de todos los algoritmos, la fibra de salto de índice sirvió también como primer test de precisión y coste computacional de cada método.

A la hora de comparar los campos teóricos con los simulados se recurrió a la desviación cuadrática media (RMS) de ambas distribuciones de puntos [9]. La fórmula del mismo es:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (x_{teo} - x_{exp})^2}{N}} \quad (3.7)$$

donde N es el número de muestras, x_{teo} la solución analítica y x_{exp} el valor simulado.

En la figura 3.2 se muestra la evolución del RMS para diferentes densidades de mallado. En

la gráfica puede apreciarse claramente como la tendencia de todos los métodos es similar. De manera lógica, a medida que aumenta el número de puntos la aproximación de las simulaciones a la solución teórica es mayor. A partir de 150 puntos el comportamiento de los cuatro métodos es idéntico, solapándose las curvas de cada uno de ellos.

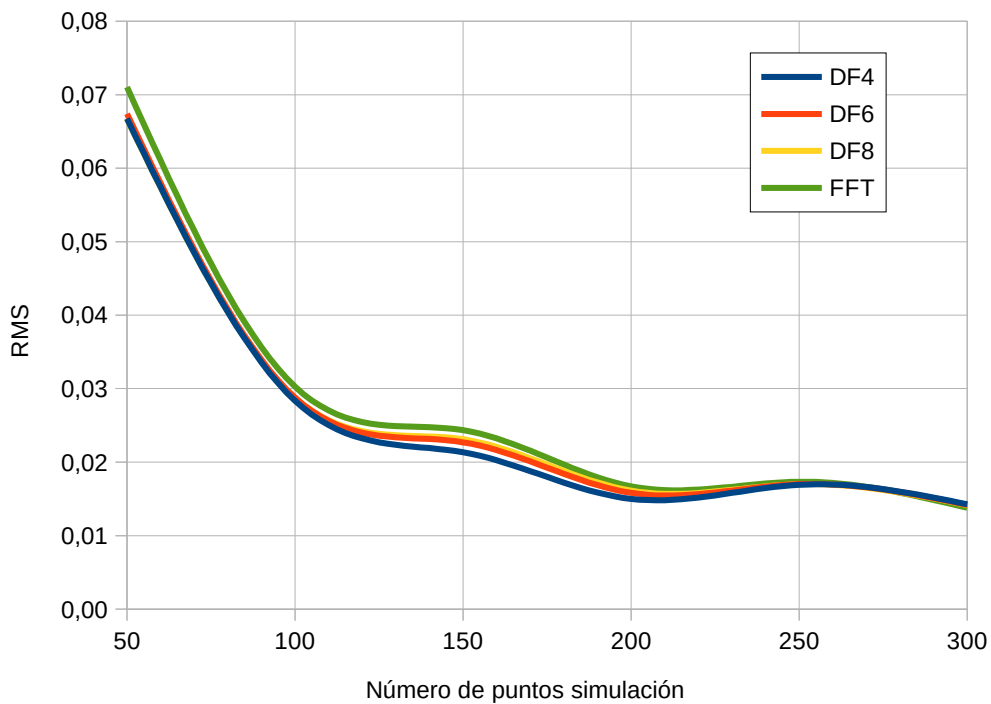


Fig. 3.2. Representación del RMS.

Queda demostrado, por tanto, que las cuatro técnicas calculan las distribuciones de campo de forma correcta y que ofrecen resultados muy similares entre sí en éste apartado.

El siguiente paso sería el análisis del índice efectivo de la fibra. En este caso, al tratarse de un valor concreto y no una distribución de puntos, se ha usado el error relativo, definido como [10]

$$error\ relativo = \left(1 - \frac{x_{exp}}{x_{teo}} \right) \cdot 100 \quad (3.8)$$

que mantiene la notación del RMS y está expresado en tanto por cien.

En la figura 3.3 se puede observar la evolución del error relativo para los cuatro métodos en función del número de puntos empleados en el mallado:

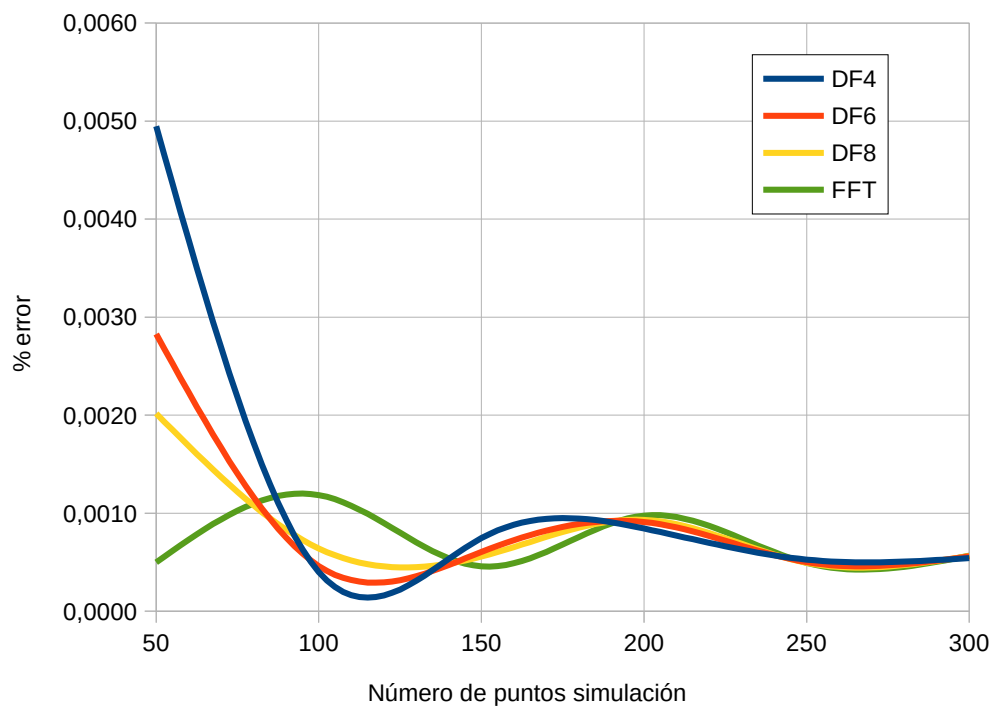


Fig. 3.3. Representación del valor absoluto del error relativo.

De nuevo, el comportamiento de los cuatro métodos es similar, solapándose las curvas a partir de valores de 200 puntos en adelante. De esta manera, queda probada también la validez de los cuatro métodos a la hora de calcular el valor del índice efectivo asociado al modo fundamental

de la fibra. Como se puede apreciar, los errores son inferiores a un 0,01% en todos los casos, por lo que las soluciones obtenidas serán muy precisas en todos los casos.

Una vez establecida la validez de los métodos tanto a nivel de índice efectivo como de distribución de campo, el siguiente paso sería estudiar el coste computacional de los mismos. En las gráficas anteriores se ha demostrado que la precisión de los cuatro algoritmos es similar y casi igual a partir de 200 puntos de mallado cuadrado. El elemento determinante a la hora de escoger una u otra será, por tanto, el tiempo de cómputo asociado a cada una de ellos. A igual precisión, siempre será preferible aquel método que presente un menor número de operaciones asociadas.

En el punto 2.2 ya se estudió el coste computacional asociado a los métodos de diferencias finitas y espectrales. En los primero las derivadas se llevaban a cabo como productos de matrices, por lo que, en principio, el número de operaciones en cada derivada sería N^3 . No obstante, la aplicación de técnicas específicas de matrices dispersas podían reducir drásticamente ese número de manera que dependiese tan sólo de aquellos coeficientes de la matriz no nulos; éstos, a su vez, dependerá del orden de precisión escogido para el operador, resultando un total de aN^2 operaciones, donde a es el número de coeficientes no nulos y N el orden de la matriz. En cuanto a la derivada espectral, también se vio que la mayor parte de las operaciones se debían a la FFT directa o inversa, ascendiendo el número total de operaciones en cada aplicación a $2N^2\log(N)$.

El número de operaciones entre un método y otro en cada aplicación de una derivada es muy parecido, tal y como se puede observar, por lo que el factor que determinará el coste computacional total de cada método será el número de iteraciones que requiera la búsqueda de autovalores. La cantidad de derivadas en los cuatro métodos es igual, ya que las ecuaciones son las mismas, y

teniendo en cuenta que el coste de las derivadas es también similar, la rapidez en la convergencia a una solución de la rutina de búsqueda de autovalores será la que indique el método más eficiente. Obviamente, los resultados ofrecidos por cada método en cada iteración serán similares entre sí pero diferentes, ésta pequeña diferencia será la que marque la diferencia al realimentar el proceso iterativo de búsqueda.

En la figura 3.4 se representa el número de iteraciones requeridas para converger a un índice efectivo frente al número de puntos en el mallado usados por cada método:

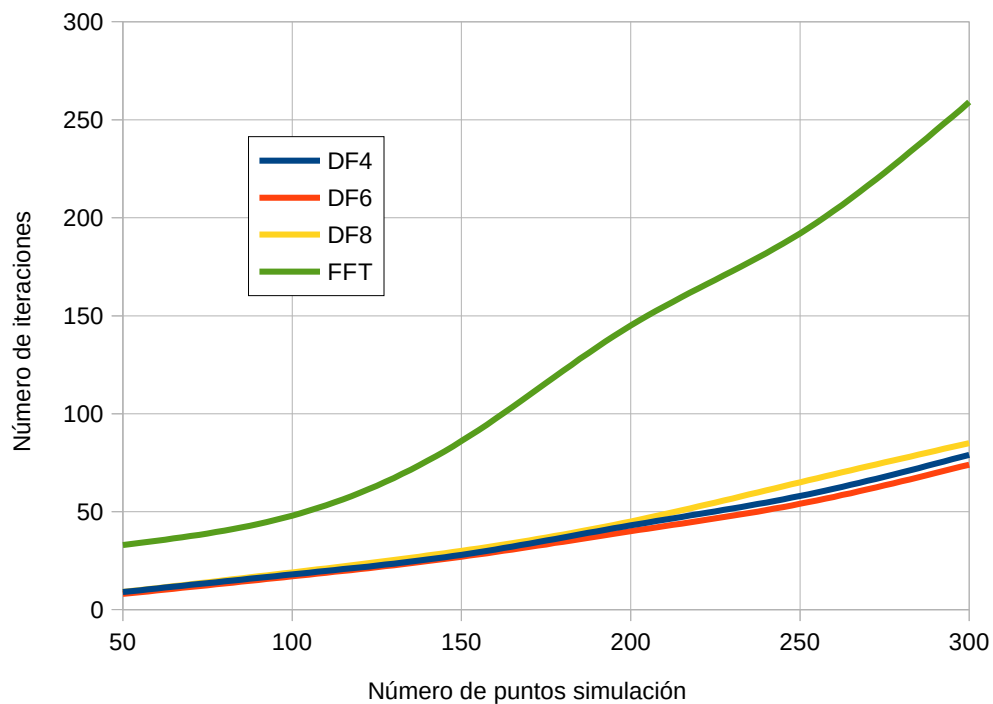


Fig. 3.4. Número de iteraciones en converger frente a número de puntos.

Los métodos de diferencias finitas, tal y como era de esperar, presentan comportamientos muy parecidos. La novedad en esta gráfica es que el método de Fourier se despegó drásticamente de

los de diferencias finitas, requiriendo un número mucho mayor de iteraciones a medida que se usan mallados más densos. Ésto implica que dicho método consumirá muchos más recursos y tardará más tiempo en alcanzar la solución deseada.

Teniendo en cuenta que la precisión de todos los métodos sí es similar pero el tiempo de cómputo se dispara en el espectral, la ventaja de los métodos de diferencias finitas centradas propuestos en esta tesis es clara. Dentro de éstos la diferencia es mínima, pero si hubiese que escoger uno el de 6° orden parece ser el que menor coste computacional acarrea.

3.6 Aplicación al análisis de una Fibra de Cristal Fotónico. Comparación de rendimientos

Una vez validados los métodos y realizado una primera valoración del coste computacional de los mismos en el caso conocido de una fibra de salto de índice, el siguiente paso es aplicar el mismo análisis a una PCF de solución ya no analítica. Para ello se escogió una PCF de diseño hexagonal que había sido estudiada en la bibliografía previamente, y de la que se disponían valores de experimentales con los que comparar [11,12].

El núcleo central tiene un radio de 2 micras, siendo su índice de refracción de $n_{core}=1,45$. Los agujeros externos son de aire ($n=1$) y de radio también 2 micras, siendo la distancia entre sus centros de 5 micras. El material de la cubierta presenta un índice de refracción $n_{clad}=1,42$.

La figura 3.5 muestra el corte transversal de la fibra propuesta:

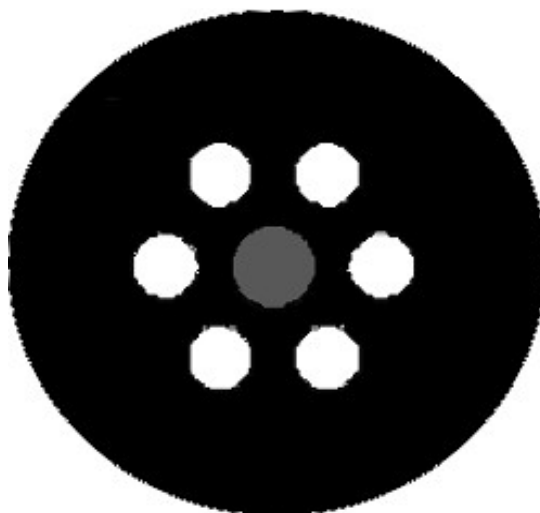


Fig. 3.5. Corte transversal de la PCF usada en la comparación de los métodos.

En la figura 3.6 se puede observar la distribución simulada de campo eléctrico para la fibra de salto de índice propuesta. Como puede observarse, la ventana de cómputo es lo suficientemente grande como para que el campo cumpla la condición de anularse en los límites de la misma.

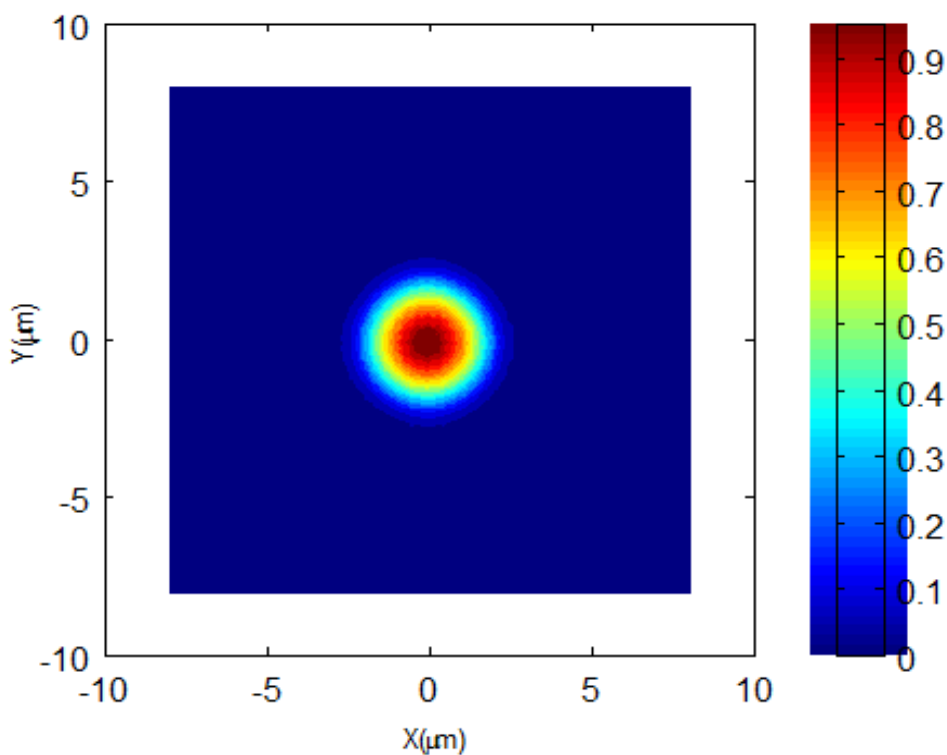


Fig. 3.6. Simulación de la componente Y del campo eléctrico. Los valores del campo están normalizados.

En el caso de la PCF se ha realizado el estudio de precisión y coste computacional en función solamente del índice efectivo, cuyo valor se puede encontrar en la bibliografía y es de $n_{eff} = 1,4353607$ [12]. Los mallados usados han sido cuadrados como en el caso de la fibra de salto de índice.

La figura 3.7 muestra el valor absoluto del error relativo de cada método en función del número de puntos de mallado tomando el anterior valor como teórico:

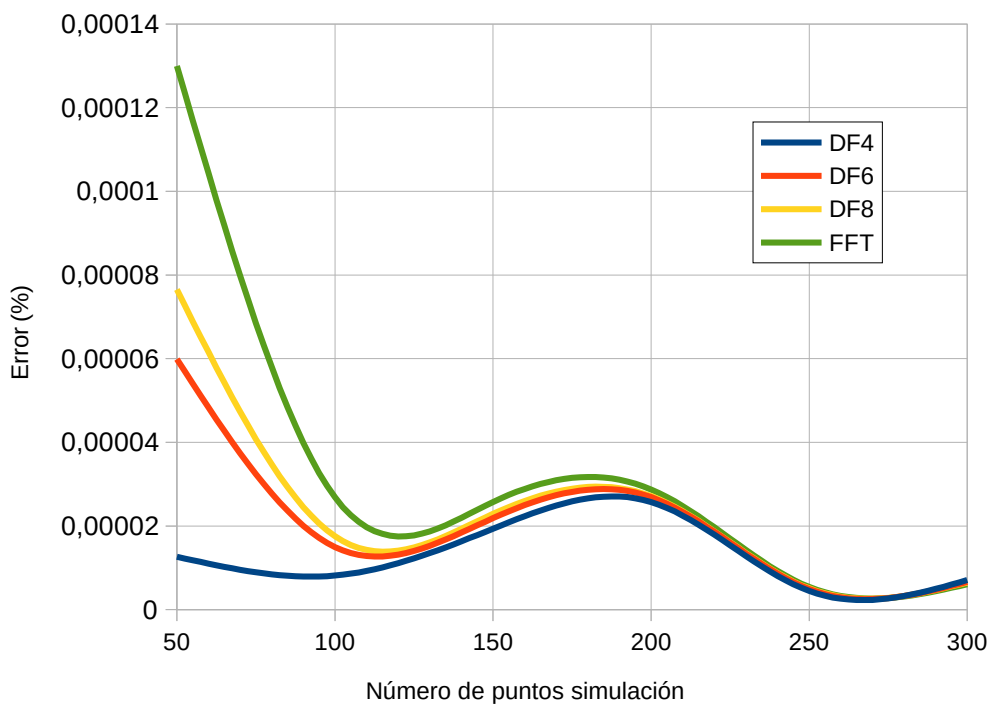


Fig. 3.7. Error relativo frente a número de puntos para la PCF hexagonal.

De nuevo el comportamiento de los cuatro métodos es asintótico en el caso de la precisión de los mismos. También en este caso las curvas se solapan a partir de los 200 puntos de mallado.

Los valores de error relativo son aquí incluso menores que en el caso de la fibra de salto de índice, todos por debajo de la milésima de tanto por ciento. Las diferencias finitas centradas de ordenes superiores propuestas resisten perfectamente, por tanto, la comparación con un método tan conocido y empleado como el de Fourier en cuanto a precisión.

Será el estudio de coste computacional el que, de nuevo, determine cuál es el método que ofrece mayor rendimiento. Al igual que en la fibra de salto de índice, el parámetro a tener en cuenta será el número de iteraciones realizado en la búsqueda de autovalores hasta alcanzar la convergencia.

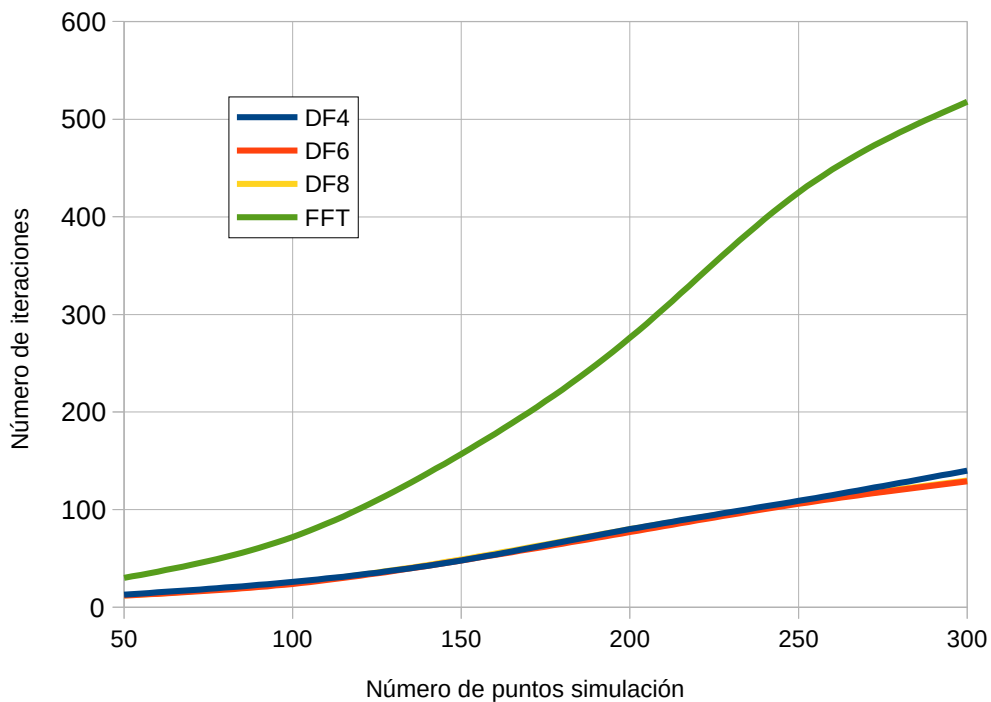


Fig. 3.8. Número de iteraciones frente a puntos de mallado para la PCF.

La figura 3.8 demuestra que, aquí también, el método de Fourier se dispara en número de

iteraciones al compararlo con las diferencias finitas centradas. En concreto, para un mallado de 200 puntos, el valor para el que se igualaba la precisión, el método de Fourier realiza el triple de iteraciones que las diferencias finitas centradas, y mucho más a partir de ahí.

De nuevo las variaciones entre los diferentes órdenes de diferencias finitas son mínimas, aunque es cierto que el método de 6º orden parece ser el que mejor rendimiento presenta tanto en precisión como en velocidad de convergencia.

El análisis de estos resultados vuelve a demostrar que los métodos de diferencias finitas centradas de órdenes superiores propuestos en esta tesis presentan un rendimiento superior al de métodos ya conocidos y empleados extensamente como es el de Fourier. Si bien la precisión es la misma, el tiempo de cómputo es significativamente inferior. En mallados muy densos esta ventaja en velocidad será determinante.

3.7 Determinación de los parámetros de la PCF

El siguiente paso en la caracterización de la PCF hexagonal sería la deducción de los valores de sus constantes lineal y no lineal de propagación para un intervalo de longitudes de onda. A partir de estas curvas podría realizarse la propagación de un pulso usando el método Split-Step para resolver la ecuación de propagación [13].

Tal y como se vio en el punto 2.1.4, la simulación de las ecuaciones de análisis modal debe repetirse para diferentes valores de k_0 , ya que cada longitud de onda tiene asociados unos valores

concretos de β_2 y γ . En concreto, en las simulaciones realizadas se barrió el intervalo que va desde los 500 hasta los 2000 nm.

La constante de dispersión está relacionada con la parte real del índice efectivo [14]. La figura 3.9 muestra los índices efectivos obtenidos tras simular el intervalo de frecuencias antes mencionado:

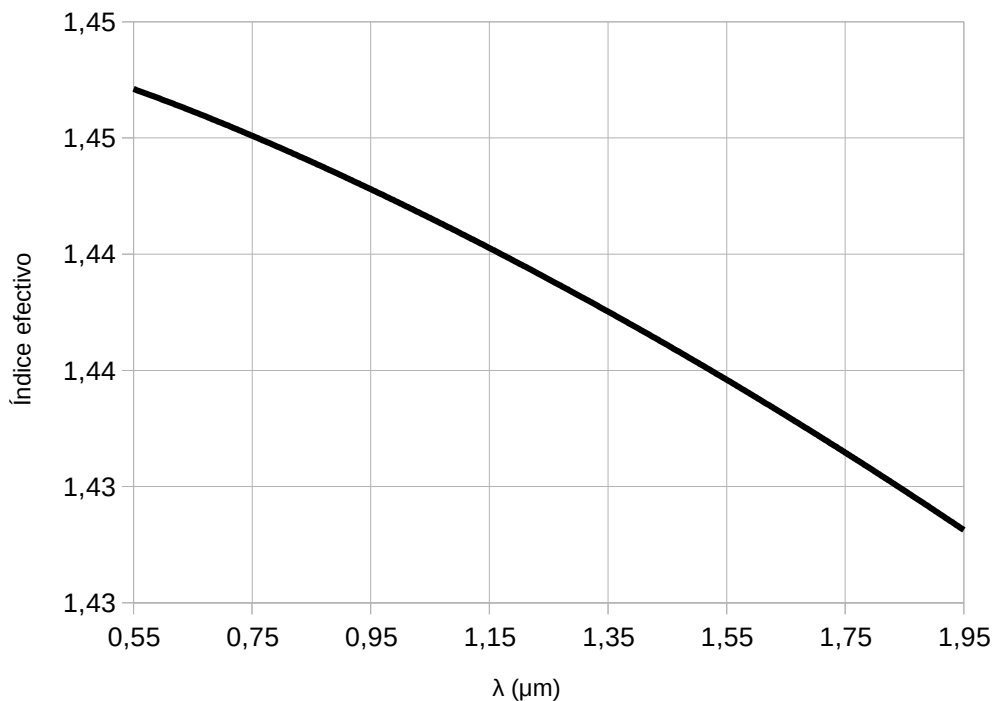


Fig 3.9. Índice efectivo frente a longitud de onda para la PCF.

A partir de esta curva pueden calcularse los valores del parámetro de dispersión usando la ecuación (1.55) ya mencionada. En la figura 3.10 pueden observarse dichos resultados para el mismo intervalo de longitudes de onda:

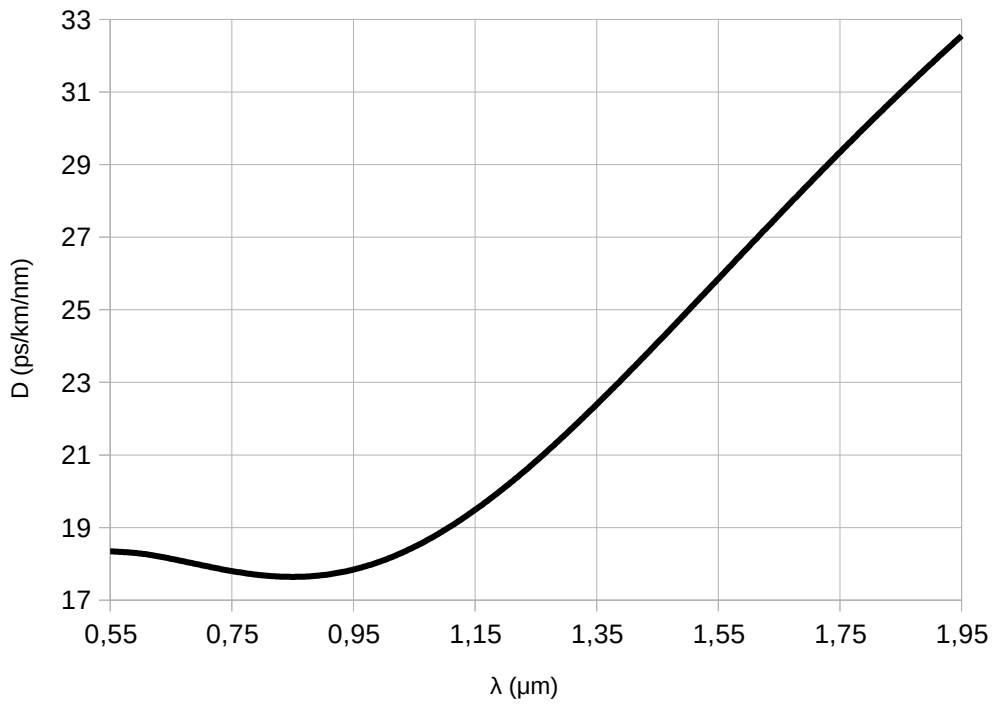


Fig. 3.10. Parámetro de dispersión frente a longitud de onda para la PCF.

Posteriormente podrá deducirse, si se desea, a partir de esta curva la constante de dispersión cromática de segundo orden aplicando:

$$\beta_2 = \frac{-\lambda^2}{2\pi c} D \quad (3.9)$$

En cuanto al parámetro no lineal γ , el dato a estudiar es el área efectiva de las distribuciones de campos dada por (1.53). La figura 3.11 muestra los resultados obtenidos en la simulación:

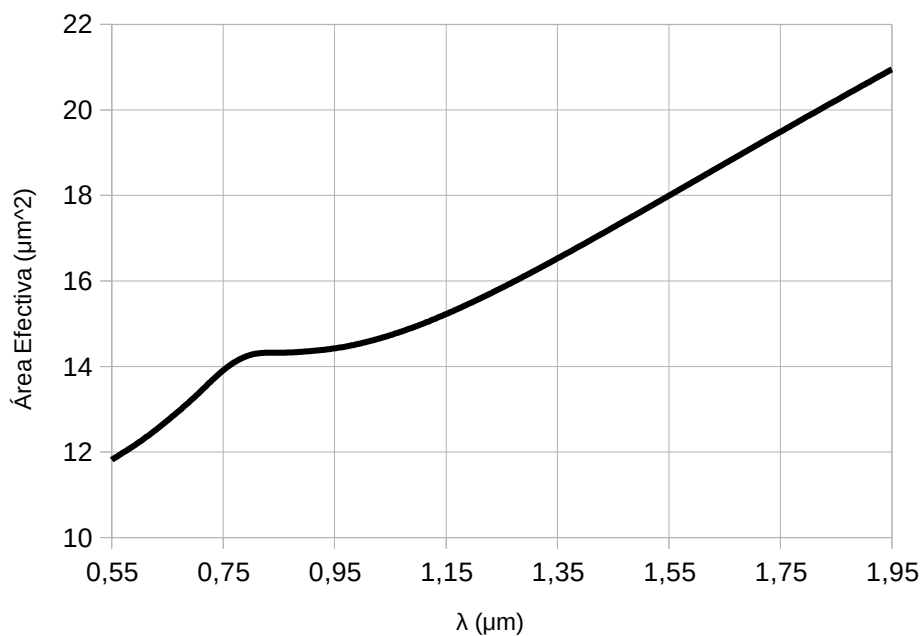


Fig. 3.11. Área efectiva de los campos frente a longitud de onda para la PCF.

Aplicando ahora la ecuación (1.52) se obtiene el parámetro no lineal de manera inmediata:

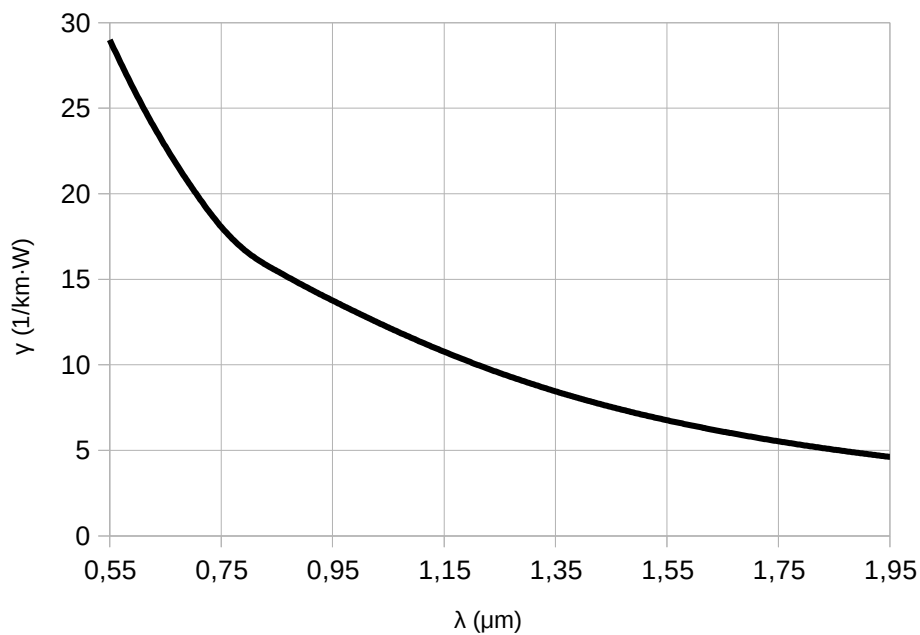


Fig. 3.12. Parámetro no lineal frente a longitud de onda para la PCF.

Capítulo 4. Análisis comparativo de las técnicas numéricas en el estudio de la propagación en Fibras de Cristal Fotónico

En el capítulo anterior se introdujo un nuevo método de simulación de las ecuaciones de análisis modal basado en las diferencias finitas de órdenes superiores. La resolución de dichas ecuaciones permite la caracterización de la fibra a partir de sus constantes de dispersión D y no lineal γ . La aplicación directa de estos resultados es la transmisión de pulsos a través de la fibra estudiada aplicando la ecuación de propagación correspondiente.

En la presente tesis la ecuación de propagación empleada es la (2.16), que incluye los

efectos antes mencionados a través de dichas constantes. Durante su deducción en el punto 1.2 ya se indicó que las pérdidas no se incluyen en el estudio de la propagación, debido a que las distancias de transmisión que se van a utilizar en las simulaciones son lo suficientemente pequeñas como para que no afecten a la propagación del pulso, es por esto que no aparece el término asociado a las mismas en dicha ecuación.

En este capítulo se partirá de esta ecuación de propagación y se desarrollará la teoría básica introducida en el punto 2.7 sobre el método Split- Step de Fourier a fin de implementar diferentes variantes del mismo y comparar su rendimiento. Ésto se traduce, básicamente, en la manera de separar la exponencial que contiene los operadores en la ecuación 2.21. Como ya se comentó, el error asociado a esta operación viene dado por la fórmula de Baker-Hausdorff [1] y es determinante en la precisión final del método.

Cada esquema aplicado llevará asociado su propio rendimiento en cuanto a coste computacional y precisión de sus resultados. Los factores que intervienen en estos resultados son la mencionada fórmula de Baker-Hausdorff y el número de FFTs realizadas, ya que éstas, a parte del error asociado que llevan aparejado, son las responsables de la mayor parte de los tiempos de cómputo.

Se realizará una comparativa de los diferentes esquemas de propagación en cuanto a su precisión y tiempo de cómputo, escogiendo el de mayor rendimiento entre ellos. Será este esquema el que se utilice en el capítulo cinco a fin de realizar un caso de propagación con la nueva PCF de diseño fractal propuesta.

4.1 Fórmula de Baker-Hausdorff

Ya se vio en el punto 2.7.1 que, a la hora de aplicar el método Split-Step a la resolución de la ecuación de propagación, es necesario realizar una separación de una exponencial como la indicada en la ecuación (2.22). La aproximación allí realizada es la principal fuente de error asociada al método Split-Step, que viene dado por la fórmula de Baker-Hausdorff.

El problema radica en que el álgebra de operadores no es conmutativa, por lo que para las expresiones que los contienen, como la solución (2.21) de la ecuación de propagación, no se aplican las reglas habituales en el álgebra numérica. En éste caso concreto, es la suma de exponentes la que no verifica la conocida regla algebraica del producto.

$$Si [A, B] \neq 0 \Rightarrow e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B \quad (4.1)$$

Para que dicha regla se mantuviese los operadores implicados deberían conmutar entre sí.

Una manera de aproximarse a este problema es expresar la exponencial de la siguiente manera

$$e^{(A+B)t} + O(t^{p+1}) = e^{b_m B t} e^{a_m A t} \dots e^{b_1 B t} e^{a_1 A t} e^{b_0 B t} e^{a_0 A t} \quad (4.2)$$

donde se pretende que el orden p sea lo más alto posible, para lo que se realiza una composición no simétrica de exponenciales en la que será necesario calcular los coeficientes

asociados a cada una de ellas aplicando algún criterio concreto. Es la elección de dicho criterio la que define la precisión del método.

Por tanto, cualquier operador exponencial podrá separarse en diferentes composiciones aplicando [2]

$$e^{(A+B)t} = \prod_{i=1}^m e^{a_i A t} e^{b_i B t} + O(t^{m+1}) \quad (4.3)$$

donde A y B son dos operadores que no conmutan entre sí, t el paso temporal y $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ son números reales.

Esta expansión de los operadores exponenciales puede expresarse mediante la fórmula de Baker-Hausdorff [3,4]

$$e^{At} e^{Bt} = e^{Ct} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} C = (A+B) + \frac{1}{2}t[B, A] + \frac{1}{12}t^2([B, [B, A]] + [A, [A, B]]) \\ + \frac{1}{24}t^3[B, [A, [A, B]]] + O(t^4) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si los operadores conmutasen todos los conmutadores se anularían y quedarían únicamente los dos primeros sumandos

$$\text{Si } [A, B] = 0 \Rightarrow e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{(A+B)t} \quad (4.6)$$

En general no será así, y en el caso estudiado de la ecuación de propagación tampoco. Es ésta, por tanto, la fuente de error del método Split-Step, y la manera de cuantificarlo es a partir del corte del desarrollo anterior.

A continuación se van a presentar diferentes esquemas de aplicación del método Split-Step. Cada uno de ellos se corresponderá con unos coeficientes concretos de la ecuación (4.3), y su precisión estará relacionada con el término de corte de la ecuación (4.5).

4.2 Coste computacional

En los puntos 2.3 y 2.7.2 ya se trató el tema del coste computacional de los métodos espectrales en general. Conviene ahora acotar y especificar dicha información dentro del marco de aplicación del método Split-Step.

Como ya se comentó, la realización de la transformada de Fourier sobre un conjunto discretizado de puntos es una operación bastante costosa, tanto en tiempo como en precisión, debido al gran número de operaciones que implica. Fue la implementación de la FFT la que permitió reducir estos costes y convertirla en el núcleo central sobre el que se apoyan todos los métodos de tipo espectral.

En el caso del método Split-Step, la longitud total de la fibra óptica simulada se divide en pequeños pasos espaciales, siendo necesario realizar en cada uno de ellos, en función del esquema de integración escogido, un mínimo de una a dos FFTs, una directa y otra inversa. Obviamente, el

coste total dependerá tanto del número de puntos en el mallado espacial como en el temporal. En el punto 2.3.2 se vio que el número de operaciones asociado a la FFT es de $N \log_2(N)$, donde N es el número total de puntos temporales, habrá que multiplicar esta cantidad por dos debido a que las transformadas aplicadas son la directa e inversa en cada paso, y, así mismo, por el número total de pasos espaciales.

$$2 m N_L N_t \log_2(N_t) \quad (4.7)$$

donde N_L es el número total de pasos espaciales, N_t el número de pasos temporales en que se ha discretizado la señal y m el número de composiciones en que se divide el operador exponencial según la ecuación (4.3). Por cada pareja de exponenciales (parte lineal y no lineal) introducidas en la composición hay que realizar una FFT directa e inversa.

El número de operaciones será alto, y ello conlleva aparejado el consiguiente error numérico. Si bien la mayor fuente de error del método proviene del truncamiento de (4.3), si el número de FFTs aumenta considerablemente éstas introducirán en la simulación un error que deberá tenerse en cuenta. Este factor será de especial relevancia en aquellos métodos en los que el número de composiciones usado para aproximar los operadores exponenciales y el número de pasos espaciales sean elevados, sobre todo si el número de puntos temporales también lo es.

4.3 Esquemas pseudo-espectrales de integración Split-Step

Existen multitud de esquemas de integración propuestos que realizan la aproximación (4.3)

con diferentes grados de precisión. Como se acaba de ver en el anterior punto, una mayor precisión implica un mayor tiempo de cómputo, por lo que será necesario encontrar un equilibrio entre ambos parámetros.

A continuación se presentarán los esquemas de integración más extendidos, para posteriormente realizar una comparativa entre ellos a fin de escoger el de mayor rendimiento. Son todos métodos ampliamente extendidos y de uso común en la simulación de la ecuación de propagación propuesta.

4.3.1 Split-Step básico (SSFM)

El método básico de aproximación consiste en dividir la exponencial en un único producto de una exponencial con el operador lineal y otra con el no lineal, tal y como muestra la ecuación (2.22). Aplicado a la simulación, la fórmula obtenida sería la siguiente [5]

$$A(jh, t) \approx e^{\hat{D}h} e^{\hat{N}h} A((j-1)h, t) \quad (4.8)$$

donde h es el paso espacial y j hace referencia al número de nodo en el que se encuentra la simulación.

Gráficamente, el esquema de integración asociado a la descomposición (4.8) vendría dado por:

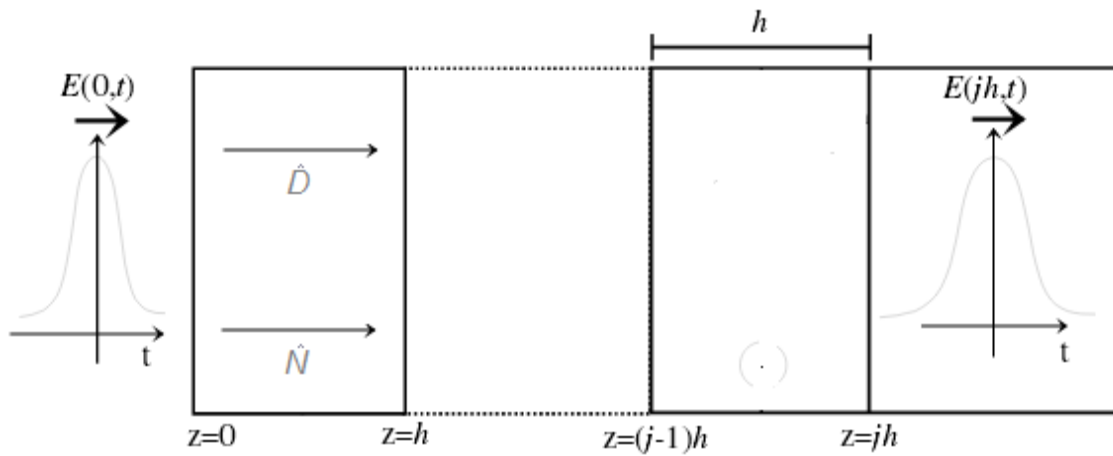


Fig. 4.1. Esquema de integración para el SSFM.

En la figura 4.1 se aprecia cómo actúa geoméricamente la separación de los operadores exponenciales hecha en la ecuación (4.8). Los operadores lineal y no lineal se aplican una vez durante cada paso discretizado pero de manera independiente.

El número total de veces que se aplica cada uno de ellos es de N_L , el número de puntos en que se ha discretizado la fibra. Cada uno de ellos tiene un tamaño h , que será el paso que se utilizará para calcular el valor de las exponenciales de cada operador. Al ser operadores independientes, la distancia recorrida es la longitud total de la fibra, ya que cada paso no se duplica debido a la separación de las exponenciales y son cálculos de longitudes independientes.

$$L = N_L \cdot h \quad (4.9)$$

En cada paso será necesario aplicar una transformada directa e inversa de Fourier, por lo que el número total de FFTs será de dos por paso. El número de composiciones a la hora de aproximar el operador suma es de una, por lo que el número total de operaciones en una simulación completa

será el número de FFTs más dos multiplicaciones de las exponenciales por los pulsos en cada paso espacial realizado en la propagación

$$2 N_L N_t \log_2(N_t) + 2 N_L N_t = [2 \log_2(N_t) + 2] N_L N_t \quad (4.10)$$

donde ya se ha dicho que N_L hace referencia al número total de puntos espaciales y N_t era el número de puntos temporales en que se ha discretizado el pulso.

Este esquema de integración es el más sencillo de todos. Su precisión es baja comparada con el resto, ya que utiliza como aproximación para calcular la exponencial no lineal el valor obtenido después de una exponencial lineal. Obviamente, dicho valor no coincide con el real debido tanto a la distancia sobre la cual se ha aplicado el operador como a que sólo se ha tenido en cuenta la parte lineal de la propagación.

Por otro lado, el bajo número de FFTs permite obtener resultado en poco tiempo, y el error introducido en la simulación debido a las transformadas es muy bajo, prácticamente despreciable en comparación con el asociado a la separación de los operadores.

Este esquema de integración no consigue precisiones elevadas, no obstante los resultados obtenidos son buenos y convergen sin problema a la solución de la ecuación. A cambio, la velocidad del esquema es alta debido a la baja carga de FFTs. El incremento en el número de puntos tanto espaciales como temporales mejorará la precisión de la solución obtenida sin que exista peligro de que el número de FFTs realizado introduzca error numérico en los resultados.

4.3.2 Split-Step simetrizado (S-SSFM)

El principal problema del anterior esquema de integración era la baja calidad de la aproximación realizada con el valor usado al aplicar el operador no lineal. Al disponerse sólo de dos exponenciales para realizar la separación del operador suma, no es posible utilizar un valor más próximo al real.

La manera de obtener un valor más realista es introducir un *barrido* del paso mas exhaustivo, es decir, introducir más exponenciales en la separación del operador suma incrementando el número de composiciones. Ésto permitirá afinar más el valor de las soluciones obtenidas.

El siguiente nivel de aproximación es el conocido como esquema de integración simetrizado (S-SSFM) y viene dado por

$$A(jh, t) \approx e^{\hat{D}\frac{h}{2}} e^{\hat{N}h} e^{\hat{D}\frac{h}{2}} A((j-1)h, t) \quad (4.11)$$

donde la notación de los parámetros usados coinciden con la misma del anterior punto.

La variación introducida consiste en separar el operador lineal en dos partes de una longitud $h/2$ cada una de ellas. Se aplica una de estas exponenciales lineales en primer lugar y se usa dicho valor como aproximación para la parte no lineal de la propagación, la cual se completará aplicando la otra exponencial lineal sobre el resultado obtenido [6,7]. El operador no lineal queda, en cierta

manera, *emparedado* entre los dos operadores lineales, con lo que su efecto queda más *matizado* que en el caso SSFM al utilizar un valor menos extremo en su aplicación.

De nuevo, la composición de operadores exponenciales realizada permite garantizada la propagación a través de la longitud total de la fibra. En cada paso existe una parte no lineal de longitud h y dos lineales de $h/2$ que juntas equivalen a un paso completo. En cada iteración queda, pues, cubierta la longitud completa del paso de discretización espacial.

En la figura 4.2 se puede apreciar de manera gráfica la aplicación de los operadores en la fibra

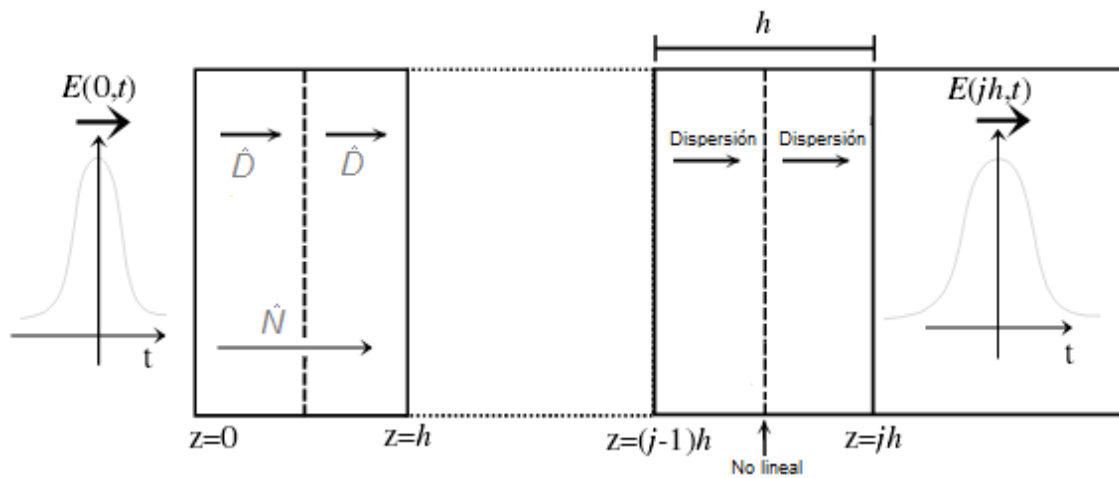


Fig. 4.2 Esquema de integración para el S-SSFM.

La propagación del operador lineal se divide en dos secciones iguales en cada paso, mientras que el no lineal lo recorre de manera completa. La primera dispersión se realiza con el valor de partida hasta la mitad del paso, este valor se usa para calcular la totalidad de la propagación no lineal y al resultado de la misma se le aplica la última mitad del operador lineal.

La mejora en la precisión del método se debe a que la aproximación usada en la parte no lineal de cada paso es una especie de promediado entre los valores extremos de cada intervalo. El error introducido por la parte no lineal es, de esta manera, menor que el esquema SSFM básico.

A cambio de esta mejora en la precisión el método, el número de FFTs se duplica al dividirse cada exponencial lineal en dos. Si en el esquema SSFM el número de transformadas de Fourier en cada paso era de dos, en el S-SSFM será de cuatro. El número de composiciones es de dos completas (operador lineal y no lineal), tan sólo que uno de los coeficientes correspondientes a la parte no lineal es cero, de ahí que sólo aparezcan tres operadores exponenciales.

$$4 N_L N_t \log_2(N_t) + 3 N_L N_t = [4 \log_2(N_t) + 3] N_L N_t \quad (4.12)$$

El coste computacional de este esquema es del doble del anterior, lo cual, aún aplicando el algoritmo de la FFT para las transformadas de Fourier, supone un incremento de tiempos de cálculo considerable.

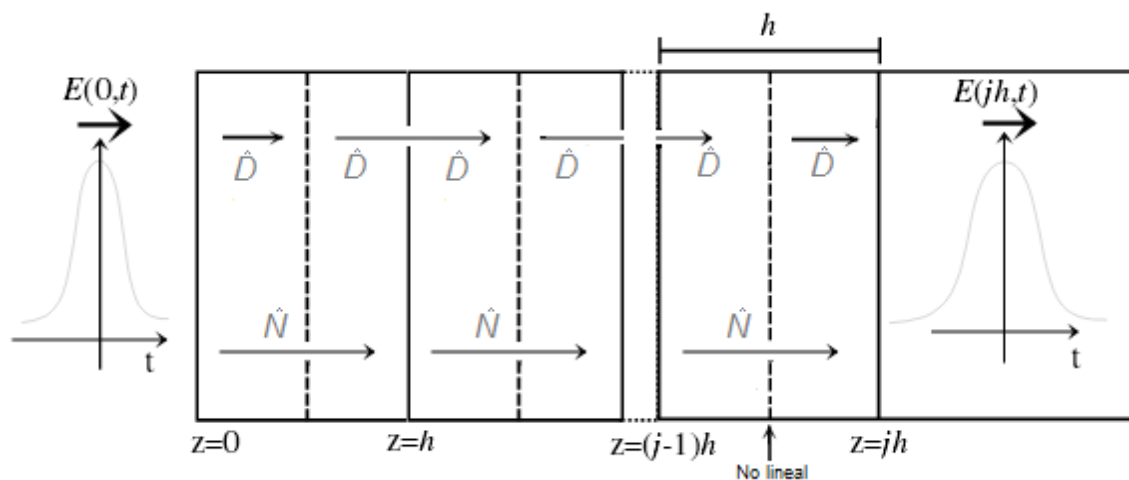


Fig. 4.3. Implementación optimizada del S-SSFM.

Una manera de sortear este inconveniente consiste en implementar el algoritmo intercalando diferentes secciones de la fibra entre sí. Es decir, juntar en un único paso de longitud h el extremo final e inicial de dos segmentos consecutivos. En la figura 4.3 puede observarse la idea.

Al unir en una única aplicación del operador lineal el extremo final e inicial de los pasos se consigue evitar duplicar el número de FFTs y se mantiene la precisión del método. Obviamente, no estará disponible la información referente a la propagación del pulso excepto en los instante inicial y final. En todo caso, se podría tomar el valor en las zonas no lineales como aproximación si se desea realizar una gráfica de propagación para toda la fibra.

Aplicando esta implementación optimizada del S-SSFM se obtiene un método con el mismo coste computacional del SSFM básico dado por (4.10), pero con una precisión de un orden superior.

4.3.3 Split-Step con integradores simplécticos (SI-SSFM)

Cuando se desea trabajar con órdenes de precisión superiores al del S-SSFM basta con introducir un mayor composiciones en la separación del operador suma y realizar un análisis más detallado del pulso a lo largo de cada tramo. De manera básica, la idea es realizar una especie de *barrido* de cada tramo calculando varios valores del pulso y utilizándolos para obtener una mejor aproximación global al valor real en cada paso.

Uno de los esquemas superiores más extendidos es el de integradores simplécticos de

Yoshida, que puede formularse en distintos órdenes [8]. En la presente tesis se ha escogido trabajar con el de sexto orden, separando el operador suma mediante ocho composiciones: siete aplicaciones del operador no lineal y ocho del lineal. En la descomposición aparecen coeficientes negativos, por lo que el barrido del segmento se realiza en ambos sentidos de propagación, lo cual permite aprovechar mejor la información obtenida en las subdivisiones del paso correspondiente que se esté estudiando.

La fórmula asociada a un paso de propagación vendría dada por la ecuación (4.12)

$$A(jh, t) \approx \prod_{j=1}^8 e^{c_j \hat{D}h} e^{d_j \hat{N}h} A((j-1)h, t) \quad (4.12)$$

donde los coeficientes c_j y d_j se obtienen a partir de la tabla 4.1 y las expresiones (4.13) a (4.21) [9].

w_0	$I-2(w_1+w_2+w_3)$
w_1	-1.17767998417887
w_2	0.235573213359357
w_3	0.784513610477560

Tabla 4.1. Coeficientes originales

$$c_1 = c_8 = \frac{w_3}{2} \quad (4.13)$$

$$c_2 = c_7 = \frac{w_3 + w_2}{2}; \quad (4.14)$$

$$c_3 = c_6 = \frac{w_2 + w_1}{2} \quad (4.15)$$

$$c_4 = c_5 = \frac{w_1 + w_0}{2} \quad (4.16)$$

$$d_1 = d_7 = w_3 \quad (4.17)$$

$$d_2 = d_6 = w_2 \quad (4.18)$$

$$d_3 = d_5 = w_1 \quad (4.19)$$

$$d_4 = w_0 \quad (4.20)$$

$$d_8 = 0 \quad (4.21)$$

Como puede apreciarse, son los coeficientes de la tabla 4.1 los que generan mediante relaciones simples el resto de coeficientes tanto para la parte lineal de la propagación como para la no lineal.

Resulta obvio que el problema de este esquema de integración es el enorme coste computacional asociado a la gran cantidad de FFTs que requiere su aplicación. Se trata de un total de catorce transformadas de Fourier en cada paso (siete directas y mitad inversas). Pese al uso de la FFT dicho tiempo de cómputo será muy significativo y elevado en comparación con el del S-SSFM.

Al dividir el operador suma en ocho composiciones el número total de operaciones sería

$$16 N_L N_t \log_2(N_t) + 15 N_L N_t = [16 \log_2(N_t) + 15] N_L N_t \quad (4.21)$$

Sin embargo, es necesario tener en cuenta que su mayor precisión permite alcanzar soluciones más exactas con mallados menos densos que los anteriores esquemas, por lo que su aplicación puede resultar rentable en ciertos casos en que se deseé una precisión muy elevada o se tarde menos tiempo en alcanzar la deseada mediante este esquema.

Señalar, por último, que otro factor a tener en cuenta será el error introducido en los cálculos por las FFTs. Si bien dicho error, de manera individual, es bajo comparado con el asociado a la separación del operador suma, el aplicar una cantidad tan elevada de transformaciones puede acumular una cantidad significativa de error que no era necesario tener en cuenta en los anteriores esquemas.

4.4 Esquema Split-Step pseudo-espectral de diferencias finitas (DF-SSFM)

Todos los anteriores esquemas Split-Step expuestos son de tipo pseudo-espectral en el sentido de que, como ya se explicó, realizan la aplicación de los operadores tanto en el dominio del tiempo como en el de las frecuencias. No obstante, los operadores usados en ambos dominios son de tipo exponencial, debido a que ya se ha integrado la ecuación diferencial y las ecuaciones con la que se trabaja en cada esquema son una aproximación de su solución.

Por otro lado, existen métodos basados en diferencias finitas que trabajan directamente con la ecuación diferencial y no con una solución de ella. En estos casos el método numérico se realiza siempre en el dominio del tiempo y las derivadas se aproximan mediante el método de diferencias finitas aplicando el orden de precisión deseado. Estos métodos no requieren de ninguna transformación de Fourier, por lo que el coste computacional asociado a dicha operación puede ahorrarse. No obstante, dicha ventaja queda, en parte, diluida debido al hecho de que estos algoritmos sólo convergen cuando se dan unas condiciones muy estrictas en cuanto a la densidad de mallas tanto temporal como espacial. Si la restricción impuesta para la convergencia implica uno

valores muy altos en cuanto a puntos de discretizado, puede darse el caso que el método de diferencias finitas tarde más que uno pseudo-espectral con menor densidad de mallas.

En esta tesis se propone y realiza por primera vez una comparación de un esquema de diferencias finitas de tipo pseudo-espectral. La idea es trabajar con la ecuación diferencial en vez de con la solución de la misma, de esta manera se evita tener que realizar la separación del operador suma que era la principal fuente de error en el Split-Step clásico. Para ello se aplican las diferencias finitas para resolver la parte espacial de la ecuación de propagación (2.16) y se combina con una derivación espectral, pasando al dominio de las frecuencias, de la parte temporal de la misma.

4.4.1 Coste computacional y restricciones de mado

El coste computacional de esta técnica será similar al del esquema SSFM, ya que lleva aparejado el mismo número de FFTs, una directa y otra inversa en cada paso. La parte espacial se resuelve mediante una matriz de diferencias finitas, por lo que, aplicando la optimización para matrices dispersas ya comentada en el anterior capítulo, el coste de dicha parte será el de multiplicar los coeficientes no nulos de dicha matriz por el vector solución en cada iteración. El número total de operaciones en la simulación viene dado por la suma de FFTs, el producto de la exponencial de derivación por el vector del pulso y la multiplicación de la matriz dispersa de diferencias finitas por el pulso

$$2 N_L N_t \log_2(N_t) + N_L N_t + k N_L N_t = [2 \log_2(N_t) + 1 + k] N_L N_t \quad (4.22)$$

donde k hace referencia al número de coeficientes no nulos en la matriz de diferencias finitas. Dicho valor está relacionado con el orden de precisión de la diferencia finita utilizada.

Al trabajar con la ecuación diferencial sin haberla integrado aún, no será necesario aplicar la fórmula de Baker-Hausdorff para realizar ninguna separación artificial de los operadores lineal y no lineal, con la consiguiente mejora en la precisión de los resultados. Escogiendo un orden de precisión adecuado en el desarrollo en diferencias finitas de la derivada espacial podrán obtenerse resultados mucho más precisos que en el método S-SSFM en el mismo tiempo de cómputo.

El principal inconveniente en este algoritmo son las comentadas restricciones en cuanto al paso de los mallados temporal y espacial. Dicha relación se encuentra ligada además a parámetros como las constantes de propagación y la potencia del pulso [10].

En la presente tesis se han tenido en cuenta estudios previos de la estabilidad de los métodos basados exclusivamente en diferencias finitas [11,12] y se han seleccionado aquellos mallados que permiten converger a una solución adecuada para poder compararla con el resto de esquemas propuestos.

4.4.2 Planteamiento

Como ya se ha explicado, la idea básica consiste en trabajar con la ecuación de propagación directamente, aplicando diferencias finitas a la derivada espacial y realizando la derivada temporal en el dominio de las frecuencias. El primer paso será prepara la ecuación de propagación para poder

aplicar diferencias finitas a la derivada espacial.

La ecuación de propagación incluye y se define sobre el cuerpo de los números complejos, por lo que será necesario separarla en parte real e imaginaria para poder aplicar diferencias finitas.

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = i\gamma |A|^2 A \quad (4.23)$$

$$A = u + iv \quad (4.24)$$

donde u es la parte real de la amplitud y v la imaginaria. Sustituyendo

$$\frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z} + i \frac{\beta_2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right) = i\gamma (u^2 + v^2)(u + iv) \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z} = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} + i\gamma (u^2 + v^2)u - \gamma (u^2 + v^2)v \quad (4.26)$$

Igualando parte real e imaginaria por separado

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} - \gamma (u^2 + v^2)v \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + \gamma (u^2 + v^2)u \quad (4.28)$$

Ahora habría que aplicar diferencias finitas a la derivada espacial de las ecuaciones (4.27) y (4.28). Dependiendo del orden de las diferencias finitas aplicadas se verán involucrados más o menos puntos espaciales, con el consiguiente almacenamiento de información relativa a la

propagación del pulso.

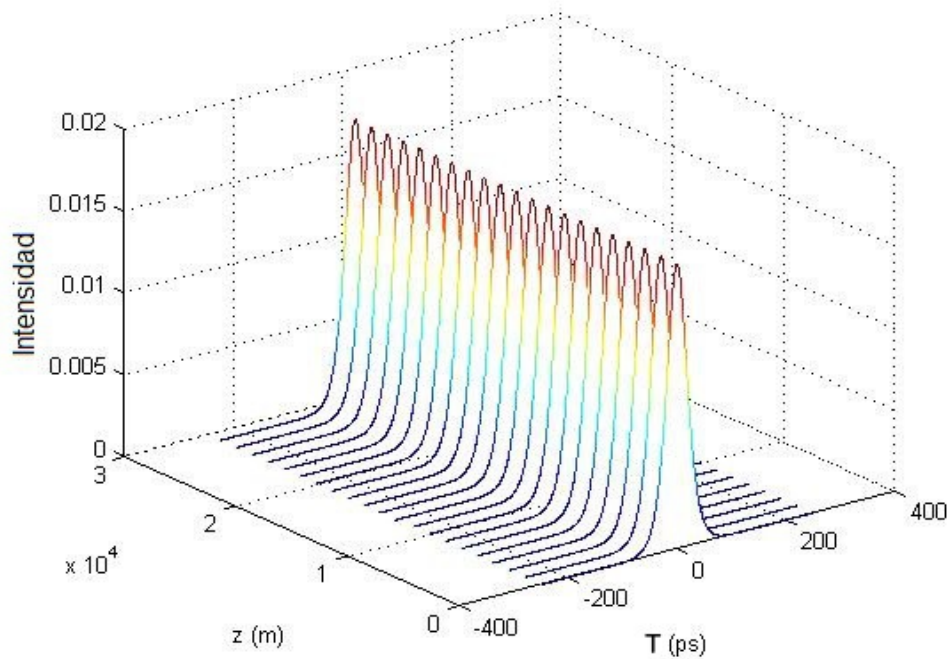


Fig. 4.3. Simulación de la propagación de un solitón.

En la figura 4.3 se observa perfectamente como en cada paso de la propagación espacial se obtiene una distribución temporal de valores relativos a la amplitud del pulso. Al aplicar diferencias finitas de órdenes superiores será necesario almacenar en memoria tantas distribuciones temporales del pulso propagado como puntos en función de los cuales se desarrolle la derivada temporal en diferencias finitas.

En el presente trabajo se han escogido las diferencias finitas centradas de segundo orden para aplicar a la derivada espacial, por lo que será necesario almacenar tres distribuciones temporales consecutivas del pulso en memoria a fin de poder realizar los cálculos. Aplicando el correspondiente desarrollo a las ecuaciones (4.27) y (4.28) se llega a

$$\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 v_n}{\partial T^2} - \gamma(u_n^2+v_n^2)v_n \quad (4.29)$$

$$\frac{v_{n+1}-v_{n-1}}{2h} = -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial T^2} + \gamma(u_n^2+v_n^2)u_n \quad (4.30)$$

donde el índice n hace referencia al paso correspondiente en el eje espacial. El esquema asociado sería

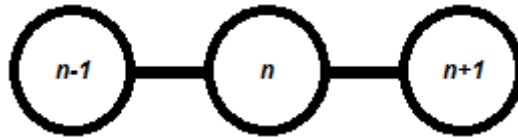


Fig. 4.4. Esquema de diferencias finitas espaciales.

En la figura 4.4 se observa que son tres los puntos espaciales involucrados en la derivada. Será necesario, por tanto, almacenar en memoria tres distribuciones temporales consecutivas del pulso a fin de poder realizar la. No es éste un coste excesivo incluso con mallados temporales densos.

El tratamiento temporal se realiza mediante derivación espectral tal y como se comentó. Aplicando dicha técnica a las ecuaciones (4.29) y (4.30), estas quedarían en la forma

$$\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} = \frac{\beta_2}{2} F^{-1}[-\omega^2 F(v_n)] - \gamma(u_n^2+v_n^2)v_n \quad (4.31)$$

$$\frac{v_{n+1}-v_{n-1}}{2h} = -\frac{\beta_2}{2} F^{-1}[-\omega^2 F(u_n)] + \gamma(u_n^2+v_n^2)u_n \quad (4.32)$$

donde F y F^{-1} hacen referencia a la FFT directa e inversa respectivamente y ω son las frecuencias normalizadas definidas según (2.8).

Por último sólo restaría despejar el valor que se desea calcular en el primer miembro de ambas ecuaciones

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2h \left\{ \frac{\beta_2}{2} F^{-1}[-\omega^2 F(v_n)] - \gamma(u_n^2 + v_n^2)v_n \right\} \quad (4.33)$$

$$v_{n+1} = v_{n-1} + 2h \left\{ -\frac{\beta_2}{2} F^{-1}[-\omega^2 F(u_n)] + \gamma(u_n^2 + v_n^2)u_n \right\} \quad (4.34)$$

siendo éste el esquema propuesto de integración mediante combinación de diferencias finitas centradas de segundo orden y derivación espectral.

4.4.3 Aplicación

Como ya se ha visto en el anterior apartado, a la hora de aplicar el DF-SSFM será necesario almacenar en memoria tres posiciones temporales del pulso que se esté propagando. Dichas distribuciones se corresponden con la de la última posición calculada, la anterior y la siguiente que se desea calcular. Una vez calculada la nueva posición, las distribuciones almacenadas correrán una posición hacia atrás a fin de pasar a la siguiente distancia

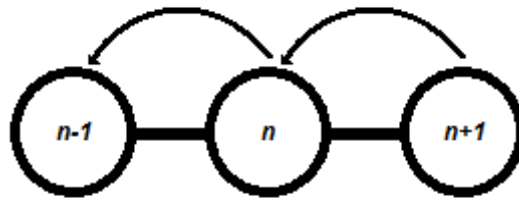


Fig. 4.5. Alternancia en memoria de las distribuciones temporales

A partir de este esquema resulta obvio que será necesaria una posición adicional del pulso, además de la inicial, antes de poder comenzar a aplicar el DF-SSFM. Existen condiciones de contorno diseñadas especialmente para métodos de diferencias finitas que permiten aproximar estos valores de manera más o menos exacta. Sin embargo, en este caso se dispone de varios métodos Split Step con los que puede realizarse la propagación del pulso en este primer paso, por lo que será ésta la opción elegida en su aproximación.

El esquema global de aplicación sería el siguiente:

- 1.- Introducción del pulso inicial.
- 2.- Propagación del pulso un paso espacial mediante cualquier esquema Split-Step.
- 3.- Aplicación del esquema DF-SSFM para un paso espacial.
4. Alternancia en memoria de las distribuciones temporales.
- 5.- Repetición de los pasos 3 y 4 hasta completar la longitud de la fibra.

En cada iteración del paso 3 se aplicarán las ecuaciones (4.33) y (4.34) con su mezcla de derivación mediante diferencias finitas y espectral. La velocidad del método será equivalente a las del S-SSFM y su precisión mayor.

4.5 Comparativa de rendimiento

Una vez planteados los esquema clásicos e introducido el nuevo algoritmo DF-SSFM, es el momento ahora de realizar una comparativa entre ellos. Dicha comparación se realizará en base al coste computacional y precisión de los diferentes esquemas propuestos.

El principal problema es que la ecuación de propagación necesita de aplicación de métodos numéricos debido a que no presenta solución analítica. El único caso en que puede obtenerse una solución teórica para la ecuación (4.23) es en propagación solitónica, que ya se introdujo en el punto 1.2 y que se tratará a continuación.

4.5.1 Popagación solitónica

Se definen la longitud de dispersión L_D y no lineal L_N de una fibra como

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad (4.35)$$

$$L_N = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (4.36)$$

donde T_0 hace referencia a la anchura del pulso y P_0 a la potencia del mismo.

Dichas longitudes hacen referencia a las distancias a partir de las cuales comienzan a ser

relevantes los efectos lineales de dispersión cromática o la automodulación de fase no lineal. Mientras que la primera es la responsable del ensanchamiento del pulso, la segunda tiene un efecto opuesto de compresión.

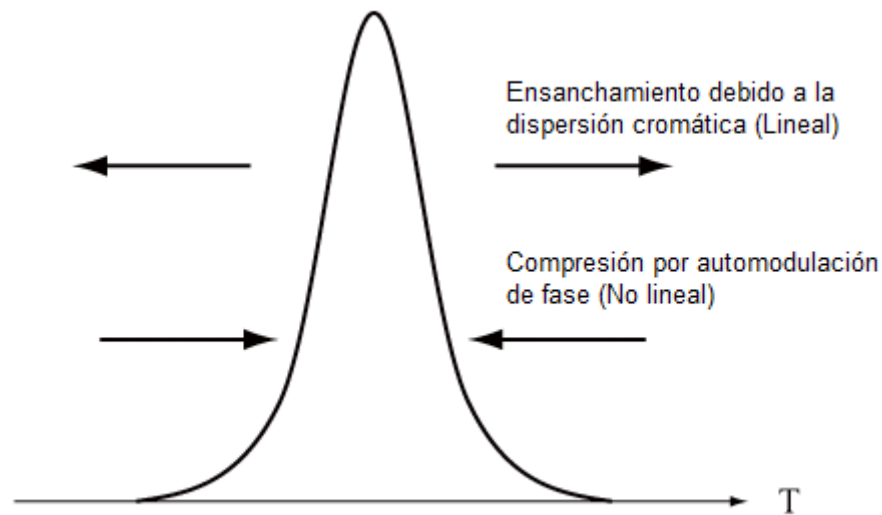


Fig. 4.6. Efectos de la propagación sobre el pulso.

Se pueden distinguir cuatro regímenes de propagación en función de los valores de dichas longitudes y en relación con la longitud L de la fibra [13]:

1°.- Si $L \ll L_N$ y $L \ll L_D$ ninguno de los efectos antes descritos tendrá influencia significativa en la propagación del pulso. Este caso es el idóneo para comunicaciones ópticas, pero se encuentra muy restringido en su aplicación en dicho campo debido a la condición impuesta a la longitud de la fibra. A este mismo respecto, si la longitud fuese considerable habría que tener en cuenta también las pérdidas asociadas a la fibra que se estuviese usando.

2° Si $L \ll L_{NL}$ y $L \sim L_D$ los efectos no lineales serán prácticamente despreciables y

predominará un régimen dispersivo en la propagación. El pulso tenderá a ensancharse debido a la dispersión cromática. La condición bajo la que aparece este régimen viene dada por

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \ll 1 \quad (4.37)$$

3°.- Si $L \ll L_D$ y $L \sim L_{NL}$ los efectos dispersivos son despreciables sobre los no lineales de la automodulación de fase. El pulso tenderá a comprimirse a lo largo de la propagación. En este caso, la condición bajo la que se produce dicho efecto viene dada por

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \gg 1 \quad (4.38)$$

4°.- Cuando la longitud L de la fibra es comparable a las longitudes lineal L_D y no lineal L_{NL} dichos efectos pueden compensarse entre sí en el régimen de dispersión anómala ($\beta_2 < 0$) dando lugar a pulsos *solitónicos* que se propagan sin deformarse a lo largo de toda la longitud de la fibra (suponiendo siempre ausencia de pérdidas o valores muy bajos de las mismas).

Es éste último tipo de propagación el que se usará para realizar la comparativa de los resultados de aplicar los diferentes esquemas expuestos en el anterior punto. Como el pulso no se deforma a lo largo de la longitud de la fibra, la señal obtenida al final de la misma deberá presentar la forma inicial, es decir, la del pulso solitónico de entrada. Por tanto, será la expresión analítica de dicho solitón la que se tomará como solución teórica de la propagación, pudiéndose verificar con total exactitud las precisiones de los diferentes esquemas Split-Step.

La condición para la propagación de tipo solitónica era que las longitudes características de la fibra coincidieran

$$L_D = L_{NL} \quad (4.39)$$

$$\gamma P_0 T_0^2 = |\beta_2| \quad (4.40)$$

$$P_0 = \frac{|\beta_2|}{\gamma T_0^2} \approx \frac{3,11 |\beta_2|}{\gamma T_{FWHM}^2} \quad (4.41)$$

donde T_{FWHM} es la altura mitad de anchura del pulso y su valor es [13]

$$T_{FWHM} = 2 \ln(1 + \sqrt{2}) T_0 \approx 1,763 T_0 \quad (4.42)$$

Como se puede apreciar en la ecuación (4.41), las condiciones de propagación solitónica vendrán determinadas por las características de la fibra a través de sus constantes lineal y no lineal. Dichos parámetros fijarán las condiciones en que pueden definirse el ancho del pulso y la potencia transmitida. La forma del solitón en la posición inicial vendrá dada por

$$U(0, T) = \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right) e^{\frac{-iCT^2}{2T_0^2}} \quad (4.43)$$

donde C es el chirp del pulso, que en el presente trabajo no será tenido en cuenta, por lo que toma el valor cero y la ecuación (4.43) queda

$$U(0, T) = \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right) \quad (4.44)$$

El ancho del pulso se escogerá en función de la ecuación (4.41) una vez fijada la potencia del pulso

$$T_0 = \sqrt{\frac{|\beta_2|}{\gamma P_0}} \quad (4.45)$$

4.5.2 Resultados

Una vez planteados los esquemas Split-Step y definido el caso analítico a estudiar, se presentará en este punto la comparativa de rendimientos. Se simulará la propagación de un pulso a través de un mismo tramo de fibra para diferentes densidades de mado tanto temporal como espacial.

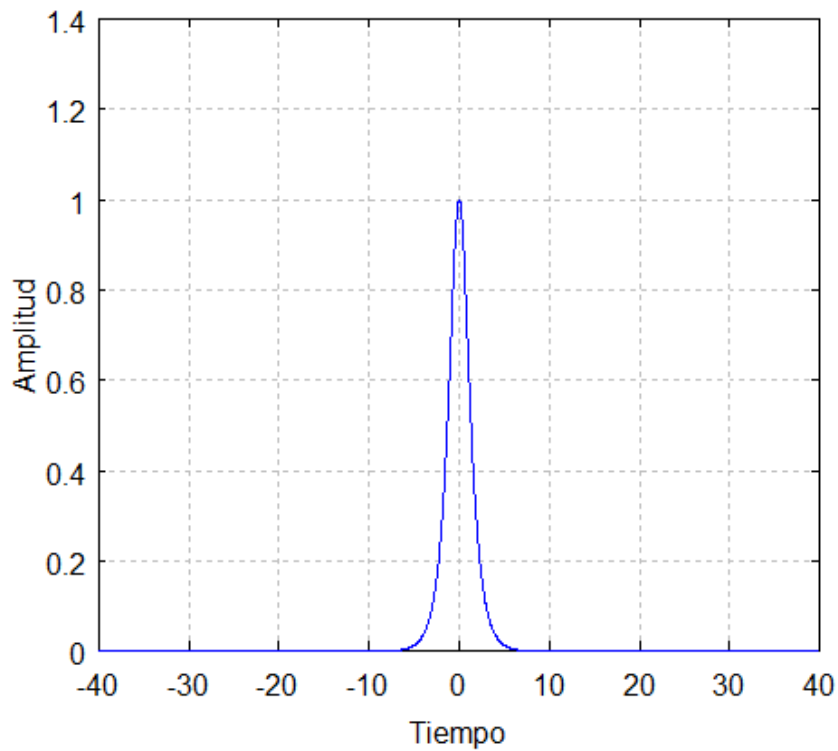


Fig. 4.7. Solitón de entrada. La amplitud y los tiempos están normalizados.

Para las simulaciones se escogió una fibra óptica de $\beta_2 = -2 \text{ ps}^2/\text{km}$ y $\gamma = 3 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, considerando, tal y como se ha explicado antes, las pérdidas nulas. La ventana de cómputo se tomó de $T_V = 80 \text{ ps}$, con el suficiente *aire* en los laterales para que la FFT no introduzca errores numéricos en las colas de un pulso de anchura $T_0 = 1 \text{ ps}$.

Las longitudes características de la propagación usando los anteriores parámetros serían $L_D = L_{NL} = 500 \text{ m}$. La longitud total de propagación se tomó de $90L_D$, es decir, de $4,5 \text{ Km}$, a fin disponer de una distancia lo suficientemente grande para probar diferentes tamaños de mallado espacial. En concreto, los mallados espaciales se tomaron entre desde 150000 hasta 250000 puntos, estudiándose en los casos de 512 y 1024 puntos de mallado temporal.

La precisión se estudió, al igual que en el capítulo tercero, midiendo el parámetro de RMS aplicado a los pulsos de entrada y salida. La fórmula del mismo viene dada por la ecuación (3.7).

En cuanto a la velocidad, ya se ha explicado en el desarrollo de cada esquema el coste computacional del mismo, por lo que ahora se aplicarán dichas expresiones en su cálculo.

Comenzando con un mallado de 512 puntos temporales, los resultados obtenidos en cuanto precisión pueden apreciarse en la figura 4.8. Como era de esperar, el esquema de menos preciso es el SSFM, mejorando a medida que el mallado espacial se hace más denso aunque no de manera demasiado significativa. El esquema S-SSFM se comporta de manera similar a este en cuanto a tendencia, no obstante su precisión es mucho mejor en cualquiera de los casos como puede apreciarse en la mencionada figura. Resulta obvio

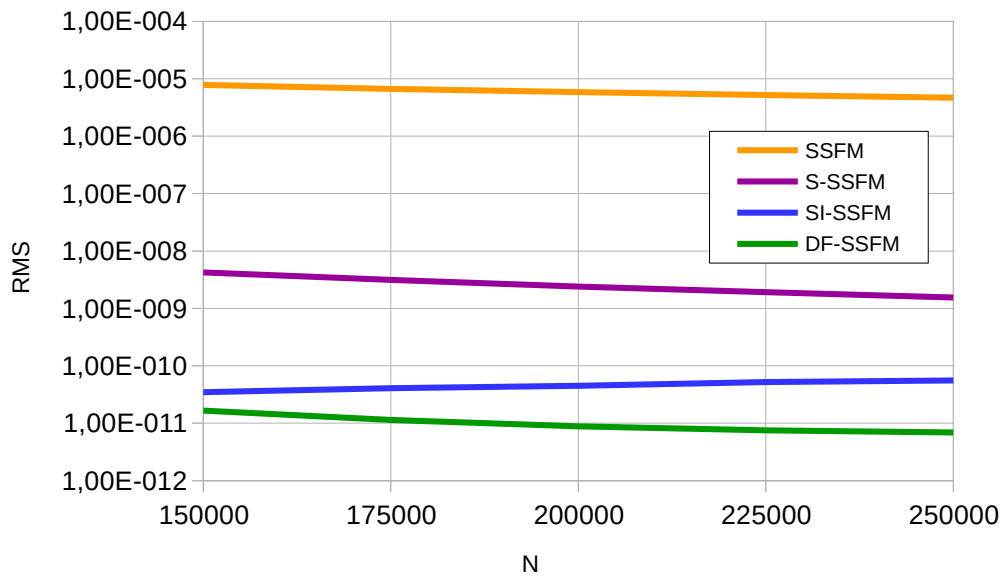


Fig. 4.8. Comparativa de precisión para 512 puntos temporales.

Los resultados del esquema SI-SSFM mejora los de los anteriores en varios órdenes de magnitud, pero presenta una tendencia anómala en sus resultados. En la gráfica puede apreciarse como el RMS empeora a medida que aumenta el número de puntos espaciales. La explicación de esto es obvia y ya fue comentada al exponerlo: las FFTs introducen error numérico, en principio pequeño, al utilizarlas y el SI-SSFM implica un total de 16 FFTs en cada paso espacial, pasado un determinado límite de FFTs el error asociado a éstas se hace lo suficientemente grande como para influir determinantemente en el error global del método. No obstante, el error sigue siendo mucho menor que en los dos esquemas anteriores.

En cuanto al esquema DF-SSFM, los valores de RMS obtenidos con este esquema superan claramente los de todos los anteriores esquemas, mejorando los del SI-SSFM en un orden de magnitud. Y, a diferencia del SI-SSFM, no introduce error numérico en los cálculos debido a un exceso de FFTs. Esto último, el bajo consumo de FFTs, también contribuye a que su velocidad sea

mucho mayor que la del método SI-SSFM, tal y como se puede apreciar en la figura 4.9.

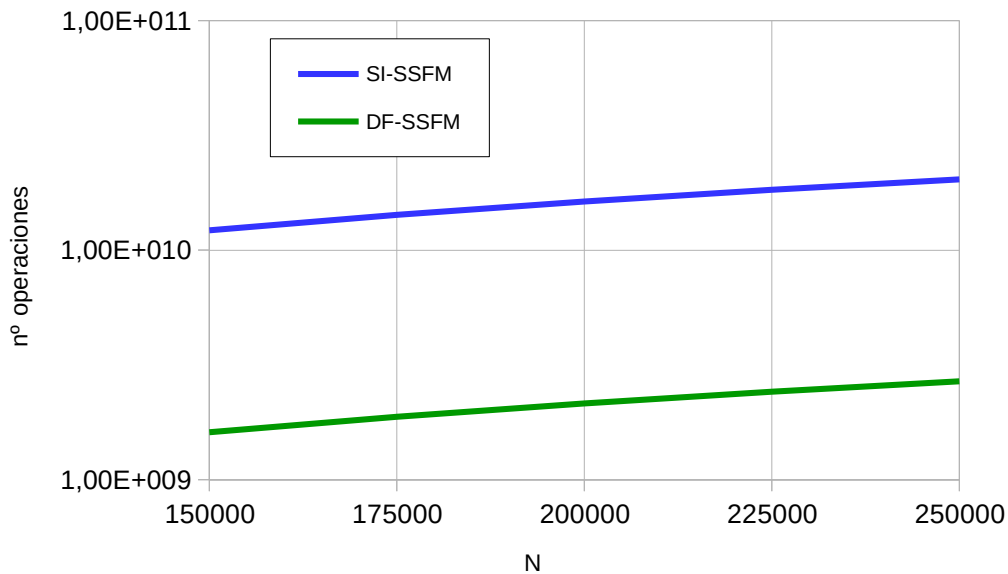


Fig. 4.9. Comparativa de velocidades para 512 puntos temporales.

En la gráfica se puede apreciar como el esquema SI-SSFM presenta un número de operaciones muchísimo más elevado que el de los otros. En concreto, el SI-SSFM realiza ocho veces más operaciones que el DF-SSFM. Los esquemas SSFM y S-SSFM no se representan en la figura 4.9, ya que su velocidad es similar al método de DF-SSFM y su precisión muchísimo menor, por lo que quedarían descartados de antemano.

Teniendo en cuenta la precisión, el coste computacional y que el SI-SSFM introduce error en los cálculos debido al alto número de FFTs, parece que el nuevo esquema propuesto DF-SSFM es mucho más aconsejable en cuanto rendimiento.

Para corroborar la anterior afirmación, se repitieron las simulaciones aumentando la

densidad del mallado temporal. Trabajando ahora con 1024 nodos temporales, se obtiene la figura 4.10 en cuanto a precisión de los cuatro esquemas propuestos

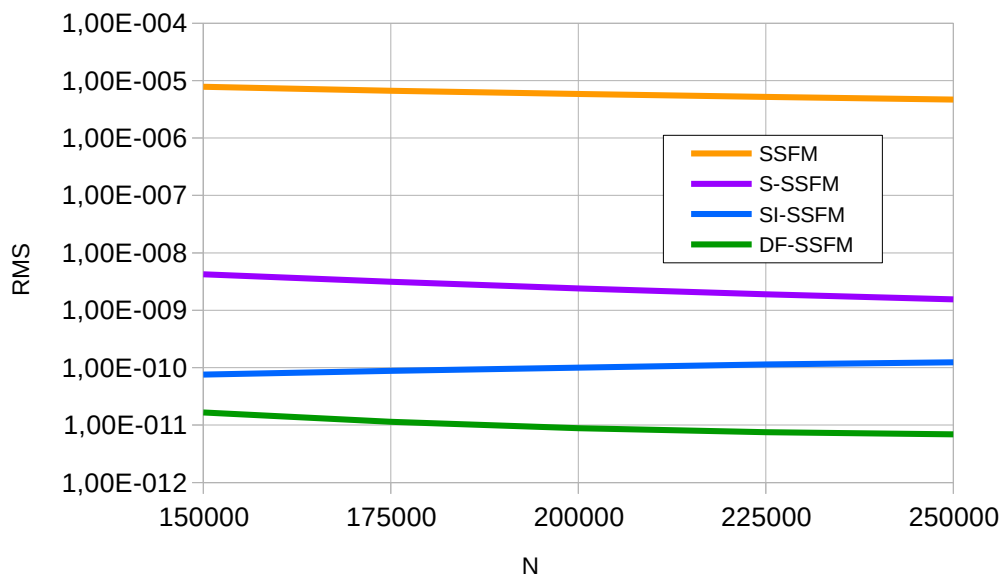


Fig. 4.10. Comparativa de precisión para 1024 puntos temporales.

El comportamiento de todos los esquemas es similar a la simulación para 512 puntos temporales, incluso los valores para los esquemas SSFM, S-SSFM y DF-SSFM son muy similares, iguales en algunos casos. La característica más llamativa de la gráfica es que los resultados de RMS obtenidos con el esquema SI-SSFM son peores que en las anteriores simulaciones. La explicación de esto es clara y vuelve a ser la del error asociado a la FFT. El número de FFTs totales realizadas es el mismo en este caso de 1024 puntos temporales que en el de 512, ya que éste depende del mallado espacial y no del temporal, no obstante, al ser necesaria tratar más puntos temporales con la FFT el error que ésta introduce aumenta.

Las velocidades asociadas a los cuatro esquemas pueden apreciarse en la figura 4.11.

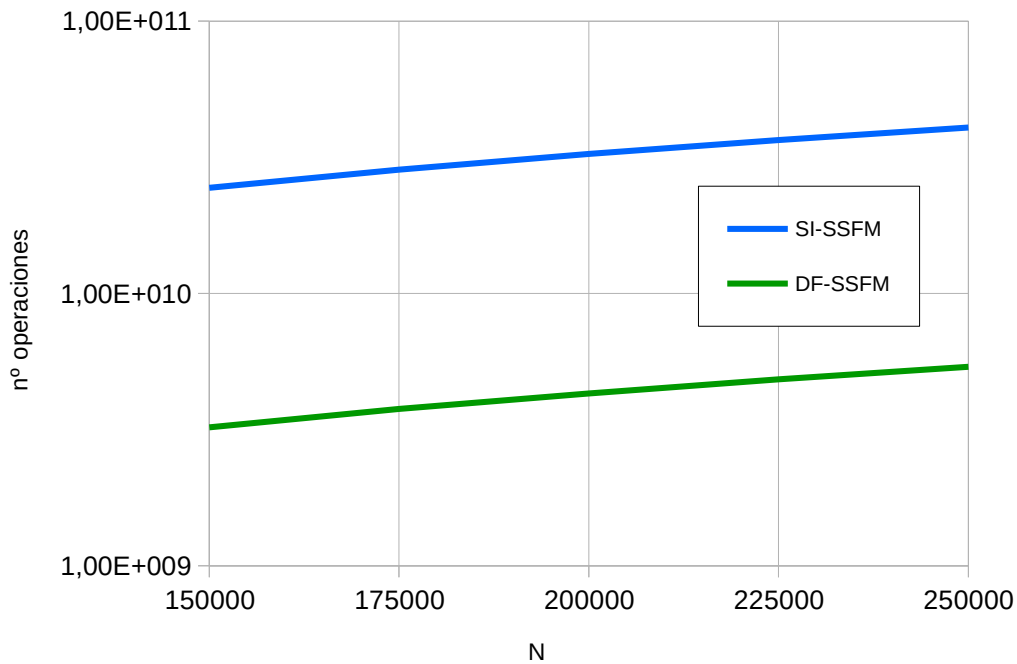


Fig. 4.11. Comparativa de precisión para 1024 puntos temporales.

Como es lógico, el coste computacional de ambos esquemas DF-SSFM y SI-SSFM aumenta, ya que hay más puntos temporales implicados. No obstante, como también cabía esperar, la proporción que guardan entre ellos es la misma. De nuevo el SI-SSFM presenta un coste mucho más grande (ocho veces más) que el del DF-SSFM, además de introducir error numérico en las soluciones.

Si se siguiese aumentando el número de puntos temporales, las FFTs también lo harían de forma proporcional a cada esquema, lo cual contribuiría a introducir más error numérico asociado a las transformadas. Éste es el gran punto débil del esquema SI-SSFM, ya que si fuese necesario utilizar una alta densidad de malla temporal a fin de simular adecuadamente una propagación más compleja, el error introducido por el esquema podría ser considerable.

El esquema DF-SSFM, en cambio, debido a su menor número de FFTs, presenta una estabilidad mucho mayor en cuanto a su precisión, como se puede concluir de la similitud en los resultados de las figuras 4.8 y 4.10, amén de una mejor precisión en sí.

Por último, presentar las figuras 4.12 y 4.13, donde se realiza una comparativa más específica de ambos métodos. En dichas gráficas se muestran puntos de diferentes tamaños que son función de la cantidad de puntos de mallado espacial usados. En el eje horizontal aparece el número de operaciones en escala logarítmica y en el eje vertical el RMS del método también en escala logarítmica

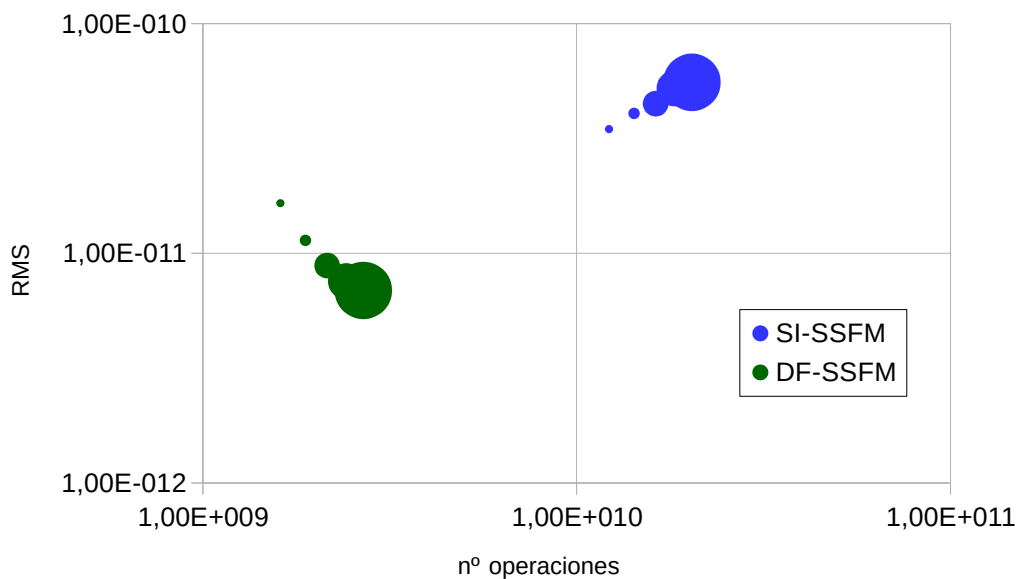


Fig. 4.12. Comparativa entre el SI-SSFM y el DF-SSFM para 512 puntos temporales.

La anterior figura es una simulación para 512 puntos de mallado temporal. En la siguiente el número de puntos temporales fue de 1024.

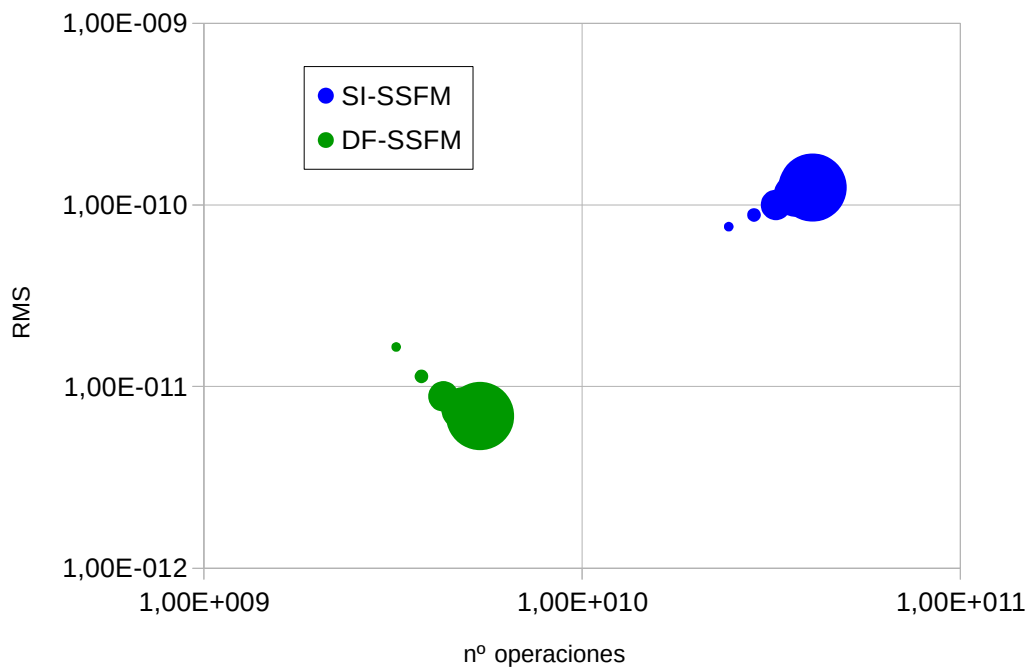


Fig. 4.13. Comparativa entre el SI-SSFM y el DF-SSFM para 1024 puntos temporales.

Se observa claramente en ambas gráficas que el método DF-SSFM presenta precisiones más bajas y menos coste computacional que el SI-SSFM para cualquier densidad de mallado espacial. En el caso de 1024 puntos temporales, el error introducido en el esquema SI-SSFM por el elevado número de FFTs queda patente en la figura 4.13, así como la estabilidad y mejor precisión del esquema DF-SSFM.

A la vista de estos resultados parece lógico escoger como esquema de trabajo el DF-SSFM. Su rendimiento es mucho mayor en cuanto a tiempo de cómputo y precisión en sus resultados. La estabilidad de éstos también ha quedado probada cuando se utilizan diferentes densidades de mallado temporal.

La combinación de diferencias finitas de órdenes superiores y tratamiento espectral dotan al

nuevo esquema propuesto de una elevada precisión así como de un bajo tiempo de cómputo, haciéndolo idóneo para la simulación de cualquier tipo de propagación a través de una fibra óptica.

Capítulo 5. Análisis de una nueva Fibra de Cristal Fotónico basada en un diseño fractal.

El estudio de los cristales fotónicos en las últimas décadas a llevado a descubrir e implementar numerosos fenómenos y dispositivos que se aplican hoy en el campo de la nanofotónica [1,2,3,4], como es el caso, sin ir más lejos, de las PCFs. La combinación de éstos con diseños fractales viene siendo estudiada desde hace tiempo, el mero hecho de que en la naturaleza se encuentren abundantes fractales es indicativo de la importancia de éstos y las propiedades que pueden tener en su aplicación. Sin embargo, en el ámbito de las PCFs es reciente esta línea de investigación, y los resultados que se están obteniendo son prometedores en cuanto a que se están potenciando las propiedades, ya de por sí extraordinarias, de las PCFs [5].

Una vez planteada la nueva técnica de diferencias finitas centradas de órdenes superiores en el capítulo tres, a continuación se va a aplicar al estudio de una nueva PCF de diseño fractal (F-PCF) propuesta en esta tesis por primera vez. Dicha fibra combinará las propiedades de las PCFs y los fractales, permitiendo un confinamiento de la luz en la zona central del núcleo ocupando una zona de gran área, lo cual permitirá la transmisión de altas potencias. Así mismo, los valores obtenidos en las simulaciones del parámetro dispersivo han sido muy bajos, por lo que la transmisión a través de la misma permitirá que los pulsos no se modifiquen prácticamente.

Una vez obtenidas las curvas características de esta F-PCF, se simulará una propagación de pulsos a través de ella a fin de verificar las propiedades que se deduzcan de su caracterización. Para ello se utilizará el método pseudo-espectral de diferencias finitas que en el capítulo cuatro se demostró como el más eficiente en cuanto a precisión y coste computacional.

El capítulo terminará con una revisión de los resultados obtenidos con la simulación de la F-PCF propuesta, así como de sus posibles aplicaciones en el campo de las telecomunicaciones. Como se verá, la nueva F-PCF tiene un diseño en el que los efectos tanto lineales como no lineales tienen baja incidencia en la propagación de las señales luminosas.

5.1 Diseño fractal: la alfombra de Sierpinski.

El término *fractal* fué propuesto en 1975 por Benoît Mandelbrot [6], y con él se definen aquellos objetos matemáticos cuya estructura básica, a menudo fragmentada o irregular, se repite a diferentes escales [7]. En la naturaleza este tipo de objetos se encuentran con frecuencia, por lo que

su estudio reviste gran importancia. La propiedad matemática clave que define un objeto como genuinamente fractal es que su *dimensión métrica* es un número no entero.

El carácter “recursivo” de los fractales los ha convertido en diseños especialmente apropiados para aplicar en el estudio de campos tan diversos como son las telecomunicaciones, el tratamiento de imágenes, la electrónica, la compresión de datos, la medicina, la geografía, la sismología, ... El diseño propuesto en esta tesis para la F-PCF se basa en el fractal conocido como *alfombra de Sierpinski*, y ha sido aplicado en el ámbito de las telecomunicaciones, por ejemplo, para fabricar antenas [8,9].

5.1.1 Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es un famoso conjunto definido por G. Cantor en 1883. Se trata de un subconjunto del intervalo $[0,1]$ con propiedades muy interesantes [10]. Para construirlo se parte de dicho intervalo $[0,1]$, se divide en tres partes iguales y se elimina la central $(1/3, 2/3)$, con lo que el conjunto se reduce a:

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \quad (5.1)$$

Ahora cada subsegmento se divide a su vez en tres partes y se vuelve a eliminar la parte

central de cada uno.

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1 \right] \quad (5.2)$$

Se continuaría aplicando este procedimiento a cada subsegmento para conseguir los siguientes conjuntos A_3, A_4, \dots . De forma general, se puede definir el conjunto n -ésimo según la siguiente relación:

$$C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3} \right) \quad (5.3)$$

De la propia estructura de los subconjuntos puede deducirse que cada uno se encuentra contenido dentro del siguiente. Para un número $k \in \mathbb{N}$, el conjunto A_k está formado por un total de 2^k subintervalos cerrados de longitud 3^{-k} unidades cada uno.

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \quad (5.4)$$

La representación gráfica del conjunto de Cantor sería similar a la que se puede apreciar en la figura (5.1). En ella se puede apreciar la subdivisión de los segmentos en tres partes y la eliminación del central en cada paso, a medida que se desciende en la gráfica el número de segmentos es mayor y su tamaño más pequeño.

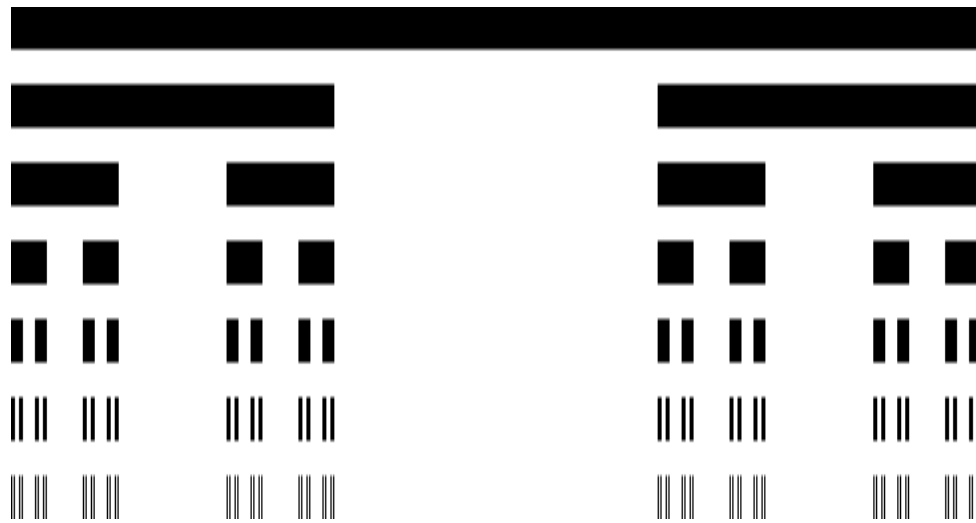


Fig 5.1. Conjunto de Cantor. Se forma eliminando la parte central de un segmento dividido en tres partes, y aplicando este proceso a la solución obtenida recursivamente.

El conjunto completo de Cantor se define como

$$C = \bigcap A_n \quad (5.5)$$

extendiéndose dicho productorio hasta el infinito.

Este conjunto fue uno de los pilares básicos en el desarrollo de la moderna topología. Y es precisamente en dicho ámbito donde se encuentra el conjunto de Cantor la propiedad que lo conecta directamente con la alfombra de Sierpinski, ya que tiene dimensión topológica 1 y, por lo tanto, es homeomorfo a ésta. En concreto es el fractal conocido como *polvo de Cantor* el que es muy similar a la alfombra de Sierpinski. La definición de éste se hace definiendo un espacio de Cantor aplicando el producto cartesiano del conjunto de Cantor sobre sí mismo [11].



Fig 5.2. Polvo de Cantor. Generalización del conjunto de Cantor a dos dimensiones.

En el siguiente apartado se definirá la alfombra de Sierpinski y podrá apreciarse la similitud de su representación con la del polvo de Cantor.

5.1.2 Alfombra de Sierpinski

La alfombra de Sierpinski es un fractal plano descubierto por Waclav Sierpinski en 1916 y forma parte de una familia de fractales que pueden definirse en diferentes dimensiones y formas [12]. Como se ha mencionado en el apartado anterior, que su dimensión topológica sea 1 lo hace homeomorfo al conjunto de Cantor y, por tanto, su construcción es muy similar [13,14].

Para construir la alfombra se parte de un cuadrado de área unidad y se divide en nueve cuadrados de igual lado, eliminándose el central.

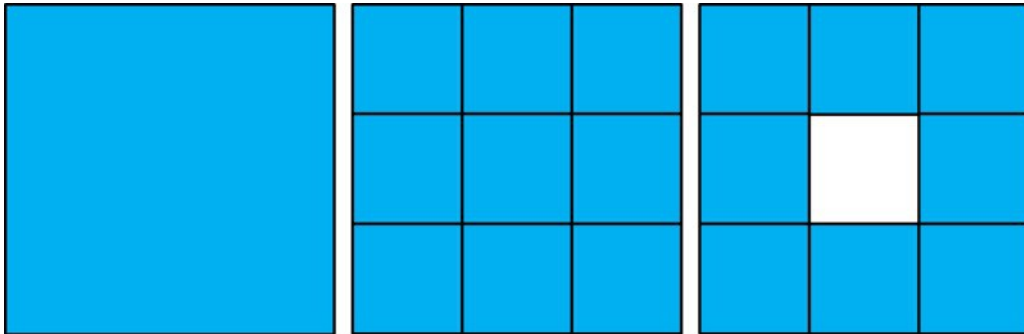


Fig 5.3. Generación de la alfombra de Sierpinski de primer orden.

A continuación se toman los ocho cuadrados restantes y se dividen a su vez en 9 cuadrados de lados iguales, eliminándose de nuevo el central.

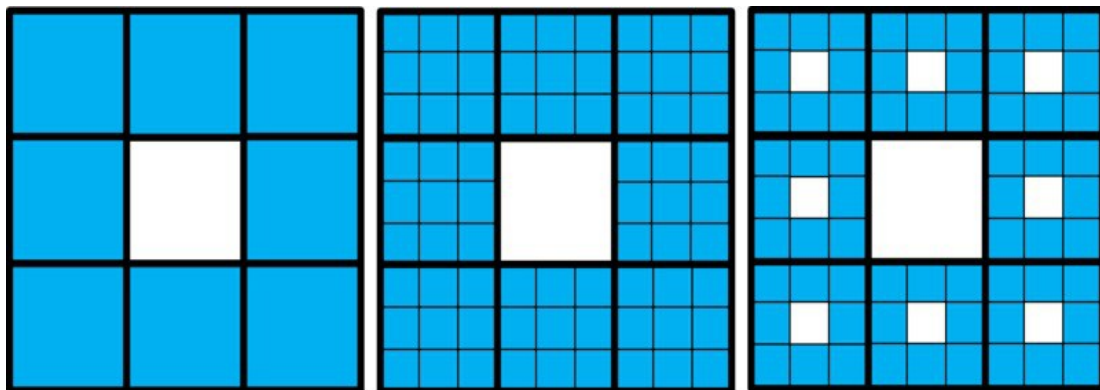


Fig 5.4. Generación de la alfombra de Sierpinski de segundo orden.

Repitiendo este proceso de manera recursiva sobre los cuadrados restantes en cada iteración se obtienen las alfombras de Sierpinski de sucesivos órdenes.

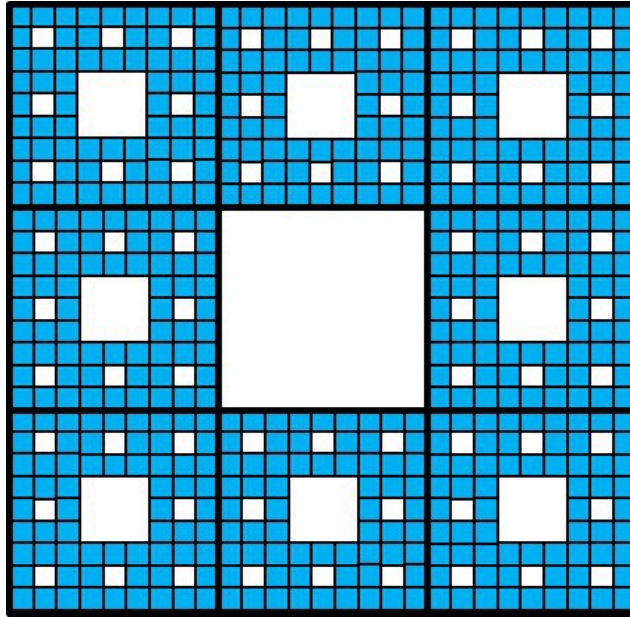


Fig 5.5. Alfombra de Sierpinski de tercer orden.

La generalización a tres dimensiones de este fractal se conoce como esponja de Menger y ha sido muy utilizada en el diseño de cristales fotónicos [15,16,17].

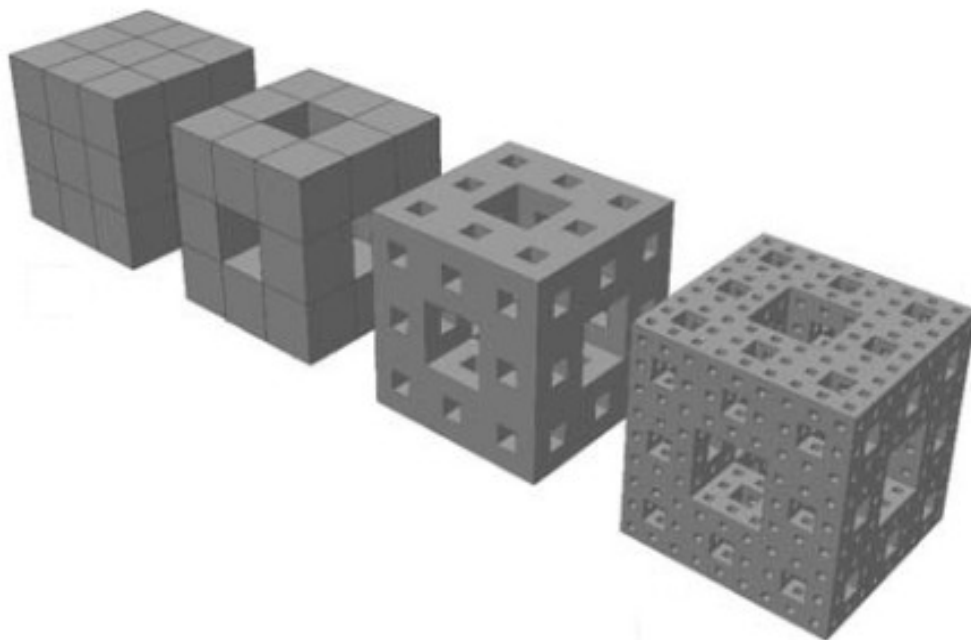


Fig 5.6. Esponjas de Menger de varios órdenes.

5.1.3 Diseño de una nueva fibra de cristal fotónico basada en estructuras fractales

La estructura recursiva y concéntrica de la alfombra de Sierpinski es idónea para concentrar el campo eléctrico en el núcleo de la fibra a lo largo de la propagación. Ésto permitirá obtener áreas efectivas de gran dimensión y, de esta forma, transmitir potencias elevadas.

Las estructuras utilizadas han sido las alfombras de segundo y tercer orden. A éstas se les ha introducido una pequeña modificación eliminando el agujero central del diseño. De esta manera, la fibra carece de núcleo diferenciado y la zona de confinamiento del campo puede hacerse mayor, siendo la comprendida entre los agujeros que conforman el cuadrado exterior. En las figuras (5.7) y (5.8) pueden apreciarse los diseños propuestos:

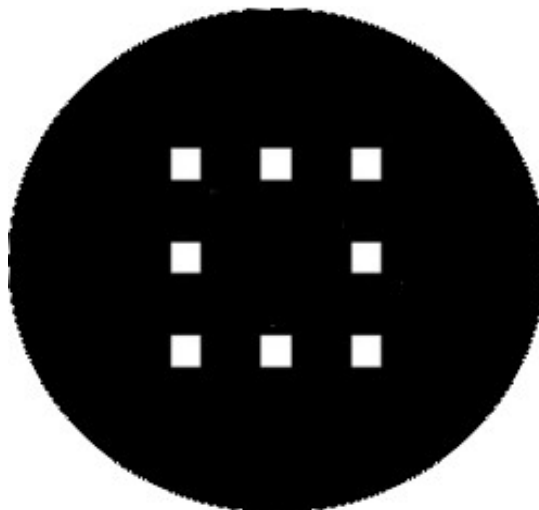


Fig 5.7. F-PCF de segundo orden propuesta.

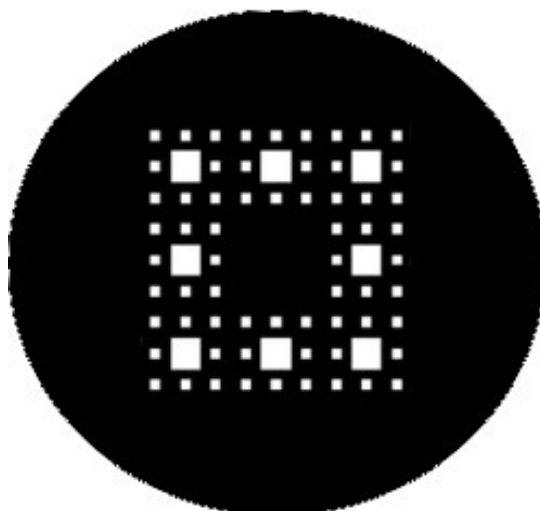


Fig. 5.8. F-PCF de tercer orden propuesta.

La fabricación de las PCFs es ya de por sí compleja [18,19], por lo que el diseño cuadrado de los agujeros de aire puede complicar bastante su elaboración, sobre todo en el caso de la fibra de tercer orden. Es por ésto que se propone un diseño alternativo de la F-PCF de segundo orden con agujeros circulares que será simulada y comparada con las otras dos. La figura (5.9) muestra el corte transversal de la misma:

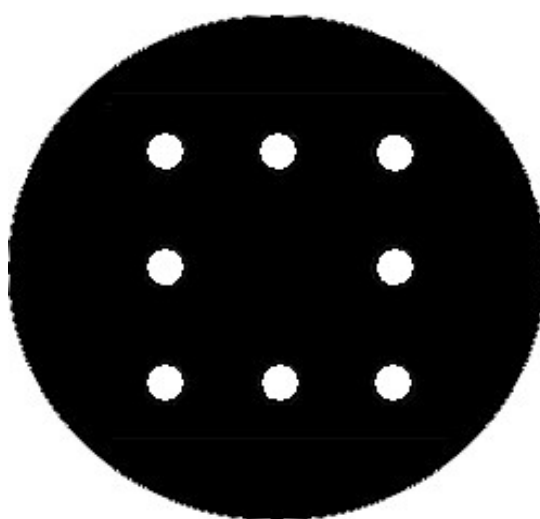


Fig. 5.9. F-PCF de segundo orden con agujeros circulares.

El diámetro de los agujeros es del mismo tamaño que los lados del cuadrado. Ésta medida se tomará en función de la ventana de cómputo siguiendo el proceso descrito en el punto anterior para calcular los tamaños y separaciones de cada agujero de la fibra.

Como ya se ha mencionado, el hecho de que estas fibras no presenten un núcleo diferenciado de la cubierta permite que la zona de conducción del campo sea mayor que en otras fibras, aumentando el área efectiva de la misma. El confinamiento del campo mediante los agujeros externos de aire y sin necesidad de núcleo es una propiedad característica de este nuevo tipo de F-PCF propuesto. En fibras de diseño similar, como la PCF hexagonal analizada en el capítulo tres, es necesario un núcleo de un material distinto al de la cubierta para contener el campo en el interior de la fibra y evitar que se disperse hacia los bordes de la misma. La estructura fractal de la fibra da lugar a esta propiedad que permitirá obtener efectos interesantes para la propagación de una señal a través de la misma.

5.2 Caracterización de las Ffibras propuestas a partir de sus parámetros

El estudio de las F-PCFs se realizará en función de sus parámetros de dispersión y no lineal correspondiente al efecto Kerr. A tal efecto, se empleará la nueva técnica numérica de diferencias finitas centradas desarrollada en el capítulo de tercero de la presente tesis.

El objetivo final será obtener las curvas de los parámetros anteriormente citados para cada

una de las F-PCFs propuestas, y estudiar a partir de ellas cual es la fibra que más ventajas ofrece de cara a la propagación de pulsos. Una vez seleccionada la F-PCF de mayor rendimiento, ésta se comparará con una PCF tradicional para observar las ventajas que el diseño fractal introduce en las características de la nueva fibra.

Como ya se comentó, las gráficas tienen que abarcar un rango completo de longitudes de onda, por lo que las simulaciones han de repetirse para todos los puntos en que se haya discretizado dicho intervalo. De forma resumida, el esquema de caracterización sería:

1. Definición de la matriz dieléctrica asociada a la F-PCF estudiada.
2. Discretización del intervalo de longitudes de onda a simular.
3. Resolución de las ecuaciones de análisis modal para una longitud de onda.
4. Repetición del paso 3 para todas las longitudes de onda del intervalo.

Como resultado del anterior proceso se obtendrá un índice efectivo y una distribución de campo asociada a cada longitud de onda. A partir de el índice efectivo se podrán calcular los parámetros D y β_2 aplicando las ecuaciones (1.55) y (3.9). El área efectiva de las distribuciones de campo dada por la ecuación (1.53) permite calcular el parámetro no lineal γ aplicando (1.52).

Una vez realizadas las simulaciones correspondientes, se presentarán a continuación las gráficas relacionadas con los parámetros antes especificados. En cada figura aparecerán los resultados de las tres F-PCFs propuestas en el punto 5.1, de manera que puedan valorarse los

resultados conjuntamente y seleccionar una de ellas como fibra óptima a la hora de efectuar la propagación de pulsos a través de ella.

En todos los casos los agujeros practicados a la fibra se consideraron rellenos de aire ($n_{air}=1$), mientras que la cubierta se definió con $n_{clad}=1,42$. Ya se ha comentado que el tamaño de los agujeros se define en función de la ventana de cómputo, que en las simulaciones fue de 32×32 micras, con lo que el diámetro de los agujeros circulares y el lado de los cuadrados fue de 1,5 micras.

5.2.1 Estudio de la dispersión

En la figura (5.10) se representa el índice efectivo de las fibras frente a la longitud de onda. Como era de esperar en un modo guiado, se encuentran comprendidos entre los índices del aire y la cubierta, y más próximos en valor a ésta última. En cualquier caso, la variación total en el intervalo de longitudes de onda estudiado es muy pequeña, un 0,1% en el caso de las F-PCFs de segundo orden y un 0,2% en la de tercero. Se observa además que las dos F-PCFs de segundo orden presentan un comportamiento similar y de valores también muy próximos, quedando los valores de la F-PCF cuadrada un poco por encima de los de la F-PCF circular.

Cabe esperar, en principio, que los valores de la constante de dispersión calculados a partir del índice efectivo presenten un resultado parejo para ambas F-PCFs de segundo orden.

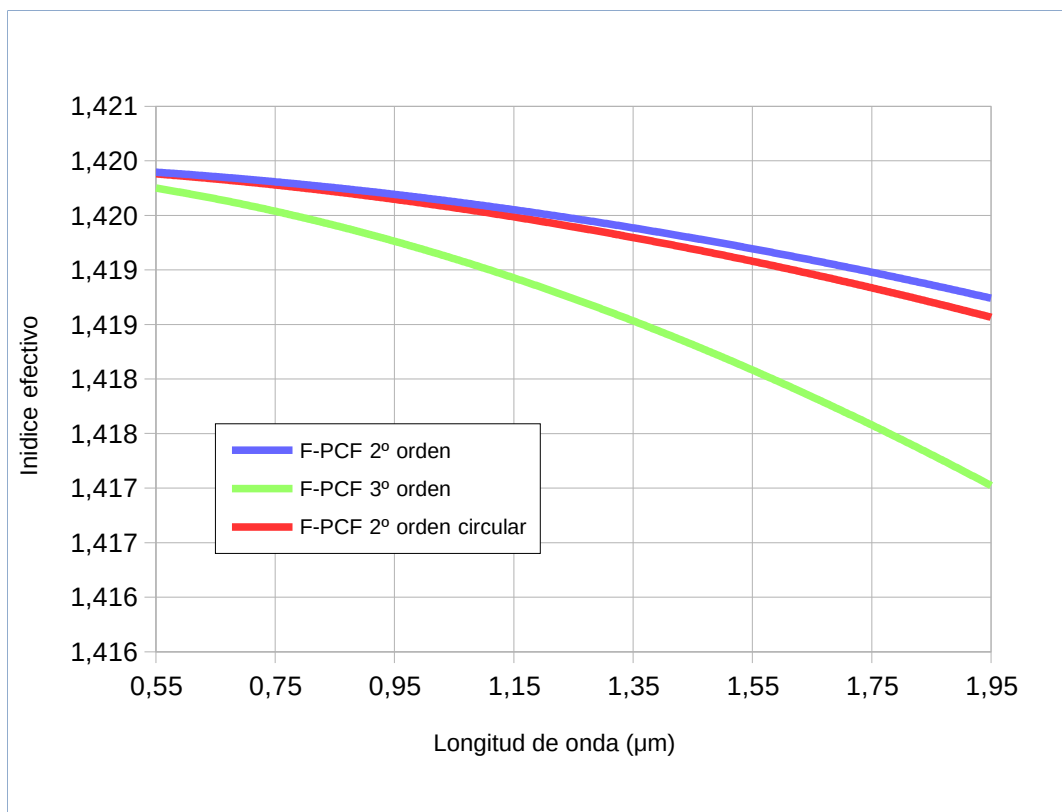


Fig. 5.10. Índice efectivo frente a la longitud de onda para las tres F-PCFs.

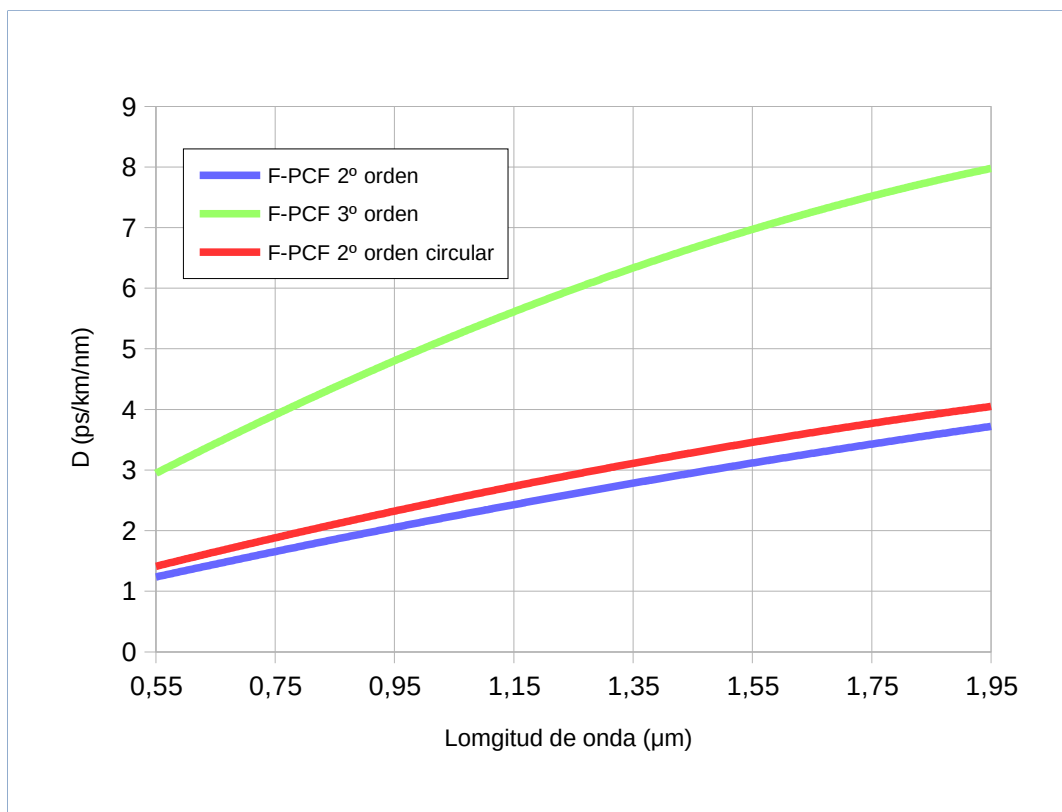


Fig. 5.11. Parámetro de dispersión D frente a longitud de onda para las tres F-PCFs.

La gráfica (5.11) muestra los resultados obtenidos al aplicar la ecuación (1.55) a los datos de índice efectivo previamente simulados. Tal y como se comentó, los resultados para las F-PCFs de segundo orden son muy similares entre sí, aunque en este caso sí se advierte una separación mayor entre ambas dentro de la gran similitud de los valores de ambas curvas.

A continuación se muestra la gráfica correspondiente al parámetro β_2 que, como ya se ha dicho, se obtiene aplicando la ecuación (3.9) a la anterior gráfica. El comportamiento es, de nuevo, similar al de las otras dos gráficas. Las F-PCFs de segundo orden presentan la misma tendencia y con valores casi iguales, es la F-PCF de tercer orden la que se aleja más en cuanto a valores debido a su decrecimiento más rápido.

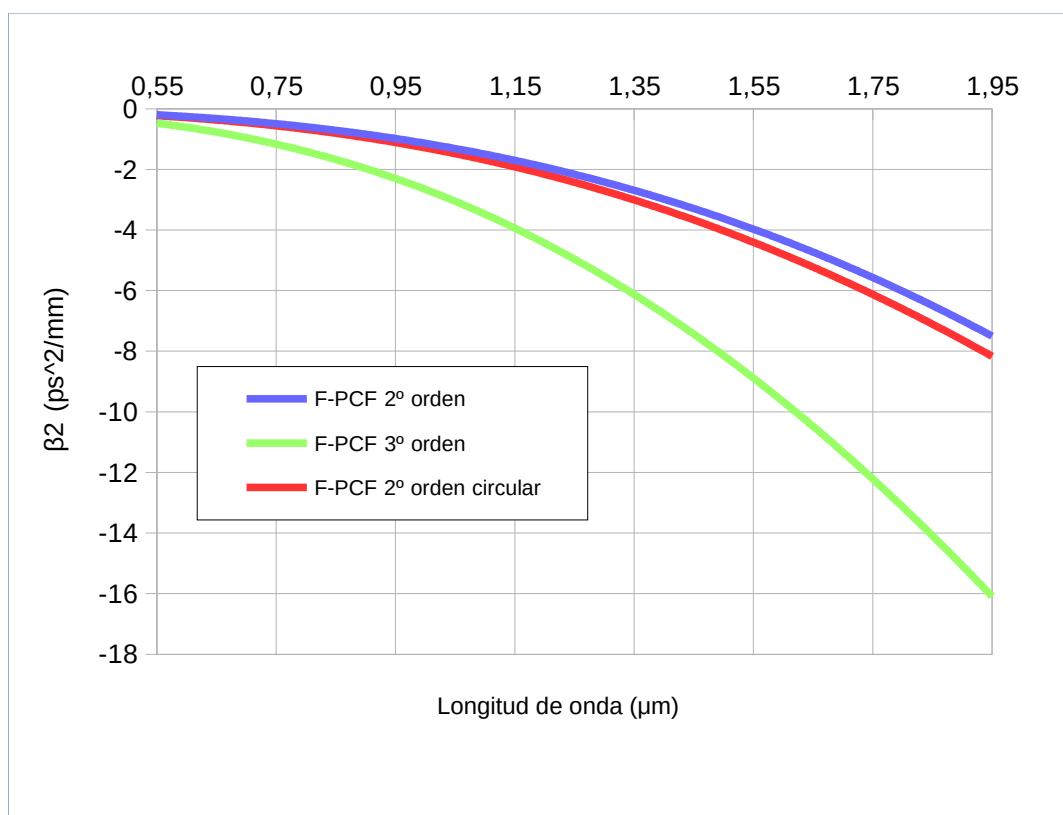


Fig. 5.12. Parámetro β_2 frente a la longitud de onda para las tres F-PCFs.

5.2.2 Estudio de la no linealidad

Una vez realizado el análisis de los efectos dispersivos de la fibra, es ahora el turno de la no linealidad asociada a la misma. Ya se mencionó que dicho estudio se realiza a partir de las distribuciones de campo asociadas al modo de propagación guiado.

En concreto, se aplica la ecuación (1.53) para integrar dichos campos y obtener el área efectiva que ocupan al propagar se por la fibra, a partir de este dato se obtiene el parámetro no lineal γ al sustituirlos en (1.52).

La dependencia de γ con el área efectiva es inversamente proporcional, por lo que a mayor área menores serán los efectos no lineales inducidos por la fibra en los pulsos transmitidos a través de ella. Por otro lado, una fibra con mayor área efectiva permite una transmisión de señales más potentes que una con área efectiva baja. Es esta transmisión de potencias altas una de las principales aplicaciones de las PCFs de alta área efectiva que se revisaron en 1.3.4.1.

En la gráfica (5.13) se representa el área efectiva de cada una de las tres F-PCFs propuestas frente a la longitud de onda. Cada uno de estos datos está asociado a los correspondientes a la dispersión que se estudiaron en el anterior apartado. Como se puede apreciar, la característica principal de los valores obtenidos es su carácter prácticamente monótono. La variación a lo largo del rango de longitudes de ondas simulado es muy baja: en la de tercer orden un 6 %, en la de

segundo orden de agujeros cuadrados un 4,66 % y en la de agujeros circulares un 8,15 %. Ésto implica que la influencia sobre todas las longitudes de onda comprendidas en el intervalo de estudio será muy similar.

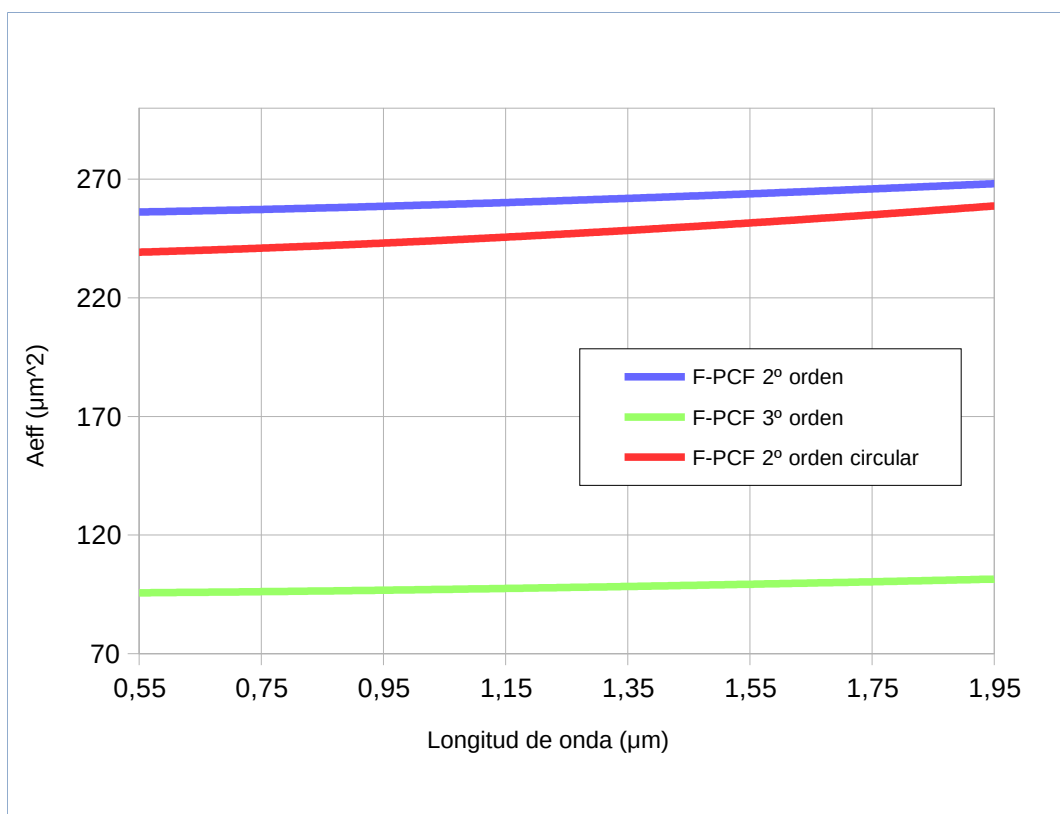


Fig. 5.13. Área efectiva de las tres F-PCFs frente a la longitud de onda

Por otro lado, se vuelve a observar que el comportamiento de las dos fibras de segundo orden es muy similar y de valores también muy próximos. Ésto ya ocurría con los efectos dispersivos y vuelve a verificarse aquí. Como última comprobación de esta característica quedaría comprobar el comportamiento del parámetro γ que se presenta en la siguiente Fig 5.14. Como era de esperar, también en esta gráfica se encuentra el mismo comportamiento para las dos fibras de segundo orden tanto en tendencia como en proximidad de valores. La diferencia, en cambio, con la fibra de tercer orden es considerable.

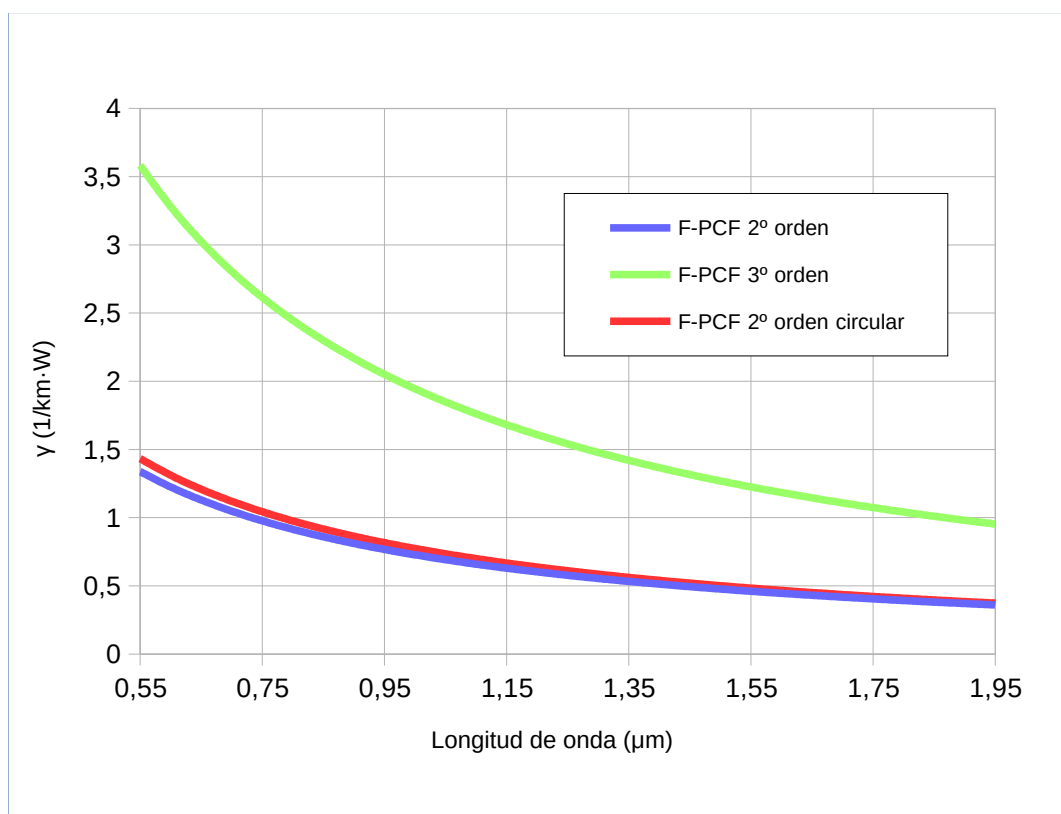


Fig. 5.14. Valores de γ frente a la longitud de onda para las tres F-PCFs.

Es importante destacar que los valores obtenidos en ambas F-PCFs de segundo orden son muy bajos, por lo que los efectos no lineales de la fibra sobre la transmisión del pulso serán débiles. Si a esto se une que el parámetro asociado a la dispersión también tomaba valores próximos a cero, al propagar un pulso a través de este tipo de fibra la deformación del mismo debe ser mínima al finalizar la transmisión.

Es cierto que no son sólo los efectos no lineales los que actúan sobre un pulso al propagarse a través de la fibra, pero ya se ha visto como los valores de la constante dispersiva son también bajos en este tipo de fibras. No obstante, conviene realizar un estudio de la estabilidad de los pulsos en función de su potencia y distancia de propagación como la que se realizará al final del presente capítulo.

5.2.3 Estudio del rendimiento

Una vez obtenidas las curvas de los parámetros dispersivo y no lineal de las tres F-PCFs, es ahora el momento de seleccionar una de ellas como la más idónea para efectuar transmisiones de señales electromagnéticas en función de los resultados obtenidos en las simulaciones de los anteriores apartados.

Resulta obvio a partir de las gráficas encontradas que la fibra de tercer orden presenta unos valores más altos que las de segundo para ambos parámetros. Ésto es debido a que la mayor cantidad de capilares de aire disminuye el área total de la cubierta, con lo que el contraste entre medios es mayor y ésto afecta al índice efectivo tal y como se puede apreciar en la figura (5.10). La dispersión D depende de la curvatura del índice efectivo, por lo que a mayor curvatura, como es el caso de la F-PCF de tercer orden, mayores serán los efectos dispersivos.

Por otro lado, el parámetro no lineal está relacionado de manera inversamente proporcional con el área efectiva del modo propagado en la fibra. Si, tal y como se acaba de explicar, el área de la cubierta es menor mientras más agujeros de aire se practiquen, la zona de área efectiva disponible para que el campo la ocupe será también necesariamente más pequeña y los valores de γ mayores. La F-PCF de tercer orden presenta 72 capilares más que las de segundo orden, que, aunque sean de menor tamaño de los 8 que comparten las tres fibras, contribuyen a que se produzca este efecto de disminución del área efectiva y el consecuente aumento de las no linealidades.

Resulta claro entonces que habría que optar por una de las fibras de segundo orden antes que por la de tercero a la hora de escoger una F-PCF de trabajo. A lo comentado anteriormente se añade el hecho de que construir una fibra con esa cantidad de pequeños capilares organizados de manera tan concreta resulta muy complicado, con el consiguiente aumento en los coste de fabricación. Queda, por tanto, descartada la fibra de tercer orden en favor de las de segundo.

En cuanto a las F-PCFs de segundo orden, su principal característica, observada en todas las gráficas, es que sus curvas asociadas presenta tendencias similares y valores también muy próximos en cada una de ellas. Si bien es cierto que los valores de la fibra de capilares cuadrados son más próximos a cero, la diferencia entre éstos y los circulares es mínima. De hecho, esta diferencia se puede cuantificar a partir del RMS en cada pareja de curvas, siendo los resultados obtenidos los que contiene la tabla (5.1).

Parámetro	n_{eff}	D (ps/km/nm)	Γ (1/kmW)
RMS	0,0001	0,3038	0,0487

Tabla 5.1. Valores RMS para los parámetros característicos de las F-PCFs de segundo orden.

Como se puede apreciar los, valores de RMS obtenidos son muy bajos, por lo que las diferencias entre los parámetros en ambos tipos de fibras serán mínimos. Los efectos inducidos en los pulsos por cualquiera de las dos F-PCFs de segundo orden serán prácticamente iguales.

Teniendo en cuenta todo lo anterior y el hecho de que, como ya se ha mencionado, la

fabricación de capilares cuadrados es mucho más compleja que los circulares (y más costoso económicamente), será la F-PCF de segundo orden y capilares circulares la elegida entre las tres propuestas como fibra de trabajo. A las características de baja y dispersión y efectos no lineales de este nuevo tipo de fibra, se le une su sencillez de fabricación.

Las características específicas de esta fibra la enmarcan dentro de la familia de PCFs de alta área efectiva, por lo que puede ser aplicada a la transmisión de señales de alta potencia así como en la fabricación de sensores e interferómetros. A la ventaja de presentar gran área efectiva (y, consecuentemente, efecto no lineal bajo), se le une que los efectos dispersivos de la misma también son muy pequeños, por lo que la influencia sobre los pulsos a lo largo de la transmisión serán escasa en ambos aspectos.

5.2.4 Estudio del área efectiva

Los resultados mostrados en la figura 5.13 muestran los valores de área efectiva alcanzados por la F-PCF. Queda patente en dicha gráfica que una característica claramente determinante de la fibra es su capacidad de transmitir señales con modos guiados que ocupan una gran parte de la superficie transversal de la fibra, por lo que su pertenencia al grupo de PCFs de altas áreas efectivas está de sobra justificada.

En la figura 5.15 se representa la distribución de campo obtenida al simular la F-PCF propuesta a una longitud de onda de trabajo de 1,55 micras.

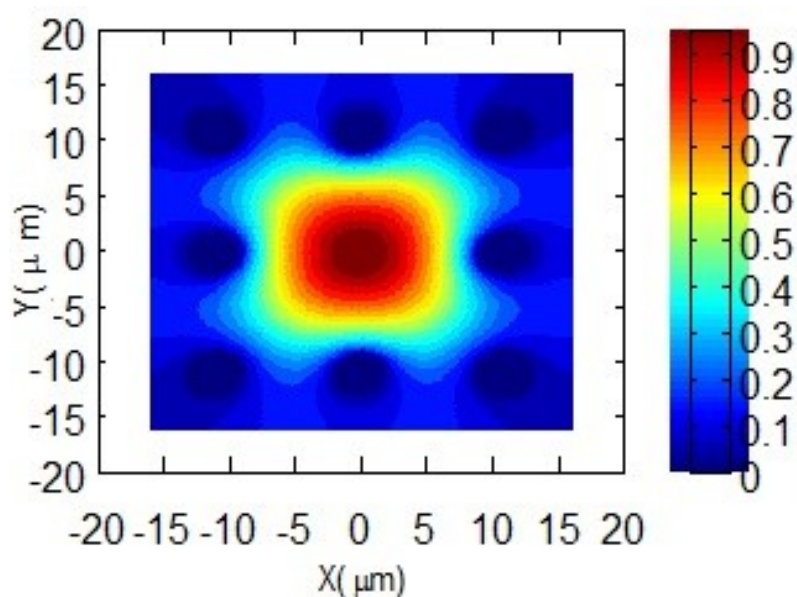


Fig. 5.15. Distribución normalizada de campo en la F-PCF propuesta. Se observa la gran cantidad de área efectiva que presenta.

Resalta en la gráfica la gran cantidad de área efectiva que presenta la nueva F-PCF propuesta. El campo se enmarca en el interior del cuadrado definido por los capilares circulares, que permiten *estirar* el área efectiva hasta valores muy altos.

Por otro lado, el diseño interno de una PCF de alta área efectiva no fractal presenta el aspecto general mostrado en la figura 5.16. Al igual que en la F-PCF propuesta, la principal característica geométrica de este tipo de fibras es la ausencia de núcleo diferenciado. Los capilares de aire rodean la zona central de la fibra donde debiera encontrarse el núcleo, y son los que realizan de manera efectiva el confinamiento de la luz en dicha zona. La organización de los agujeros es en forma hexagonal, pero su densidad en torno al núcleo, en comparación con los ocho capilares de la fibra de cristal fotónico fractal propuesta, es muy alta y, por tanto, su fabricación más difícil que en la nueva fibra.

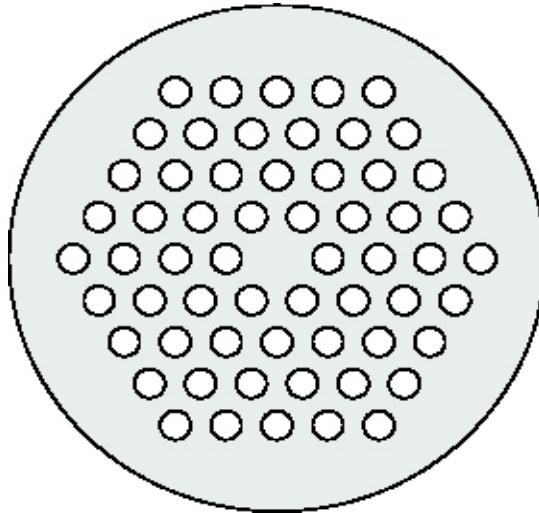


Fig. 5.16. Diseño de una PCF no fractal de alta área efectiva.

La F-PCF propuesta requiere, en cambio, de tan sólo ocho capilares de aire en su diseño, por lo que su fabricación es muchísimo más sencilla que las PCFs clásicas con estructura interna como la mostrada en la figura 5.16. Estos ocho capilares, ordenados según el patrón de la alfombra de Sierpinski de segundo orden (eliminando el núcleo central además), permiten confinar la luz por completo en su interior en la forma mostrada en la figura 5.15 y alcanzar valores de área efectiva como los simulados en la figura 5.13.

Queda justificado, pues, por completo la pertenencia a la familia de fibras de alta área efectiva de la nueva F-PCF propuesta en esta tesis. Ésto es así tanto a nivel de diseño como de características de propagación.

5.3 Comparación de la nueva fibra con una Fibra de Cristal Fotónico de tipo no fractal

Una vez seleccionada la F-PCF de capilares circulares como fibra óptima en cuanto a prestaciones y facilidad de fabricación, es lógico realizar una comparación con PCFs de diseño no

fractal a fin de poner de relieve las ventajas del nuevo diseño propuesto en esta tesis frente a otros más clásicos.

En el anterior punto se ha discutido y justificado la clasificación de la nueva F-PCF como fibra de alta área efectiva. No obstante, en los resultados de las simulaciones presentados en el apartado 5.2.1 se vio como la fibra propuesta presenta también propiedades de baja dispersión en el rango de longitudes de onda estudiado.

Por lo tanto, la nueva fibra presenta ventajas tanto de supresión de efectos dispersivos como no lineales. Será en ambos aspectos, pues, donde habrá que analizar el rendimiento comparado de la F-PCF y la PCF clásica.

5.3.1 Confinamiento del campo

En concreto, la comparación se realizará con la PCF hexagonal usada en el capítulo tres y de la cual ya se efectuó su caracterización en dicho capítulo.

La figura 5.17 recuerda la sección transversal de dicha fibra, un núcleo central rodeado por seis capilares de aire formando un hexágono regular en torno a él. Los materiales y distancias de los diferentes componentes de la fibra también son los mismos que los usados para las simulaciones en el capítulo tres.

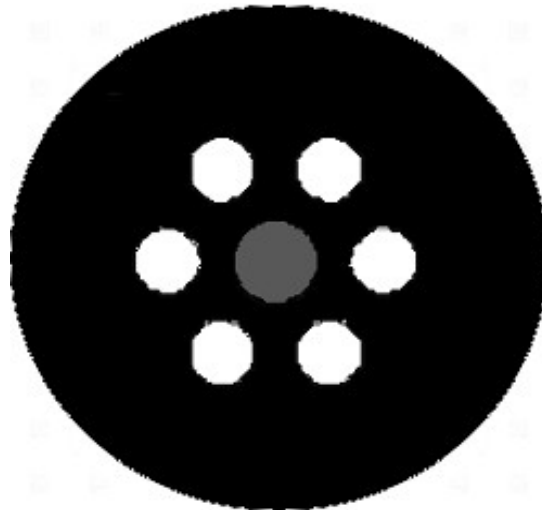


Fig. 5.17. PCF hexagonal usada para comparar con las F-PCFs.

En la figura 5.18 se muestra la distribución de campo obtenida en la PCF hexagonal para una longitud de onda de trabajo de 1,55 micras.

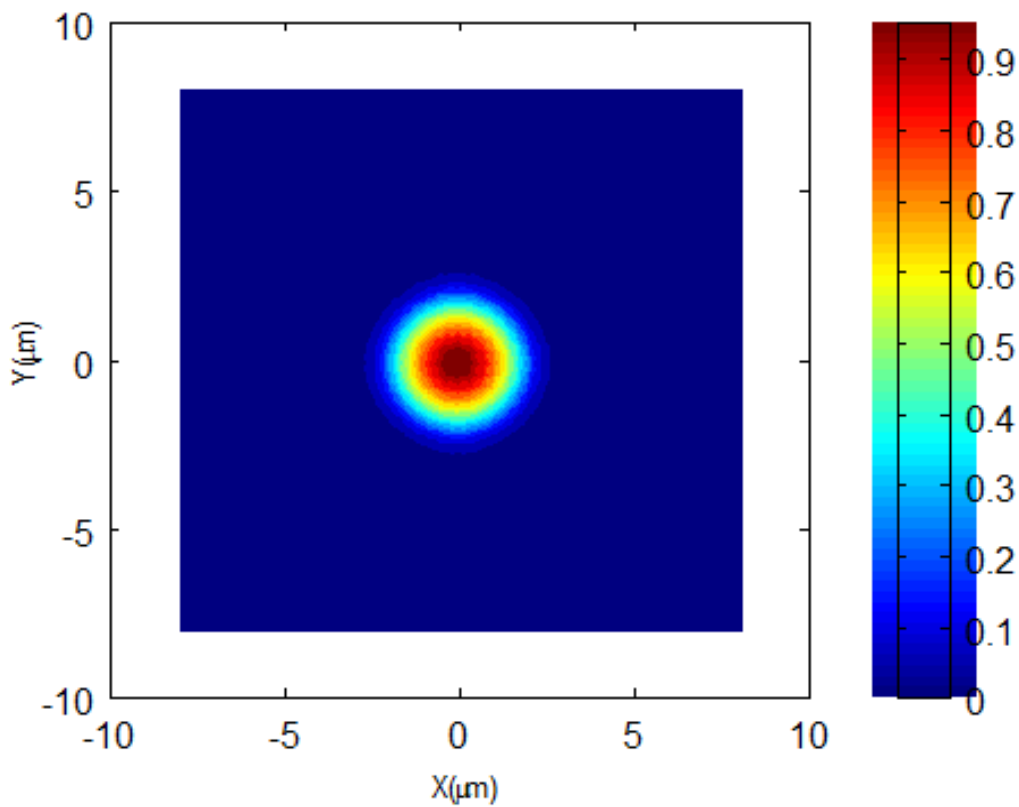


Fig. 5.18. Distribución de campo para la PCF hexagonal a 1,55 micras

El confinamiento del campo observado en la anterior figura viene asegurado por la presencia de un núcleo diferenciado de la cubierta. Si este núcleo se eliminase y en su lugar se mantuviese la cubierta, la fibra sería incapaz de condensar el campo entre los capilares hexagonales de aire y se difundiría hacia los bordes de la fibra, donde acabaría perdiéndose. En otras palabras, no existiría un modo guiado que propagase la luz a través de la fibra.

La primera diferencia notable entre la nueva F-PCF propuesta y la PCF usada en la comparación es ésta precisamente. Mientras que en la PCF clásica es necesario la inclusión de un núcleo diferenciado en el diseño de la misma para confinar el campo, en la F-PCF el diseño fractal de la misma permite la formación de un modo guiado que realice la propagación. La ventaja de esto es evidente e importantísima: el gradiente en los índices de refracción entre núcleo y cubierta en la PCF hexagonal puede inducir pérdidas en la transmisión, mientras que la nueva F-PCF no presenta dicho gradiente y, por consiguiente, permite eliminar dichas pérdidas en la propagación de los pulsos.

5.3.2 Dispersión

Una vez determinada las condiciones en las que el campo queda confinado en las fibras y aparece un modo guiado de propagación, se pueden aplicar para obtener los valores del parámetro de dispersión de cada una de las fibras. Dichas curvas ya se mostraron en sus apartados correspondientes cuando se realizaron las simulaciones de cada una de las PCFs, la fractal y la

clásica, en este punto se mostrarán reunidas en las mismas gráficas a fin de realizar la comparación de manera cómoda.

El principal parámetro relacionado con la dispersión es el índice efectivo de la fibra, que venía dado por el autovalor asociado al modo guiado al resolver las ecuaciones modales. La figura 5.19 muestra los resultados para ambas fibras.

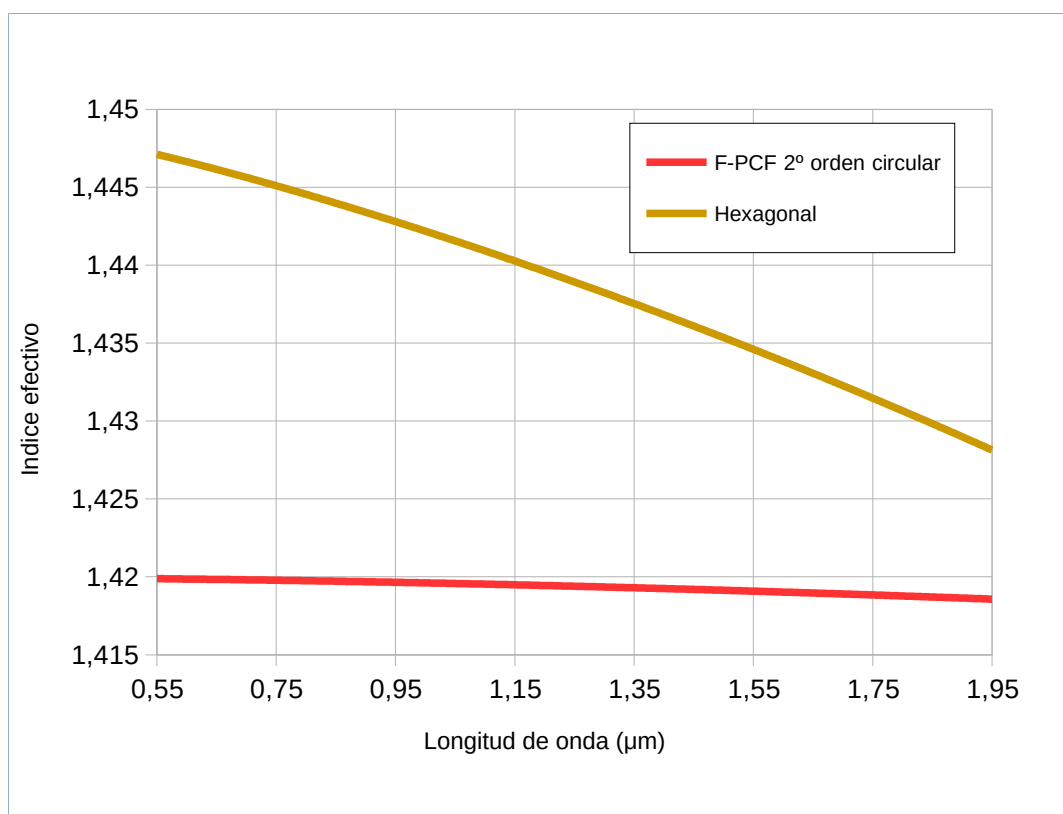


Fig. 5.19. Índices efectivos de la nueva F-PCF y la PCF hexagonal.

Es llamativa la fuerte variación que sufre el índice efectivo de la PCF hexagonal en el rango simulado comparada con la que sufre el de la nueva F-PCF. Ésta última presenta un comportamiento mucho más estable y monótono frente a la importante caída de la primera. Ésto se

debe a que el contraste de índices es mucho mayor en la PCF hexagonal que en la F-PCF, ya que está formada por tres materiales diferentes además de poseer un núcleo central. La nueva F-PCF, en cambio, presenta la ventaja de estar formada exclusivamente por el material de la cubierta y los capilares de aire, por lo que no existe ningún núcleo que pueda introducir perturbaciones adicionales en la propagación de los campos.

Pese a que la variación de la PCF hexagonal no es realmente grande en cuanto a valor en sí (inferior a un 2%), el factor determinante aquí es la curvatura que presenta la gráfica, ya que, como expresa la ecuación (1.55), el parámetro de dispersión depende de la segunda derivada del índice efectivo.

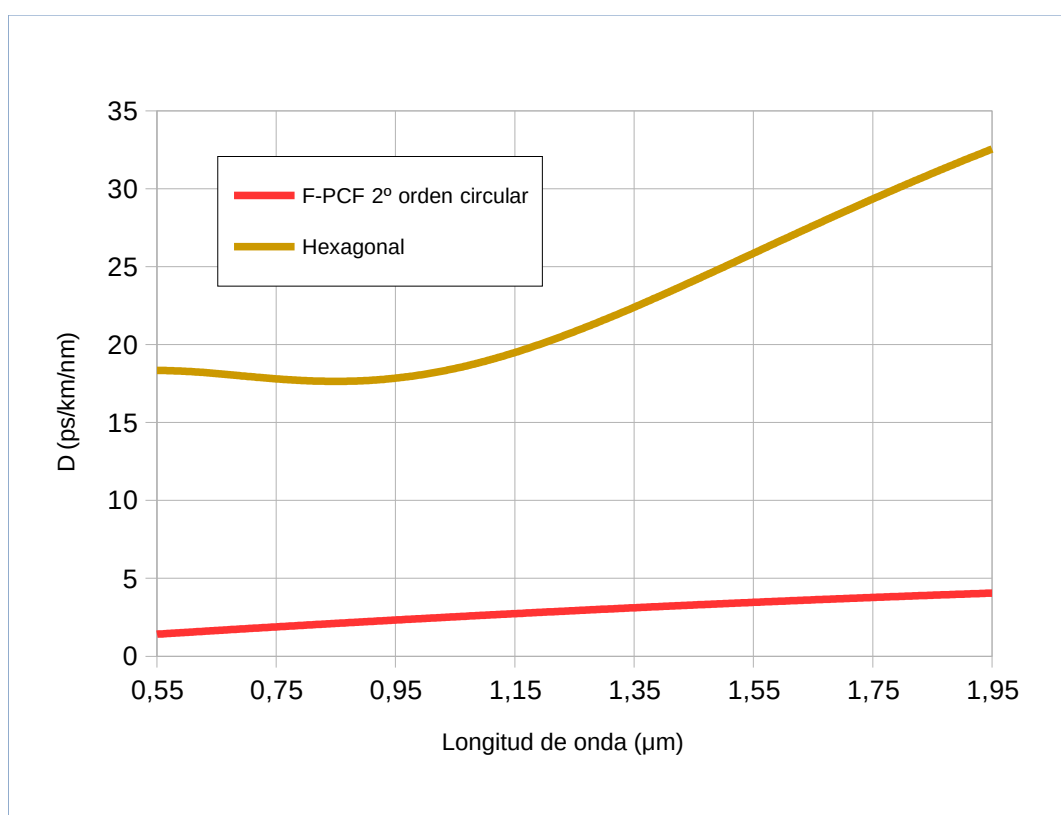


Fig. 5.20. Comparación de la dispersión para la PCF hexagonal y la nueva F-PCF

En la figura 5.20 se puede observar como la elevada curvatura del índice efectivo en la PCF hexagonal hace que el parámetro D tome valores muy altos para dicha fibra.

La nueva F-PCF, tal y como se comentó, presenta un comportamiento muy monótono para el índice efectivo, por lo que, como era de esperar debido a la escasa curvatura, los valores obtenidos de D son mucho más bajos en esta fibra.

A partir de la figura 5.20 se puede obtener la 5.21, que presenta los resultados de dispersión en función de β_2 para ambas fibras.

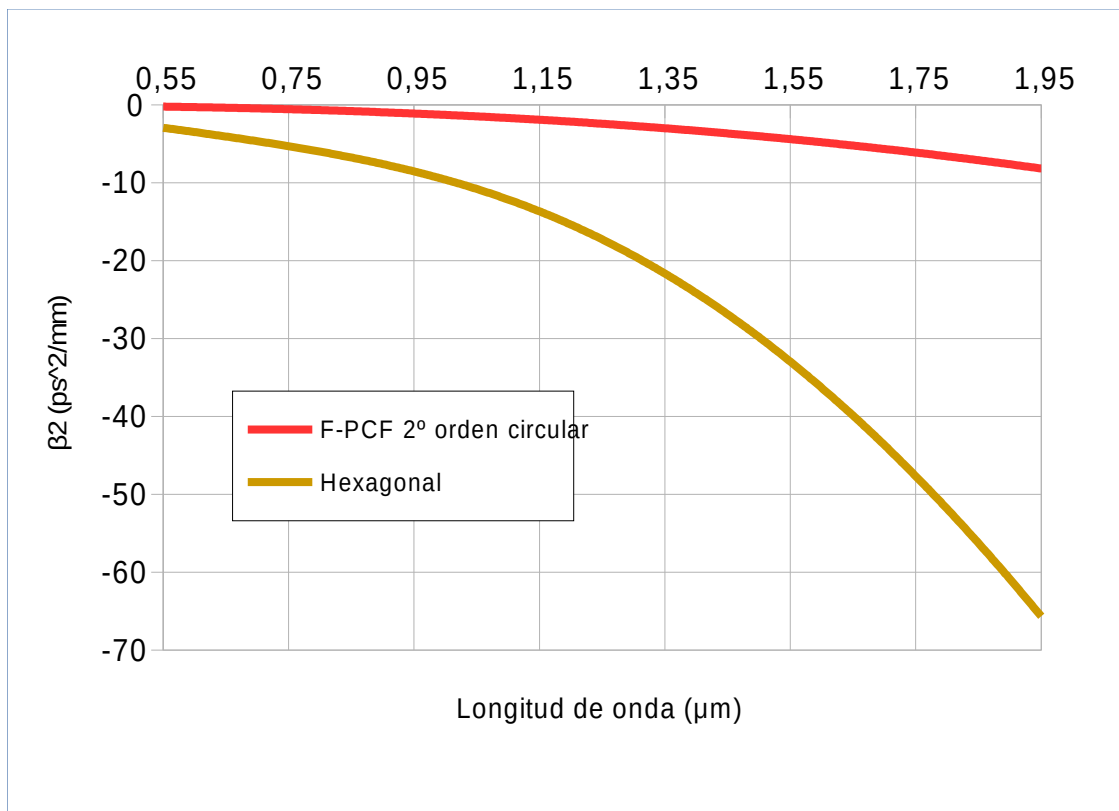


Fig. 5.21. Valores de β_2 para las dos fibras comparadas.

Queda patente al observar las anteriores gráficas que los efectos dispersivos de la nueva F-PCF propuesta en esta tesis son mucho menores que los de una PCF tradicional como la usada en la comparación.

Su estructura poco diferenciada, además de asegurar el confinamiento del campo sin núcleo, permite realizar transmisiones de pulsos sin que la dispersión de la fibra sea un factor determinante en la propagación de éstos.

5.3.3 No linealidad

En el anterior apartado se ha concluido la poca influencia de la dispersión en la nueva F-PCF propuesta. En el marco de trabajo definido para esta tesis (tanto a nivel temporal como espacial) el otro único efecto que puede inducir perturbaciones en la propagación de los pulsos a través de la fibra es el efecto Kerr no lineal. Será, pues, este el último paso en la comparación desarrollada a lo largo de este apartado.

Ya se mostraron las distribuciones de campo obtenidas para ambas fibras en las figuras 5.15 y 5.18. El diseño fractal de la nueva F-PCF aseguraba el confinamiento del campo sin necesidad de núcleo y permitiendo alcanzar altos valores de área efectiva. Los resultados de dicho parámetro se mostraron en los puntos correspondientes para cada una de las fibras. La figura 5.22 presenta dichos

valores reunidos en una única gráfica.

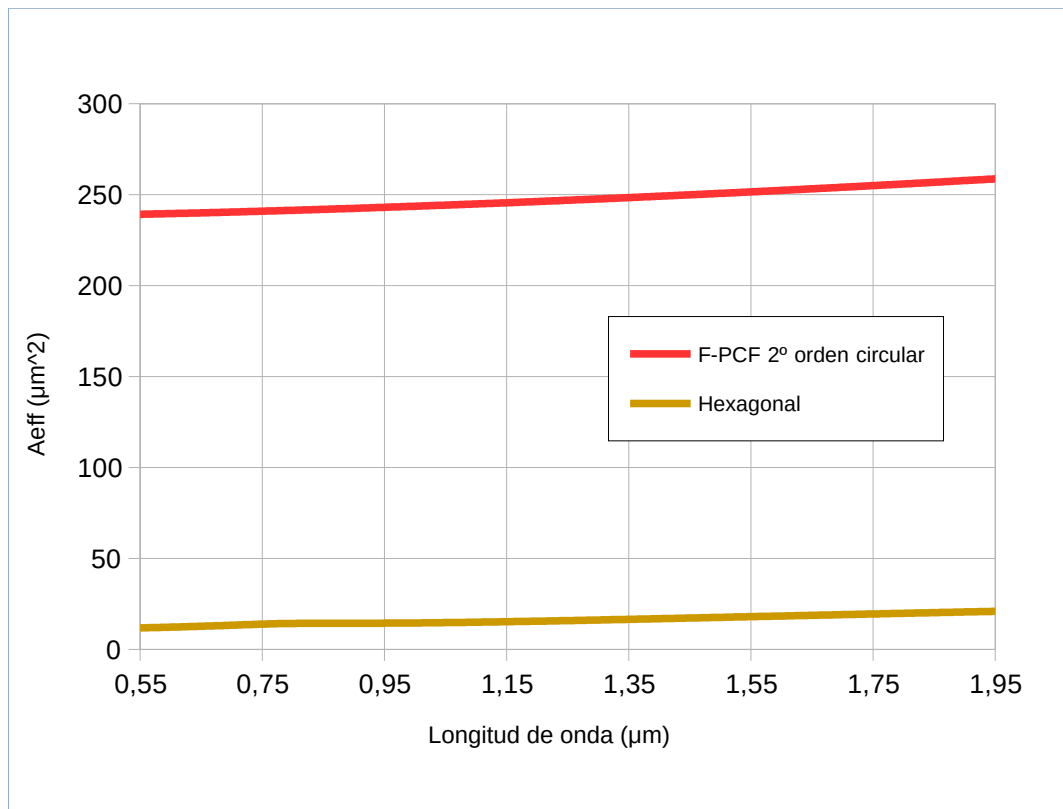


Fig. 5.22. Área efectiva de las dos PCFs simuladas.

Las dos curvas se caracterizan por la monotonía de sus resultados, pero el área efectiva conseguida en la nueva F-PCF es significativamente mayor que en la PCF hexagonal clásica. Mas concretamente, los datos de la F-PCF superan en un factor 10 los de la PCF hexagonal. Es lógico esperar, por tanto, un parámetro γ mucho más bajo para la fibra fractal propuesta que para la hexagonal.

La figura 5.23 muestra las curvas de γ para ambas fibras.

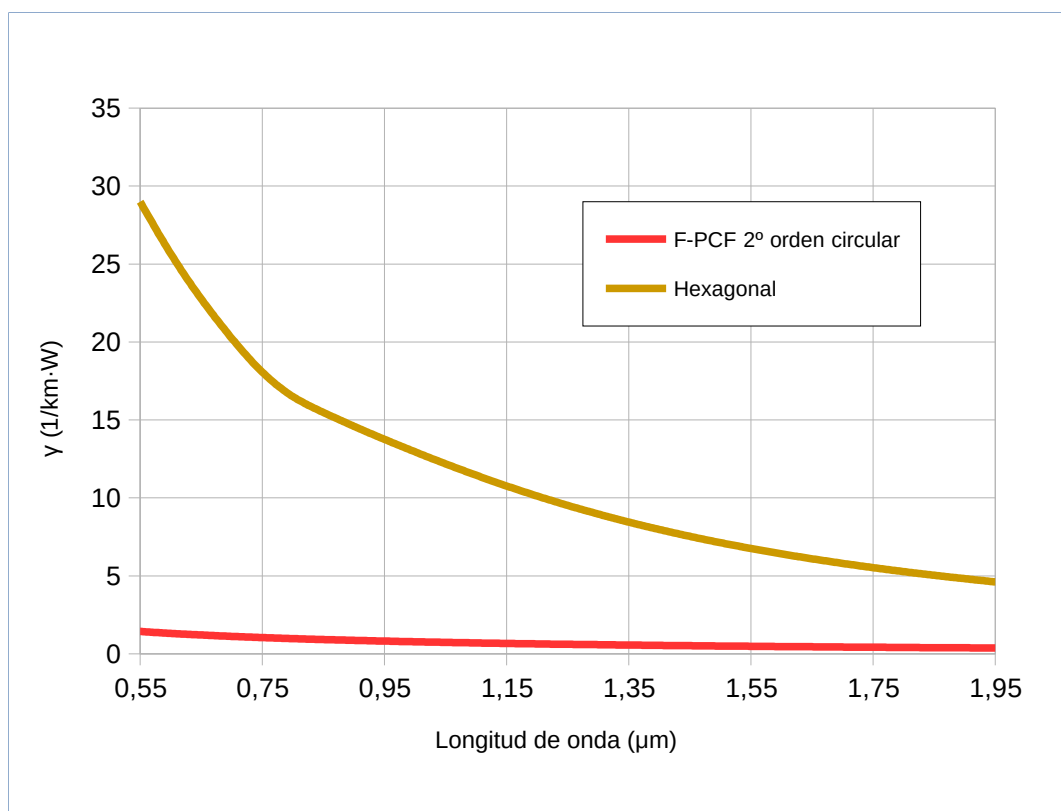


Fig 5.23. Parámetro no lineal para las dos PCFs.

Tal y como se había predicho, los valores de γ para la nueva F-PCF son muchísimo más bajos que los de la PCF hexagonal. Puede afirmarse, por consiguiente, que la estructura de la fibra propuesta permite también realizar la transmisión de pulsos con la menor influencia del efecto Kerr no lineal sobre los mismos.

5.3.4. Resumen de propiedades

Una vez realizadas las simulaciones y comparativas pertinentes, la conclusión alcanzada es que la nueva F-PCF propuesta en esta tesis presenta ventajas a efectos de propagación con baja distorsión del pulso. El alta área efectiva conseguida, unida a la ausencia de núcleo permite disminuir los valores de los parámetros γ y D respectivamente.

Este resultado de alta área efectiva permite su aplicación en la transmisión de señales de alta potencia. El que el material utilizado sea único asocia las pérdidas a dicho material, y no al gradiente entre núcleo y cubierta, con lo que las pérdidas globales en la propagación pueden considerarse prácticamente nulas.

Por último, la fabricación de la nueva F-PCF es simple, ya que los capilares, pese a tener estructura fractal, se forman mediante circunferencias, evitando la complejidad introducida en los otros diseños fractales por los agujeros cuadrados.

La F-PCF propuesta presenta, por tanto, ventajas en cuanto a la propagación sobre otras PCFs de corte clásico. Así mismo, su empleo puede ser diverso, siendo especialmente indicada para la transmisión de señales de alta potencia.

5.4 Propagación a través de la fibra propuesta

Una vez caracterizada la nueva F-PCF y expuestas sus ventajas frente a una PCF de tipo clásico, se realizará a continuación el análisis de la propagación realista de pulsos a través de la misma. A tal efecto, se considerará un pulso de 10 ps de ancho en una propagación de tipo solitónico como la expuesta en el punto 4.5.1. Tomando este ancho se evita tener que considerar efectos no lineales de órdenes superiores que pueden aparecer para pulsos por debajo de los pico

segundos.

El primer factor a tener en cuenta será la potencia transmitida en el pulso. Si se desea realizar una propagación de tipo solitónico, la potencia deberá cumplir la condición dada por la ecuación (4.41). La figura 5.24 muestra dicha potencia inicial que debe darse al pulso para que éste mantenga sus características a lo largo de toda la transmisión a través de la nueva F-PCF.

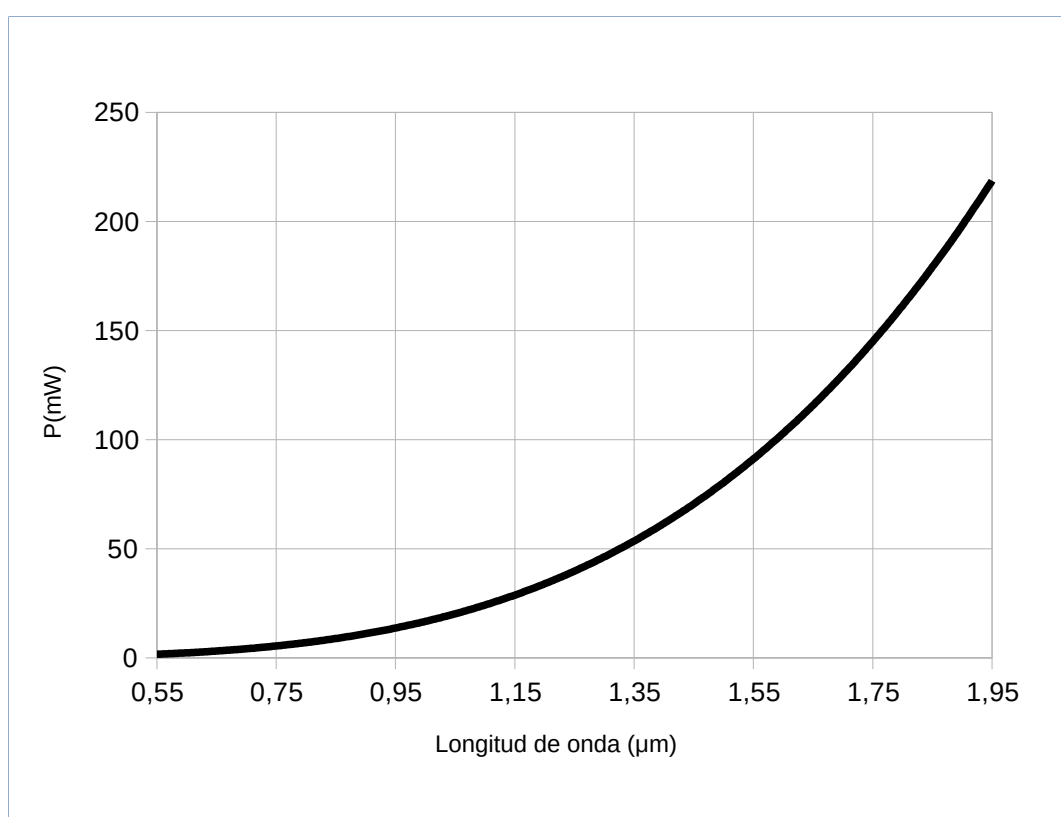


Fig. 5.24. Potencia inicial para un solitón en la nueva F-PCF.

A mayor longitud de onda, mayor será la potencia que se podrá transmitir con la nueva F-PCF. No obstante, conviene remarcar que dicha potencia se refiere al caso en que se desee realizar una propagación de tipo solitónico. Si no importa que el pulso mantenga su forma o la longitud L de

propagación es mucho menor que L_D y L_{NL} , podrá usarse una potencia mayor aún en la transmisión del pulso.

El siguiente paso será, lógicamente, estudiar la longitud de fibra L a la que se da la condición de propagación solitónica $L=L_D=L_{NL}$ para la nueva F-PCF.

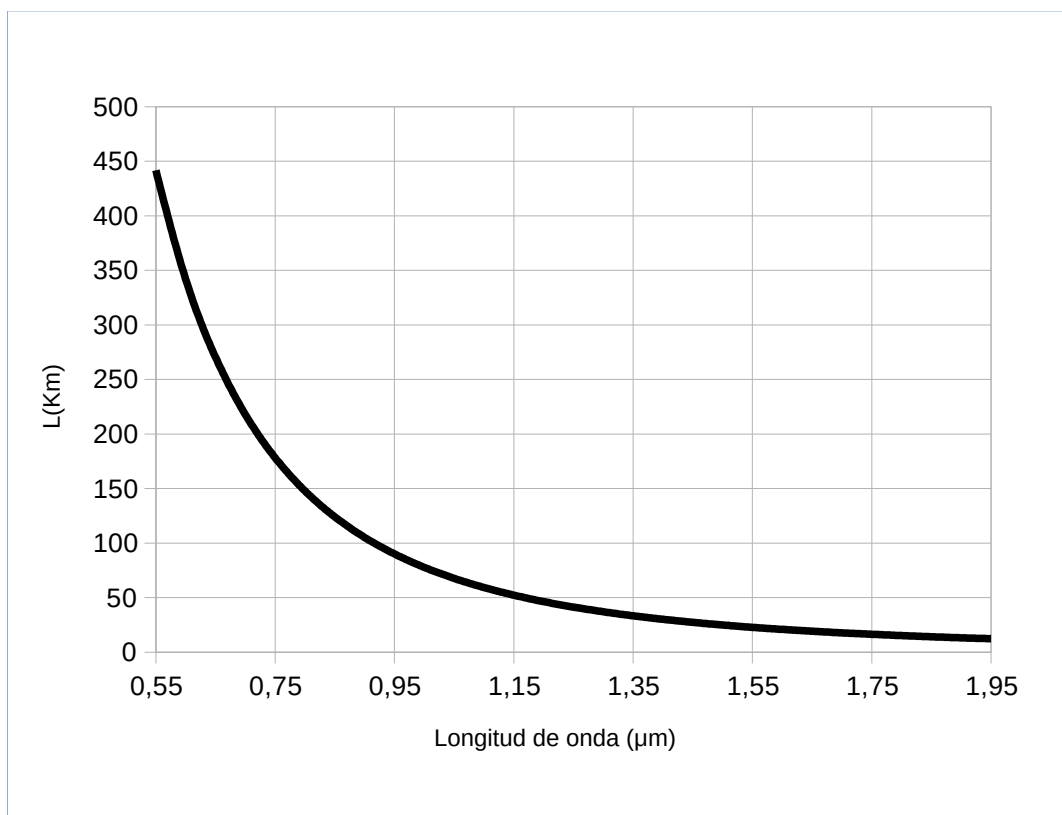


Fig. 5.25. Longitud de propagación solitónica en la nueva F-PCF.

Como era de esperar, a medida que aumenta la longitud de onda la longitud disminuye, pero crece la potencia que puede transmitir el pulso. Las dos siguientes gráficas muestran la comparativa entre la nueva F-PCF y la PCF hexagonal para estas dos características.

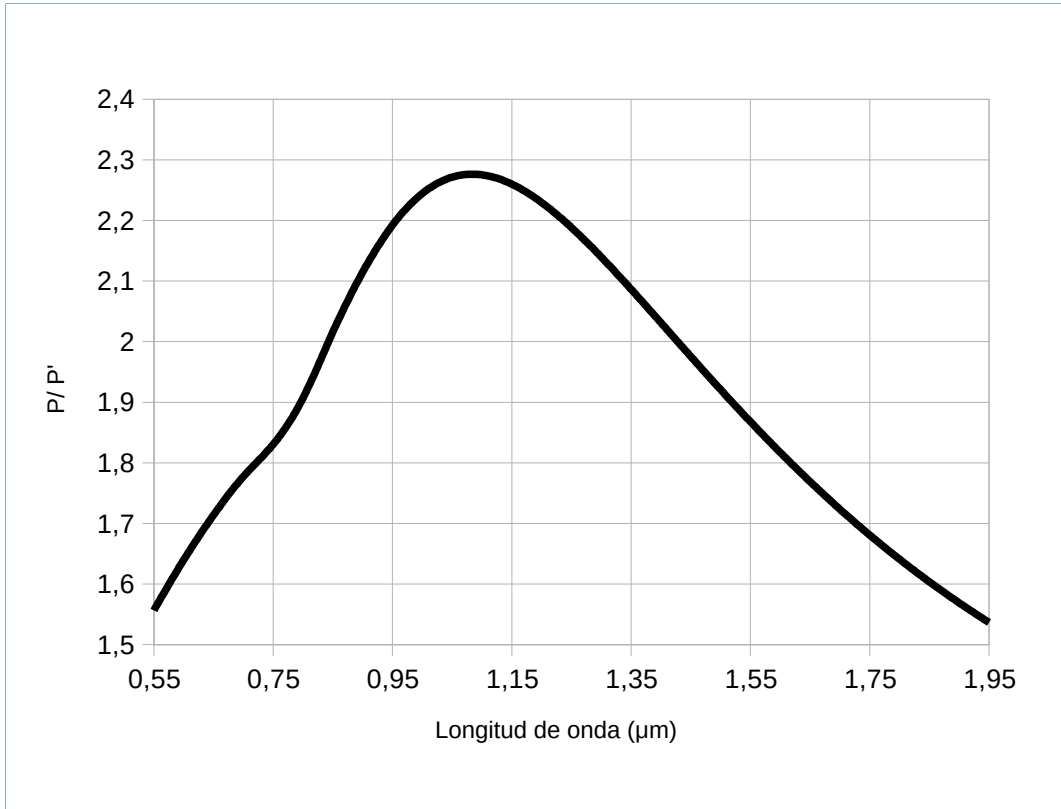


Fig. 5.26. Comparativa de potencias entre la F-PCF y la PCF hexagonal.

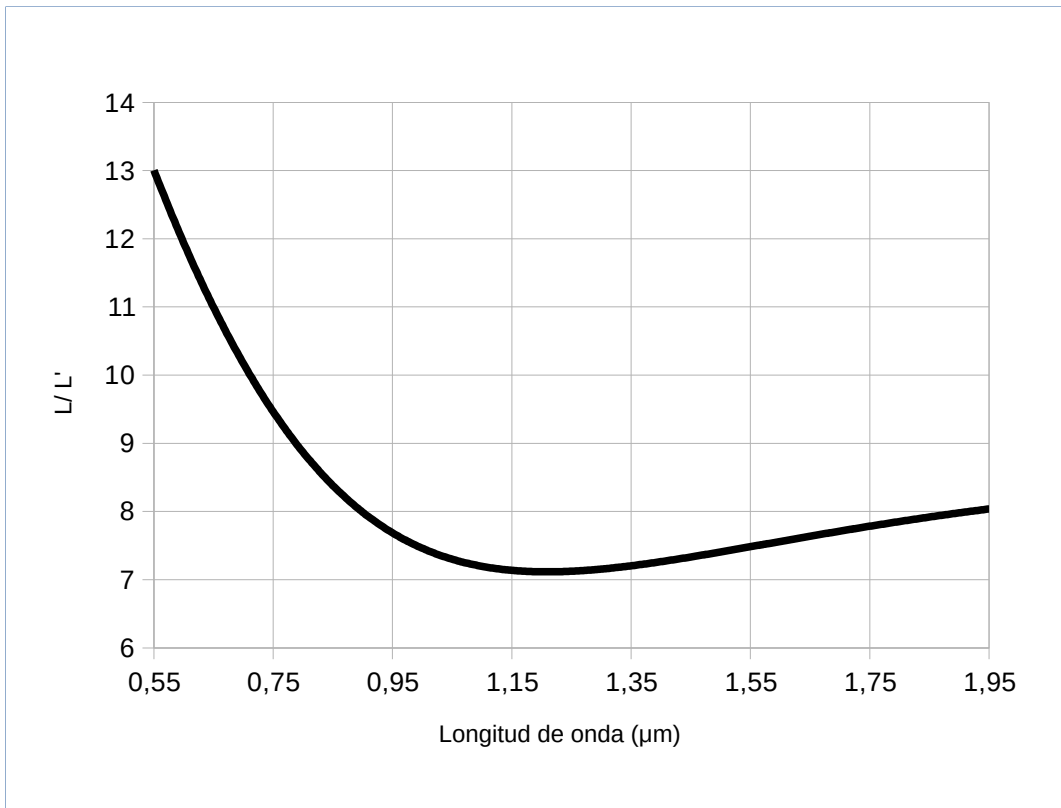


Fig. 5.27. Comparativa de longitudes de propagación solitónica.

La figura 5.26 muestra la proporción entre la potencia transmitida por la nueva F-PCF propuesta y la PCF hexagonal en condiciones solitónicas. Como se puede apreciar, la potencia transmitida por la nueva F-PCF es superior siempre a la de la PCF clásica, superándola en el menor de los casos en un 50% de potencia inicial. También se observa como existe un intervalo de longitudes de onda en que la potencia transmitida por la nueva F-PCF es más del doble que en la PCF hexagonal

En cuanto a la proporción de longitudes de propagación solitónica, en la figura 5.27 se muestra como la longitud asociada a la F-PCF vuelve a superar siempre a la de la PCF clásica como mínimo en siete veces. En cualquier caso, para realizar una propagación de tales dimensiones sería necesario realizar un estudio previo de las pérdidas asociadas, algo que escapa de los objetivos de la presente tesis.

La interpretación que cabe, por tanto, extraer de esta última gráfica es que los efectos tanto lineales como no lineales no serán significativos cuando se realicen propagaciones en distancias cortas como las estudiadas en el presente trabajo.

Por último, se realizó una propagación de tipo solitónico de un pulso de 10 ps de ancho y longitud de onda de trabajo 1,5 micras. La fibra simulada se supuso de 100 metros, dividiéndose en 1000 intervalos espaciales, y se tomaron 1024 puntos de discretización temporal.

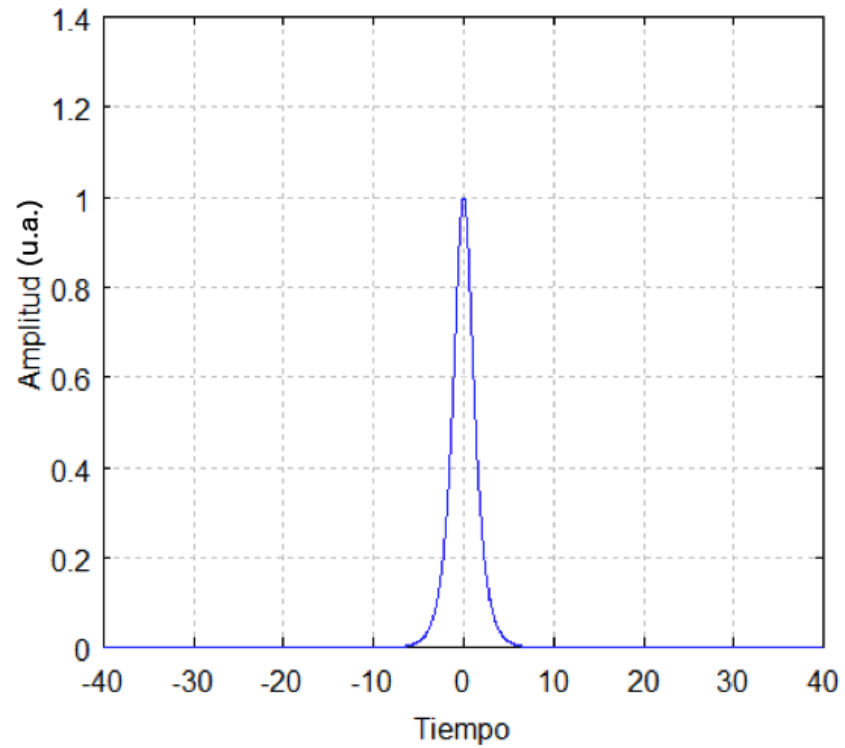


Fig. 5.28. Pulsos de entrada y salida en la simulación de propagación a través de la F-PCF

En la figura 5.28 se puede observar que, como era de esperar, los pulsos de entrada y salida se solapan totalmente, ya que el pulso no se deforma durante la propagación.

Conclusiones

El objetivo de la presente tesis, como su nombre indica, es contribuir a la mejora del estudio de la transmisión de información a través de fibras ópticas. A tal efecto, se han realizado mejoras en las técnicas numéricas de caracterización modal y propagación a través de la fibra. Estas nuevas implementaciones pueden aplicarse al análisis de una fibra óptica cualquiera sin importar su diseño, no obstante, una vez planteadas se han aplicado al estudio concreto de PCFs, ya que son éstas las fibras que están concentrando la mayor parte de la atención en los últimos años. Partiendo de esta base, se ha propuesto, además, una nueva PCF basada en un diseño fractal que combina las propiedades de las PCFs con las de dichos objetos geométricos.

Son, pues, tres los ejes innovadores sobre los que se apoya el presente trabajo. Dos de ellos se refieren a técnicas numéricas, habiéndose partido de algoritmos clásicos para plantear nuevas

implementaciones de los mismos que permiten obtener un mayor rendimiento en su aplicación, tanto a nivel de precisión como de coste computacional. La tercera aportación es de carácter más técnico, ya que la nueva PCF basada en diseño fractal que se propone presenta unas propiedades muy concretas que permiten aplicarla a campos específicos como el citado de las telecomunicaciones e incluso la medicina, entre otros.

A continuación se presentarán las principales conclusiones y contribuciones en cada uno de los anteriores ejes expuestos. Por último, se plantearán una serie de futuras líneas de investigación a desarrollar a partir de los resultados obtenidos en la presente tesis.

Comenzando con la caracterización de fibras mediante las ecuaciones de análisis modal, las principales aportaciones fueron:

1.- Búsqueda de la base bibliográfica teórica sobre las ecuaciones de Helmholtz de análisis modal para establecer el marco teórico de trabajo.

2.- Revisión bibliográfica en torno a las principales técnicas numéricas de resolución de las ecuaciones de análisis modal a fin de seleccionar las más empleadas por su rendimiento.

3.- Puesta a punto de un nuevo esquema de diferencias finitas centradas de orden superior para la resolución de las ecuaciones del problema.

4.- Validación del nuevo método propuesto utilizando el análisis de una fibra de salto de índice de solución analítica es conocida.

5.- Comparativa entre el nuevo método y el método espectral basado en la transformada de Fourier mediante la caracterización de la fibra de salto de índice y una PCF de diseño hexagonal previamente estudiada en la bibliografía.

6.- El nuevo método de diferencias finitas centradas presenta una mayor precisión con un menor coste computacional, por lo que permite alcanzar soluciones más fiables en menos tiempo que el método espectral de Fourier.

En cuanto al estudio de la propagación de pulsos a través de una fibra óptica, las contribuciones han sido:

1.- Revisión bibliográfica teórica sobre el origen y planteamiento de la ecuación de propagación para establecer el marco teórico de trabajo.

2.- Presentación de las principales técnicas numéricas de resolución de la ecuación de propagación encontradas en la literatura a fin de seleccionar las más empleadas por sus rendimientos.

3.- Implementación de un nuevo esquema Split-Step de integración de la ecuación de propagación, que combina las técnicas espectrales y de diferencias finitas.

4.- Validación del nuevo esquema mediante la resolución de una propagación con solución analítica conocida.

5.- Comparativa entre los diferentes esquemas de integración Split-Step propuestos para integrar la ecuación de propagación.

6.- El nuevo esquema propuesto de diferencias finitas presenta una precisión mayor que los métodos puramente espectrales, utilizando mucho menos tiempo de cómputo.

Por último, la propuesta de la nueva PCF basada en un diseño fractal se articula en torno a los siguientes puntos:

1.- Puesta al día bibliográfica sobre los diferentes tipos de PCFs así como sobre sus aplicaciones.

2.- Análisis del fractal de Sierpinski y su generación para diferentes órdenes a fin de diseñar una nueva PCF basada en dicha geometría.

3.- Caracterización de la nueva F-PCF mediante la técnica de diferencias finitas de órdenes superiores propuesta anteriormente en esta tesis.

4.- Determinación de los parámetros característicos (β_2 y γ) de la nueva F-PCF, comparándolos con los de una PCF clásica de diseño hexagonal.

5.- Análisis de las numerosas ventajas de la nueva F-PCF en función de sus propiedades lineales como no lineales.

6.- Análisis de la nueva F-PCF a nivel de propagación mediante el nuevo esquema de diferencias finitas propuesto.

7.- Comparativa entre la F-PCF propuesta y una PCF clásica con diseño hexagonal a en cuanto a las características de propagación.

8.- Se han determinado, para la nueva F-PCF, la potencia transmitida y longitud característica de propagación, observándose ventajas notables en comparación con otras fibras.

9.- La nueva F-PCF presenta una alta área efectiva, que le permite transmitir grandes potencias.

10.- La nueva F-PCF presenta bajos efectos dispersivos, y no lineales lo cual permite realizar propagaciones en las que los pulsos presenten poca deformación..

Partiendo de estos resultados se pueden proponer como futuras líneas de investigación las siguientes:

- 1.- Planteamiento de las ecuaciones de análisis modal en un sistema de coordenadas cilíndricas, y aplicación de las diferencias finitas centradas para su resolución.
- 2.- Adaptación de los operadores de diferencias finitas para ser usados con un mallado no uniforme en la caracterización de la fibra.
- 3.- Implementación de diferencias finitas centradas de órdenes superiores en el nuevo esquema Split-Step propuesto para la resolución de la ecuación de propagación.
- 4.- Aplicación de mallados adaptativos en la resolución de la ecuación de propagación con el nuevo esquema de integración propuesto.
- 5.- Análisis de las pérdidas en la nueva F-PCF propuesta.
- 6.- Estudio de la influencia del tamaño y distancia entre los agujeros de aire en las características de la nueva F-PCF.
- 7.- Búsqueda de nuevos diseños fractales que potencien o generen nuevos efectos en su aplicación como PCFs.

Apéndice

En este apéndice se llevará a cabo una revisión de la resolución analítica de la propagación de una onda luminosa a través de una fibra óptica de salto de índice. Dicho tipo de fibra se empleó en el capítulo tercero para verificar la validez del método numérico de caracterización propuesto, ya que los datos experimentales deben validarse siempre, en primera instancia, mediante datos de tipo teórico. Se desarrollará a partir de aquí el tratamiento matemático para alcanzar dicha solución analítica.

En la figura A.1 se observa el corte transversal de una fibra de salto de índice y otra de índice gradual. En principio, la apariencia de ambas es similar, pero en la parte inferior de la figura puede apreciarse cómo varía el índice de refracción en el núcleo y el por qué de sus nombres. En una fibra de salto de índice se produce un salto brusco entre el material de la cubierta y el del

núcleo, mientras que en una gradual el índice del núcleo varía lentamente hasta alcanzar un valor máximo justo en el centro.

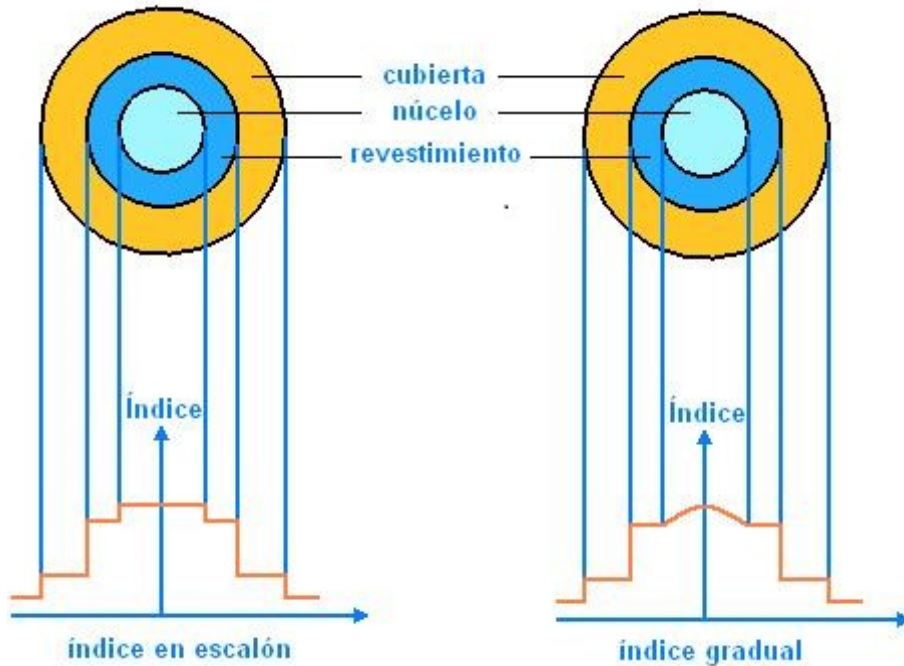


Fig. A.1. Corte transversal de una fibra óptica básica. Tipos salto de índice e índice gradual.

Resulta obvio a partir de la gráfica, que el sistema de coordenadas ideal para tratar matemáticamente una fibra de salto de índice es el cilíndrico. Dicha fibra presenta una clara simetría longitudinal que se asocia al eje Z, mientras que el corte transversal se adapta perfectamente a una descripción polar.

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \operatorname{sen}(\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Otro factor a tener en cuenta es que los campos en el interior de la fibra pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0(r, \varphi) e^{-j(\beta z - \omega t)} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0(r, \varphi) e^{-j(\beta z - \omega t)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde β es la constante de propagación de la onda en la fibra óptica.

Tomando como partida las ecuaciones de Maxwell y aplicando las dos condiciones anteriores se llega a:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + j r \beta E_\varphi \right) = -j \omega \mu H_r \quad (\text{A.3})$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial r} + j \beta E_r = -j \omega \mu H_\varphi \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = -j \omega \mu H_z \quad (\text{A.5})$$

para el campo eléctrico y

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + j r \beta H_\varphi \right) = -j \omega \mu E_r \quad (\text{A.6})$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} + j \beta H_r = -j \omega \mu E_\varphi \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) = -j \omega \mu E_z \quad (\text{A.8})$$

para el magnético.

Realizando las correspondientes transformaciones algebraicas, es posible expresar las componentes polares de los campos en función de las longitudinales:

$$E_r = -\frac{j}{s^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \omega \frac{\mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$E_\varphi = -\frac{j}{s^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$H_r = -\frac{j}{s^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \omega \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$H_\varphi = -\frac{j}{s^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \quad (\text{A.12})$$

donde

$$d^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2 = k^2 - \beta^2 \quad (\text{A.13})$$

Si ahora se sustituyen (A.11) y (A.12) en (A.8) se llega a la ecuación de onda expresada en coordenadas cilíndricas en la formulación de campo eléctrico

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + q^2 E_z = 0 \quad (\text{A.14})$$

pudiéndose obtener la correspondiente a campo magnético se se realizan las mismas operaciones con las ecuaciones (A.9) y (A.10)

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + q^2 E_z = 0 \quad (\text{A.15})$$

Como se puede apreciar, los campos aparecen desacoplados entre sí. Además, una vez resuelta la componente Z de los campos, bastará con usar el juego de ecuaciones (A-9)-(A.12) para obtener el resto de componentes.

Si se escoge trabajar en la formulación de campo eléctrico del problema dada por la ecuación (A.14), lo más inmediato será aplicar la técnica de separación de variables en su resolución:

$$E_z = C \cdot R(r) \Phi(\varphi) e^{-j(\beta z - \omega t)} \quad (\text{A.16})$$

donde C es una constante arbitraria.

Como la sección de la fibra es circular y el perfil de índice presenta simetría radial, la componente radial del campo ha de presentar periodicidad en su solución. Es decir, el campo debe ser el mismo cada múltiplo de 2π . Por tanto

$$\Phi(\varphi) = e^{j\sigma\varphi} \quad (\text{A.17})$$

donde σ debe ser un número entero positivo o negativo, lo cual da lugar a la aparición de los modos de propagación.

Si sustituimos (A.16) y (A.17) en la ecuación (A.14) se llega a

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(q^2 - \frac{\sigma^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{A.18})$$

La ecuación diferencial obtenida es la ecuación de Bessel, cuyas soluciones son de sobra conocidas. Las condiciones de contorno implican que el campo sea finito en el núcleo y que tienda a cero justo en el centro, así mismo también deberá tender a cero en la cubierta cuando $r \rightarrow \infty$.

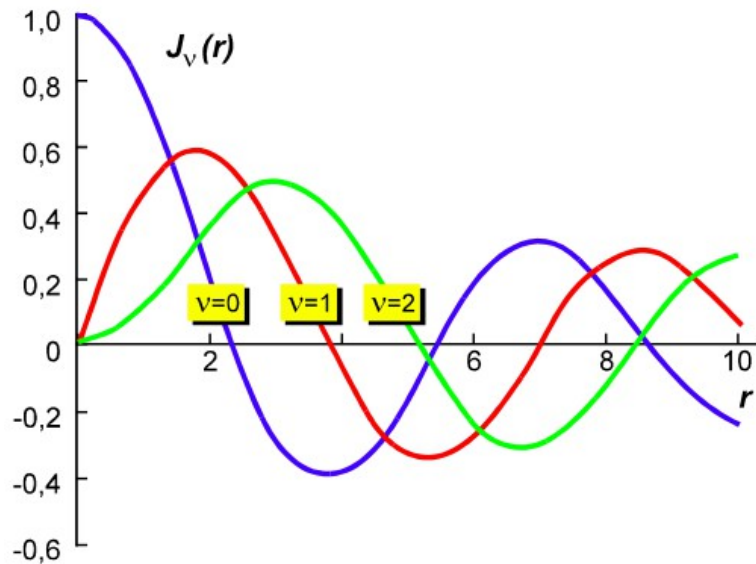


Fig. A.2. Funciones de Bessel de primera clase.

Aplicando estas condiciones para distancias $r < a$ (donde a es el radio del núcleo), las soluciones de (A.18) serán las funciones de Bessel de primera clase y orden σ .

$$E_z(r < a) = A J_\sigma(ur) e^{j\sigma\varphi} e^{-j(\beta z - \omega t)} \quad (\text{A.19})$$

$$H_z(r < a) = B J_\sigma(ur) e^{j\sigma\varphi} e^{-j(\beta z - \omega t)} \quad (\text{A.20})$$

donde A y B son constantes arbitrarias y

$$u = \sqrt{k_1^2 - \beta^2} = \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2} \quad (\text{A.21})$$

Para distancias $r > a$ superiores al núcleo las soluciones obtenidas son las funciones de Bessel de segunda clase

$$E_z(r > a) = C K_\sigma(wr) e^{j\sigma\varphi} e^{-j(\beta z - \omega t)} \quad (\text{A.22})$$

$$H_z(r > a) = D K_\sigma(wr) e^{j\sigma\varphi} e^{-j(\beta z - \omega t)} \quad (\text{A.23})$$

donde

$$w = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2} \quad (\text{A.24})$$

El valor de β debe estar comprendido entre los de las constantes k_1 y k_2 de ambos medios. Su deducción hará a partir de la ecuación de análisis modal, y normalmente será necesario aplicar métodos numéricos en su búsqueda.

$$k_1 \leq \beta \leq k_2 \quad (\text{A.25})$$

Si se aplican condiciones de contorno a la ecuación de análisis modal, suponiendo la existencia de un salto en los índices del núcleo y la cubierta, se puede llegar a las siguientes ecuaciones de autovalores correspondientes a la formulación de campo eléctrico y magnético respectivamente:

$$\frac{J_1(ua)}{uJ_0(ua)} + \frac{K_1(wa)}{wK_0(wa)} = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{k_1^2 J_1(ua)}{uJ_0(ua)} + \frac{k_2^2 K_1(wa)}{wK_0(wa)} = 0 \quad (\text{A.27})$$

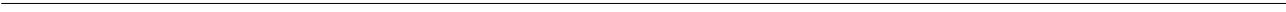
donde $r=a$ es el radio del núcleo y

$$q^2 = u^2 = k^2 n_1^2 - \beta^2 = k_1^2 - \beta^2 \quad (\text{A.28})$$

$$w^2 = \beta^2 - k_2^2 \quad (\text{A.29})$$

Los resultados obtenidos concretan los valores posibles de β aún más que la expresión (A.25), ya que establecen valores discretos dentro del intervalo aceptado. Cada una de las soluciones estará asociada a uno de los modos de propagación de los campos a través de la fibra de salto de índice estudiada. Éstos, en una fibra real, serán híbridos excepto la solución correspondiente al primer punto de corte de la función de Bessel, el modo fundamental.

Bibliografía



Capítulo 1

- [1] Tamir, Theodor (ed.) *Guided-Wave Optoelectronics*. Springer-Verlag, 1988.
- [2] Marcuse, D. Solution of the Vector Wave Equation for General Dielectric Waveguides by the Galerkin Method. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 28, (1992), 459465.
- [3] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and M. N. Islam. *Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers*. *Phys. Rev. Lett.*, 45:1095, 1980.
- [4] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, London, 2001)
- [5] G. P. Agrawal, in *Supercontinuum Laser Source*, R. R. Alfano, de. (Springer-Verlag, Heilderberg, 1989), Cap 3.
- [6] H. A. Haus, *Waves and Fields in Optoelectronics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984), Cap. 10.
- [7] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953),

Cap. 9.

[8] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, London, 2001), Cap. 2.

[9] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, London, 2001), Ap. B.

[10] P. Yeh, A. Yariv, E. Marom, *J. Opt. Soc. Am.* 68, 1196 (1978).

[11] J.C. Knight, T.A. Birks, P.St.J. Russell, D.M. Atkin, *Opt. Lett.* 21, 1547 (1996).

[12] R.F. Cregan, B.J. Mangan, J.C. Knight, T.A. Birks, P.S. Russell, P.J. Roberts, D.C. Allan, *Science* 285, 1537 (1999).

[13] J.C. Knight, J. Broeng, T.A. Birks, P.S. Russel, *Science* 282, 1476 (1998).

[14] P.St. Russel, *Science* 299, 358 (2003).

[15] L. Dong, J. Li, and X. Peng, “Bend-resistant fundamental mode operation in ytterbium-doped leakage channel fibers with effective areas up to 3160m²,” *Opt. Express* **14**, 11512–11519 (2006).

[16] S. Olyaeaa, M. Sadeghib, and F. Taghipour. “Design of Low-Dispersion Fractal Photonic Crystal Fiber” *International Journal of Optics and Photonics (IJOP)* Vol. 6, No. 1, Winter-Spring, 2012

Capítulo 2

- [1] William F. Ames, *Numerical Method for Partial Differential Equations*, Section 1.6. Academic Press, New York, 1977
- [2] Golub, Gene H.; Van Loan, Charles F. (1996). *Matrix Computations* (3rd ed.). Baltimore: Johns Hopkins
- [3] Gilbert, John R.; Moler, Cleve; Schreiber, Robert (1992). "Sparse matrices in MATLAB: Design and Implementation". *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **13** (1): 333–356
- [4] Cooley, James W.; Tukey, John W. (1965). "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series". *Math. Comput.* **19** (90): 297–301
- [5] W. E. Arnoldi, "The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem," *Quarterly of Applied Mathematics*, volume 9, pages 17–29, 1951
- [6] R.S. Lehoucq, D.C. Sorensen, and C. Yang, ARPACK users' guide: Solution of large scale

eigenvalue problems with implicitly restarted arnoldi methods, SIAM, Philadelphia, 1998.

[7] Rose M. Joseph and Allen Taflove. FDTD Maxwell's Equations Models for Nonlinear Electrodynamic and Optics, IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION. VOL 45, No 3, March 1997

[8] Takefumi Namiki. A New FDTD Algorithm Based on Alternating-Direction Implicit Method. IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES, VOL. 47, NO. 10, OCTOBER 1999

[9] Min Qiu. Analysis Of Guided Modes In Photonic Crystal Fibers Using The Finite-Difference Time-Domain Method. MICROWAVE AND OPTICAL TECHNOLOGY LETTERS / Vol. 30, No. 5, September 5 2001

[10] Zhaoming Zhu and Thomas G. Brown. Full-vectorial finite-difference analysis of microstructured optical fibers. OPTICS EXPRESS / Vol. 10, No. 17 / 2002

[11] G.P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics. Academic Press, 3a ed., 2001.

[12] E.H. Twizell, A.G. Bratsos and J.C. Newby, "A Finite-Difference Method for Solving the Cubic Schrödinger Equation," Mathematics and Computers in Simulation, vol. 43, no. 1, pp. 67–75, 1997.

[13] Magnus, W. (1954). "On the exponential solution of differential equations for a linear operator". *Communications on Pure and Applied Mathematics* 7 (4): 649–673

[14] Bhatia, R. (1997). *Matrix Analysis*. Graduate Texts in Mathematics 169. Springer.

Capítulo 3

- [1] Fornberg, Bengt (1988), "Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids", *Mathematics of Computation* **51** (184): 699–706
- [2] Press, W. H. (2007). *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press.
- [3] Lyons, R. G. (2010). *Understanding digital signal processing*. Pearson Education.
- [4] Trefethen, L. N. (2000). *Spectral methods in MATLAB* (Vol. 10). Siam.
- [5] S. G. Johnson and J. D. Joannopoulos, "Block-iterative frequency-domain methods for Maxwell's equations in a planewave basis," *Opt. Express* **8**, 173-190 (2001)
- [6] S. Dey and R. Mittra, "A conformal finite-difference time-domain technique for modeling cylindrical dielectric resonators," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47**, 1717-1739 (1999).
- [7] Arriaga, J., Knight, J. C., & Russell, P. S. J. (2004). Modeling the propagation of light in

photonic crystal fibers. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 189(1), 100-106.

[8] Rays, A. G., & Fibers, C. S. M. (1991). *Fiber Optics*.

[9] Hyndman, Rob J. Koehler, Anne B. (2006). "Another look at measures of forecast accuracy". *International Journal of Forecasting*: 679–688.

[10] Golub, Gene; Charles F. Van Loan (1996). *Matrix Computations – Third Edition*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press. p. 53.

[11] Z. Zhu and T. G. Brown, "Multipole analysis of hole-assisted optical fibers", *Opt. Commun.* (2002).

[12] Z. Zhu and T. G. Brown, *Opt. Express*, 10 (2002) 853-864.

[13] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, London, 2001)

[14] Chiang, K. S. (1986). Analysis of optical fibers by the effective-index method. *Applied optics*, 25(3), 348-354.

Capítulo 4

- [1] Magnus, W. (1954). "On the exponential solution of differential equations for a linear operator". *Communications on Pure and Applied Mathematics* 7 (4): 649–673
- [2] Yesim Yazici. Operator Splitting Methods For Differential Equations. Tesis. 2010.
- [3] A.A. Sagle & R.E. Walde, "Introduction to Lie Groups and Lie Algebras", Academic Press, New York, 1973.
- [4] Magnus, W. (1954). "On the exponential solution of differential equations for a linear operator". *Communications on Pure and Applied Mathematics* 7 (4): 649–673
- [5]. T. R. Taha and M. J. Ablowitz (1984). "Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation". *J. Comput. Phys*
- [7] Sinkin, O. V., Holzlöhner, R., Zweck, J., & Menyuk, C. R. (2003). Optimization of the split-step Fourier method in modeling optical-fiber communications systems. *Journal of lightwave*

technology, 21(1), 61.

[8] Alcaraz-Pelegrina, J. M., & Rodriguez-Garcia, P. (2011). Simulations of pulse propagation in optical fibers using graphics processor units. *Computer Physics Communications*, 182(7), 1414-1420.

[9] Yoshida, H. (1990). Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, 150(5), 262-268.

[10] J.A.C. Weideman and B.M. Herbst. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schroedinger equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, **23**, pp485-507 (1986)

[11] Instability of the split-step method for a signal with nonzero central frequency. T. I. Lakoba. *JOSA B*, Vol. 30, Issue 12, pp. 3260-3271 (2013)

[12] Instability analysis of the split-step Fourier method on the background of a soliton of the nonlinear Schrödinger equation. T. I. Lakoba. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, ISSN 0749-159X, Vol. 28, N° 2, 2012 , págs. 641-669

[13] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, London, 2001)

Capítulo 5

- [1] Sun, H. B., Matsuo, S., & Misawa, H. (1999). Three-dimensional photonic crystal structures achieved with two-photon-absorption photopolymerization of resin. *Applied Physics Letters*, 74, 786.
- [2] Monsoriu, J. A., Zapata-Rodríguez, C. J., Silvestre, E., & Furlan, W. D. (2005). Cantor-like fractal photonic crystal waveguides. *Optics communications*, 252(1), 46-51.
- [3] Wang, Z., Chong, Y. D., Joannopoulos, J. D., & Soljačić, M. (2008). Reflection-free one-way edge modes in a gyromagnetic photonic crystal. *Physical review letters*, 100(1), 013905.
- [4] Cerqueira Jr, S. A. (2010). Recent progress and novel applications of photonic crystal fibers. *Reports on Progress in Physics*, 73(2), 024401.
- [5] S. Olyaeae, M. Sadeghib, and F. Taghipoura *Design of Low-Dispersion Fractal Photonic Crystal Fiber* International Journal of Optics and Photonics (IJOP) Vol. 6, No. 1, Winter-Spring,

2012

- [6] Mandelbrot, Benoît B. (1983). *The fractal geometry of nature*. Macmillan.
- [7] Gouyet, Jean-François (1996). *Physics and fractal structures*. Paris/New York: Masson Springer
- [8] C. Larbi, T. Bensalah, T. Aguilu, A. Bouallegue, H. Baudrand. *Study of the "Sierpinski's Carpet" Fractal Planar Antenna by the Renormalisation Method*. International Journal Of Microwave And Optical Technology Vol. 2, No. 1, January 2007
- [9] Rahul Batra, P. L. Zade, Dipika Sagne. *Design and Implementation of Sierpinski Carpet Fractal Antenna for Wireless Communication*. International Journal of Scientific Research Engineering & Technology (IJSRET). Volume 1 Issue3 pp 043-047 July 2012
- [10] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science 2nd ed.* (N.Y., N.Y.: Springer Verlag, 2004)
- [11] Helmberg, Gilbert (2007). *Getting Acquainted With Fractals*. Walter de Gruyter. p. 46
- [12] J. Kigami. *Analysis on fractals*. Cambridge Tracts in Mathematics, 143, Cambridge University Press, Cambridge, 2001
- [13] H. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, *Fractals for the Classroom, Part One: Introduction to Fractals and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [14] H. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, *Chaos and Fractals*. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [15] Takeda, M. W., Kirihara, S., Miyamoto, Y., Sakoda, K., & Honda, K. (2004). Localization of electromagnetic waves in three-dimensional fractal cavities. *Physical review letters*, 92(9), 093902.
- [16] Kirihara, S., Takeda, M. W., Sakoda, K., Honda, K., & Miyamoto, Y. (2006). Strong localization of microwave in photonic fractals with Menger-sponge structure. *Journal of the European Ceramic Society*, 26(10), 1861-1864.
- [17] Takeda, M. W., Honda, K., & Sakoda, K. (2009, September). Integration of ceramic/epoxy

photonic fractals with localization of electromagnetic waves. In *Advances in Ceramic Coatings and Ceramic-Metal Systems: A Collection of Papers Presented at the 29th International Conference on Advanced Ceramics and Composites, January 23-28, 2005, Cocoa Beach, Florida, Ceramic Engineering and Science Proceedings* (Vol. 322, p. 361). Wiley. com.

[18] Russell, P. (2003). Photonic crystal fibers. *science*, 299(5605), 358-362.

[19] Bjarklev, A., Broeng, J., & Bjarklev, A. S. (2003). *Fabrication of Photonic Crystal Fibres* (pp. 115-130). Springer US.

