LECCIONES

DE

MECÁNICA

ESCRITAS

CON ARREGLO AL PROGRAMA DE ESTA MATERIA
PARA EL INGRESO EN EL CUERPO DE AYUDANTES DE OBRAS PÚBLICAS

POR EL AYUDANTE DEL CUERPO

D. CRISTOBAL DE AGUILAR

MADRID
IMPRENTA DE M. ROMERO, PRECIADOS, 1
1884

AL SR. D. JOSÉ GUILLEN DE LA CADENA

Sin su valioso conc..... y cariñosos consejos, no se hubiera publicado la presente obra. Cumple, pues, con uno de sus más gratos deberes al dedicársela, rogándole se digne aceptarla, su afectísimo amigo y seguro servidor

q. b. s. m.,

Cristobal de Aguilar.

PRÓLOGO

Una de las asignaturas que más dificultades presenta á los alumnos que estudian el segundo grupo para ingresar en el cuerpo de Ayudantes de Obras públicas, es la de Mecánica, por carecer de una obra que responda á las exigencias del programa de dicha asignatura, y cuyas teorías estén demostradas fundándose en los conocimientos de las matemáticas elementales que se les ha exigido.

A llenar este vacío, si bien muy incompletamente, tiende este trabajo, el cual puede ser perfectamente completado por otros con más autoridad y conocimientos, considerándome suficientemente recompensado si con él he podido facilitar en algo el estudio de esta materia á mis futuros compañeros.

LECCIONES DE MECÁNICA

I

Objeto y division de la Mecánica.

La Mecánica es la ciencia matemática que se ocupa del estudio del movimiento, así como de las fuerzas que lo producen y lo destruyen.

Se divide en tres partes, que son: *cinemática*, *estática* y *dinámica*.

La *cinemática* tiene por objeto el estudio del movimiento, haciendo abstraccion de las fuerzas que pueden producirlo; se consideran los cuerpos como figuras geométricas y deformables, no admitiendo en sus razonamientos más que cantidades geométricas.

La *estática* estudia las condiciones á que deben satisfacer las fuerzas para que los cuerpos estén en equilibrio. Se entiende por equilibrio el estado de un cuerpo sometido á la vez á la accion de varias fuerzas que se destruyen entre sí, y por consiguiente, que lo dejan en reposo si ya lo estaba; por ejemplo, un cuerpo que se tiene en la mano está en reposo, apesar de estar sometido á la accion de la gravedad, que tiende á hacerle descender, á causa de la accion que en sentido contrario recibe de la mano, que tiende á elevarlo.

La *dinámica* se ocupa de las leyes del movimiento, que producen las fuerzas, siendo en su consecuencia la *estática* un caso particular de la *dinámica.*

La *dinámica* se divide en *hidrostática* é *hidrodinámica.* La primera estudia el equilibrio de los fluidos y las presiones que ejercen sobre las superficies donde existen, y la *hidrodinámica* el movimiento de ellos, y recibiendo el nombre de *hidráulica* cuando se refiere á la conduccion ó elevacion de las aguas.

II

Definicion de materia, cuerpo y masa.

Se llama *materia* todo lo que puede impresionar á nuestros sentidos.

Cuerpo es toda porcion limitada de *materia;* se dividen en *simples* y *compuestos:* son *simples* aquellos en que no se ha podido encontrar más que una sola clase de sustancia, como el oro, el mercurio y el hidrógeno; y compuestos los que contienen diversos cuerpos simples, como el agua, el vidrio, etc.

Todo cuerpo es un agregado de otros más pequeños que reciben los nombres de *partículas*, *moléculas* y *átomos*.

Se llama *partículas* á las porciones de *materia* obtenidas de un cuerpo mediante la division mecánica; *moléculas*, las separadas por medios físicos; y designaremos por *átomos* á los últimos elementos, siempre indivisibles, obtenidos por reacciones químicas ó por causas físicas, obrando químicamente.

Masa es la cantidad de materia que contiene un cuerpo, ó la suma de sus átomos; pero esta definicion es la de ***masa física***, que debe distinguirse de la que entendemos por ***masa mecánica***, que podemos definir diciendo que es ***la relacion existente entre una fuerza constante y la aceleracion que esta fuerza produce***; de modo que dos masas serán, pues, iguales cuando en los mismos tiempos reciban de fuerzas iguales aceleraciones tambien iguales en sus velocidades. En el curso de estas lecciones podrán comprenderse estos conceptos que ahora adelantamos.

III

Estados de los cuerpos en la naturaleza.—Cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos.

Los cuerpos existen en la naturaleza en tres estados, que son: *sólido*, *líquido* y *gaseoso* ó ***aeriforme***.

Se dice que un cuerpo está en estado *sólido* cuando, teniendo una forma propia, ofrece cierta resistencia á la separacion de sus moléculas y puede ser sometido á la traccion, flexion y torsion.

El estado *líquido* de los cuerpos se distingue por la facilidad con que las moléculas resbalan unas sobre otras, y en virtud de ello se derraman por pequeñas aberturas en forma de hilos ó gotas, y además, en que los cuerpos en estado líquido carecen de forma propia, tomando siempre la de las vasijas que los contienen.

Los *cuerpos gaseosos* ó *aeriformes* son aquellos cuyas moléculas no se atraen al parecer mutuamente; son más móviles que las de los líquidos, y se hallan animadas de una fuerza de repulsion que tiende sin cesar á separarlas unas de otras.

IV

Propiedades generales de los cuerpos.—Extension.—Impenetrabilidad.—Divisibilidad.—Porosidad.—Compresibilidad.—Elasticidad.—Inercia.

Llámase *propiedades* en los cuerpos las diferentes maneras que tienen de impresionar nuestros sentidos.

Divídense en *generales* y *particulares*.

Se entiende por *propiedades generales de los cuerpos* las que se hallan en todos ellos, cualquiera que sea el estado en que estén, y *particulares* las que se hallan en determinadas sustancias ó en alguno de sus estados. Entre las *generales* figuran dos que constituyen la esencia de la materia, porque sin ellas no la podemos concebir; tales son la *extension* y la *impenetrabilidad*; en la misma categoría debemos colocar la *inercia*, y su consecuencia, la *movilidad*.

Extension.—Todo cuerpo ocupa necesariamente una porcion del espacio: en esto consiste la propiedad enunciada.

Impenetrabilidad.—Es una propiedad en virtud de la cual dos átomos no pueden ocupar un mismo espacio.

Divisibilidad.—Llámase *divisibilidad* la propiedad que tienen los cuerpos de poderse obtener de ellos otros más pequeños. Científicamente se concibe que la materia puede dividirse hasta el infinito, pero por los medios mecánicos se comprende que la divisibilidad tiene sus límites.

Porosidad.—Es la propiedad que tienen los cuerpos de poseer entre sus moléculas espacios vacíos de su propia materia. Estos espacios se denominan *poros:* son invisibles, mas su existencia se comprueba por los fenómenos de contraccion que manifiestan los cuerpos cuando desciende su temperatura ó cuando se les comprime.

Compresibilidad.—Se manifiesta por la disminucion de volúmen aparente que experimentan los cuerpos sometidos á la compresion: por efecto de ella las columnas de los grandes edificios se acortan, y las claves de las bóvedas y arcos descienden sensiblemente al quitar las cimbras, y en general los asientos que siempre hacen las construcciones. Varía esta propiedad segun el estado de los cuerpos, siendo muy notable en los gases, poco perceptible en los líquidos, y más que en éstos en los sólidos.

Elasticidad.—Es una propiedad en virtud de la cual las moléculas de los cuerpos, separadas mediante una causa cualquiera de su situacion de equilibrio, recobran sus posiciones primitivas, cuando deja de actuar la fuerza modificante. Puede ensayarse esta propiedad en los sólidos, por presion, flexion, traccion y torsion: al estudiarla, se observa que unos recobran su forma primitiva casi instantáneamente que deja de actuar la fuerza, y otros tardan más tiempo y otros no la recobran, y en virtud de esto se dividen los cuerpos en *elásticos* *de primero y de segundo órden* y en *cuerpos blandos ó no elásticos*: el marfil, el mármol y el acero se hallan comprendidos entre los primeros, la goma elástica en los segundos, y el plomo y la cera entre los últimos.

Los líquidos y los gases son perfectamente elásticos, pero existe un límite de elasticidad, pasado el cual los gases se liquidan y los sólidos se deforman ó se rompen. La elasticidad impone siempre una deformacion molecular, durante la cual ha sido vencida la fuerza de cohesion. Para probarlo se deja caer una esfera de marfil sobre un plano de mármol, y se observan dos fenómenos: primero, que si el plano estaba previamente untado de aceite, queda en él, despues del choque, una mancha circular, tanto mayor cuanto mayor es la violencia del choque; y segundo, que la esferilla se eleva casi á la misma altura de donde partió.

Los dos resultados indican que la esfera y el plano se han modificado, puesto que entre ambos no cabe más contacto que un punto, y tambien que despues del choque la cohesion ha hecho recobrar á las moléculas su posicion ordinaria.

Inercia.—Es la ineptitud de la materia para modificarse á sí misma. Suele enunciarse este principio general de la mecánica diciendo: *Un punto* material aislado no puede por sí mismo pasar del estado de reposo al de movimiento, ni puesto en movimiento modificarlo sin pasar al de reposo. No cabe una demostracion experimental directa de él, mas se ve que siempre los cuerpos tienden á conservar su estado de reposo, lo cual demuestra la inercia de la materia. La imposibilidad de moverse un cuerpo está conforme con la experiencia diaria: es de sentido comun que una roca permanecerá eternamente en su puesto si no la impulsan causas exteriores.

No parece tan evidente la segunda parte de la definicion, pues estamos acostumbrados á ver que todos los cuerpos caen y se detienen sobre la tierra, áun cuando se les haya comunicado una gran velocidad. Sin embargo, el raciocinio demuestra dos cosas: primera, que todos los cuerpos en movimiento sobre la tierra encuentran resistencias extrañas á ellos mismos, que concluyen por anular la fuerza que les ha impulsado: esas resistencias permanentes son el peso, el rozamiento de los medios por donde marchan, el de los puntos de suspension; segunda, que así como los cuerpos necesitan una fuerza extraña á ellos para moverse, del mismo modo han de exigir otras para modificar el movimiento adquirido: de admitir que los cuerpos tienen en sí mismos facultad para detenerse, deberíamos lógicamente aceptar que podian desplegar esa misma aptitud para salir del reposo, pues tanto para salir del reposo cómo para volver á él, se necesita desenvolver una fuerza.

V

Propiedades particulares de los cuerpos sólidos.—Tenacidad.—Ductilidad.—Dureza.—Maleabilidad.

Tenacidad.—Es la resistencia que oponen los cuerpos á ser divididos por traccion. Se ensaya esta propiedad reduciendo los cuerpos á varillas ó alambres, que despues de sujetos por un extremo son sometidos á la traccion mediante pesos conocidos colocados inferiormente en el otro extremo: al peso menor capaz de producir la rotura del sólido se denomina *coeficiente de tenacidad* ó *resistencia absoluta.*

Ductilidad.—Es la propiedad de cambiar de forma sin dividirse: suele tambien definirse diciendo que es la propiedad que tienen algunos cuerpos sólidos de poderse extender en hilos; mas esta cualidad es un caso particular de la definicion que hemos dado. Empléase para ensayar esta propiedad tres procedimientos: el del *martillo*, el *laminador* y el de la *hilera.* El calor aumenta la ductilidad de casi todos los cuerpos.

Maleabilidad.—Esta propiedad no es más que un caso particular de la anterior, y consiste en poderse extender el cuerpo en hojas por medio del martillo y del laminador.

Dureza.—Es la resistencia que ofrecen los cuerpos á ser rayados por otros. Un cuerpo es más duro que otro cuando no es rayado por él.

Fragilidad.—Es una propiedad en virtud de la cual ciertos cuerpos son fácilmente reducidos á polvo por el choque. La mayor parte de los cuerpos duros son frágiles, como se observa en el vidrio y el diamante. Cuando á la dureza acompaña la tenacidad, son los cuerpos ménos frágiles.

VI

Definicion de fuerza.—Punto de aplicacion, direccion é intensidad de la misma.

Se entiende por *fuerza* todo lo que puede producir un movimiento ó modificarle. Desconócese su esencia, y sólo tenemos idea de ellas por los efectos ó movimientos que producen, pudiéndose considerar como producidas por los agentes universales *atraccion universal, calor, luz* y *electricidad*. Dos fuerzas son iguales cuando, aplicadas á un mismo punto y en direcciones opuestas, le dejan en reposo.

Punto de aplicacion es el del cuerpo sobre el cual obra directamente dicha fuerza.

Direccion ó sentido de una fuerza es la recta, segun la cual mueve ó tiende á mover su punto de aplicacion, ora á la derecha, ora á la izquierda, si el cuerpo está completamente libre.

Intensidad es la energía de sus efectos.

Estos tres elementos son los que determinan ó nos dan á conocer una fuerza, y como las fuerzas pueden valuarse en números, que nos representan la intensidad con que ellas obran, se concibe que á su vez pueden representarse estas fuerzas por líneas rectas cuyas longitudes sean proporcionales á dichos números, y se acostumbra á tomar estas longitudes sobre la direccion segun la cual obran, y á partir del punto á que están aplicadas, siendo ventajosa esta representacion gráfica para las demostraciones.

VII

Fuerza de inercia.—Clasificacion de las fuerzas. Gravedad.—Fuerzas moleculares.

Hemos visto que era siempre necesaria una accion exterior, que denominábamos *fuerza*, para producir el movimiento en un cuerpo que estaba en reposo ó para cambiar este movimiento, si en tal estado se hallaba el cuerpo, y que era debido á que éste opone una resistencia, producida por su inercia. La fuerza, pues, que reside en la materia es el poder que ella tiene de resistir las acciones exteriores. El cuerpo ejerce esta fuerza cada vez que se trata de cambiar su estado de reposo ó de movimiento, y se la puede considerar bajo dos aspectos diferentes: ó como *resistente*, en tanto que el cuerpo se opone á la fuerza que tiende á hacerla cambiar de estado, ó como *impulsiva*, cuando el mismo cuerpo hace esfuerzo para cambiar el estado del obstáculo que le resiste, y á esta fuerza que reside en los cuerpos se le da el nombre de *fuerza de inercia*.

Se puede hacer evidente que la inercia es una fuerza cuya accion se manifiesta en todos los cambios de movimiento. Supongamos un cuerpo, *A B* (fig. 1.ª), colocado en un plano, *A D*, y determinemos por la experiencia un peso, *P*, que es preciso suspender de la extremidad de un hilo, *C E*, unido á un punto, *C*, del cuerpo, y que pasa por una polea, cuyo peso sea capaz de volcar el cuerpo sobre el plano, *A D*. Es claro que toda causa que produzca la caida del cuerpo, supuesto simétrico, sea hácia adelante ó hácia atrás, equivaldrá al peso *P* y será una fuerza.

Ahora bien: si se hace marchar el plano, *A D*, con un movimiento acelerado, se observará que si la aceleracion se hace con una cierta rapidez, el cuerpo, *A B*, caerá en sentido contrario al del movimiento; su inercia habrá, pues, obrado en este caso como una *resistencia* á la aceleracion y con una intensidad igual ó superior al peso, *P*.

Si, al contrario, el movimiento, sea uniforme ó acelerado, llega á tener una velocidad considerable y se detiene ó retarda de una manera brusca, el cuerpo cae en el sentido del movimiento; la inercia ha obrado en este caso como una *potencia* que se oponia al cambio del movimiento y con una intensidad igual ó superior al peso, *P*. La inercia, pues, produce en uno ú otro caso el mismo efecto que la fuerza, ó sea el peso, *P*; luego podemos, por lo tanto, considerarla como una fuerza. En la comunicacion rápida del movimiento que los caballos desbocados imprimen á un carruaje, la *inercia* del carruaje es la que hace por su resistencia que las ruedas se rompan, etc.; es tambien la inercia la que causa el vuelco de un carruaje cuando, marchando de una manera rápida, tiene que detener bruscamente su movimiento para tomar una vuelta brusca en una carretera, y otros muchos ejemplos pueden citarse en que la inercia obra como una fuerza.

Clasificacion de las fuerzas.—Clasifícanse las fuerzas con nombres diferentes, segun la manera que tienen de obrar; en su consecuencia, las fuerzas pueden ser *instantáneas* y *contínuas*; las primeras obran sobre los cuerpos durante un tiempo inapreciable; por ejemplo, el golpe del martillo, la explosion de la pólvora, etc.; las segundas son las que renuevan incesantemente su accion sobre los móviles. Pueden ser *variables* ó *constantes; motrices* las que producen el movimiento ó lo sostienen; *resistentes* las que tienden á impedirlo ó retardarlo; *aceleratrices* ó *retardatrices*, segun que lo aceleren ó lo retarden; *atractivas* ó *repulsivas*; y por último, se emplean las palabras *potencia* y *resistencia* para distinguir á las fuerzas que favorecen el movimiento de las que lo retardan.

Gravedad.—Se llama *gravedad* la propiedad que tienen los cuerpos colocados en la superficie del globo de ser atraidos hácia la tierra por una fuerza determinada, que les hace ejercer una presion sobre sus apoyos si están en equilibrio, ó que les hace caer si están abandonados á sí mismos.

Todos los cuerpos son pesados, pues si bien hay algunos llamados *ligeros* que pueden mantenerse en el aire sin caer, este fenómeno es debido á la presencia del aire atmosférico, que ejerce sobre el cuerpo una presion de abajo arriba, que neutraliza la accion de la gravedad; pero en el vacío todos los cuerpos caen con la misma velocidad.

La gravedad es variable para un mismo cuerpo con la latitud y con la altura sobre el nivel del mar.

Fuerzas moleculares.—Hemos visto que los cuerpos pueden presentarse bajo el estado sólido, líquido ó gaseoso, y que estos cuerpos están formados por la reunion de moléculas, separadas las unas de las otras por unos espacios vacíos llamados poros. Para que estas moléculas puedan formar cuerpos sólidos que conserven un volúmen determinado, sin que se desperdicien sus moléculas, es necesario que existan entre ellas ciertas fuerzas, cuyo efecto sea el mantenerlas á una distancia determinada.

Estas fuerzas toman el nombre de *fuerzas moleculares*, y ejercen su accion á las distancias inapreciables que separan entre sí á las moléculas.

Se dividen en dos grupos, de atraccion y de repulsion. La primera recibe distintos nombres, segun se manifiesta: primero, entre sólido y sólido, y recibe los nombres de *cohesion* ó *adhesion;* segundo, entre sólido y líquido, *capilaridad*, *imbicion;* tercero, entre sólido y gas, *reunion de gases;* cuarto, entre dos líquidos, *difusion*, y quinto, entre líquido y gas, *disolucion*.

VIII

Efectos de las fuerzas sobre los cuerpos.—Presion. Tension.—Flexion.—Torsion.

Las fuerzas obran siempre gradualmente, de una manera que puede ser constante ó variable, pero siempre continua ó progresiva durante un cierto tiempo; esta accion se manifiesta unas veces por grados insensibles y con lentitud, y otras con rapidez, pero nunca en tiempos nulos, pues si algunos fenómenos se verifican durante tiempos inapreciables á nuestros sentidos y á nuestros medios de observacion, es debido únicamente á la imperfeccion de éstos; y lo prueba el que cuanto más sensibles son estos medios, se aprecia mejor la duracion de fenómenos que se habian considerado como inapreciables, pero segun la manera de actuar las fuerzas, así produce efectos diferentes.

Presion.—Una fuerza que está aplicada á un cuerpo no produce siempre un movimiento. Por ejemplo: una piedra colocada sobre una mesa permanece inmóvil, y sin embargo, esta piedra está sometida á la accion de la gravedad; porque si se imagina que la mesa desapareciera instantáneamente, caeria al instante; el efecto, pues, que la piedra ejerce sobre la mesa se denomina *presion*.

Tension.—Si suponemos suspendido en la extremidad inferior de un hilo un peso cualquiera, y cuya extremidad superior esté sujeta á un punto fijo, el peso queda inmóvil, pero caeria inmediatamente si se cortase el hilo; lo cual demuestra que el peso ejerce una accion sobre la cuerda, pues él tiende á caer, y el efecto que produce recibe el nombre de tension.

De modo que el esfuerzo de *tension* se verifica cuando la fuerza obra sobre el sólido en sentido de su longitud, tendiendo á producir un alargamiento debido á la desviacion de las moléculas, que tienden á colocarse en el sentido de la longitud del mismo; mientras que la *presion*, si bien actúa en la misma direccion del sólido, tiende, sin embargo, á producir un acortamiento del mismo.

Flexion.—El esfuerzo de *flexion* se produce cuando un sólido se halla sometido á la accion de una fuerza que obra perpendicular ú oblícuamente respecto á su longitud. Por ejemplo: si tenemos una viga empotrada en una pared por uno de sus extremos, y en su otro extremo libre, ó próximo á él suponemos que actúe una fuerza, perpendicular ú oblícua á su longitud, esa fuerza producirá una curvatura en el sólido, que se denomina *flexion*.

Torsion.—El efecto de *torsion* es el que produce la desviacion de las fibras de un cuerpo por la combinacion de dos fuerzas; una que retira al sólido por uno de sus extremos, obligándole á permanecer invariable, y otra que actúa tangencialmente á un círculo cuyo centro se halla en el eje del sólido, por ejemplo, un cilindro sólidamente sujeto por su base á una mesa, y una fuerza que obra tangencialmente á su superficie, la combinacion de ambas fuerzas produce que las moléculas del cilindro que podian suponerse en un principio colocadas en líneas paralelas al eje, se mueven paralelamente á las circunferencias de las secciones rectas del cilindro, agrupándose cada serie de ellas en hélices. Las distancias entre las moléculas aumentan, y mientras persiste tal desequilibrio, actúan sobre ellas violentamente las fuerzas moleculares; pero desde el momento en que cesa la fuerza de *torsion*, recobran las moléculas sus posiciones primitivas, despues de cierto número de oscilaciones.

IX

Medida de las fuerzas.—Aplicacion del dinamómetro.

Medida de las fuerzas.—Para poder conseguir la medida de las fuerzas, admitiremos como un axioma el principio siguiente: dos fuerzas son iguales cuando, sostenidas una por otra, producen el mismo efecto en las mismas circunstancias.

Siendo muy diferentes los efectos producidos por las fuerzas, teniendo que llegar á la medida de éstas por los efectos que producen, es evidente que la unidad de medida de ellas ha de variar para cada caso particular. En ocasiones se consideran las fuerzas con relacion á la naturaleza del movimiento que ellas producen, y en este caso, se adopta como unidad de medida el *metro*, relacionándole con los espacios recorridos en determinadas condiciones.

Otras veces se trata de medir sus efectos en el estado de equilibrio de los cuerpos mientras ejercen una presion ó una traccion, contrarrestadas por otra resistencia, y se comparan con el *kilogramo*, pues en tal estado pueden siempre ser sustituidas por pesos. A las fuerzas así consideradas se les da el nombre de *fuerzas* muertas.

Por último, si nos proponemos medir una fuerza cualquiera de un modo más complejo, á saber, por el valor de la resistencia vencida y por el camino recorrido por el punto de aplicacion en la direccion de la resistencia misma y durante un tiempo determinado, dichos tres elementos constituyen la unidad de trabajo ó *kilográmetro*, que representa un kilogramo de resistencia vencida sobre un metro de longitud durante un segundo. La tension ó fuerza elástica de los gases se mide por *atmósferas*, denominándose así la presion equivalente á 1 kilogramo 33 gramos por centímetro cuadrado.

Aplicacion del dinamómetro.—Como consecuencia del axioma que establecimos, vemos que si tomamos un resorte cuyas flexiones bajo la accion de pesos conocidos hayan sido medidas y observadas con bastante detenimiento, y sometemos este resorte á la accion de una fuerza cualquiera, cuando ésta haya producido en él el mismo efecto que los pesos á que ha sustituido, deduciremos que, habiendo la fuerza y el peso vencido la misma resistencia de flexion, este peso y esta fuerza son iguales; luego el peso, pues, podrá servir para medir la fuerza. Admitiremos, pues, en lo sucesivo, que *todas las fuerzas que obran en las máquinas son comparables á pesos*, y en su consecuencia, se adoptará la unidad de peso para unidad de medida de las fuerzas, y las expresaremos en kilogramos; lo que significará sencillamente para nosotros que ellas producen, en las mismas circunstancias, el mismo efecto que el número correspondiente de kilogramos obrando de la misma manera.

Los aparatos destinados á medir las intensidades relativas de las fuerzas reciben el nombre de *dinamómetros*. Los hay de varias clases, apropiados á la especie de la fuerza que se quiere valuar; así, por ejemplo, la fuerza que hace caer un peso se mide por el peso de él, y por lo tanto, por la presion que produce, y la que produce una persona tirando de una cuerda unida á un cuerpo al cual trata de poner en movimiento, es una fuerza de tension; para medir las presiones, el dinamómetro más general es el de *resorte*, que consiste (figuras 2.ª y 3.ª) en un tubo de cobre sostenido por un anillo, *A*. Pendiente de un resorte situado en el interior del tubo, hay una varilla que exteriormente termina en el gancho, *C*; la varilla se fija á un disco que el resorte lleva en su extremidad superior, que está libre. El peso del cuerpo aplicado al gancho oprime el resorte; un índice recorre una escala trazada en el borde de una ranura longitudinal; cada unidad recorrida por el índice indica un kilogramo.

Para medir las tensiones se emplea el siguiente dinamómetro, formado por una lámina de acero (fig. 4.ª) encorvada por su centro, y que presenta un cierto grado de flexibilidad; en el extremo de la rama inferior hay un arco graduado, que pasa libremente por una abertura practicada en la rama superior, y termina en una anilla; en el extremo de la rama superior hay fijo otro arco, que pasa á su vez por otra abertura análoga practicada en la rama inferior, y termina por un gancho. Ahora bien: si un hombre tira de una cuerda unida á un cuerpo al cual trata de poner en movimiento, se concibe que, si se cortase la cuerda, y que los dos cabos así separados se unen, el uno á la anilla y el otro al gancho, la fuerza de traccion se ejercerá por el intermedio del instrumento, el resorte experimentará una flexion, y la tension de la cuerda será equivalente al peso del cuerpo que, estando suspendido del gancho, le hiciera experimentar una flexion igual; esta tension, pues, podrá ser expresada por un corto número de kilogramos.

X

Definiciones de equilibrio y de reposo.—Diferencia entre uno y otro.

Definicion de equilibrio.—Cuando varias fuerzas actúan sobre uno ó varios cuerpos, neutralizándose mutuamente, de tal manera que todo sigue verificándose de la misma manera, como si estas fuerzas no hubieran efectuado su accion, se dice entonces que dichas fuerzas se equilibran, ó bien que el cuerpo ó sistema de cuerpos al cual estas fuerzas han sido aplicadas está en *equilibrio*.

Definicion de reposo.—Se dice que un cuerpo está en *reposo* cuando no presenta movimiento alguno, por no estar sometido á la accion de ninguna fuerza.

Diferencia entre uno y otro.—En vista de lo expuesto, vemos que es preciso distinguir entre *equilibrio* y *reposo*. El primero designa el estado de un cuerpo que, estando sometido á la accion de varias fuerzas, se encuentra en las mismas condiciones que si estas fuerzas no actuasen; es decir, que si el cuerpo estaba en movimiento, éste no es turbado por la accion de las fuerzas, puesto que éstas se destruyen entre sí; de modo que la idea de equilibrio no lleva consigo la de inmovilidad del cuerpo, exigiendo únicamente que las nuevas fuerzas se destruyan entre sí, mientras que la idea de reposo indica que el cuerpo no se mueve, y además que no está sometido á la accion de ningunas fuerzas, aunque éstas se pudieran destruir, es decir, que el estado de *reposo* excluye por completo la presencia de fuerzas.

La acepcion que se da usualmente á la palabra *equilibrio* no es la misma con la que se la designa en Mecánica; generalmente se dice que un cuerpo está en equilibrio cuando se le ha podido dar una posicion en la cual queda inmóvil, pero de la cual se aleja inmediatamente bajo la accion de la más pequeña causa exterior. Por ejemplo, si se ha podido colocar un cono sobre una mesa, apoyándose solamente por su vértice, sin que caiga de uno ú otro lado, entonces se dice que este cono está en equilibrio. Pero bajo el punto de vista de la Mecánica, lo mismo está el cono en equilibrio apoyándose en la mesa por su base que por su vértice, pues en uno y otro caso, la fuerza que tiende á hacerle caer, y que le haria caer si la mesa no lo sostuviese, que es la de la gravedad, está equilibrada por la presion que la mesa ejerce de abajo arriba en la parte inferior del cono. Lo que distingue estos dos casos, es que cuando el cono se apoya por su vértice, á poco que se separe el cono de la posicion que tiene, cae y no la vuelve á tomar, y se dice que el cono está en *equilibrio* inestable, y cuando se apoya por la base, si se separa un poco de su primitiva posicion, desde el momento que cesa esta fuerza, vuelve el cono á colocarse como estaba, y entonces se dice que el cono está en *equilibrio estable*; de modo que lo que se llama usualmente equilibrio, en Mecánica recibe el nombre de equilibrio inestable.

XI

Ideas generales acerca de la composicion y descomposicion de las fuerzas.—Qué se entiende por componentes y resultantes.

Ideas generales acerca de la composicion y descomposicion de las fuerzas.—Sabemos que un cuerpo puede estar sometido á la accion de varias fuerzas, P, Q, R y S, y, sin embargo, seguir este cuerpo en equilibrio á causa de que estas fuerzas, por destruirse entre sí, no producen efecto alguno; luego toda vez que todas estas fuerzas se equilibran, podemos considerar que una cualquiera de ellas, la P, por ejemplo, se opone á la accion de todas las demas, Q, R, S; de donde parece resultar que el efecto de estas últimas es solicitar al cuerpo absolutamente como una simple fuerza igual y contraria á la P.

Supongamos que se aplica al cuerpo una fuerza, P', igual y contraria á la P; estas dos fuerzas, equilibrándose sus efectos, son nulos por sí mismos, y entonces podemos considerar al cuerpo como sometido únicamente á la accion de las fuerzas Q, R, S. Pero, por otra parte, como la fuerza P equilibra á las Q, R, S, el efecto de todas estas y la P es nulo por sí mismo y se puede considerar al cuerpo como sometido únicamente á la accion de la fuerza P'.

El estado del cuerpo es, pues, el mismo, sea que se le suponga solicitado por las fuerzas Q, R, S, ó que se le suponga solicitado por la sola y única fuerza P', igual y contraria á aquélla á quienes éstas equilibran. Luego, puesto que puede suceder que una sola fuerza sea capaz de producir en un cuerpo el mismo efecto que varias, nuestro primer cuidado debe ser tratar de reducir las fuerzas aplicadas á un mismo cuerpo al menor número de fuerzas posibles, y de observar, sobre todo, la ley de esta reduccion.

La investigacion de esta ley, en virtud de la cual se encuentra una fuerza que reemplaza á varias, recibe el nombre de *composicion de las fuerzas*. La misma ley, pero en un órden inverso y segun la cual se sustituye á una fuerza otras varias capaz del mismo efecto, se llama *descomposicion de fuerzas*.

Definiciones de resultante y componentes.—Esta fuerza, que es capaz por sí sola de producir en un cuerpo el mismo efecto que varias otras combinadas, se llama *resultante:* luego si varias fuerzas se equilibran en un cuerpo, una cualquiera de ellas es igual y directamente opuesta á la *resultante* de las demás.

Las otras fuerzas, con relacion á la *resultante*, se llaman las *componentes*.

En el curso de estas explicaciones, designaremos á las fuerzas con letras mayúsculas P, Q, R, S, etc., colocadas en líneas que representen sus direcciones, y si una letra tal como la A indica el punto de aplicacion de la fuerza P, supondremos siempre que la accion de esta fuerza es desde A hácia P, es decir, que la fuerza tira de A á P.

Si para representar la magnitud de esta fuerza se toma sobre su direccion y á partir del punto de aplicacion, A, una cierta cantidad lineal, AB, se supondrá asimismo que esta magnitud se lleva hácia el lado donde el punto de aplicacion, A, tiende á moverse. Así es que cuando se diga que una fuerza está representada en magnitud y direccion por una cierta línea terminada, y que parte del punto de aplicacion, es preciso sobreentender que la fuerza tira de ese punto hácia la extremidad de la línea que la representa.

Se podria adoptar la hipótesis contraria, es decir, suponer que la fuerza representada por la línea AB empuja al punto de aplicacion A, para alejarlo de la extremidad B de la línea que la representa, puesto que lo expuesto anteriormente sólo es un convenio, y se puede adoptar uno ú otro; pero una vez establecido el primero, deben siempre sujetarse á él las explicaciones para darle á cada fuerza el sentido que debe tener y al enunciado del teorema toda su exactitud.

XII

Composicion de fuerzas que obran en una misma direccion.

Hay que considerar en este caso que las fuerzas obrando en una misma direccion, lo hagan tambien en el mismo sentido.

Primer caso. Cuando dos fuerzas, P y Q, obran en la misma direccion y en el mismo sentido, es evidente que se debe considerar como un axioma que estas fuerzas se suman y dan una resultante igual á la suma de ellas, $P+Q$.

Este axioma es el fundamento de la estática: se le puede considerar, si se quiere, como una especie de definicion que no es preciso demostrar, porque está comprendida en la idea misma de la fuerza, considerada como magnitud, es decir, como susceptible de ser aumentada ó disminuida.

Efectivamente; no podríamos formarnos idea de una fuerza doble ó triple que otra si no se considerase esta fuerza como la reunion de dos ó tres iguales á la propuesta, y que ejercen su accion á la vez sobre el mismo punto y en el mismo sentido, y esto lo vemos comprobado por el dinamómetro, pues si suspendemos del gancho dos pesos, vemos que el índice nos marca una graduacion igual á la que se obtiene suspendiendo de él un solo peso igual á la suma de los dos dados; luego la fuerza que representa este último es la suma de las fuerzas que representan los dos propuestos.

Segundo caso. Cuando las fuerzas obran en la misma direccion, pero en sentido contrario. En este caso, sabemos que cuando dos fuerzas son iguales y obran en un mismo punto, pero en sentido contrario, estas fuerzas se equilibran; ahora bien, si estas fuerzas P y Q son desiguales, se puede suponer que la mayor P, por ejemplo, se descomponga en dos, una igual á Q, y otra será por lo tanto igual á $P-Q$; entonces la primera componente queda destruida por la Q, que es igual á ella y obra en sentido contrario; luego el sistema de fuerzas nos ha quedado reducido á una sola fuerza igual á $P - Q$, y obrando en la direccion y sentido de la fuerza P; luego esta fuerza $P - Q$ es la resultante de las dos dadas, de donde se deduce que cuando dos fuerzas obran sobre un punto en la misma direccion y sentido diferente, producen una resultante que es igual á la diferencia de las componentes, y que obra en la direccion y sentido de la mayor de las dos.

Si fueran varias las fuerzas, se compondrian todas las que obran en la misma direccion y sentido, y siempre queda el problema reducido al caso de dos fuerzas que obran en la misma direccion y sentido contrario.

XIII

La resultante de dos fuerzas que concurren en un punto está representada en direccion y magnitud por la diagonal del paralelógramo formado por aquéllas.—Polígono de las fuerzas.—Cuando son tres las fuerzas y no están situadas en un mismo plano, la resultante es la diagonal del paralelepípedo.

La resultante de dos fuerzas que concurren en un punto está representada en direccion y magnitud por la diagonal del paralelógramo formado por aquéllas.—Antes de pasar á la demostracion del teorema, tenemos que demostrar el lema siguiente: *La resultante de dos fuerzas que concurren en un punto se encuentra en el plano determinado por la direccion de estas dos fuerzas y en el interior del ángulo que ellas forman.* Supongamos dos fuerzas, P y Q, actuando en un mismo punto, A (fig. 5), y bajo un ángulo cualquiera: se comprende perfectamente que una tercera fuerza, *R*, aplicada convenientemente en el mismo punto, podria equilibrar á las dos *P* y *Q*, porque en virtud de los efectos combinados de las dos fuerzas *P* y *Q*, el punto *A* tiende á dejar el lugar donde está, y como no puede marchar más que en una sola direccion, si se le aplica una fuerza conveniente y en sentido contrario al movimiento que trata de tomar, este punto permanecerá en equilibrio.

Estando las tres fuerzas en equilibrio en el punto *A*, la fuerza *B* es igual y directamente opuesta á la resultante de las otras dos; luego *P* y *Q*, que concurren en un punto, tienen una resultante.

Es evidente que esta resultante tiene que estar en el plano de las dos direcciones *A P* y *A Q* (fig. 6.), porque no hay una razon para que ella tenga por encima del plano una cierta posicion más bien que la perfectamente simétrica por debajo, y como no puede tener á la vez esas dos posiciones, tiene que encontrarse en dicho plano.

Debe, además, estar dirigida dentro del ángulo *P A Q*, porque es claro que el punto *A* no puede moverse en la parte de plano que está por encima de la línea *A Q* hácia *D*, ni tampoco por encima de la línea *A P* hácia *B*, porque las fuerzas obran la una en al sentido *A P*, y la otra en el *A Q*; luego el punto no puede moverse sino en el plano *P A Q* y en el interior del ángulo.

No hay más que un solo caso en el que se pueda ver *á priori* cuál será la direccion de la resultante, y es aquel en que las dos fuerzas *P* y *Q* sean iguales; entonces es claro que la resultante es la bisectriz, pues no hay una razon para que se incline hácia una de las componentes más bien que á la otra.

Demostrado el lema, pasemos á la demostracion del teorema, pero fijémonos primero en la significacion del enunciado. Sean P y Q dos fuerzas (fig. 7) aplicadas al punto material A; supongamos que las rectas AB y AC representan la direccion é intensidad de las fuerzas indicadas. Si por el extremo B se traza la recta BD paralela á una de las fuerzas, y por el extremo C otra paralela CD á la P, tendremos en D un punto de interseccion que, unido con el A, nos da la diagonal AD; esta fuerza equivale á las P y Q; tal es la significacion del teorema.

Demostremos que en efecto la diagonal citada representa en ***direccion*** é ***intensidad*** la resultante de las fuerzas angulares. Sean P y Q las fuerzas aplicadas al punto A. Supongamos primeramente que obran una despues de la otra; el punto A, al ser solicitado por la fuerza P, recorrerá la recta AB, y despues al ser solicitado por la B igual y paralela á la Q, que es lo que sucederá al obrar la fuerza Q despues de la P, recorrerá la indicada recta BD, siendo por tanto la línea quebrada ABD la trayectoria definitiva; lo mismo sucederá si obrase primeramente la Q y despues la P; solamente que la trayectoria seria ACD. Si el efecto de las fuerzas se produjese durante la mitad de tiempo y alternativamente, el punto A pasaria á la mitad de AB, desde la mitad de AB á la mitad de AD, desde la mitad de AD á la mitad de BD, y desde allí al punto D; de modo que la trayectoria seria una línea poligonal.

Resultado igual se alcanzaria si las fuerzas, alternando á cuarta parte, octava, dieciseisava parte del tiempo, etc., el móvil siempre pasaria al final del periodo de accion desde A á D, independientemente de la fraccion de tiempo; luego lo mismo sucederá en el limite cero, pero en este caso obran las fuerzas simultáneamente y la trayectoria quebrada se confunde con la recta AD diagonal del paralelógramo; luego ésta representa en direccion é intensidad la resultante de P y Q.

Cabe tambien demostrar que la longitud de la diagonal representa la intensidad de la resultante. Sean las fuerzas PP' y P'' (fig. 8), aplicadas al punto A y en equilibrio. Segun la primera parte del teorema, la direccion de la resultante de P y P' será la recta R, ó del mismo modo la direccion de la resultante de P' y P'' estará representada por la recta S; fácil es ahora determinar la magnitud de R. En efecto, sabemos que es igual á $P'S$ por lados opuestos de un paralelógramo, y que $P'S$ es igual á AP''; como por hipótesis las tres fuerzas del sistema producian el equilibrio, es indudable que AP'' es igual y opuesta á la resultante de P y P' y como R, segun se vé por la figura, es igual y opuesta á AP'', queda demostrado que la diagonal R marca la direccion y la intensidad de la resultante de P y P', segun queriamos demostrar.

Puesto que las tres fuerzas P Q y R son entre sí como las tres lineas AB, AC y AD, y además con el paralelógramo $ABCD$, se tiene que $AB=CD$, se puede decir que estas tres fuerzas son entre sí como los tres lados CD CA y AD del triángulo ACD; pero estos tres lados son entre sí como los senos de los ángulos opuestos CAD, CDA y ACD; pero, á causa de las paralelas, el ángulo CDA es igual al ángulo BAD, el ángulo ACD es suplemento del BAC, y por consiguiente tienen el mismo seno, luego

$$P : Q : R :: \text{seno } CAD : \text{seno } BAD : \text{seno } BAC$$

de donde se puede deducir que la resultante de dos fuerzas P y Q, estando representada por el seno del ángulo formado por sus direcciones, las dos fuerzas están á su vez representadas por los senos de los ángulos adyacentes á la direccion de la resultante, luego *cada una de las P, Q, R, son como los senos del ángulo formado por las otras dos.*

Las dos componentes y la resultante están, como se vé, representadas por los tres lados del triángulo BAD en el cual el ángulo ABD es suplemento del BAC (fig. 7).

Para obtener numéricamente la resultante en funcion de las componentes, observaremos que en el triángulo BAD $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2\ AB.\ BD$ cos. ABD, pero cos. $ABD = -$cos. BAC, luego $R^2 = P^2 + Q^2 + 2\ PQ$ cos. α. (1.)

Esta relacion con la $P : 2\ R ::$ seno CAD : seno BAD : seno BAC, resuelven completamente el problema de la composicion y descomposicion de fuerzas concurrentes.

La perpendicular Pg á AR dá

$$R = Ag + gR = P \cos.\ PAR + Q \cos.\ QAR \ (2).$$

Si las fuerzas P y Q son rectangulares, la fórmula (1) dá $R^2 = P^2 + Q^2$ que permite calcular cualquiera de las fuerzas y el valor de las componentes rectangulares que pueden reemplazar á una fuerza R que forma con una de ellas P el ángulo $\alpha = PAR$, pues $P = R \cos \alpha$, $Q = R$ seno α R^2 (cos $^2 x +$ seno^2 α) $= P^2 + Q^2$ ó $R^2 = P^2 + Q^2$.

Polígono de las fuerzas.—Sabiendo determinar la resultante de dos fuerzas aplicadas á un punto, se puede determinar la de varias P, Q, R, S aplicadas á un mismo punto A. y dirigidas como se quiera en el espacio. Para conseguirlo, se determina por la regla del paralelógramo de las fuerzas la resultante X (fig. 9) de dos de ellas P y Q, despues la resultante Y de X y R, luego la resultante Z de Y y S; continuando así llegaremos á la resultante general de todas las propuestas que en el caso de la figura es la Z.

Esta construccion equivale á trazar por el extremo de una de ellas P una recta PX igual y paralela á la Q, por el extremo X de esta paralela otra XY igual y paralela á la R, y por el extremo Y de esta, otra recta YZ igual y paralela á la S; la recta AZ que cierra el polígono así formado, es la resultante buscada. Esta construccion, para determinar la resultante general de las fuerzas aplicadas á un punto, se llama *polígono de las fuerzas.*

Si al construir el polígono de las fuerzas, éste resulta cerrado por sí mismo, la resultante es cero y las fuerzas se equilibran sobre el punto de aplicacion.

Cuando son tres las fuerzas concurrentes, la resultante es la diagonal del paralelepípedo.—Esta proposicion es un caso particular de la anterior. Sean las componentes P, Q y S no situadas en un plano y aplicadas al punto A (fig. 10); por el extremo P tracemos una recta PD igual y paralela á Q y por el extremo D de ésta tracemos DR igual y paralela á S; la recta AR que cierra el polígono $APDR$ es la resultante. Esta resultante es la diagonal del paralelepípedo AR construido sobre las tres rectas PQ y S.

Si el paralelepípedo es rectangular se tendrá en el rectángulo $ASRG$ que $\overline{AR}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{AG}^2$, pero en el rectángulo $APVGQ$ se tiene que $\overline{AG}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{AP}^2$, luego sustituyendo el valor de AG tendremos $\overline{AR}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{AQ}^2 + AP^2$, $R^2 = Z^2 + X^2 Y^2$ ó $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, lo que nos da el valor de la resultante en funcion de las componentes.

XIV

Descomposicion de las fuerzas en dos ó más direcciones.—Caso en que hay indeterminacion.

Descomposicion de las fuerzas en dos ó más direcciones.—Se dice que una fuerza es ***descompuesta*** cuando se hallan las *componentes* de que sería *resultante* la mencionada fuerza.

Hay que distinguir dos casos, segun que se quiera descomponer la fuerza en dos, aplicadas al mismo punto ó cuando se quiera descomponerla en más de dos aplicadas tambien al mismo punto.

Primer caso. Este problema considerado en toda su generalidad es indeterminado, y para convencerse de ello basta recordar que una recta puede ser diagonal de infinito número de paralelógramos, y por lo tanto sólo será determinado cuando se nos dé la magnitud y direccion de una de las componentes y áun el problema sería imposible si las tres rectas (resultante y componentes) no se hallan en un mismo plano.

Supongamos, pues, que se trata de descomponer una fuerza dada R en otras dos P y Q dirigidas segun las líneas dadas AP y AQ (fig. 11) estando estas tres direcciones comprendidas en un plano y concurrentes en un punto A.

Tomemos sobre la direccion de la fuerza R una parte AD que represente su intensidad y por el punto D tirando las rectas DC y DB paralelas á las direcciones dadas AP y AQ, se formará un paralelógramo $ABCD$ cuyos lados AB y AC representarán las fuerzas P y Q. Si se quiere calcular sus magnitudes formaremos las proporciones

$$\left.\begin{array}{l} R : P :: \text{sen } BAC : \text{sen } CAD \\ R : Q :: \text{sen } BAC : \text{sen } BAD \end{array}\right\} (3)$$

en las cuales no hay más incógnitas que P y Q.

Si el ángulo BAC fuera recto, se tendria suponiendo el radio $=1$, sen $BAC=1$ sen $CAD=$ cos BAD y sen $BAD=$ cos CAD y las dos proporciones (3) serán

$$\begin{array}{ll} R : P :: 1 : \cos BAD & P=R \cos BAD \\ R : Q :: 1 : \cos CAD & Q=R \cos CAD \end{array}$$

Resulta de aqui que cuando se descompone una fuerza en otras dos que obran segun direcciones rectangulares entre sí, se encuentra cada componente multiplicando la fuerza propuesta por el coseno del ángulo que ella forma con la direccion de esta componente.

Cada una de las componentes si el ángulo de sus direcciones es recto, es igual á la proyeccion de la fuerza dada R sobre sus direcciones y se llama la *fuerza estimada* segun esta direccion; así R cos BAD ó sea la componente P, es la fuerza R estimada segun la direccion AP.

A medida que el ángulo que forma la fuerza con su proyeccion se hace más pequeño, la intensidad de la componente se aproxima á la intensidad de la resultante R y llega á ser igual cuando el ángulo es cero, porque entonces la proyeccion es igual á la recta proyectada.

Si se quiere hacer marchar un punto A segun una direccion determinada por medio de dos rectas concurrentes P y Q, conviene que estas fuerzas formen entre sí el ángulo más pequeño posible y así la resultante R difiere muy poco de la suma de las componentes, pues hemos visto que $R = P \cos BAD + Q \cos CAD$ al hallar la resultante en funcion de las componentes.

Cuando el ángulo en A, formado por las componentes, aumenta, la resultante R disminuye; y en fin, cuando el ángulo en A de las fuerzas es igual á 180°, la resultante R es igual á la diferencia de las componentes, pues entonces estamos en el caso de la composicion de dos fuerzas que obran en la misma direccion y diferente sentido, aplicadas á un punto.

Segundo caso. Una fuerza cualquiera R siempre es descomponible en otras tres XYZ respectivamente paralelas á tres líneas dadas en el espacio con tal que dos de ellas no sean paralelas porque tomando la parte AR para representar la magnitud de la fuerza R y tirando por el punto de aplicacion A tres líneas paralelas á las tres dadas en el espacio, se tendrá por el punto A tres planos indefinidos XY, XZ é YZ, y por el punto R otros tres planos respectivamente paralelos á los primeros y estos seis planos determinarán el paralelepípedo del cual las tres aristas contiguas AP, AQ y AS, representan las tres componentes X, Y, Z.

Si se quiere obtener las tres componentes en funcion de la resultante y de los ángulos que ellas forman con ésta, llamando α el ángulo que la resultante R forma con AP (fig. 10) se tiene

$$AR : AP :: 1 : \cos\alpha \text{ ó } R : X :: 1 : \cos\alpha$$

de donde $X = R \cos\alpha$; y llamando β y γ los ángulos que Y y Z forman con la resultante, se encontrará que $Y = R \cos\beta$ y $Z = R \cos\gamma$; de donde se deduce que se encontrará el valor de las tres componentes respectivas multiplicando la resultante por los cosenos respectivos de los tres ángulos que su direccion forma con la direccion de las componentes.

Caso en que hay indeterminacion.—Cuando se trata de descomponer una fuerza dada en más de otras dos en un plano ó en más de tres en el espacio, el problema es completamente indeterminado: vamos á poner esta indeterminacion en evidencia para el caso más sencillo, el de una fuerza R (fig. 12) que se trata de descomponer en otras tres situadas con ella en un mismo plano y dirigidas segun las líneas AP, AQ y AS.

Pero es evidente que si tomamos sobre la direccion AS, *p*, *e*, una fuerza cualquiera As, podremos por la construccion del paralelógramo $AsRt$ encontrar una segunda fuerza At, que compuesta con As dé por resultante la fuerza dada R; descompondremos entonces la nueva fuerza At segun las direcciones AP y AQ; de este modo la fuerza R será la resultante de las tres fuerzas Ap, Aq y As, y esta última, habiendo tomado arbitrariamente sobre una cualquiera de las tres direcciones dadas, es claro que el problema propuesto es susceptible de una infinidad de soluciones.

Por medio de la descomposicion de las fuerzas concurrentes en otras tres, se puede reducir la investigacion de la resultante de un número cualquiera de fuerzas concurrentes á la composicion de tres fuerzas rectangulares: para esto se hacen pasar por el punto comun tres rectas cualesquiera, que de ordinario y para mayor comodidad se toman rectangulares entre sí; se descomponen cada una de las fuerzas dadas en tres componentes dirigidas segun estas tres rectas auxiliares, y se reduce así todo el sistema á tres fuerzas rectangulares que se componen fácilmente, sea por el paralelepípedo de las fuerzas, sea por el uso de la fórmula $R^2 = P^2 + Q^2 + S^2$, en la cual P, Q y S representan las sumas de las componentes respectivamente reunidas en una sola sobre cada uno de los tres ejes.

XV

Composicion de dos ó más fuerzas paralelas.—Centro de estas clases de fuerzas.—Par de fuerzas.

Composicion de dos ó más fuerzas paralelas.— Hay que considerar los casos siguientes:

Fuerzas paralelas.	dirigidas en el mismo sentido.	que sean dos.
		que sean varias.
	dirigidas en sentidos contrarios.	que sean dos.
		que sean varias.

Antes de pasar á estudiar los diferentes casos que hemos enumerado, es preciso demostrar que cuando una fuerza P (fig. 13) se aplica á un punto libre A, se puede, sin cambiar su efecto, cualquiera que sea, aplicarla á cualquier otro punto B de su direccion, con tal que este nuevo punto de aplicacion esté invariablemente unido al primero.

En efecto, apliquemos á las extremidades de la recta inextensible é incompresible AB dos fuerzas P' y P'' iguales á la P, y obrando en sentido contrario AP' y BP'', estas dos fuerzas se neutralizarán por sí mismas, y su introduccion no cambia en nada el sistema primitivo; pero examinando ahora el conjunto de las tres fuerzas de otra manera, se puede decir que las fuerzas PP' aplicadas al mismo punto A y que obran en sentido contrario se destruyen y no queda más que la fuerza P'', que no es otra que la P trasportada al punto B de su direccion.

Primer caso. Sentado esto, sean F y F' dos fuerzas paralelas aplicadas en los puntos A y B de un cuerpo sólido y que obren en el mismo sentido (fig. 14).

El equilibrio del sólido no se alterará aplicando en A y B, siguiendo la direccion BA y en sentido contrario, dos fuerzas iguales $+R$ y $-R$, cuya intensidad queda arbitraria. El sistema de las cuatro fuerzas F, F', R y $-R$ es, pues, equivalente al de las dos F y F'.

Ahora bien, las dos fuerzas concurrentes R y F se componen en una fuerza única AS por la regla del paralelógramo; de la misma manera las F' y $-R$ tienen por resultante la BH; luego la resultante de las F y F' será, pues, la resultante de las fuerzas AS y BH, que son concurrentes y cuyas direcciones se encuentran en un punto O.

Segun el lema fundamental, las fuerzas AS y BH pueden suponerse aplicables en este punto O, y allí descomponerse cada una en dos direcciones, la una paralela á AB y la otra paralela á las fuerzas F y F'. La fuerza $OS'=AS$, dará por esta descomposicion una fuerza R', igual y paralela á la R, y una fuerza OF_1, igual y paralela á la F; la $OH'=BH$, dará asimismo una fuerza $-R'$, igual y paralela á $-R$, y una fuerza OF'_1, igual y paralela á F'.

Las fuerzas R' y $-R'$ iguales y aplicadas en sentido contrario á un mismo punto se destruyen y sólo quedan las dos fuerzas F_1, y F'_1, iguales y paralelas á las F y F' y que por estar aplicadas en un mismo punto O y obrando en la misma direccion y sentido, se suman y dan lugar á una resultante igual á su suma, y por lo tanto igual á $F+F'$ y aplicada en O.

Esta resultante puede suponerse aplicada en un punto I de la recta AB que una los puntos de aplicacion de las componentes.

Para determinar este punto, observaremos que, siendo semejantes los triángulos SFA y AIO, tenemos la proporcion

$$\frac{AI}{OI}=\frac{SF}{AF}=\frac{R}{F}$$

y que la semejanza de los triángulos OIB y BFH da

$$\frac{IB}{OI}=\frac{F'H}{BF'}=\frac{R}{F'}$$

y dividiendo miembro á miembro estas proporciones, tenemos

$$\frac{AI}{IB}=\frac{F'}{F}.$$

el punto I, divide, pues, á la distancia AB de los puntos de aplicacion en partes inversamente proporcionales á las magnitudes de las fuerzas. Luego dos fuerzas paralelas y en el mismo sentido, tienen una resultante que es paralela á dichas fuerzas, y en el mismo sentido que ellas, cuya magnitud es igual á la suma de las propuestas y su punto de aplicacion está en la recta que une los puntos de aplicacion de las dadas y divide á esta recta en partes inversamente proporcionales á las magnitudes de estas fuerzas.

Podemos observar que la posicion del punto I, interseccion de la resultante con la AB, depende solamente de la relacion de las dos fuerzas F y F', y no de sus magnitudes absolutas ni de sus direcciones; luego podemos añadir que el punto de aplicacion de la resultante de dos fuerzas paralelas está sobre la recta que une los de aplicacion de éstas, y no varía aunque se alteren las magnitudes ó direcciones de estas dos fuerzas, con tal que ellas conserven su paralelismo y la relacion de sus magnitudes.

Si las dos fuerzas F y F' (fig. 15) son iguales, el punto I de aplicacion de la resultante será el medio de la linea AB. Tomemos, en efecto, las dos fuerzas R y $-R$ iguales á las F y F'; la resultante de R y F será la bisectriz del ángulo que ellas forman, y á causa de ser OI paralela á AF, el triángulo AOI será isósceles; por una razon semejante, el triángulo BOI tambien será isósceles y se tendrá que $AI=IO$ y $IO=IB$, luego $IA=IB$.

Segundo caso. Supongamos que varias fuerzas paralelas F, F' F''... (fig. 16) estén aplicadas respectivamente á los puntos A, B, C... de un cuerpo sólido, y que estas fuerzas estén todas dirigidas en el mismo sentido. Se podrá, aplicando el teorema precedente, determinar la resultante de todas ellas.

En efecto, unamos A con B y dividamos la distancia AB en un punto I tal que se tenga

$$\frac{AI}{IB}=\frac{F'}{F}$$

Podemos reemplazar las dos fuerzas F y F' aplicadas respectivamente á A y B por una $F+F'$ aplicada en I. Unamos I con C y tomemos sobre esta recta un punto I' tal que

$$\frac{II'}{I'C}=\frac{F''}{F+F'}$$

el punto I'' será el de aplicacion de la resultante de $(F+F')$ y F'', la cual será igual á la suma $F+F'+F''$ y así seguiríamos hasta que se haya concluido con todas las fuerzas. La resultante general será igual á la suma de todas las fuerzas dadas y paralela á su direccion comun. Los puntos I, I', I''... obtenidos sucesivamente, son independientes de las magnitudes absolutas de las fuerzas y de su direccion; el último punto obtenido es independiente del órden en que se hayan tomado los puntos dados para la composicion de las fuerzas.

Tercer caso. Sean dos fuerzas F y F' paralelas pero dirigidas en sentido contrario (fig. 17), y aplicadas en los puntos A y B de un mismo sistema sólido.

Vamos á hallar su resultante, deduciendo la solucion de este problema de la composicion de fuerzas paralelas que obran en el mismo sentido.

En un punto C de la recta AB prolongada hacia el lado donde está aplicada la mayor de las dos fuerzas, apliquemos dos fuerzas F'' y $-F''$, iguales, contrarias y paralelas á la direccion comun de las dos fuerzas

F y F'. Esta adicion de dos fuerzas iguales y contrarias en nada cambia la resultante del sistema de las fuerzas dadas. Ahora bien, tomemos la fuerza F'' igual á la diferencia $F-F'$ y la distancia AC tal que se tenga

$$\frac{F''}{F'}=\frac{AB}{AC}$$

Resulta de esta construccion que las fuerzas F' y $-F''$ tienen una resultante igual y contraria á la F, pues siendo $-F''$ y F' paralelas y dirigidas en el mismo sentido, tienen una resultante igual á su suma $F''+F'$ y como $F''=F-F'$ esta suma será pues $F-F'+F'=F''$: luego las tres fuerzas F, F' y $-F''$ se equilibran; luego la fuerza $-F''$ es igual y contraria á la resultante de las otras dos F y F', y por consiguiente la resultante de éstas es F'', que es igual y contraria á $-F''$. Luego dos fuerzas paralelas y que obran en sentido contrario, tienen una resultante, paralela á la direccion de ellas, igual á su diferencia, y su punto de aplicacion está en la recta que une los de ésta y á una distancia de ellos inversamente proporcional á las fuerzas adyacentes, puesto que de la relacion

$$\frac{F''}{F'}=\frac{AB}{AC} \text{ ó } \frac{F-F}{F'}=\frac{AB}{AC} \text{ se deduce}$$

$$\frac{F-F'+F'}{F'}=\frac{AB+AC}{AC} \text{ ó bien } \frac{F}{F'}=\frac{CB}{CA}$$

y además la resultante está dirigida en sentido de la mayor.

Si F' es igual á F, entonces la resultante $F-F'=O$, y entonces para hallar la distancia del punto de aplicacion de la resultante tendríamos que de la fórmula x se deduce $AC=\frac{F'\times AB}{F''}=\frac{F'\times AB}{0}=\infty$, es decir, que el punto de aplicacion estaria en el infinito.

Cuarto caso. Si tenemos varias fuerzas paralelas, unas actuando en un sentido y otras en el opuesto, se determina la resultante de todas las que actúan en el mismo sentido y despues la resultante de todas las que actúan en el opuesto, y el sistema viene á quedar reducido á la resultante de dos fuerzas paralelas y que obran en sentidos contrarios; luego estamos en el tercer caso.

Centro de fuerzas paralelas.—Supongamos que las cuatro fuerzas F, F', F'', F''' (fig. 18), sin cambiar de magnitud, sin dejar de ser paralelas y de pasar por los puntos de aplicacion A, B, C, D, vienen á tomar en el espacio las posiciones f, f', f'', f'''. Si se busca la resultante siguiendo el mismo órden que en el caso anterior, se encuentra que la resultante x de f y f' tiene el mismo punto de aplicacion O que la resultante X de F y F'; la x y f'' el mismo punto que la de X y F'', y así sucesivamente, de modo que la resultante general de las fuerzas $f\,f'\,f''$... tendrá el mismo punto de aplicacion de la resultante general de F, F', F''... y esto es en general, cualquiera que sea el número de fuerzas; de donde se deduce que el punto de aplicacion de la resultante de varias fuerzas permanece el mismo, de cualquier manera que el conjunto de todas ellas se incline, con tal que conserven sus puntos de aplicacion, sus intensidades y su paralelismo.

Este punto de aplicacion comun de las diversas resultantes así obtenidas, se llama ***centro de las fuerzas paralelas***, y su consideracion es muy importante, como se verá al tratar de la investigacion de los centros de gravedad.

Par de fuerzas.—Hemos visto en el caso anterior que cuando dos eran paralelas, iguales y obraban en sentido contrario, el punto de aplicacion de la resultante de estas dos fuerzas se hallaba en el infinito; al conjunto ó sistema de fuerzas de esta clase es lo que se denomina *par de fuerzas.*

Vamos á ver qué interpretacion le podemos dar á ese resultado encontrado por la fórmula. Si las dos fuerzas F y F', en lugar de ser iguales, difiriesen en una cantidad muy pequeña, la resultante, que es igual á esa diferencia, sería muy pequeña, y su distancia $AC=\frac{F'\times AB}{F''}$ sería muy grande á causa de ser su denominador F'' muy pequeño: así, pues, cuanto más se aproximen las fuerzas á ser iguales, más disminuye la resultante y más aumenta la distancia del punto adonde ella está aplicada: de modo que cuando las dos fuerzas llegan á ser perfectamente iguales, la resultante es nula y la distancia del punto de aplicacion infinita: lo que parece dar á entender que no hay entonces resultante, ó en otros términos, que no se puede encontrar una fuerza única que haga equilibrio á dos fuerzas iguales, paralelas y que obran en sentido contrario.

Pero para no dejar duda sobre esto, vamos á ver si es posible encontrar una fuerza que haga equilibrio á otras dos F y $-F$, iguales, paralelas y contrarias.

Desde luego, cualquiera que sea la posicion de esta fuerza, única con respecto á las dos propuestas, se le encontrará inmediatamente, en un sentido contrario, otra posicion completamente semejante con relacion á las mismas fuerzas, porque todo es simétrico; luego si una fuerza F'' equilibra á las dos F y $-F$, hay otra $-F''$. igual, paralela y en sentido opuesto, que la equilibrará: agreguemos esta segunda fuerza $-F''$ y destruyámosla inmediatamente con otra F'', igual y contraria á ella; luego habrá, pues, equilibrio entre las cinco fuerzas F'', F, $-F$, $-F''$ y F''_1; pero puesto que hay ya equilibrio entre F, $-F$ y $-F''$, deberia haberlo tambien entre F'' y F''_1, lo que es imposible, puesto que son fuerzas paralelas, iguales y que obran en el mismo sentido: así, pues, las dos fuerzas F y $-F$ no pueden estar equilibradas por ninguna simple fuerza, y, por lo tanto, carecen de resultante única.

XVI

Descomposicion de una fuerza en dos ó más direcciones paralelas á ella.—Caso en que hay indeterminacion.

Descomposicion de una fuerza en dos ó más direcciones paralelas á ella.—En la descomposicion de una fuerza en dos direcciones paralelas á ella, pueden presentarse tres casos: 1.°, descomponer una fuerza en dos direcciones paralelas á ella, siendo conocidos los puntos de aplicacion de las resultantes; 2.°, conocida una de las componentes y su punto de aplicacion, determinar el de la otra fuerza y su intensidad, y 3.°, conocidas las intensidades de las componentes, determinar sus puntos de aplicacion.

Primer caso. Este caso se resuelve valiéndonos de la propiedad que tiene el punto de aplicacion de la resultante de dividir á la recta que une los de las componentes en partes inversamente proporcionales á sus intensidades.

Sea, pues, OR la resultante y m y n los puntos de aplicacion de las componentes (fig. 19); construyamos el paralelógramo $MmnN$ sobre las rectas mn y OR y unamos M con n por medio de la recta Mn, la cual cortará á la OR en I; las partes OI é IR serán las intensidades de las componentes. En efecto, los triángulos semejantes Mmn ó IOn nos dan

$$Mm : mn :: OI : On$$

y de los MNn y MRI se deduce que

$$Nn : MN :: IR : MR$$

pero como $Mm = Nn = R$ y $MN = mn$ y $MR = mo$, tendremos

$$\left.\begin{matrix} R : mn :: OI : on \\ R : mn :: IR : om \end{matrix}\right\} OI : on :: IR : om, \text{ ó bien } on : om :: OI : IR$$

luego quedando la recta mn dividida en el punto O de aplicacion de la resultante R en dos segmentos inversamente proporcionales á las magnitudes OI é IR, se deduce que éstas son las intensidades de las componentes.

Para el caso en que las fuerzas obren en sentidos contrarios es la explicacion anterior, referida á la figura 20.

Segundo caso. Supongamos que se nos dé la componente Pm (fig. 19), y el punto de aplicacion m; entonces, como $Mm = R$ é igual á la suma de las componentes, si de la resultante R quitamos la componente Pm, nos quedará la parte PM, que será igual en intensidad á la otra componente, y para encontrar su punto de aplicacion construyamos sobre los lados PM y $MR=mo$, conocidos, el paralelógramo $PMRI$, y tirando la diagonal MI, el punto n, donde esta diagonal corta á la mo prolongada, será el de aplicacion de dicha fuerza.

Tercer caso. Siendo dadas P, Q y R para buscar los puntos de aplicacion, tiraremos por el extremo de R (fig. 19) la MN paralela mn, y dividamos á R en el punto I en dos segmentos tales que $OI=P$ é $IR=Q$; entonces, trazando por I una oblícua cualquiera, Mn cortará á mn y MN en dos puntos n y M, por donde pasan las direcciones de Q y P, y trazando por M la paralela á R, en donde corte á mn será el punto de aplicacion de P, y el de Q es el otro n.

Supongamos ahora que queremos descomponer la fuerza en tres direcciones paralelas á la suya, y pasando por tres puntos tales que el plano determinado por ellos no contenga á la direccion de la fuerza ni le sea paralelo.

Sea O el punto de aplicacion de la resultante R y situado en el plano de los A, B, C, por donde han de pasar respectivamente las tres componentes buscadas (fig. 21); formemos el triángulo ABC y unamos el punto O á uno cualquiera de los vértices, al A, p, e; sea D el punto de encuentro de OA con el lado opuesto BC : descompondremos entonces la fuerza R en dos componentes, una P aplicada en A y otra la $R-P$ aplicada en D y despues la $R-P$ en otras dos, una P' aplicada en B y otra P'' aplicada en C, siendo por lo tanto $P'+P''=R-P$, y así habremos resuelto el problema.

La relacion entre estas tres fuerzas puede establecer-se por las consideraciones siguientes: la primera descomposicion nos da

$$R : P :: AD : OD$$

y si se tiran las dos rectas OB y OC, se ve que las líneas AD y OD son proporcionales á las alturas, y por consiguiente, á las áreas de los triángulos ABC y BOC, que tienen la misma base BC.

Ejecutando lo mismo respecto á los otros dos vértices B y C, se obtendrán relaciones análogas, y podemos establecer:

$$\left.\begin{array}{l} R : P :: ABC : BOC \\ R : P' :: ABC : AOC \\ R : P'' :: ABC : AOB \end{array}\right\} R : P : P' : P'' :: ABC : BOC : AOC : AOB$$

lo que nos dice que si la fuerza dada está representada por el área del triángulo que determinan los puntos de aplicacion dados á las componentes, cada una de estas tres fuerzas estará representada por el triángulo que se obtiene uniendo el punto de aplicacion de la resultante á los de las componentes.

Si el punto O estuviese fuera del triángulo ABC, podria efectuarse la misma descomposicion, solamente que los triángulos que se obtienen uniendo este punto sucesivamente con dos, cualesquiera de los puntos de aplicacion dados, no estarian en el interior del triángulo ABC, y la suma de éstos no seria igual al área de éste, del mismo modo que la resultante no sería tampoco igual á la suma de las componentes, pues al unir el punto O con el A, la recta AO cortaria al lado del triángulo BC en el punto D, y al tratar de descomponer la fuerza R en dos paralelas, por estar el punto de aplicacion á uno de los lados de los de las componentes y no entre ellos, resultaria que una de las componentes tendria que actuar en un sentido y la otra en sentido contrario, y en general, segun la posicion del punto O, habrá una ó dos componentes que obren en el mismo sentido que la resultante, y dos ó una en sentido contrario; la diferencia entre la suma de las fuerzas que obran en el mismo sentido que la resultante y la suma de las fuerzas que obran en sentido contrario, sería igual á esta fuerza R, del mismo modo que el área del triángulo ABC sería tambien igual al exceso de la suma de las áreas correspondientes á las primeras fuerzas sobre la suma de las áreas correspondientes á las segundas, lo cual se comprueba por la inspeccion de la figura 22.

Casos en que hay indeterminacion.—El problema que consideramos puede ser indeterminado en el caso en que se proponga la descomposicion de una fuerza en otras tres en direccion paralela á la suya, y situadas con ella en el mismo plano, pues es evidente que pudiendo ser la recta propuesta considerada, bien como la resultante de dos paralelas á ella y que obrasen en el mismo sentido, ó bien en sentido contrario, se puede, á voluntad, tomar uno ú otro caso, y halladas las dos componentes, considerar á una de ellas como resultante de otras dos paralelas á su direccion, y á su vez en el mismo sentido ó en sentido contrario; de modo que si bien podemos hallar las tres componentes pararelas á la fuerza dada, el sentido de estas componentes queda á nuestro arbitrio, lo que da la indeterminacion del problema, y ya vimos que para hacer desaparecer esta indeterminacion no teníamos más que considerar á las fuerzas en distinto plano del de la fuerza propuesta.

Tambien puede haber indeterminacion si áun cuando supusiéramos que el plano determinado por los puntos de aplicacion de las componentes no contiene á la direccion de la resultante, quisiéramos descomponer á esta última en más de tres direcciones paralelas. En efecto, se podria aplicar á todos los puntos dados, excepto tres de ellos, fuerzas arbitrarias en cuanto á su magnitud y al sentido en que obrasen; estas fuerzas darian lugar á una resultante R' : se descompondria la fuerza dada R en dos fuerzas, de las cuales fuese una la R', y designando la otra por R'', sería necesario considerarla como la resultante de tres fuerzas que pasen por los tres últimos puntos de aplicacion, lo cual, segun hemos visto, determinaria completamente á estas fuerzas; luego la recta propuesta, si bien ha sido reemplazada por cuatro fuerzas, una de ellas la R', es arbitraria, y por lo tanto, completamente indeterminado el problema.

Así, en general, cuando se da un número m de puntos, las fuerzas serán arbitrarias para $m-3$ de ellos, y las que pasasen por los otros tres, se podrán determinar enseguida en funcion de estas arbitrarias.

XVII

Definicion de momento de una fuerza con relacion á un punto, á una recta y á un plano.—Propiedad de los momentos de las resultantes y de las componentes.

Definicion de momento de una fuerza con relacion á un punto, á una recta y á un plano.—Se llama *momento* de una fuerza al producto de esta fuerza por una distancia; así, pues, diremos que el momento de una fuerza con relacion á un punto es el producto de la intensidad de esta fuerza por la perpendicular bajada desde el punto á la direccion de ella, el cual se llama centro de momentos.

Se llama momento de una fuerza F (fig. 23), con relacion á una recta AB, al producto de la proyeccion F' de la fuerza sobre un plano $R R'$ perpendicular á la recta AB, por la distancia AS del punto en que la recta AB atraviesa al plano RR' á dicha proyeccion F'; esta distancia es igual á la perpendicular comun á la fuerza y á la AB, que se llama eje de momentos.

Y, finalmente, momento de una fuerza con respecto á un plano, al producto de la intensidad de esta fuerza por la distancia de su punto de aplicacion al plano.

De las definiciones precedentes resulta que el momento de una fuerza con relacion á un punto es nulo cuando el punto está situado sobre la direccion de la fuerza, porque entonces la distancia del punto á la recta es cero.

El momento de una fuerza con relacion á un eje puede ser nulo de dos maneras: primera, cuando la fuerza encuentra al eje, porque entonces el pié del eje está situado sobre la direccion de la fuerza proyectada sobre un plano perpendicular al eje, y segundo, cuando la fuerza es paralela al eje, porque entonces la proyeccion de la fuerza sobre un plano normal al eje es nula; estos dos casos están comprendidos en el enunciado siguiente: el momento de una fuerza con relacion á un eje es nulo cuando la direccion de la fuerza y el eje de los momentos están en un mismo plano.

Se le asigna en los cálculos á los momentos de las fuerzas los signos + ó — segun los convenios siguientes:

Cuando varias fuerzas obran en un mismo plano, se imagina que los puntos de aplicacion de estas fuerzas son arrastrados cada uno en la direccion misma de la fuerza que lo solicita; cada uno de estos desplazamientos ficticios puede ser considerado como el resultado de una rotacion alrededor del punto, tomado en el plano por centro de momentos: cuando la rotacion es en un sentido convenido se le asigna el $+$, y cuando es en el contrario el $-$; así, por ejemplo: si O (fig. 24) es el centro de momentos y F y F' las fuerzas aplicadas en A y A', el momento de la fuerza F, con relacion al punto O, es $+F \times OA$, y el de F' será $-F' \times OA'$, y la suma de ellos será $F \times OA - F' \times OA'$.

El momento de una fuerza con relacion á un eje recibe el mismo signo de la fuerza proyectada sobre un plano perpendicular al eje. El convenio admitido respecto á los signos de los momentos con relacion á un punto, comprende otro análogo relativo á los signos de los momentos con relacion á un eje, y por consiguiente, otro parecido á los momentos con relacion á un plano.

Sea, por ejemplo, AF una fuerza aplicada al punto A y obrando en el sentido AF, y sean OX, OY, OZ (figura 25) tres ejes coordenados rectangulares.

Proyectemos la fuerza sobre los tres planos XOY, YOZ, ZOX, que son respectivamente normales á los tres ejes, y obtendremos así las tres fuerzas $A'F'$, $A''F''$, $A'''F'''$: desde el punto O bajemos las perpendiculares OP, OP', OP'' á las tres fuerzas: los momentos de la fuerza AF, con relacion á los tres ejes, serán en valor absoluto

con relacion al eje	OZ	$A'F' \times OP$
» » »	OX	$A''F'' \times OP'$
» » »	OY	$A'''F''' \times OP''$

pero la direccion de la fuerza $A'F'$ tiende á arrastrar al punto A' alrededor del punto O y en el sentido que llevaria al eje OY hacia el OX, es decir, en sentido negativo; se deberá, pues, dar el signo — al momento con relacion al eje OZ: al contrario, la fuerza $A''F''$ tiende á arrastrar su punto de aplicacion en el sentido de OY hacia OZ, es decir, en sentido positivo, y la fuerza $A'''F'''$ tiende asimismo á arrastrar su punto de aplicacion en el sentido de OZ hacia OX, sentido igualmente positivo; se dará, pues, el signo + á los momentos con relacion á los ejes OX y OY; y en definitiva, los momentos de la fuerza AF, con relacion á los tres ejes, será

con relacion al $OZ ... -A'F' \times OP$
» » » $OX ... +A''F'' \times OP'$
» » » $OY ... +A'''F''' \times OP''$

El valor absoluto del momento de una fuerza puede ser representado por un área plana.

Sea, en efecto, A el punto de aplicacion de una fuerza, AF la fuerza en magnitud y direccion, y O el centro de los momentos, tomado en el plano de las fuerzas (figura 26). Bajemos desde el punto O la perpendicular OP sobre AF. El valor absoluto del momento de la fuerza con relacion al punto O será el producto $AF \times OP$. Ahora bien; unamos O con A y F: el triángulo OAF así formado, tiene por medida la mitad del producto de su base AF por su altura OP, y como ese producto es el momento de la fuerza AF con relacion al punto O, se deduce que este momento es el doble del área del triángulo OAF.

La misma interpretacion geométrica puede darse al momento de una fuerza con relacion á un eje, y es igual al doble del área del triángulo que tiene por base la proyeccion de la recta sobre un plano normal al eje, y por vértice el pié del eje, lo que equivale á decir que el momento de la fuerza con relacion al eje es igual en valor absoluto al doble de la proyeccion sobre un plano normal al eje del triángulo formado, uniendo un punto cualquiera del eje con la extremidad de la recta que representa la fuerza.

Se observará que en estas clases de productos, uno de los factores representa una longitud, y el segundo factor una fuerza, siendo independientes las respectivas unidades. La Mecánica presenta varios ejemplos de cantidades complejas que resultan de la multiplicacion de factores, que representan cantidades de naturalezas diferentes.

Propiedad de los momentos de la resultante y de las componentes.—El momento con relacion á una recta XY de la resultante de dos ó de varias fuerzas, paralelas ó concurrentes, es igual á la suma algebraica de los momentos de cada una de estas fuerzas con relacion á esta recta XY.

Supongamos que no haya más que dos fuerzas que componer y que estén en un mismo plano, pudiendo ser paralelas ó concurrentes. Tomemos los momentos de estas fuerzas con relacion á un punto O de su plano, es decir, con relacion á un eje normal al plano que pase por el punto O.

1.° Si las fuerzas F y F' son paralelas (fig. 27), bajemos desde el punto O una perpendicular comun OAB á sus direcciones; podremos admitir que A y B son los puntos de aplicacion de las fuerzas F y F'.

La resultante R será igual á $F+F'$ y estará aplicada en un punto I de la recta AB, tal que se tendrá

$$\frac{AI}{IB}=\frac{F'}{F}$$

de la cual se deduce:

$$\frac{AI}{AI+IB=AB}=\frac{F'}{F+F'}=\frac{F'}{R}$$

de donde $R\times AI=F'\times AB$
añadamos á los dos miembros de esta igualdad $(F+F')\times OA$, y tendremos:

$$R\times AI+(F+F')\times OA=F'\times AB+(F+F')\times OA$$

ó bien

$$R(AI+OA)=F\times OA+F'(AB+OA)$$
$$R\times OI=F\times OA+F'\times OB$$

ecuacion que demuestra que el momento $R\times OI$ de la resultante con relacion al punto O, es igual á la suma de los momentos $F\times OA$, $F'\times OB$ de las componentes con relacion al mismo punto. Lo mismo se verificará si las fuerzas fueran paralelas y dirigidas en sentido contrario. La ecuacion final es idéntica, con tal que se les dé signos convenientes á los momentos.

Se podria tambien demostrar que, gracias al empleo de los signos, se aplica el teorema al caso en que el centro de los momentos está comprendido entre las dos fuerzas.

Se puede concluir de aquí que la superficie del triángulo ORI es la suma algebraica de las áreas de los triángulos OAF y OBF'.

2.° Supongamos que las fuerzas no sean paralelas. Sean AF y AF' dos fuerzas concurrentes (fig. 28); la resultante R está representada en magnitud y direccion por la diagonal AR del paralelógramo $AFRF'$, construido sobre ellas, y el teorema de los momentos se convierte en la igualdad

$$\text{área } OAR = \text{área } OAF + \text{área } OAF'$$

Ahora bien; los tres triángulos OAR, OAF y OAF', que tienen una base comun OA, son entre sí como sus alturas, es decir, como las distancias RK, FH, $F'H'$ de los puntos R, F y F' á esta base.

Por el punto F, tiremos FL paralela á OA; la figura $HKLF$ será un rectángulo en el que $FH = KL$; además, los dos triángulos FLR y $AH'F'$ son rectángulos en L y en H', tienen el ángulo FRL igual al $AF'H'$ por tener sus lados paralelos, y por último, sus hipotenusas FR y AF' son iguales por lados opuestos del paralelógramo; luego el lado LR es igual al $F'H'$, y por lo tanto

$$RK = FH + F'H'$$

de donde se deduce que el triángulo OAR es la suma de los otros dos triángulos, lo que demuestra este teorema, que en Estática recibe el nombre de Teorema de Varignon.

Se puede demostrar que el teorema de los momentos para dos fuerzas paralelas no es más que un caso particular de cuando son concurrentes.

Sea, en efecto (fig. 29), dos fuerzas AF y $A'F'$, dos fuerzas aplicadas á los puntos A y A'; sea R su resultante, que se puede suponer aplicada á un punto A'' cualquiera de su direccion. Desde un punto cualquiera O, tomado en el plano de la figura, bajemos perpendiculares OP, OP', y OP'' sobre las direcciones de las tres fuerzas, y tendremos en virtud del teorema de momentos

$$R\times OP''=F\times OP+F'\times OP'$$

R es además la diagonal del paralelógramo, cuyos lados son F y F'. Ahora bien; imaginemos que el punto de concurso de las fuerzas F y F' se aleja indefinidamente; en el límite, las tres fuerzas R, F y F' serán paralelas, y la diagonal R del paralelógramo construido sobre F y F' se cambiará en la suma $F+F'$ de las dos fuerzas dadas.

La ecuacion de los momentos, siendo siempre cierta, por muy alejado que esté el punto de concurso de las fuerzas, seguirá verificándose en el límite cuando las fuerzas lleguen á ser paralelas, y puede servir para fijar la posicion verdadera de la resultante $F+F'$. Supongamos aún dos fuerzas dadas F y F'; pero que, en lugar de tomar los momentos con relacion á un punto de su plano, se toma los momentos con relacion á una recta cualquiera XY.

Proyectemos las fuerzas dadas F y F' y su resultante R sobre un plano normal á XY: obtendremos sobre este plano dos fuerzas f y f' y una tercera fuerza r, proyeccion de R, y decimos que r es la resultante de f y f'. En efecto, el paralelógramo construido sobre F y F', cuya diagonal es R, tiene por proyeccion sobre este plano un paralelógramo que tiene por lados f y f' y por diagonal r; luego r es resultante de f y f'; esto es suponiendo á las fuerzas concurrentes. Si fuesen paralelas, la fuerza R les sería tambien paralela, y será igual á su suma, y dividirá á la recta que une sus puntos de aplicacion en dos segmentos, que estarán entre sí en la relacion $\frac{F}{F'}$; pero la proyeccion de la figura sobre el plano normal á XY dará tres fuerzas f, f' y r, proporcionales á F, F' y R; la fuerza r será, pues, la suma de las fuerzas f y f', como la fuerza R lo es de las F y F', y el punto de aplicacion de r dividirá á la recta que une los de aplicacion de f y f' en dos segmentos que estarán en la relacion de $\frac{f}{f'}$; en resúmen, que r es en todos los casos la resultante de f y f'. El teorema de los momentos está, pues, demostrado para fuerzas proyectadas en el plano normal; ahora bien, los momentos de r f y f', con relacion al pié de XY, son por definicion los momentos de R, F y F' con relacion al eje; luego el teorema de los momentos es igualmente cierto y demostrado para el caso en que se tomen los momentos con relacion á un eje, admitiendo siempre dos fuerzas, ya paralelas, ya concurrentes.

Es fácil hacer extensivo el teorema á tantas fuerzas como se quiera, con tal de que ellas sean paralelas ó concurrentes en un mismo punto.

Sean F_1, F_2, F_3 .. F_n, n fuerzas que satisfacen á una ú otra de las condiciones; para encontrar la resultante de ellas, se puede componer F_1 con F_2, lo que dará una resultante R_1; despues se compondrá R con F_3, lo que dará una resultante R_2, y así sucesivamente, hasta que se haya llegado á componer la última fuerza F_n con la penúltima resultante R_{n-2}.

En cada operacion se tendrá que componer dos fuerzas, sean concurrentes ó paralelas, y por consiguiente, se les puede aplicar el teorema de los momentos, lo que nos dará una ecuacion, y tendremos

$$\begin{aligned} Mo\,F_1 + Mo\,F_2 &= Mo\,R_1 \\ Mo\,F_3 + Mo\,R_1 &= Mo\,R_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Mo\,F_n + Mo\,R_{n-2} &= Mo\,R \end{aligned}$$

y sumándolas y reduciendo los términos semejantes, tendremos: $Mo\,F_1 + Mo\,F_2 + \ldots + Mo\,F_n = Mo\,R$.

Luego el momento de la resultante es siempre la suma algebraica de los momentos de las componentes con relacion á un mismo eje.

Idea sucinta acerca de las condiciones generales de equilibrio de un punto y de un sistema de puntos.—Cuando un punto material, que supondremos primitivamente en reposo, llega á estar sometido á la accion de varias fuerzas, puede suceder que estas fuerzas se contrarresten mutuamente, de tal modo que permanezca el punto en reposo apesar de la accion de las fuerzas. En este caso se dice que el punto material está en equilibrio, ó bien que las fuerzas se equilibran sobre el punto.

Fácil es deducir la condicion á que deben satisfacer las fuerzas para que el punto sobre que obran esté en equilibrio. Estas fuerzas, cualesquiera que sean sus valores y direcciones, pueden reemplazarse siempre por una fuerza única, que es la resultante.

El punto sometido solamente á la accion de esta resultante debe, pues, permanecer en estado de reposo, lo mismo que cuando estaba sometido á las acciones simultáneas de las componentes; pero esto no puede verificarse, á ménos que la resultante sea nula; luego para que un punto esté en equilibrio bajo la accion de varias fuerzas, es necesario que la resultante de ellas sea nula. Además, es evidente que esta condicion basta para que el punto primitivamente en reposo no se ponga en movimiento bajo la accion de las fuerzas que se le han aplicado, puesto que éstas pueden reemplazarse por su resultante, y siendo ésta nula, el punto material se encuentra en el mismo caso que si no estuviese sometido á fuerza alguna.

Si muchas fuerzas que obran sobre un punto material en movimiento tienen una resultante nula, se dice que las fuerzas se equilibran. En el caso en que el punto estuviese sometido solamente á esta fuerza, se encontraría en las mismas condiciones que si no se le hubiese aplicado fuerza alguna, y su movimiento sería de la misma especie del que tenía antes de la aplicacion de la fuerza.

Cuando varias fuerzas aplicadas á un mismo punto se equilibran, es claro que una de ellas es igual y directamente opuesta á la resultante de todas las demás.

Hemos visto que los cuerpos se componen de partes infinitamente pequeñas que se llaman moléculas, y éstas reciben en Mecánica el nombre de *puntos materiales*; la reunion de éstos que tengan entre sí cierta dependencia, recibe el nombre de *sistema de puntos*, y por lo tanto equivale á un *sólido*; y si los diversos puntos que componen el sistema no pueden apartarse ni aproximarse entre sí, recibe el nombre de *sistema de puntos invariables* ó *sólido invariable*. Esta invariabilidad no existe realmente en la naturaleza, pues si bien hay sólidos los cuales parece no experimentan deformacion alguna con tal de que las fuerzas que se les apliquen no pasen de ciertos límites, es porque esta deformacion es muy pequeña para ser perceptible; para distinguir estos cuerpos, que son más ó ménos deformables bajo la accion de fuerzas, de los *sistemas invariables*, designaremos los primeros con el nombre de *sólidos naturales*.

Se dice que un *sistema de puntos invariables* está en equilibrio cuando cada uno de los puntos que constituyen el sistema se hallan sometidos á la accion de varias fuerzas que se equilibran en ellos; luego la condicion necesaria y suficiente para que un sistema de puntos invariables esté en equilibrio, es que todas las fuerzas que actúan en cada uno de ellos, al componerse entre sí, den una resultante nula, y como todo sistema de fuerzas puede siempre reducirse á dos, es preciso que una de ellas sea igual y contraria á la otra.

Vemos, por lo que acabamos de expresar, que la determinacion de las condiciones de equilibrio de un sistema invariable se funda en la reduccion de fuerzas que actúan en un sólido.

Un cuerpo libre en el espacio está solicitado por un número cualquiera de fuerzas, dándose para cada una de ellas su punto de aplicacion, su direccion y su intensidad; se trata de reemplazar estas fuerzas por otras equivalentes bajo el punto de vista del equilibrio y cuyo número sea el más pequeño posible.

Cuando las fuerzas son concurrentes ó paralelas, puede reducírselas á una fuerza única, su resultante, excepcion hecha del caso en que se obtiene un par: las fuerzas dadas se reducen entonces á dos, no pudiéndose llevar más lejos su reduccion.

Procuraremos probar que se puede siempre reducir á dos fuerzas un número cualquiera de ellas aplicadas á un sistema de puntos invariables, y que la reduccion á una fuerza única sólo es posible en casos particulares.

Se ve, pues, que el problema del equilibrio de un sistema de puntos invariables estará resuelto cuando hayamos encontrado las leyes de esta reduccion, porque es evidente que dos fuerzas aplicadas á un sistema invariable no pueden equilibrarse sino con la condicion de ser iguales y aplicadas en sentido contrario en dos puntos de una misma direccion. Se sabrá, por lo tanto, que un sistema de puntos invariables está en equilibrio verificando que las fuerzas que lo solicitan pueden reducirse á dos que tienen todas las condiciones.

Vamos á probar que se puede siempre reducir las fuerzas que solicitan á un sistema invariable á tres fuerzas, cuyos puntos de aplicacion son tres, tomados arbitrariamente en el sólido.

Sea F (fig. 32) una de las fuerzas dadas, y M su punto de aplicacion; podemos suponer aplicada esta fuerza en un punto O de su direccion; unamos O con A, B y C, que son tres puntos del sistema, y estas tres rectas generalmente no estarán en un mismo plano. Se las puede considerar como las direcciones de las aristas de un paralelepípedo, cuya diagonal tendrá por direccion la OF; se podrá, pues, descomponer en el punto O la fuerza $OF'=F$ en tres componentes OR', OS' y OT', dirigidas segun las OA, OB y OC. En seguida se pueden trasportar las fuerzas OR', OS' y OT' á los puntos A, B y C, lo que dará tres fuerzas AR, BS y CT, que reemplazarán á la fuerza MF.

Se hará lo mismo para cada una de las fuerzas dadas, y para cada una se obtendrán tres componentes aplicadas en A, B y C.

Todas las fuerzas aplicadas en A se compondrán en una fuerza única por el polígono de las fuerzas, y lo mismo con las aplicadas en B y C, y se obtendrá así por esta descomposicion y recomposicion tres fuerzas: la primera aplicada en A, la segunda en B y la tercera en C, que equivaldrán á todas las fuerzas dadas. Esta descomposicion puede hacerse de infinitas maneras, pues depende de la posicion arbitraria de O sobre la direccion MF.

Visto ya que podemos reducir á tres fuerzas todas las que actúan en el sistema, vamos á reducir estas tres á dos.

Por el punto A (fig. 33) arbitrariamente tomado en la direccion de una de las fuerzas R y la fuerza BS hagamos pasar un plano: éste cortará generalmente á la recta CT en un punto M, donde podemos suponer trasportada la fuerza T. Unamos A con M; la recta AM encuentra á la direccion BS en un punto B', y podemos suponer la fuerza S aplicada en este punto. En el plano $ABSM$, tiremos por los puntos A y M dos rectas AA' y MM' paralelas á BS: descompongamos la fuerza S en dos paralelas aplicadas en A y M; la componente $AS_1 = S \times \frac{B'M}{AM}$ y la $MS_2 = S \times \frac{AB'}{AM}$.

Se puede reemplazar la fuerza S por sus componentes AS_1 y MS_2; en seguida se puede componer AS_1 con AR y MS_2 con MT por la regla del paralelógramo; por estas operaciones hemos reducido las tres fuerzas R, S y T á dos equivalentes, y por lo tanto, todas las del sistema á dos.

Si las dos fuerzas AP y MQ están en un mismo plano, pueden reducirse todas á una sola fuerza.

El razonamiento supone que el plano tirado por el punto A y la recta BS encuentra en algun punto á la CT. Podria suceder que, tomando al acaso el punto A en la direcccion de AB, el plano ABS fuese paralelo á la CT; en este caso se puede cambiar la posicion del plano y trazarlo de modo que encuentre á CT, tomando otro punto A sobre la recta AR, ó bien si el plano ABS no variase de posicion con A, esto sería señal de que las dos fuerzas AR y BS están en un mismo plano; ellas tendrian, pues, una resultante única, y la reduccion de las tres fuerzas á dos se obtendria por la composicion de estas dos fuerzas dadas que se hallan en un plano, y así obtendríamos dos fuerzas, que son esta resultante, y la tercera fuerza.

La consideracion de los pares conduce de una manera más sencilla á este mismo resultado.

Sea una fuerza F (fig. 34) aplicada en un punto A de un sistema de puntos invariables: tomemos arbitrariamente uno de ellos, O, y si no formase parte del sistema hágasele formar, uniéndolo á él invariablemente. No se cambiará en nada el sistema de fuerzas porque se aplique en O dos fuerzas F y—F iguales y contrarias, y tomaremos estas dos fuerzas iguales y paralelas á la fuerza AF; tenemos, pues, una fuerza F aplicada en O y dos fuerzas F y—F aplicadas la una en A y la otra en O, formando, por lo tanto, un par; luego toda fuerza F puede ser reemplazada por el sistema formado por ella misma, trasportada á un punto cualquiera, O, paralelamente á sí misma, y por un par cuyo brazo de palanca OP es la distancia del punto O á la direccion AF de la fuerza.

Podemos hacer lo mismo para cada una de las fuerzas dadas; trasportaremos todas las fuerzas paralelamente á sí mismas al punto *O*, unido invariablemente al sistema; de este trasporte resultan tantos pares como fuerzas haya; se compondrán en conjunto todas las fuerzas aplicadas en *O*, lo que nos dará una resultante aplicada en este punto; despues se compondrán tambien entre sí todos los pares, lo que nos dará un par resultante; luego todo sistema de fuerzas puede reducirse á una fuerza única y á un par único.

El par puede trasportarse adonde se quiera en planos paralelos, y haremos de manera que una de las fuerzas, *P*, de él (fig. 35) tenga un punto comun *A* con la resultante *R*. Componiendo las dos fuerzas *R* y *P*, habremos reducido el sistema de las fuerzas á dos componentes: la fuerza *S* y la—*P*.

Observaremos que cualquiera que sea el punto *O* donde se trasporte las fuerzas dadas, su resultante *R* tendrá la misma magnitud y direccion que en el espacio, porque esta resultante es el último lado del polígono de las fuerzas, cuyos lados no varían de magnitud ni de direccion en cualquier punto que se le construya. Esta resultante ha recibido el nombre de resultante de traslacion del sistema de las fuerzas dadas.

La direccion del plano del par resultante y la magnitud de este par varían al contrario con la posicion del punto *O*. Visto ya que las fuerzas que actúan sobre un sistema de puntos invariables pueden reducirse á dos fuerzas ó á una fuerza y un par, pasemos á determinar las condiciones de equilibrio de un sistema de puntos invariables. Si se adopta el primer modo de reduccion, para que el equilibrio exista es preciso que las dos fuerzas sean iguales y obren en sentido contrario segun una sola y misma direccion, y si se adopta el segundo, es preciso que el par resultante y la resultante de traslacion sean nulos separadamente. Sea, en efecto (fig. 36), AF y BF' las dos fuerzas á las cuales han quedado reducidas las fuerzas que actuaban sobre el sistema. Si son iguales y obran en sentido contrario la una de la otra, segun la direccion AB, que une sus puntos de aplicacion, estas dos fuerzas se equilibrarán, y por lo tanto, la condicion enunciada es suficiente; vamos á ver que tambien es necesaria.

Supongamos, en efecto, que el equilibrio tenga lugar sin que la direccion de la fuerza BF' pase por el punto A. El equilibrio del sólido no será turbado por una nueva ligazon, cualquiera que sea. Hagamos fijo el punto A (fig. 37). El cuerpo sólido dejará de estar enteramente libre, pero podrá girar alrededor del punto A de una manera cualquiera. Ahora bien, la fuerza F' obra por hipótesis fuera de este punto; tiende, pues, á arrastrar el cuerpo y á hacerle girar alrededor del punto A, y por consiguiente, el equilibrio es imposible á ménos que la fuerza BF' no obrase en la direccion AB. Se probaria lo mismo fijando el punto B y que la fuerza AF obre segun la misma recta. Las dos fuerzas F y F' aplicadas segun la misma direccion, se componen en una sola é igual á su suma algebraica. El cuerpo hecho libre estaria solicitado por esta resultante y cederia á su accion; el equilibrio, pues, sería imposible á ménos que esta fuerza no fuese nula, lo que exige que las fuerzas F y F' sean iguales y dirigidas en sentido contrario; las condiciones, pues, son necesarias y suficientes.

Supongamos que las fuerzas hayan sido reducidas á una fuerza y á un par. Sea R la resultante de traslacion y $(F-F)$ el par (fig. 38), y AB el brazo de palanca del par: podemos trasportar el par paralelamente á sí mismo de manera que el punto A esté situado en la direccion de la fuerza R.

Esto supuesto, el equilibrio no se turbará haciendo fijo el punto A. La fuerza $-F$ perpendicular á AB pasa fuera del punto fijo y tiende á hacer girar al sistema de puntos alrededor de este punto; el equilibrio no es, pues, posible á ménos que $F=O$, lo que reduce á cero el par resultante. Las fuerzas que solicitan al sistema de puntos se reducen, pues, á la resultante de traslacion R, y el sistema, siendo libre, cederia á la accion de esta fuerza, y por lo tanto no estaria en equilibrio á ménos que ella no fuese nula, luego $R=O$. Estas condiciones necesarias son suficientes, porque si el par es nulo y la resultante de traslacion tambien lo es, todo pasa como si el sistema de puntos invariables no estuviese solicitado por ninguna fuerza, y entonces su equilibrio está asegurado.

XIX

Definicion de gravedad, peso, densidad y peso específico de los cuerpos homogéneos.

Gravedad es una fuerza en virtud de la cual los cuerpos abandonados á sí mismos caen, es decir, se dirigen al centro de la tierra. La direccion de esta fuerza se llama vertical, y es la línea recta que siguen los cuerpos en su descenso, la cual se determina por la plomada en equilibrio, ó sea la direccion de un hilo en equilibrio que lleva en un extremo un peso cualquiera. Siendo la gravedad una causa de movimiento, se la puede considerar como una fuerza. La gravedad ejerce su accion hasta en las partes más ínfimas de los cuerpos, y actúa igualmente sobre todas sus moléculas; porque la experiencia demuestra que en el vacío, es decir, en un espacio privado de aire, cuerpos de masas desiguales, como una bala de plomo, una esfera de corcho, etc., caen desde la misma altura con igual velocidad; de donde se deduce que las moléculas de un cuerpo que caen descienden todas de la misma manera que si estuvieran unas junto á otras sin ningun enlace entre sí: de modo que la accion de la gravedad se ejerce sobre todas las moléculas y con igual intensidad en cada una de ellas.

La intensidad de la gravedad varía en razon inversa del cuadrado de la distancia del cuerpo al centro de la tierra, porque no es más que un caso particular de la ley de la atraccion universal, en virtud de la cual los cuerpos en la naturaleza se atraen en razon directa de las masas, é inversa del cuadrado de las distancias.

Peso.—Hemos visto que sobre cada una de las moléculas de los cuerpos ejerce su accion la fuerza de la gravedad y que la direccion de esta fuerza es hacia el centro de la tierra, y á causa de la gran distancia que hay desde dicho punto á las moléculas del cuerpo, podemos considerar á dichas fuerzas como concurrentes en un punto infinitamente alejado, es decir, como paralelas; de modo que un cuerpo se encuentra solicitado en cada una de sus moléculas por fuerzas iguales, paralelas y dirigidas en el mismo sentido; luego el cuerpo estará sometido á la accion de la resultante de todas ellas, la cual es paralela á las mismas, dirigidas en el mismo sentido, é igual á la suma de todas estas fuerzas; la magnitud de esta resultante es lo que se llama *peso* del cuerpo.

Densidad.—Se llama *densidad* de un cuerpo la masa que este cuerpo contiene en la unidad de volúmen. No se puede conocer la densidad absoluta, es decir, la cantidad real de materia que un cuerpo contiene; puede únicamente determinarse su *densidad relativa*, ó sea la cantidad de materia que contiene á igualdad de volúmen, comparado con otro cuerpo tomado como unidad. Este cuerpo, para los sólidos y líquidos, es el agua destilada á 4° sobre cero del termómetro centígrado; por consiguiente, al decir que el platino tiene 22, significamos que á igualdad de volúmen contiene 22 veces más materia que el agua. A los gases se les compara con un cuerpo de la misma naturaleza, el aire atmosférico, en razon á que conteniendo en igualdad de volúmen mucha ménos materia que el agua, resultarian números muy inferiores á la unidad.

Representando por V el volúmen de un cuerpo, por M su masa y por D su densidad absoluta, es evidente que la cantidad de materia contenida en el volúmen V será $M=V\times D$, de donde se deduce que $D=\frac{M}{V}$ luego podemos decir que la densidad absoluta de un cuerpo es la relacion de su masa á su volúmen.

Peso específico.—Hemos dicho que el peso de un cuerpo es la resultante de todas las fuerzas de la gravedad que actúan sobre sus moléculas. Este es el peso absoluto, que es igual á la presion que ejerce sobre el obstáculo que le impide caer: esta presion es tanto mayor cuanta más materia contiene, lo que se expresa diciendo que el peso de un cuerpo es proporcional á su masa.

El peso relativo es la relacion de su peso absoluto á otro tomado por unidad, y se determina por las balanzas, romanas, etc.; y el *peso específico* es la relacion de un peso relativo bajo un cierto volúmen al de otro volúmen igual de agua destilada á 4° sobre cero del termómetro centígrado, que es la temperatura bajo la cual el agua adquiere su máxima densidad.

El peso de los cuerpos á volúmen igual, siendo proporcional á la masa, resulta que si un cuerpo tiene dos, tres, etc., veces más materia que el agua, debe ser dos, tres, etc., veces más pesado; por consiguiente, la relacion de los pesos, ó sea el peso específico, debe ser la misma que la relacion entre las masas, ó sea la densidad relativa; por lo cual las expresiones densidad relativa y peso específico se consideran equivalentes. Sin embargo, si la gravedad desapareciera, no habria ni peso absoluto ni peso relativo, mientras que siempre existiria la densidad, que es la relacion de la masa al volúmen.

El peso P de un cuerpo siendo proporcional á su masa M y á la intensidad de la gravedad que se representa por g, tendremos $P=Mg$, de donde $M=\frac{P}{g}$.

Como g es conocida y P se puede determinar por la balanza, podremos encontrar por esta fórmula la masa de un cuerpo.

Poniendo en vez de M su valor $V.D$, se tiene $P=V.D.g$. Siendo P', V', D' el peso, el volúmen y la densidad de otro cuerpo, se tendrá $P'=V'.D'.g$, y dividiendo una por otra, tendremos

$$\frac{P}{P'}=\frac{V.D}{V'.D'}$$

lo que nos dice que los pesos son proporcionales á los productos de los volúmenes por las densidades.

Si $D=D'$, $\frac{P}{P'}=\frac{V}{V'}$, lo que nos dice que los pesos á densidades iguales son proporcionales á los volúmenes.

Si $V=V'$, tendremos $\frac{P}{P'}=\frac{D}{D'}$ lo que demuestra que si los volúmenes son iguales, los pesos son proporcionales á las densidades.

Si $P=P'$, la fórmula nos dará $1=\frac{V.D}{D'V'}$ ó bien $\frac{V'}{V}=\frac{D}{D'}$ es decir, que los volúmenes están en razon inversa de las densidades.

XX

Definicion de centro de gravedad.—Determinacion práctica de este punto.

Hemos visto que el peso de un cuerpo era la resultante de todas las fuerzas de la gravedad que actuaban sobre cada una de las moléculas; el punto de aplicacion de esta resultante es lo que se llama *centro de gravedad;* de modo que lo podemos definir diciendo que es el punto por donde pasa constantemente la direccion del peso del cuerpo, cualquiera que sea la posicion que se le dé. Habiéndose sustituido todas estas fuerzas por su resultante general, se puede considerar el centro de gravedad de un cuerpo como un punto donde está concentrada toda su masa. Como las moléculas de un cuerpo pueden tener una posicion tal que su centro de gravedad caiga fuera de él, para que este punto ficticio pueda entrar en las consideraciones que se van á exponer para su determinacion, es preciso suponerlo invariablemente unido al sistema.

Determinacion práctica de este punto.—Siendo el centro de gravedad de un cuerpo el centro de un sistema de fuerzas paralelas, podíamos seguir para determinarlo el mismo procedimiento empleado para encontrar éste; pero como el número de moléculas es muy grande, la operacion sería interminable, y hemos de recurrir á algunos procedimientos prácticos.

Cuando un cuerpo está suspendido de una cuerda por un punto de su superficie, toma una cierta posicion de equilibrio. La fuerza que tiende á hacerle caer es su peso, y el punto de aplicacion de esta fuerza es, como hemos dicho, su centro de gravedad. Si el cuerpo no cae, es porque experimenta de parte de la cuerda una traccion ó un esfuerzo dirigido de abajo arriba, que se equilibra con su peso, y debe por consiguiente serle igual y directamente opuesto. De aquí se deduce que la direccion AB (fig. 30), prolongada por el interior del cuerpo, debe pasar por su centro de gravedad.

Si se suspende el cuerpo por otro punto de su superficie, tomará una nueva posicion de equilibrio (figura 31); esta nueva posicion de la cuerda CD, prolongada al interior del cuerpo, tambien pasará por su centro de gravedad. Si se conserva la traza de la primera recta AB, el centro de gravedad G se hallará en la interseccion de AB con CD.

Este método presenta la dificultad del trazado real de las rectas AB y CD en el interior del cuerpo; pero si no se deduce por él exactamente la posicion del centro de gravedad, nos dará en gran número de casos indicaciones suficientes sobre el lugar que ocupa este punto en el interior del cuerpo. Tomemos, por ejemplo, un baston guarnecido en un extremo por un puño de hierro, y en el otro, por una contera del mismo metal. El baston es simétrico con relacion á su eje longitudinal, y es claro que el centro de gravedad estará situado sobre este eje; bastará, pues, para determinarlo suspenderlo de una cuerda hasta que permanezca horizontal, cuya posicion se le da por tanteos, y el punto de suspension para mantenerlo horizontal indica el punto del eje donde se encuentra el centro de gravedad; en efecto, cuando el centro de gravedad de un cuerpo está fijo, este cuerpo permanece en equilibrio alrededor de él en todas las posiciones que se dé al cuerpo; es decir, que si se hace girar alrededor de este punto, llevándole á una posicion cualquiera, y se le abandona en ella, el cuerpo permanece en ella; y así debe suceder, puesto que la resultante de las fuerzas de la gravedad pasaria siempre por este punto fijo, y por lo tanto, su efecto será destruido por esta fijeza; y esto se ve en el baston, que si se le hace girar alrededor del punto, dándole una segunda posicion, en ella permanece.

XXI

Reglas para determinar el centro de gravedad de una línea limitada de longitud, del perímetro de un polígono y de un arco de circunferencia.

Siendo el centro de gravedad de un cuerpo el centro de las fuerzas paralelas de la gravedad, aplicadas á todas las moléculas de este cuerpo, y siendo estas fuerzas iguales, se deduce que la distancia del centro de gravedad á un plano cualquiera es igual á la distancia media de todas las moléculas al mismo plano; por consiguiente, la posicion de este centro en el cuerpo no depende de ninguna manera de la accion de la gravedad, sino solamente de la manera como todas las moléculas están dispuestas las unas respecto de las otras, es decir, que depende: primero, de la figura del cuerpo ó del espacio que ocupa; y segundo, de la densidad relativa de estas diferentes partes.

Se ve, efectivamente, que si la figura y el volúmen, quedando los mismos, se separan una de otro, en una cierta parte del cuerpo, y por lo tanto acercándose á otras del mismo, las fuerzas que obraban sobre ellas, no estando ya repartidas de la misma manera, la posicion de la resultante general cambiará, y por consiguiente, la posicion del centro de gravedad. Así, en la determinacion de este punto es preciso tener en cuenta, no solamente la figura del cuerpo, sino tambien la ley segun la cual la densidad varía en toda su extension.

Pero si, para resolver más sencillamente la cuestion, se suponen desde luego los cuerpos perfectamente homogéneos ó uniformemente densos en todos sus puntos, la posicion del centro de gravedad no dependerá ya sino de su figura, y la investigacion de ellos llegará á ser un simple problema de geometría, pues los pesos reales ó ficticios son proporcionales á las longitudes, á las áreas ó á los volúmenes.

En esta investigacion, nos apoyaremos en los lemas siguientes, que son consecuencias evidentes de la teoría de las fuerzas paralelas, para que debamos entrar en detalles de su demostracion:

1.° Toda figura descomponible en muchas partes, que todas tengan sus centros de gravedad en un punto situado en una recta ó plano determinado, en él se encontrará el centro de gravedad.

2.° Toda figura que tenga un eje ó un plano de simetría, su centro de gravedad se hallará en este eje ó en este plano.

3.° Toda figura que, sin ser simétrica con relacion á un punto, á un eje ó á un plano, es, sin embargo, descomponible en partes que dos á dos tengan pesos iguales y estén colocadas de tal modo que las líneas que unan sus centros de gravedad queden divididas en dos partes iguales por este punto, eje ó plano, en él estará el centro de gravedad de la figura.

4.° Toda figura que tenga un centro geométrico tiene su centro de gravedad en este punto.

Centro de gravedad de una línea recta limitada de longitud.—El punto de aplicacion de la resultante de los pesos iguales de dos puntos materiales está en el punto medio de la recta que los une, porque se puede considerar á estos pesos como dos fuerzas iguales paralelas y que obran en el mismo sentido, y sabemos que la resultante tiene un punto de aplicacion en el punto medio de la recta que une los de aplicacion de las fuerzas, que son estos puntos.

Por consiguiente, el centro de gravedad de una recta material homogénea está en su punto medio, porque puede considerarse que está compuesta de elementos materiales iguales entre sí dos á dos y equidistantes del punto medio; cada par de estos elementos tiene su centro de gravedad en el punto medio de la recta; luego el centro de gravedad de todos los pares de elementos, ó sea de toda la recta, estará en su punto medio.

Para encontrar el centro de gravedad de un sistema de dos rectas, se unen sus centros de gravedad, es decir, los medios de estas dos rectas, y despues se divide la recta así obtenida en partes inversamente proporcionales á los pesos ficticios de las rectas, es decir, á sus longitudes.

Para un número cualquiera de rectas, formando ó no polígono y situadas ó no en el mismo plano, se determina del mismo modo el centro de gravedad, considerando cada recta como un peso proporcional á su longitud y aplicado en su medio, y obrando como para la composicion de fuerzas paralelas.

Centro de gravedad del perímetro de un polígono regular.—Sea *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *h* (fig. 39) el perímetro que consideramos, *ah* su cuerda, *o* el centro de la circunferencia circunscrita y *r* el radio *om*.

La línea *od*, perpendicular á la cuerda, contiene el centro de gravedad buscado, por ser el eje de simetría de la figura. Para determinar su distancia al centro *o*, consideraremos los momentos de las fuerzas *ab*, *bc*,

cd, etc., aplicadas en sus puntos medios m, m' y m'', respecto al plano perpendicular al eje, y que pase por o, y cuya traza con el que contiene la línea quebrada es la recta $a' h'$.

Llamemos x la distancia buscada Go, l la longitud de la línea quebrada, c la de la cuerda ah, y siendo el momento de la resultante de varias fuerzas paralelas con respecto á un plano igual á la suma de los momentos de las componentes con respecto al mismo plano, tendremos

$$lx = ab \times mk + bc \times m'k' + cd \times m''k'' + \ldots \;(\alpha)$$

pero los triángulos semejantes abq y mko nos dan

$$ab : aq :: om : mk$$

de donde $mk = om \times \frac{aq}{ab} = r \times \frac{a'b'}{ab}$ y del mismo modo $m'k' = r\frac{b'c'}{bc} m''k'' = r\frac{c'd'}{cd}$, etc., y sustituyendo estas expresiones de la ecuacion (α) tendremos $lx = r.a'b' + r.b'c' + r.c'd' + \ldots$ ó bien $lx = r(a'b' + b'c' + c'd' + \ldots) = r.ah = r.c$, de donde $x = \frac{r.c}{l} (\beta)$ ó bien $l : c :: r : x$.

Lo que manifiesta que el centro de gravedad de la línea poligonal regular se halla sobre el eje de simetría y á una distancia del centro de la circunferencia inscrita igual á la cuarta proporcional entre la longitud del perímetro, su cuerda y el radio de la circunferencia inscrita.

Como caso particular vamos á encontrar el centro de gravedad de la línea quebrada que forma el contorno del triángulo ABC (fig. 40).

La cuestion se reduce á hallar el punto de aplicacion de la resultante de tres fuerzas paralelas aplicadas en los puntos medios de A', B', C', de los lados BC, AC y AB, y proporcionales respectivamente á las longitudes de estos lados.

El punto D de aplicacion de la resultante de las fuerzas aplicadas en A' y C', dividirá á la recta $A'C'$ en partes inversamente proporcionales á los lados CB y AB, y tendremos

$$\frac{A'D'}{C'D'}=\frac{AB}{BC}=\frac{2A'B'}{2B'C'}=\frac{B'C'}{A'B'}$$

y por consiguiente, la recta $B'D$ divide en dos partes iguales al ángulo $C'B'A'$, y en esa bisectriz estará el punto de aplicacion de la resultante de las tres fuerzas aplicadas en A', B' y C', es decir, el centro de gravedad buscado. Del mismo modo se demostraria que dicho centro ha de encontrarse en la bisectriz del ángulo $B'A'C'$ y en la del ángulo $B'C'A'$; por lo tanto, se encontrará en G, punto de interseccion de estas bisectrices, que es el centro del círculo inscrito en el triángulo $A'B'C'$, que se obtiene uniendo dos á dos los puntos medios de los lados del ABC.

Centro de gravedad de un arco de circunferencia.—El arco es una línea poligonal regular de un número infinito de lados rectilíneos é infinitamente pequeños, y como la situacion del centro de gravedad de la línea poligonal es independiente del número de sus lados y de la magnitud de éstos, resulta que, si llamamos R al radio del arco (fig. 41), C la cuerda, L la longitud del arco y x la distancia del centro de gravedad al centro del arco, medida sobre el radio BO de simetría, se tiene, en virtud de la fórmula (β), $x = R\frac{C}{L}$ que expresa que el centro de gravedad del arco se halla sobre su radio de simetría y á una distancia del centro del arco que es una cuarta proporcional á la longitud del arco, á la cuerda y al radio. Si se quiere referir esta distancia al punto medio B del arco, se tiene, llamándola x', $x' = BG = BO - OG = R - R\frac{C}{L} = R\frac{L-C}{L}$ que expresa que la distancia del centro de gravedad del arco de círculo al punto medio de éste es una cuarta proporcional entre la diferencia entre su longitud y su cuerda, la longitud y el radio.

Centro de gravedad del contorno de un rectángulo.—Este centro se halla en su centro de figura. En efecto, el contorno del rectángulo $abcd$ (fig. 42) tiene su centro de gravedad sobre los dos ejes de simetría mn y pq; luego estará en la interseccion de éstos, que es el centro de figura.

Tambien puede demostrarse diciendo que la resultante parcial de las dos fuerzas iguales á los lados opuestos ab y cd pasa por el punto medio de pq, y la de las otras dos ad y bc pasa por el mismo punto medio G de la mn; luego la resultante total de las cuatro fuerzas, que es la proporcional al contorno del rectángulo, pasa por su centro G.

Centro de gravedad del contorno de un paralelógramo.—Se hallará en la interseccion de sus diagonales. En efecto, como cada dos lados opuestos son iguales, las fuerzas proporcionales á ellos tendrán una resultante aplicada en el medio de las rectas pq y mn

(figura 43), que une sus puntos de aplicacion; luego el centro de gravedad del contorno será el punto *G*, comun á ambos y á las diagonales *db* y *ac*.

Centro de gravedad del perímetro de un polígono regular.—Se halla en el centro de dicho perímetro.

En efecto, sea el pentágono *abcde* (fig. 44); su centro de gravedad se hallará en el plano de la figura, y como además ha de hallarse en los ejes de simetría *em* y *dn*, que unen dos vértices cualesquiera con el medio de los lados opuestos á ellos, estará en el punto *G* de su interseccion, que es el centro.

XXII

Centro de gravedad de un triángulo, de un trapecio, de un cuadrilátero, de un polígono en general y de un sector circular.

Centro de gravedad de un triángulo.—Para hallar el centro de gravedad de la superficie de un triángulo *ABC* (fig. 45), le supondremos dividido en fajas sumamente estrechas por medio de rectas paralelas á uno de los lados *AC*; por ejemplo: el centro de gravedad de cada una de estas fajas, que viene á ser una recta material, estará en su punto medio, y la recta *BD* que une el vértice *B* con el punto medio del lado opuesto, contendrá los centros de gravedad de todas las fajas ó rectas materiales que componen el triángulo, y en ella estará el centro de gravedad de éste; del mismo modo se verá que el centro de gravedad del triángulo se encontrará en la recta CE que une el vértice C con el medio lado opuesto; por consiguiente, el centro de gravedad del triángulo está situado en G, interseccion de las rectas BD y CE.

La recta DE que une los puntos medios D y E de las rectas AB y AC es paralela al tercer lado é igual á su mitad. Los triángulos GDE y GBC son semejantes y sus lados homólogos son proporcionales; luego DG es la mitad de BG ó la tercera parte de toda la recta BD.

Luego el centro de gravedad de un triángulo está en la recta que une el vértice con el punto medio de la base á la tercera parte de esta recta, contando desde la base, ó á los dos tercios de la misma, contando desde el vértice.

Centro de gravedad de un trapecio.—Sea el trapecio $abcd$ (fig. 46), cuyo centro de gravedad tratamos de hallar; para ello descompongámoslo en dos triángulos abd y bcd por medio de la diagonal bd. El centro de gravedad del primer triángulo está en g y el del segundo en g'; luego el centro de gravedad del trapecio estará en uno de los puntos de la recta gg', porque es la suma de los dos triángulos abd y bcd, y considerando la masa de estos dos cuerpos como concentrada en sus centros de gravedad g y g', nos encontraremos en el caso de la composicion de fuerzas paralelas aplicadas en los puntos g y g' y que obran en la misma direccion, y el trapecio es su resultante.

Por otra parte, si se prolongan los dos lados no paralelos ab y cd hasta su encuentro en su punto f, se forman dos triángulos semejantes fbc y fad, y que tienen por base los lados paralelos del trapecio ad y bc, y como la línea que va desde el vértice f al medio n de la base inferior, pasa por el medio m de la base superior, se deduce que esta línea fn pasa por los centros de gravedad de los dos triángulos, y por consiguiente, del trapecio, que es su diferencia, pues nos encontramos en el caso de la composicion de dos fuerzas paralelas y obrando en sentido contrario, estando las dos fuerzas representadas por los dos triángulos, el mayor y el menor, y la resultante por el trapecio, que es su diferencia; luego el punto de aplicacion de esta resultante, ó sea el centro de gravedad del trapecio, se hallará en la recta que une los de aplicacion de las componentes; y como éstos están en la recta fn, que une sus centros de gravedad, en ella estará el del trapecio. Luego teniendo que hallarse en la recta fn y en la gg', estará en g el encuentro de estas dos.

Para determinar la distancia Gq ó Gp á que se halla de cualquiera de las bases, establezcamos la ecuacion de los momentos respecto al plano que pasa por bc perpendicular al de la figura; y si llamamos B á la base bc, b á la ad, h la altura pq, x la distancia Gq, é y la distancia Gp á la base superior, tendremos $abcd \times x = bcd \times \frac{1}{3}h + abd \times \frac{2}{3}h$, porque el momento de la componente bcd es igual á esta fuerza multiplicada por la distancia que hay desde su punto de aplicacion á la recta, pero la altura del triángulo y del trapecio son iguales; luego el momento de bcd es $bcd \times \frac{1}{3}h$; lo mismo diríamos del de abd.

Siendo $abcd = \frac{B+b}{2} \cdot h$, $bcd = \frac{B}{2} \cdot h$ y $abd = \frac{b}{2} \cdot h$, sustituyendo estos valores en la expresion anterior, tendremos

$$\frac{B+b}{2} \cdot h \cdot x = \frac{B}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{3} h + \frac{b}{2} \cdot h \cdot \frac{2}{3} h = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} (B+2b)$$

de donde

$$x = \frac{h}{3} \times \frac{B+2b}{B+b} (\gamma)$$

Del mismo modo, para tener la distancia y á la base superior, formaríamos la ecuacion de momentos con respecto al plano que pasa por ella, y de una manera análoga tendríamos $y = \frac{h}{3} \times \frac{b+2B}{B+b} (\delta)$

Dividiendo las dos ecuaciones (γ) y (δ) nos dará

$$\frac{x}{y} = \frac{B+2b}{b+2B}$$

De donde se deduce que el centro de gravedad de un trapecio está en la línea que une los puntos medios de las dos bases paralelas y divide á esta línea en la relacion de las dos sumas, que se obtiene sumando por una parte con la primera base dos veces la segunda, y por otra á la segunda con dos veces la primera.

De aquí podemos hacer la construccion gráfica siguiente: prolónguese ad la cantidad dN igual á B, y la bc la cantidad bM igual á b, y la línea MN pasa por G.

En efecto, los triángulos semejantes GnM y GmN dan $\frac{x}{y} = \frac{Gq}{Gp} = \frac{Mn}{Nm}$ ó bien $\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}B + b}{\frac{1}{2}b + B} = \frac{B+2b}{b+2B}$

Observaremos que la proporcion precedente no depende de la altura del trapecio, sino únicamente de la relacion de las dos bases; de manera que es la misma para todos los trapecios posibles de bases proporcionales.

Si $B=b$, la fórmula anterior se trasforma en $\frac{x}{y}=\frac{3}{3b}$ de donde $x=y$, como en efecto debe suceder, pues en este caso el trapecio se convierte en un paralelógramo. Si $b=o$, tendremos $\frac{x}{y}=\frac{B}{2B}=\frac{1}{2}$, y por consiguiente, $x=\frac{1}{2}y$, y este resultado debe ser, pues en este caso, el trapecio se trasforma en un triángulo.

Puede tambien hallarse el centro de gravedad de la manera siguiente: despues de haber determinado la línea $g\,g'$, donde debe hallarse el centro de gravedad del trapecio por la descomposicion de éste en los dos triángulos abd y bcd, dividamos el trapecio en los dos triángulos abc y adc por la diagonal ac, y determinemos la línea $g_1\,g'_1$ de los centros de gravedad de estos triángulos, donde tambien ha de hallarse el del trapecio; luego teniendo que hallarse en $g\,g'$ y $g_1\,g'_1$, se encontrará en G, interseccion de estas dos líneas.

Centro de gravedad de un cuadrilátero.—Sea el cuadrilátero $ABCD$ (fig. 47); tiraremos las diagonales AC y BD, así como las rectas AI y CI, que van desde los vértices A y C al punto I, medio de la diagonal BD.

El centro de gravedad del triángulo ABD estará en K, al tercio de AI, á partir del punto I; el del triángulo BDC se encontrará del mismo modo en L, y el del cuadrilátero estará por consiguiente en un punto G de la línea KL, que se determinará por el teorema de la composicion de fuerzas paralelas aplicadas en los puntos K y L, y tendremos $KG : GL ::$ fuerza BCD : fuerza ABD, y como á las fuerzas se las puede sustituir por las superficies equivalentes, la proporcion anterior nos dará $KG : GL ::$ triángulo BCD : triángulo ABD; pero estos dos triángulos, que tienen la misma base BD, son entre sí como sus alturas CE y AE, y tendremos $KG : GL :: CE : AE$. Si ahora tomamos $AE'=CE$, resulta que $AE=CE'$, y sustituyendo, tendremos $KG : GL :: CE : AE :: AE' : CE'$; luego la línea $E'G$ pasa por el punto I, y recíprocamente la IE' que une I con E', tal que AE' sea igual á $E\,C$, contiene el centro de gravedad G.

Raciocinando de la misma manera sobre los triángulos ABC y ADC (fig. 48), que tienen por base la diagonal AC, se concluye que si se une el medio H de AC con el punto E'' tomado sobre DB, de manera que la longitud BE'' fuese igual á DE, la línea obtenida de este modo contendria tambien el centro de gravedad del cuadrilátero; luego para encontrar el centro de gravedad de un cuadrilátero cualquiera, tírense sus diagonales, que en general se cortarán en partes desiguales; sobre cada una de ellas, á partir de su vértice, tómese una longitud igual á la parte que corresponde al vértice opuesto, únase el punto obtenido con el medio de la otra diagonal; las dos líneas así trazadas determinarán por su encuentro el centro de gravedad.

Esta construccion no dará resultado si una de las diagonales fuese cortada por la otra en dos partes iguales; pero en este caso es fácil reconocer que el centro de gravedad se encuentra sobre esta última diagonal al tercio de la distancia que separa su punto medio del de la primera.

Centro de gravedad de un polígono cualquiera.—

Sea el polígono *abcde* (fig. 49). Para determinar su centro de gravedad, se divide en los triángulos *abe*, *bce* y *cde*, y se hallan sus centros de gravedad g, g' y g'', y la resultante de las tres fuerzas, una proporcional al triángulo *abc* aplicada en g, la otra á *bce* aplicada en g', y la otra al *cde* aplicada en g'', será proporcional al polígono total y aplicada en G, que será su centro de gravedad.

Tambien puede hallarse estableciendo la ecuacion de los momentos respecto á dos planos cualesquiera, tales como los de las diagonales *be* y *ce*. En efecto; llamando X la distancia de G al primero, y x, x' y x'' las de g, g' y g'', se tiene: $abcde.X=bce.x'+cde.x''-abe.x$, que da $X=\frac{bce.x'+cde.x''-abe.x}{abcde}$; tirando á esta distancia X la recta *mn* paralela á *be*, pasará por el centro de gravedad G.

Del mismo modo se determinaria la recta *m'n'* paralela al otro plano *ce* de momentos, que por su interseccion con la anterior fija el punto G.

Centro de gravedad de un sector circular.—Sea el sector circular $OAEB$: si se le divide en un número infinito de sectores infinitamente pequeños, cada uno tal como el OAC, será un triángulo, porque AC será un elemento rectilíneo, y por consiguiente todos tendrán su centro respectivo de gravedad sobre el radio medio y á la distancia del centro O, igual á los $\frac{2}{3}$ del radio; luego si se describe el arco *aeb* desde O, como centro y con un radio igual á $\frac{2}{3}$ de OA, este arco será el lugar geométrico de todos los centros de gravedad de los sectores elementales, que son proporcionales á los arcos *ae*, *ed*, etc., y por consiguiente, el centro de gravedad G del sector será el mismo que el centro de gravedad del arco *aeb*: llamando X á la distancia OG, y R al radio del sector, se tendrá: $X=\frac{2}{3}R\,\frac{ab}{aeb}$; sin embargo, $ab : AB :: Oa : OA :: aeb : AEB$; de donde se deduce $\frac{ab}{aeb}=\frac{AB}{AEB}$ y por consiguiente $X=\frac{2}{3}R\,.\,\frac{AB}{AEB}$ y llamando $2\varkappa$ al arco que mide el ángulo AOB en el círculo, cuyo radio es 1, tendremos $AB=2R$ seno $\varkappa$, $AEB=2\varkappa R$, y por consiguiente $X=\frac{2}{3}R\frac{\text{sen}\,\varkappa}{\varkappa}$

XXIII

Reglas para determinar el centro de gravedad de un prisma triangular y de un prisma poligonal cualquiera.

Sea el prisma triangular $abc\ a'b'c'$ (fig. 51); si una de las aristas del prisma aa' se divide en un número de partes iguales infinitamente pequeñas, y por los puntos de division tíranse planos paralelos á la base abc, el prisma quedará dividido en un número infinito de prismas elementales infinitamente delgados, comparables á triángulos iguales á la base, situados todos de la misma manera respecto á las aristas aa', bb' y cc'; todos estos prismas elementales tendrán, por consiguiente, sus centros de gravedad sobre una misma línea recta paralela á las aristas, y como los extremos tienen sus centros de gravedad en los puntos g y g', que son los de gravedad de las bases del prisma, resulta que la recta gg' contendrá los centros de gravedad de todos los prismas elementales, y por consiguiente, tambien el del prisma total.

Por otra parte, si se reemplaza cada elemento prismático por una fuerza proporcional á su volúmen, aplicada en su centro de gravedad, como los volúmenes son iguales, todas estas fuerzas iguales estarán uniformemente repartidas en la línea gg': luego el punto de aplicacion de la resultante, que es el centro de gravedad del prisma, se hallará en el centro de gravedad de la linea gg', es decir, en su medio, que coincide con el centro de gravedad de la seccion hkl, paralela á las bases y equidistante de ellas; luego el centro de gravedad de un prisma triangular se halla en el medio de la recta que une los centros de gravedad de sus bases, ó en el centro de gravedad de la seccion paralela y equidistante de las bases.

Puede tambien demostrarse de la manera siguiente: si por la arista aa' y el punto m, medio de $b'c'$, se tira un plano, dividirá al prisma en dos equivalentes que tendrán sus centros de gravedad á la misma distancia de este plano; luego la resultante de las fuerzas proporcionales á su volúmen pasará por este plano, y por consiguiente, éste contendrá su punto de aplicacion, que es el centro de gravedad del prisma.

Por la misma razon tambien lo contendrá el plano $nc'e$; luego estará en la línea de interseccion gg' de los dos. Igualmente se halla dicho centro en el plano hkl tirado por el punto h medio de aa', paralelamente á las bases; luego estará en el punto G medio de gg' é interseccion de los tres planos.

Centro de gravedad de un prisma poligonal cualquiera.—Consideremos el prisma *abcde hikfl* (figura 52) y dividámoslo en prismas triangulares por medio de los planos *alk* y *ali*, cuyos prismas tendrán sus centros de gravedad en g, g' y g'', medios de las líneas que unen los centros de gravedad de las bases, y por consiguiente, se hallarán en el plano *mnpqr* tirado por el punto *m*, medio de la arista *al* y paralelamente á las bases.

El problema queda, pues, reducido á hallar la resultante de tres fuerzas paralelas, proporcionales á los volúmenes de los prismas triangulares y aplicadas en los puntos g, g' y g''; ó lo que es lo mismo, proporcionales á los triángulos *mrq*, *mqp* y *mpn*, puesto que éstos son proporcionales á los volúmenes de los prismas por tener todos la misma altura. Pero el punto de aplicacion de la resultante de las fuerzas proporcionales á estos triángulos y aplicadas en sus centros de gravedad es el centro de gravedad *G* del polígono *mnpqr*; luego el centro de gravedad de un prisma coincide con la seccion paralela á las bases y equidistante de las mismas.

Por otra parte, como las secciones paralelas á las bases son iguales á éstas y están igualmente colocadas respecto á las aristas, la línea que une los centros de gravedad de todas ellas es una línea recta y paralela á las aristas; luego el centro de gravedad de un prisma se halla en el medio de la recta que une los centros de gravedad de las dos bases.

XXIV

Determinacion del centro de gravedad de un tetraedro y de una pirámide en general.

Determinacion del centro de gravedad de un tetraedro.—Sea el tetraedro $ABCD$ (fig. 53): unamos uno de los vértices, tal como el A, con el centro de gravedad de la base a, y dividamos la recta Aa en partes sumamente pequeñas, y por los puntos de division tiremos planos paralelos á la base, los cuales causarán secciones semejantes á ella, las cuales quedarán atravesadas por la recta Aa en sus centros de gravedad.

Por los vértices de estas secciones tiremos rectas paralelas á la Aa, y unamos dos á dos los puntos en que cada una de estas rectas corta el plano situado inmediatamente encima, y al que está inmediatamente debajo de ella: habremos así formado dos grupos de prismas triangulares, los unos todos más pequeños, los otros todos mayores que la parte del tetraedro correspondiente, y todos estos prismas tendrán su centro de gravedad sobre la recta Aa; lo mismo sucederá con el tetraedro mismo, el cual se acercará tanto más á confundirse con cada una de las series de prismas, cuanto mayor sea el número de éstos.

Queda de este modo probado que el centro de gravedad del tetraedro se encuentra sobre cada una de las rectas que une uno de los vértices con el centro de gravedad de la cara opuesta, lo cual prueba que estas cuatro rectas se cortan en un punto; busquemos ahora la posicion de este punto.

Sean a y b los centros de gravedad de las caras respectivamente opuestas á los vértices A y B: las rectas BaE y AbE están en el mismo plano ABE, y las Aa y Bb están tambien en este plano, y se encuentran en O; luego éste es el punto buscado.

Pero tirando la ab, los triángulos AOB y aob son semejantes, así como los abe y ABE, y dan:

$$aO : OA :: ab : AB :: bE : AE :: 1 : 3 \ (n)$$

de la que deducimos $aO = \frac{1}{3} A\,O = \frac{1}{4}\,Aa$.

Lo que nos dice que el centro de gravedad de un tetraedro se encuentra en la interseccion de las líneas que unen cada vértice con el centro de gravedad de la cara opuesta, sobre una cualquiera de estas líneas al cuarto de su longitud á partir de la base, ó á los tres cuartos á partir del vértice.

Corolario. Si por el punto O se tira un plano paralelo á la cara ABC del tetraedro, este punto sería el centro de gravedad de la seccion causada por este plano, y como la misma propiedad se aplica á cada una de las tres caras ABD, BCD y ACD, resulta que el centro de gravedad del tetraedro coincide con el centro de gravedad de la seccion paralela á una de sus caras, y distante de ella á un cuarto de la recta que une el vértice con su centro de gravedad, ó á los tres cuartos de esta recta á partir del vértice.

Se puede hacer sobre el tetraedro una observacion análoga que para el triángulo; es decir, que el centro de gravedad del tetraedro es el mismo que el de un sistema de cuatro esferas homogéneas, iguales y que tengan sus centros en los cuatro vértices.

En efecto, si se compone el peso de las tres esferas colocadas en los vértices del triángulo BCD, se encontrará un peso triple aplicado en a, y componiendo este peso triple con el sencillo aplicado en A, tendremos uno aplicado en el punto O.

Corolario primero. Los cuatro pesos pueden tambien componerse de otra manera. Se compone, desde luego, el peso aplicado en A y B (fig. 54), en un peso doble aplicado en F, medio de AB; despues los pesos de los vértices C y D, en un peso doble aplicado en E, medio de CD.

Quedará entonces que componer estos dos pesos dobles, y darán un peso cuádruple aplicado en el medio O de la línea EF.

Por otra parte, el punto O no puede diferir del que se ha obtenido por otro medio de composicion; luego queda probado que el centro de gravedad de un tetraedro se halla en el medio de la recta que une los medios de las aristas opuestas.

Corolario segundo. Resulta de lo que precede que las tres rectas que unen los medios de las aristas opuestas de un tetraedro se cortan en el mismo punto, puesto que todas tres contienen el centro de gravedad del sólido.

Esta circunstancia establece, en efecto, suficientemente la verdad del teorema, si no se tuviese una demostracion directa y geométrica.

Centro de gravedad de una pirámide en general. —Para encontrar el centro de gravedad de una pirámide poligonal $SABCDE$ (fig. 55), se la descompone por planos que pasen por el vértice y las diagonales de la base en tetraedros, que cada uno tiene su centro de gravedad en la seccion hecha por un plano *abcde* tirado paralelamente á la base y al cuarto de altura de ella.

Se tienen, pues, que componer entre sí fuerzas paralelas que tienen sus puntos de aplicacion en este plano, y respectivamente iguales en intensidad á los volúmenes de estos tetraedros; es decir, proporcionales á los triángulos *cab*, *cae*..., etc. Pero el punto de aplicacion de tales fuerzas no sería otra cosa que el centro de gravedad del polígono *abcde*; de donde se puede concluir que el centro de gravedad de una pirámide poligonal cualquiera se encuentra en el centro de gravedad de la seccion tirada paralelamente á la base y á los tres cuartos de la altura á partir del vértice; ó lo que es geométricamente lo mismo, sobre la línea que une el vértice con el centro de gravedad de la base á los tres cuartos de esta línea á partir del vértice.

XXV

En los cuerpos homogéneos que tienen un centro de figura, éste es tambien el centro de gravedad.

Llámase centro de figura á un punto tal del cuerpo que tirando por él rectas que vayan á su superficie, quedan divididas en él en dos partes iguales, y tambien que haciendo pasar un plano por dicho punto, divide al cuerpo en dos partes perfectamente simétricas.

Todo cuerpo que tiene centro de figura, en este punto se halla situado el centro de gravedad. En efecto, trazando por el centro de figura todas las rectas imaginables, suponiéndolas materiales y que entre todas constituyen toda la materia de que se compone el cuerpo, el centro de gravedad de éste coincidirá con el de todas las rectas materiales imaginables, y como el de cada una de ellas es el centro de figura del cuerpo, el de todas ellas lo será tambien, y el centro de gravedad del cuerpo estará situado en su centro de figura.

Tambien puede demostrarse de la manera siguiente: si se hace pasar un plano cualquiera por el centro de figura del cuerpo, como este plano lo corta en dos partes perfectamente simétricas, no hay razon alguna para que el centro de gravedad del cuerpo, que es un punto único y cuya posicion no depende más que de la figura del cuerpo, se encuentre á un lado del plano más bien que á ótro; luego estará en este plano; y el centro de gravedad, debiendo hallarse tambien en todos los planos que se puedan tirar por el centro de figura, se deduce que éste será el centro de gravedad, pues es la interseccion de todos ellos.

Por consiguiente, el centro de gravedad de una circunferencia, de un círculo, de una superficie esférica, de una esfera, de una elipse y de un elipsoide, se encuentra en su centro de figura.

XXVI

En los cuerpos homogéneos de revolucion, el centro de gravedad se halla en el eje.

En efecto, sabemos que todos los cuerpos de revolucion son simétricos con relacion á un plano que pase por el eje de giro; luego si suponemos las masas que componen estas dos partes simétricas como concentradas en un punto, los cuales serán tambien simétricos con relacion al eje, vemos que la determinacion del centro de gravedad del cuerpo queda reducida á hallar el punto de aplicacion de la resultante de las dos fuerzas paralelas representadas por esas masas concentradas en dichos puntos; pero por ser el cuerpo simétrico, estas dos masas serán iguales, y, por lo tanto, el punto de aplicacion de estas dos masas ó fuerzas iguales se hallará en el plano de simetría que pasa por el eje; pero siendo tambien simétrico, con relacion al eje, cada uno de los elementos que constituyen el plano, es evidente que dicho punto de aplicacion, no pudiendo hallarse en una region del plano, con relacion al eje de simetría, que en la otra, tiene que encontrarse en la parte comun de ambas regiones, que es el eje de giro.

XXVII

Cuando las bases de los prismas y cilindros son figuras que tienen centro, el de gravedad de dichos cuerpos se halla en la mitad de las líneas que unen los centros de gravedad de las bases respectivas.

Supongamos un prisma cuyas bases tengan un centro de figura; segun hemos visto, todo cuerpo que tiene un centro de figura, en él está su centro de gravedad; luego los centros de figura de esas caras serán sus centros de gravedad.

Unamos ahora por medio de una recta estos dos centros, y descompongamos esta recta en partes tan pequeñas como se quiera, y tracemos por los puntos de division planos paralelos á las bases.

Estos planos dividirán al prisma en rebanadas ó capas materiales, sumamente delgadas, que podrán considerarse como polígonos materiales, las cuales, por tener bases iguales y la misma altura, tendrán volúmenes iguales, y, por lo tanto, pesos iguales; luego sus centros de gravedad se hallarán en la línea que une los de las bases.

El centro de gravedad del conjunto de todos ellos, ó sea el del prisma propuesto, será el punto de aplicacion de la resultante de un sistema de fuerzas iguales y paralelas, aplicadas á distancias iguales en los diferentes puntos de la línea que une los centros de gravedad de las bases; luego estará en el punto medio de ella.

El razonamiento anterior es aplicable á un cilindro, porque para establecerlo no nos hemos fundado en el número de caras del prisma; luego es independiente de éste, y, por lo tanto, aplicable al cilindro.

XXVIII

Equilibrio de un cuerpo pesado que insiste sobre un plano ó una base cualquiera.—Equilibrio estable, inestable é indiferente.

Equilibrio de un cuerpo pesado que insiste sobre un plano ó una base cualquiera.—Cuando un cuerpo se apoya sobre un plano horizontal por tres ó más puntos, no en línea recta, se llama *base de sustentacion* á la mayor superficie que se obtenga uniendo en el plano los puntos de apoyo por medio de rectas, ó trazando tangentes á los contornos cuando la union de estos puntos nos dé una línea curva.

Sentado esto, para que un cuerpo esté en equilibrio, es necesario y suficiente que la vertical que pase por el centro de gravedad encuentre al plano en el interior de la base de sustentacion.

Es evidente que esta condicion es suficiente, porque cuando se cumple, la fuerza aplicada en el centro de gravedad no hace más que oprimir al cuerpo contra el plano. En segundo lugar, el equilibrio no podria verificarse si la direccion de esta fuerza vertical no encontrase á la base de sustentacion.

En efecto, sea G (fig. 56) el centro de gravedad; se podrá descomponer el peso Gp en dos fuerzas, una dirigida segun Ga, pasando por el punto a de la base más aproximada al punto m, donde la vertical que pasa por el centro de gravedad encuentra al plano; y la otra, segun Gb, perpendicular á Ga. Esta última componente obra para hacer caer al cuerpo, haciéndole girar alrededor del punto a. En cuanto á la primera, puede á su vez descomponerse en dos fuerzas, una an perpendicular al plano, y destruida por su resistencia, y la otra en el plano y segun al. Esta tiende á hacer resbalar al cuerpo (si no lo vuelca) si el frotamiento no se opone á la accion de esta componente; luego para que estas dos fuerzas que se oponen á la estabilidad del cuerpo desaparezcan, es preciso que la vertical que pasa por el centro de gravedad encuentre al plano en el interior de la base de sustentacion.

Lo que acabamos de decir se aplica al caso en que el cuerpo se encuentre en un plano inclinado, siempre que el rozamiento ó cualquier otra causa le impidan resbalar.

Equilibrio estable, inestable é indiferente.—Se dice que un cuerpo está en equilibrio estable cuando ocupa una posicion tal, que desviándole *muy poco* de ella, tiende á volver á la misma, bajo la influencia de las fuerzas que lo solicitan: decimos que es preciso cambiarlo *muy poco* de su primitiva posicion, porque si se le separase mucho de ella, podia tomar otra nueva posicion de equilibrio sin volver á la primitiva, aunque ésta fuese estable; por ejemplo: si un prisma estuviese apoyado por una de sus caras, si se le cambia muy poco de esta posicion, vuelve á ella, mientras que si la desviacion fuese considerable, caeria para apoyarse en otra cara.

Se dice que un cuerpo está en *equilibrio inestable* ó instantáneo cuando el sistema, separado *muy poco* de su primitiva posicion, en lugar de tender á volver á ella, tiende á separarse cada vez más de la misma; por ejemplo, un prisma apoyado en una de sus aristas.

Equilibrio indiferente es aquel en que un cuerpo separado de la posicion que ocupa, no tiende ni á volver á ella ni á separarse de la misma, sino que permanece en la nueva posicion que se le da; por ejemplo, un cono apoyado en una de sus generatrices.

Para que un cuerpo colocado en un plano esté en equilibrio estable, es preciso que su centro de gravedad se encuentre más bajo que su base de sustentacion, y que al separarlo de su posicion de equilibrio, el centro de gravedad se eleve, porque tendiendo siempre el centro de gravedad á descender, hará volver en este caso al cuerpo á su primera posicion de equilibrio.

Cuando el centro de gravedad está más alto que la base de sustentacion, y al separar el cuerpo de su posicion primitiva, se baja dicho centro, entonces el equilibrio es inestable, porque como el centro de gravedad tiende á bajar, separará al cuerpo de su primitiva posicion.

Si el centro de gravedad se encuentra en la base de sustentacion, el equilibrio será indiferente, porque al cambiar al cuerpo de posicion, como el centro siempre está en el plano, el cuerpo no tenderá á separarse de las diferentes posiciones que se le dé.

Presiones sobre los puntos de apoyo.—Un cuerpo pesado que descansa sobre un plano horizontal, ejerce presiones sobre este plano en cada uno de los puntos de apoyo. Estas presiones pueden calcularse cuando el número de puntos no es superior á tres.

Si el cuerpo se apoya sobre el plano por un solo punto, entonces la presion ejercida sobre él equivale á su peso; porque estando el cuerpo en equilibrio, la única fuerza que hay es la de la gravedad, fuerza que debe pasar, segun sabemos, por la base de sustentacion, que en este caso es el punto.

Si el cuerpo se apoya por dos puntos A y B (figura 57), la base de sustentacion se reduce á la recta AB que los une, y el equilibrio exige que la vertical que pasa por el centro de gravedad encuentre á dicha recta en un punto situado entre A y B, tal como el C. El peso del cuerpo es, pues, una fuerza P aplicada segun la vertical que pasa por C, la cual podemos suponer que proviene de dos fuerzas verticales, aplicadas la una en A y la otra en B: estas fuerzas serán, pues, las presiones sufridas por estos puntos de apoyo. Para calcular estas presiones, basta dividir el peso P en dos partes inversamente proporcionales á las rectas CA y CB; en el punto A la presion es $\frac{P \times CB}{AB}$ y la del punto B $\frac{P \times AC}{AB}$.

Si el cuerpo se apoya sobre un plano por tres puntos A, B y C (fig. 58), se encontrarán las presiones ejercidas sobre estos tres puntos de la manera siguiente: la vertical del centro de gravedad debe encontrar al triángulo ABC en un punto O interior á este triángulo, que es la base de sustentacion. El peso del cuerpo podemos suponerlo aplicado en el punto O, y que proviene de la composicion de dos fuerzas verticales aplicadas en A y D, cuyas magnitudes se calculan como en el caso anterior.

La fuerza aplicada en D es la resultante de las dos fuerzas verticales aplicadas en B y C, que se calcularán como las anteriores, y así tendremos las tres componentes que obran en A, B y C.

Tambien podemos hallar las presiones producidas en A, B y C por las consideraciones siguientes: tomemos los momentos de las fuerzas con relacion á un lado cualquiera BC (fig. 59): bajemos de los puntos A é I sobre BC las perpendiculares AA' é Ia: llamemos Z' la reaccion producida por el plano y aplicada en I, la cual es igual y de signo contrario á la resultante de las tres fuerzas aplicadas tambien en I; el momento de esta fuerza es $Z' \times Ia$; el momento de la fuerza aplicada en A, llamándola R, será $R \times AA'$, y los momentos de las aplicadas en B y C será cero, pues están los puntos sobre la misma recta.

La ecuacion de los momentos nos da:

$$R.A\,A'=-Z'\times Ia,\ \text{ó bien}\ R.AA'+Z'\times Ia=0$$

de donde $R=-Z\times\frac{IA}{AA'}$.

Pero Ia y AA' son las alturas de los triángulos IBC y ABC, los cuales tienen una base comun BC; estos triángulos serán entre sí como sus alturas; luego la presion en el punto A será á la resultante como el triángulo IBC es al triángulo ABC.

De la misma manera deduciríamos que la presion R en el punto B será á esta misma resultante como el triángulo IAC es al triángulo ABC, y la presion R'' en el punto C será á la resultante como el triángulo IAB es al triángulo ABC.

La resultante es además la suma de las tres componentes R, R' y R'', así como el triángulo ABC es la suma de los tres triángulos IBC, IAC é IAB; podemos, pues, decir que la resultante de las presiones, ó sea el peso del cuerpo, se distribuye entre los tres puntos A, B y C, proporcionalmente á las áreas IBC, IAC é IAB, que tienen por vértice comun el punto I de aplicacion de esta resultante, y por bases los lados del triángulo opuestos al punto de apoyo.

Si los tres puntos A, B y C estuviesen en línea recta, los triángulos IAC é IBC son nulos, y la reparticion de las presiones queda como hemos dicho; pero es preciso siempre que la resultante de las fuerzas corte á las rectas que unen los puntos de apoyo entre estos puntos, pues de otra manera la resultante tenderia á hacer girar al cuerpo alrededor del punto de apoyo más próximo.

Cuando un cuerpo se apoya en un plano por más de tres puntos, no es posible determinar las presiones que ejerce en sus puntos de apoyo por el solo conocimiento de la posicion del centro de gravedad, y lo haremos patente por un ejemplo: supongamos una mesa que se apoya sobre un suelo por cuatro puntos, y admitamos que el suelo sea resistente en la parte donde descansan dos de los puntos de la mesa, situados en una diagonal, y que en los otros dos cedá á la menor presion: es claro que el peso de la mesa gravitará sobre los dos primeros, puesto que suponemos la mesa en equilibrio, y sobre los otros dos lo más que podrá ejercer es una débil presion; si, al contrario, la parte resistente del suelo correspondiese adonde se apoyan los segundos, y fuese flexible en donde descansan los primeros, la mesa ejerceria su presion mayor en los segundos puntos; de modo que no depende el conocimiento de las presiones de la posicion del centro de gravedad, pues en uno y otro caso estaba dicho centro en un mismo punto, y sin embargo, segun fuese la naturaleza del plano en una ú otra parte, así sería la presion mayor en unos puntos de apoyo que en otros, y variable esta presion con la naturaleza del suelo. Lo único que puede decirse en general para este caso, es que la suma de las presiones ejercidas sobre los puntos de apoyo es igual al peso del cuerpo, pero no se puede de ninguna manera asignar el valor de cada una de ellas.

XXIX

Explicacion y definicion del movimiento y de sus diversas divisiones.—Definicion de trayectoria de un punto. —Movimientos rectilíneos y curvilíneos.

Se dice que un cuerpo está en movimiento cuando ocupa sucesivamente diversas posiciones en el espacio.

El fenómeno del movimiento hace, pues, intervenir tres órdenes de ideas bien distintas, que son: el tiempo empleado en ir el móvil de una posicion á otra, el espacio recorrido y la fuerza que ha hecho recorrerlo al cuerpo, pues sabemos que en virtud de la inercia de la materia, no puede un cuerpo por sí mismo pasar del reposo al movimiento, sino que tiene que haber una causa que produzca éste, que es lo que se llama fuerza.

En el estudio del movimiento de los cuerpos, siempre prescindimos de las dimensiones de éstos, y se les supone reducidos á puntos materiales donde se halla reconcentrada su masa, con lo cual se simplifica mucho los problemas relativos al movimiento.

El movimiento puede ser continuo, alternativo y periódico.

Movimiento *continuo* es aquel que no experimenta modificacion alguna en toda su duracion; tal es el movimiento aparente del sol y de las estrellas alrededor de la tierra.

Movimiento *alternativo* es el que se produce sucesivamente en dos sentidos diferentes; por ejemplo, el brazo de un hombre cuando está limando ó maneja un martillo.

Movimiento *periódico* es aquel que se interrumpe por tiempos más ó ménos largos. Despues de cada detencion, el movimiento puede continuarse en el mismo sentido que el precedente ó en sentido contràrio; se presentan ejemplos de movimientos periódicos en el flujo y reflujo de los mares, en los telares, etc.

Definicion de trayectoria de un punto.—El lugar geométrico de las diversas posiciones que toma un punto durante su movimiento es lo que se llama trayectoria del punto; de manera que tambien la podemos definir diciendo que es la línea recta ó curva que el punto describe en su movimiento.

Movimientos rectilíneos y curvilíneos.—Con relacion á la direccion que sigue el cuerpo, puede dividirse el movimiento en rectilíneos y curvilíneos.

Cuando la trayectoria es una línea recta, el movimiento se llama *rectilíneo*, y cuando es una línea curva se llama *curvilíneo*, y es producido por el cambio de direccion que experimenta el cuerpo en cada uno de los instantes que dura el movimiento.

Ley del movimiento.—Además de su naturaleza, segun las fases que presenta en su duracion, para definir el movimiento del punto es preciso conocer su trayectoria y el instante en el cual se efectúa el paso del móvil por los diversos puntos geométricos de la misma.

Supongamos que la línea MN (fig. 60) sea la trayectoria de un punto, y que en un momento cualquiera el móvil ha sido observado en A, y al cabo de otro segundo de tiempo en B, y así sucesivamente de segundo en segundo, la posicion del móvil sobre la trayectoria será conocida, y la manera como varían los arcos recorridos en los tiempos empleados en recorrerlos, que es lo que se llama *ley* del movimiento, tambien será conocida aproximadamente, y con tanta mayor exactitud, cuanto más pequeños sean estos intervalos de tiempo, para que la aproximacion sea equivalente bajo el punto de vista práctico al conocimiento completo de la ley buscada.

Supongamos que el móvil recorre la trayectoria dada MN; se define su movimiento de la manera siguiente: se empieza por elegir arbitrariamente sobre la trayectoria un punto fijo que sirva de orígen, y á partir del cual se cuentan las longitudes de los arcos recorridos; la posicion de un punto cualquiera de la trayectoria está determinada por la longitud del arco, y dándole el signo + ó —, segun se encuentre la posicion del punto á la derecha ó á la izquierda del orígen, queda, pues, conocida su posicion sobre la trayectoria.

Llamemos de una manera general s la longitud de un arco variable á partir del punto orígen; á cada posicion del móvil sobre la trayectoria le corresponde un valor particular de s, positivo ó negativo, segun su posicion con respecto al orígen; el movimiento estará completamente determinado si se conocen los valores sucesivos que toma este arco variable s, en la sucesion de los tiempos, ó para hablar en lenguaje matemático, si se expresa el arco s en funcion de tiempo.

XXX

Definicion del movimiento uniforme.—Velocidad.—Relacion entre el espacio y el tiempo en esta clase de movimiento.

Definicion del movimiento uniforme.—El movimiento, por la relacion que guardan los espacios recorridos por el tiempo empleado en recorrerlos, se divide en *uniforme* y *variado*.

Movimiento uniforme es aquel en que el móvil recorre espacios iguales en tiempos iguales.

Velocidad en el movimiento uniforme es el espacio recorrido por el móvil en la unidad de tiempo; la unidad de tiempo es el segundo y la velocidad se representa por una recta, que es el camino que el móvil recorre en un segundo.

Para representar la velocidad por un número, basta dar la medida de longitud de la velocidad expresada en metros; así la expresion de velocidad igual á 8 metros define un movimiento uniforme, en el cual el móvil recorre 8 metros en un segundo; un tren que recorriera en una hora 36 kilómetros, tendria por velocidad $\frac{36.000^{m}}{3.600} = 10^{m}$; es decir, que su velocidad sería 10^{m} por segundo. El valor de la velocidad es constante en esta clase de movimiento.

Relacion entre el espacio, la velocidad y el tiempo, en esta clase de movimiento.—Segun la definicion de movimiento uniforme, si llamamos v á la velocidad, ó sea el espacio que recorre en la unidad de tiempo, en dos unidades de éste, recorrerá un espacio representado por 20; en 3 unidades, 30, y en general, durante el tiempo t, recorrerá un espacio e, representado por

$$e = v\,t. \quad (1)$$

A la fórmula (1) se le puede dar una representacion geométrica: en efecto, si designamos por t la base de un rectángulo (esta base contendrá tantas unidades lineales como unidades de tiempo contiene t), por v las unidades lineales de la altura, es claro que el área del rectángulo contendrá tantas unidades superficiales como e unidades lineales. En este sentido se dice que el espacio recorrido con movimiento uniforme equivale al rectángulo de la velocidad y tiempo.

Si para un movimiento uniforme dado tenemos

$$e = v\,t$$

para otro, tambien uniforme, tendremos

$$e' = v'\,t'$$

siendo v', t' y e' la velocidad, el tiempo y el espacio: dividiendo una expresion por otra, nos dará

$$\frac{e}{e'} = \frac{v \times t}{v' \times t'}$$

Lo que nos da las siguientes relaciones:

Si $t = t'$, la fórmula se reduce á $\frac{e}{e'} = \frac{v}{v'}$ que nos dice que si *los tiempos son iguales, los espacios recorridos son proporcionales á las velocidades.*

Si $v = v'$, la fórmula nos dará $\frac{e}{e'} = \frac{t}{t'}$; es decir, que si *las velocidades son iguales, los espacios son proporcionales á los tiempos.*

Si $e = e'$, la fórmula se reduce á $v \times t = v' \times t'$, ó lo que es lo mismo, $\frac{v}{v'} = \frac{t'}{t}$, *que significa que si los espacios son iguales, las velocidades están en razon inversa de los tiempos*; de manera que si la velocidad es doble, el tiempo empleado en recorrer el mismo camino será la mitad.

XXXI

Definicion de movimiento variado en general.—Su division en acelerado y retardado.—Velocidad en estos movimientos.

Definicion de movimiento variado.—Movimiento variado es aquel en que el móvil en tiempos iguales recorre espacios desiguales.

Su division en acelerado y retardado.—Segun la anterior definicion, vemos que siendo desiguales los espacios recorridos por el móvil durante un mismo tiempo, las velocidades al fin de cada uno de estos instantes tienen que ser desiguales, de modo que éstas reciben un incremento positivo ó negativo, que es lo que se llama *aceleracion.*

La ley segun la cual varía la velocidad al cabo de los segundos sucesivos, sirve para distinguir unos de otros á los movimientos variados.

Si además la fuerza aceleratriz, causa del movimiento variado, hace variar la velocidad de modo que aumente ó disminuya al fin de cada segundo la misma cantidad, hay entonces una proporcionalidad entre las variaciones de la velocidad y los tiempos durante los cuales se verifica el movimiento variado.

Cuando esta proporcionalidad existe, se dice que el movimiento es *uniformemente variado*, el cual á su vez se llama *uniformemente acelerado* cuando la velocidad *aumenta* proporcionalmente al tiempo, y *uniformemente* retardado cuando aquélla *disminuye* constantemente. Si la proporcionalidad anteriormente dicha no existe, entonces el movimiento es únicamente variado, el cual se divide en acelerado ó retardado, segun que la aceleracion sea positiva ó negativa.

Velocidad en el movimiento variado.—Siendo el movimiento variado, los diferentes espacios MN, NP, PQ, etc. (fig. 61), descritos en tiempos iguales, serán desiguales. Si las observaciones se han hecho á intervalos iguales de tiempo, cada uno en t minutos, el cociente $\frac{MN}{t}$ representará el espacio medio recorrido por el móvil en los t segundos invertidos para pasar desde el punto M al punto N, y de la misma manera determinaríamos la velocidad media para cada una de estas diferentes partes de la trayectoria. En general, la velocidad media del móvil entre dos posiciones sucesivas de su trayectoria se obtiene dividiendo la longitud del trayecto entre estas dos posiciones por el tiempo empleado en recorrerlo.

Se llama *velocidad* del móvil en un punto A de su trayectoria (fig. 61) la velocidad media con la cual el móvil recorreria el arco infinitamente pequeño AA' ó al límite del cociente $\frac{AA'}{\theta}$, siendo θ el tiempo infinitamente pequeño que tarda el móvil en recorrer este arco infinitamente pequeño. En la práctica no se puede medir directamente más que tiempos y espacios finitos; pero si el tiempo θ es bastante corto, y el arco AA' suficientemente pequeño, la relacion $\frac{AA'}{\theta}$ diferirá muy poco del valor que tendria si sus dos términos fuesen infinitamente pequeños, y nos hará conocer con bastante aproximacion los valores de la velocidad en el punto A.

El arco muy pequeño AA' puede confundirse con una línea recta; prolonguemos indefinidamente esta recta en la direccion del movimiento; la direccion AB así obtenida tiene con la curva dos puntos comunes A y A' infinitamente próximos; sabemos que una recta tal se llama la tangente á la curva en el punto A; indica la direccion del movimiento del móvil mientras recorre el arco AA'. Esta consideracion conduce á atribuir una direccion á la velocidad del móvil, que hasta aquí habíamos mirado como una relacion, y diremos que la velocidad del móvil en un punto A de la curva tiene por direccion la tangente tirada á la trayectoria en dicho punto; tiene por sentido el mismo que el del movimiento en dicho punto de la trayectoria.

Se puede representar la velocidad en magnitud llevando sobre la recta AB y en el sentido del movimiento una longitud AC, igual al espacio que recorreria el móvil en la unidad de tiempo, si recorriese la recta AB con movimiento uniforme y con una velocidad igual á $\frac{AA'}{\theta}$; es decir, que para calcular esta velocidad supondríamos que al cabo de un cierto tiempo θ cesa la fuerza aceleratriz, y quedando el cuerpo abandonado á sí propio, seguiria moviéndose con velocidad constante en virtud de la inercia; de modo que el movimiento se ha trasformado de variado en uniforme; luego para hallar la velocidad en el movimiento variado, hallaremos la del movimiento uniforme que reemplaza á éste. En otros términos, AC es igual á $\frac{AA'}{\theta}$, porque en el movimiento uniforme los espacios son proporcionales á los tiempos, y en virtud de ello tendríamos:

$$\frac{AC}{1}=\frac{AA'}{\theta}, \text{ de donde } AC=\frac{AA'}{\theta}$$

De esta manera se puede representar gráficamente la magnitud y direccion de la velocidad de un móvil en un punto de su trayectoria, porque moviéndose el cuerpo en el sentido MN, no habria más que trazar por el punto A una tangente AB á la trayectoria; sobre esta tangente, y á partir del punto A y en el sentido del movimiento, se llevará una longitud AC, igual al espacio que el móvil recorreria con un movimiento uniforme durante la unidad de tiempo, conservando durante esta duracion la velocidad media que poseia en las inmediaciones del punto A: la recta AC representará en magnitud, direccion y sentido la velocidad del móvil en el punto A.

Esta representacion supone definida la unidad de tiempo, y subsiste áun cuando no se haya hecho eleccion de la unidad, porque la recta finita AC, que representa la magnitud de la velocidad, está dada por una longitud efectiva, y no con relacion á una unidad arbitrariamente elegida.

XXXII

Movimiento uniformemente acelerado.—Velocidad en este movimiento.—Relaciones entre las velocidades y los tiempos y entre los espacios y los tiempos.

Movimiento uniformemente acelerado. — Movimiento uniformemente variado es aquel en que la velocidad varia cantidades iguales en tiempos iguales; luego en este movimiento, este incremento de velocidad, ó sea la aceleracion, es constante, y que la velocidad crece proporcionalmente al tiempo. Estas dos condiciones entran la una en la otra: en efecto, si la velocidad crece proporcionalmente al tiempo, la aceleracion, que no es otra cosa que la velocidad de la velocidad, es una cantidad constante que indica el incremento de la velocidad del móvil durante la unidad de tiempo; y recíprocamente, suponer que la aceleracion es constante, es decir que la velocidad crece una misma cantidad durante tiempos iguales, lo que equivale á establecer que crece proporcionalmente al tiempo.

La velocidad en este movimiento no puede definirse como en el movimiento uniforme, porque se modifica en cada unidad de tiempo. Se comprende, sin embargo, que si al cabo de un cierto tiempo t, cesa la fuerza aceleratriz en un movimiento uniformemente variado, y el cuerpo queda abandonado á sí propio, seguirá moviéndose con una velocidad constante en virtud de la inercia.

Esta velocidad constante será indudablemente la misma que llevaba al cabo del tiempo t. En tal concepto, se entiende por velocidad al fin de un cierto tiempo, en el movimiento uniformemente variado, la que adquiere el móvil al cesar la fuerza aceleratriz, en el movimiento uniforme que sucede al acelerado.

Si nos propusiéramos determinar en el movimiento uniformemente acelerado la velocidad v, al cabo de un cierto tiempo de segundos t, recordaremos que dicha velocidad crece cantidades iguales en tiempos infinitamente pequeños: si, pues, llamamos j á la aceleracion comunicada al móvil en el primer segundo, al final del otro segundo valdrá $2j$, por cuanto á la aceleracion primera hay que agregar la inmediata; al final de tercero valdrá $3j$, y así sucesivamente; luego al cabo de t segundos tendremos para la velocidad

$$v=j.t$$

Relaciones entre las velocidades y los tiempos y entre los espacios y los tiempos.—Si para un cierto movimiento uniforme tenemos $v=j\times t$, para otro tendremos $v'=j'\times t'$, y dividiendo estas igualdades una por otra, tendremos $\frac{v}{v'}=\frac{j\times t}{j'\times t'}$

Si $j=j'$, la ìgualdad se reduce $\frac{v}{v'}=\frac{t}{t'}$, que significa que si las aceleraciones son iguales, las velocidades son proporcionales á los tiempos.

Si $t=t'$, resulta $\frac{v}{v'}=\frac{j}{j'}$, que expresa que si los tiempos son iguales, las velocidades son proporcionales á las aceleraciones.

Si $v=v'$, la fórmula nos da $\frac{j}{j'}=\frac{t'}{t}$, lo que nos dice que si las velocidades son iguales, las aceleraciones son inversamente proporcionales á los tiempos.

La relacion entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo, se deduce por el triángulo de Galileo. Sea AB una recta que representa el tiempo empleado por un móvil en recorrer un espàcio (figura 62); dividámosla en partes iguales, Aa, ab, bc... etc., que indiquen unidades de tiempo. Del mismo modo representemos las velocidades adquiridas por perpendiculares á la recta AB; como dichas velocidades han de ser proporcionales á los tiempos, valdrán am, bn, cp... etc., al cabo de uno, dos, tres... etc. segundos. La superficie comprendida por las rectas AB, BC, CA contendrá tantas unidades de áreas como unidades de espacio ha recorrido el móvil durante el tiempo AB: cada triángulo parcial representará una unidad de longitud recorrida.

Si, pues, suponemos que un cuerpo empieza á caer en la direccion AB, al llegar al punto A, su velocidad será $am=1$ y el espacio recorrido valdrá tambien 1, puesto que las rectas Aa y am abarcan un triángulo.

Al terminar la segunda unidad de tiempo ab, la velocidad bn es igual á 2 unidades y el espacio correspondiente á dicha segunda unidad de tiempo está representado por tantas unidades de línea como triángulos hay en el trapecio $abmn$, ó sean 3. En c, la velocidad es tres veces mayor, y el espacio recorrido 5 unidades de línea, pues hay 5 triángulos en el trapecio $bepn$. Al llegar á d la velocidad dq vale 5 unidades y el espacio $cdqp$ vale 7 unidades lineales, por valer 7 triángulos el trapecio susodicho. Por consiguiente, podemos establecer las siguientes leyes:

1.ª Los espacios parciales recorridos con movimiento uniformemente acelerado crecen como los números impares.

Examinando nuevamente la figura, notaremos que en la primera unidad de tiempo a ha recorrido el móvil 1 espacio; en dos unidades, ó sea de A á b, ha recorrido $1+3=4=2^2$, en tres unidades, ó sea ac $4+5=9=3^2$... etc., resultado que nos manifiesta la ley

2.ª Los espacios totales son proporcionales á los cuadrados de los tiempos.

Admitamos por un momento que al llegar á b al cabo de 2 segundos, por ejemplo, cesa la fuerza aceleratriz que le impulsa. Es indudable que continuará moviéndose en virtud de la inercia; mas no con movimiento variado, sino con movimiento uniforme, ó sea con velocidad constante; luego en otras dos unidades de tiempo bd, recorrerá un espacio que contendrá tantas unidades de línea como unidades de superficie hay en el rectángulo $bdon$; como en éste hay ocho triángulos ó unidades de superficie, diremos que la ley

3.ª Es que cuando cesa la fuerza aceleratriz, recorrerá un cuerpo en igual tiempo doble espacio que el recorrido con movimiento uniformemente acelerado.

Es evidente que al unir los puntos C, q, p, n, m, A, todos estarán en una misma recta AC, porque representando Aa, ab, bc... etc., las unidades sucesivas de tiempos, y las rectas am, bn, cp... las velocidades correspondientes á estos tiempos, como segun la ley del movimiento uniformemente acelerado las velocidades son proporcionales á los tiempos, los triángulos rectángulos Aam y Abn son semejantes por tener sus bases am y bn proporcionales á sus alturas Aa y Ab, y todos tienen un ángulo comun en A; luego Am coincide con An, y lo mismo diremos para los demás; luego los puntos A, m, n, p, q, C están en línea recta.

La suma de estos espacios parciales compone el espacio total recorrido por el móvil en el tiempo t; pero siendo ABC un triángulo, su área S es igual á la mitad del producto de su base BC por la altura AB; luego

$$S=\frac{AB\times BC}{2}$$

pero AB representa el tiempo t, y BC representa la velocidad v al cabo del tiempo t, que es $v=jt$; luego el espacio recorrido por el móvil animado con movimiento uniformemente acelerado es:

$$e=\frac{t\times jt}{2}, \text{ ó bien } e=\tfrac{1}{2}jt^2$$

de modo que el espacio en el movimiento uniformemente acelerado es igual á la mitad del producto de la aceleracion por el cuadrado del tiempo.

Para otro movimiento uniformemente acelerado, tendríamos $e'=\frac{1}{2}j't'^2$, y dividiendo una por otra, tendremos

$$\frac{e}{e'}=\frac{j\times t^2}{j'\times t'^2}$$

Si $j=j'$, la fórmula nos da $\frac{e}{e'}=\frac{t^2}{t'^2}$; es decir, que los espacios son proporcionales á los cuadrados de los tiempos.

Si $t=t'$, tendremos $\frac{e}{e'}=\frac{j}{j'}$, que manifiesta que si los tiempos son iguales, los espacios son proporcionales á las aceleraciones.

Si $e=e'$, la fórmula da $\frac{j}{j'}=\frac{t'^2}{t^2}$, que nos dice que si los espacios son iguales, las aceleraciones están en razon inversa de los cuadrados de los tiempos.

De las fórmulas $v=jt$ y $e=\frac{1}{2}jt^2$ se deduce haciendo en la segunda $t=1$, $e=\frac{1}{2}j$, de donde $j=2e$, que expresa que la aceleracion es doble que el espacio recorrido por el móvil en la primera unidad de tiempo.

Eliminando t entre ellas, para lo cual de la primera sacamos $t=\frac{v}{j}$, de donde $t^2=\frac{v^2}{j^2}$, y sustituyendo este valor de t^2, en la segunda tendremos

$$e=\tfrac{1}{2}j\frac{v^2}{j^2},\ \text{ó bien}\ e=\tfrac{1}{2}\frac{v^2}{j}$$

y quitando denominadores, dará $v^2=2je$; de donde $v=\sqrt{2je}$, fórmula que nos da la velocidad en funcion de la aceleracion y el espacio.

XXXIII

Movimiento uniformemente retardado.—Definicion de movimiento circular.—Qué se entiende por velocidad angular.—Relacion entre las velocidades de los diversos puntos de un cuerpo que gira y sus distancias al eje.

Movimiento uniformemente retardado.—Movimiento uniformemente retardado es aquel en que la velocidad disminuye cantidades iguales en tiempos iguales.

Supongamos un móvil animado de una velocidad inicial de a metros por segundo, y que esta velocidad disminuya j unidades en cada segundo; en el primer segundo, la velocidad será $v=a-j$; á los dos segundos será $v=a-2j$, y así sucesivamente; luego al cabo de t segundos será

$$v=a-jt$$

Para encontrar la fórmula de los espacios recorridos, emplearemos la construccion gráfica siguiente: sobre una recta AE (fig. 63), á contar de un orígen A, tomaremos partes iguales que representen los tiempos; en los puntos en que éstas terminen levantaremos perpendiculares que representen las velocidades correspondientes, y uniremos por un trazo continuo los extremos de estas perpendiculares.

El espacio recorrido estará representado por el trapecio $ABDE$; este trapecio es igual al rectángulo $ABCE$, menos el triángulo BCD; luego $e = ABCE - BCD = AB \times AE - \frac{1}{2} BC \times CD$; pero AB es igual á la velocidad inicial a, AE es el tiempo t, $BC = AE = t$, y CD á la velocidad del móvil que partiese de B con movimiento uniformemente acelerado; luego $CD = jt$; luego

$$e = at - \frac{1}{2} j t^2$$

Si el móvil partiese sin velocidad inicial, $a = o$; de donde

$$e = -\frac{1}{2} j t^2$$

luego el signo depende de j; fórmula igual á la del movimiento uniformemente acelerado, pero de signo contrario, como realmente debe suceder.

Ejemplo de un movimiento uniformemente retardado lo tenemos en los cuerpos lanzados de abajo arriba. La velocidad del móvil va disminuyendo sucesivamente á causa de la accion de la gravedad que obra en sentido contrario de la fuerza de impulsion, y se concibe que llegará un momento en que ambas sean iguales, y en ese instante el cuerpo permanece en reposo, para enseguida volver á descender con un movimiento uniformemente acelerado, pues la fuerza que le obliga á ello es la de la gravedad, la cual ejerce su accion cada vez con más intensidad y á medida que el cuerpo se acerca á la tierra.

Para calcular el tiempo que el móvil ha tardado en llegar al punto más alto, observaremos que en él la velocidad $v=o$; luego $o=a-gt$, de donde $t=\frac{a}{g}$, y para calcular la altura á que el móvil ha llegado, sustituiremos este valor de t en la expresion de e, que es dicha altura, y tendremos $e=\frac{a^2}{g}-\frac{1}{2}g\frac{a^2}{g^2}=\frac{\frac{1}{2}a^2}{g}$

Para calcular la velocidad que tiene en el punto de caida, observaremos que el móvil desciende desde el punto más alto y recorre el camino que subió con movimiento uniformemente acelerado; de modo que $v=\sqrt{2ge}$, y por ejemplos prácticos, aplicando esta fórmula, se ve que la velocidad del móvil en el punto de caida es igual á la que le animaba cuando partió.

Generacion del movimiento curvilíneo.—Una sola fuerza, bien sea de las llamadas instantáneas, bien de las continuas, produce siempre un movimiento rectilíneo. Dos fuerzas pueden producir un movimiento curvilíneo en determinadas condiciones; veamos cuáles son éstas. Si sobre un punto material *a* (fig.-64) actúan dos fuerzas cuyas intensidades sean *ab* y *ac*, la diagonal *ad* representará la resultante por donde se dirigirá el punto material. Si al terminar la primera unidad de tiempo cesaran las dos fuerzas, continuaria por la inercia moviéndose el cuerpo en la direccion rectilínea *de* de la misma resultante; pero si suponemos que sobre dicho cuerpo actúa la fuerza *md* con la intensidad *df*, ésta, combinada con la *de*, obligará al móvil á seguir la direccion *dg*, durante la segunda unidad de tiempo. Si al llegar al punto *g* sigue actuando la *gm*, tendremos en la nueva diagonal la direccion del móvil durante la tercera unidad de tiempo, y así sucesivamente.

Suponiendo ahora que los impulsos comunicados al punto material por las fuerzas indicadas se repiten á intervalos de tiempo infinitamente próximos, cada resultante será un punto, y el polígono *adg*... se convertirá en una curva.

Síguese, por lo tanto, que para el movimiento curvilíneo son necesarias dos fuerzas: una continua que arrastre al móvil hacia un punto fijo *m*; otra *ab* que sea tangencial á la curva descrita por el móvil; y decimos tangencial, porque efectivamente, en el instante en que cesa la fuerza *am*, sale el móvil en direccion rectilínea y tangente á la curva que seguia cuando le impulsaban las dos.

Movimiento circular.—De lo que acabamos de exponer se deduce que si la fuerza que solicita al cuerpo hacia el punto *m* es igual á la que lo solicita fuera de él, se comprende que las distancias *am*, *lm*, *gm*... etc. han de ser tambien iguales, y en este caso particular describirá el móvil una circunferencia. Hé aquí lo que sucede en el empleo de la honda: la mano desenvuelve la fuerza *am*, que tiende á llevar la piedra hacia un centro que es la mano misma; la inercia, unida á la resistencia de la cuerda, desarrolla en cada movimiento de traccion producido por la mano la fuerza tangencial á la primera.

Si un sólido en movimiento tiene dos puntos fijos, todos los demás puntos del sólido situado en la recta que une á los dos primeros permanecen inmóviles; el sólido no puede, por lo tanto, moverse sino girando alrededor de esta recta, la cual se llama eje de rotacion, y el movimiento del cuerpo es un *movimiento de rotacion.*

En el movimiento de rotacion de un sólido alrededor de un eje, cada uno de los puntos de éste describe una circunferencia, cuyo plano es perpendicular á aquél, y cuyo centro está en el punto de encuentro del plano con el eje.

Sea AB (fig. 65) el eje de rotacion, M un punto cualquiera del sólido; bajando la perpendicular MP al eje, esta recta le será siempre perpendicular, cualquiera que sea la posicion del sólido, y por consiguiente, en el movimiento de rotacion del cuerpo describirá un plano perpendicular al eje; además, MP conserva siempre su longitud; luego el punto M describirá una circunferencia, cuyo centro es P.

Siendo el sólido invariable, es claro que en su movimiento de rotacion alrededor del eje, las perpendiculares bajadas desde los diferentes puntos del sólido al eje, describen en el mismo tiempo ángulos iguales; el valor de uno de estos ángulos iguales correspondientes á un tiempo cualquiera, es lo que se llama el ángulo que ha girado el sólido durante ese tiempo.

Velocidad angular.—El movimiento de rotacion de un sólido es uniforme cuando gira ángulos iguales en tiempos iguales, ó lo que es lo mismo, cuando los ángulos girados son proporcionales á los tiempos empleados por el sólido en verificar el giro.

Se llama *velocidad angular*, en el movimiento de rotacion uniforme, el ángulo que gira el sólido en la unidad de tiempo; se mide la rapidez del movimiento por el valor de su velocidad angular.

Si se miden los ángulos por los arcos descritos por los puntos que distan la unidad lineal del eje, la velocidad angular de un sólido animado de un movimiento de rotacion uniforme será el arco descrito en la unidad de tiempo por un punto que diste del eje la unidad lineal, velocidad que será la absoluta de dicho punto, y se designa por la letra ω: si el punto dista r unidades del eje, el valor de la velocidad angular será $v = \omega \times r$.

El movimiento de rotacion es variado cuando el sólido describe arcos desiguales en tiempos iguales.

Si suponemos dividido el tiempo en que se verifica un movimiento de rotacion variado en partes infinitamente pequeñas é iguales, podemos considerar que el movimiento de rotacion en cada uno de estos intervalos infinitamente pequeños é iguales es uniforme, y entonces el movimiento de rotacion variado puede considerarse como una sucesion de movimientos de rotacion uniformes, los cuales tienen lugar durante un tiempo infinitamente pequeño, y la velocidad angular durante un cierto tiempo es la del movimiento uniforme, que reemplaza al variado durante este intervalo infinitamente pequeño; luego tendremos para expresion de la velocidad angular, en el movimiento de rotacion variado, una análoga á la que cuando es uniforme.

Relacion entre las velocidades de los diversos puntos de un cuerpo que gira y sus distancias al eje.— En el movimiento de rotacion uniforme todos los ángulos descritos por los diferentes puntos del cuerpo durante un mismo tiempo tienen un mismo número de grados; pero los caminos recorridos por estos puntos no son iguales, pues los arcos descritos por dos puntos en un mismo tiempo son proporcionales á sus radios respectivos; así es que los puntos más próximos al eje tendrán menor velocidad absoluta que los que estén más lejanos, y por consiguiente, estas velocidades son proporcionadas á las distancias de los puntos al eje. Consecuencia que, por otra parte, se prueba por la consideracion de la fórmula de la velocidad, pues si llamamos V á la velocidad de un punto M, que diste del eje la magnitud R, y v á la de otro m cuya distancia sea r, tendremos

$$V = \omega \times R$$
$$v = \omega \times r$$

y dividiendo una por otra

$$\frac{V}{v} = \frac{R}{r}$$

En el movimiento de rotacion variado, hallaríamos una relacion análoga, pues la expresion de la velocidad ès idéntica que en el uniforme.

XXXIV

Qué se entiende por fuerza centrífuga y centripeta en el movimiento de rotacion.—Expresion de la fuerza centrífuga en funcion de la velocidad y del radio de giro.

Qué se entiende por fuerza centrífuga y centrípeta en el movimiento de rotacion.—Hemos visto que para haber movimiento de rotacion ès necesario que sobre el móvil actúen dos fuerzas iguales, una que solicite al cuerpo hacia el centro de la circunferencia que describe, y otra que actúe segun la tangente á la curva.

A la primera se la llama fuerza centrípeta, y á la segunda fuerza tangencial.

La fuerza centrípeta, que impide al móvil abandonar la circunferencia, tomando la direccion de la componente tangencial, destruye en cada instante la tendencia del móvil á alejarse del centro, tendencia que ha recibido el nombre de *fuerza centrífuga*; ambas fuerzas, consideradas colectivamente, se llaman *fuerzas centrales*.

Para hacer comprender bien el antagonismo de estas dos fuerzas, tiremos por el punto b (fig. 64) la recta bh paralela á la ab, que es la direccion del movimiento, y habremos formado así el paralelógramo $adbh$: la fuerza del móvil segun la diagonal ab puede ser descompuesta en otras dos, una segun ad en la direccion del movimiento circular, y otra segun ah en prolongacion del radio.

Esta última representa la fuerza centrífuga, y como $ah = bd = ac$, se ve que la fuerza centrífuga está en cada instante del movimiento destruida por la fuerza centrípeta que le es igual y opuesta, lo que hace que sólo quede actuando la fuerza ad. Si la fuerza centrípeta cesase de obrar, el móvil seguirá la direccion de la componente tangencial ab, pues ésta es la resultante de las dos fuerzas que quedarian, ad y ah.

Expresion de la fuerza centrífuga en funcion de la velocidad y del radio de giro.—Supongamos primeramente el movimiento uniforme, y sea mc (fig. 66) un arco infinitamente pequeño de circunferencia, descrito durante un tiempo infinitamente pequeño θ por un móvil cuya masa sea igual á la unidad.

Durante el mismo tiempo, el móvil recorrerá bajo la accion sola de la fuerza centrípeta F el espacio mb con un movimiento uniformemente acelerado, porque esta fuerza obra con una intensidad constante durante el tiempo infinitamente pequeño θ. Ahora bien, puesto que el espacio mb está recorrido con movimiento uniformemente acelerado, su valor sabemos que es $mb = \frac{1}{2} F\ \theta^2$. Puesto que el arco mc, por ser infinitamente pequeño, se puede confundir con su cuerda, se nos formaria uniendo el punto c con los dos extremos del diámetro un triángulo rectángulo, en el cual sabemos que un cateto mc es media proporcional entre el diámetro $2R$, que es la hipotenusa, y mb, proyeccion de dicho cateto sobre esta hipotenusa ó diámetro; es decir, $mb : mc :: mc : 2R$, de donde $mb = \overline{mc}^2 : 2R$. Además, siendo el movimiento uniforme $mc = v \times \theta$, llamando v á la velocidad del móvil.

Eliminando mc y mb entre

$$\left.\begin{array}{l} mb = \frac{1}{2} F \theta^2 \\ mb = \overline{mc}^2 : 2R \\ mc = v \times \theta \end{array}\right\}$$

tendríamos $\overline{mc}^2 : 2R = \frac{1}{2} F\ \theta$, ó bien $v^2 \theta : 2R = \frac{1}{2} F\ \theta^2$, y dividiendo ambos miembros por θ se tendrá $v^2 : 2R = \frac{1}{2} F$, y multiplicando por 2, deduciremos finalmente

$$F = v^2 : R$$

fórmula que nos da el valor de la fuerza centrípeta ó de la centrífuga que le es igual en funcion de la velocidad y del radio de giro. Si la masa es m, $F = m \times \frac{v^2}{R}$.

Supongamos ahora que el movimiento no sea uniforme. La fuerza que actúa sobre el móvil deberá estar en el plano del circulo, pues de lo contrario, daria una componente normal á este plano, la que haria salir de él al móvil, lo que es contra la hipótesis, pues suponemos que describe una trayectoria circular.

Supongamos esta fuerza descompuesta en dos, una segun el radio, y otra segun la tangente á la circunferencia: la primera no puede modificar la velocidad, puesto que es perpèndicular á su direccion; es la fuerza centrípeta, que sirve para mantener el móvil sobre la circunferencia. La que hace variar la velocidad es la otra componente, la fuerza tangencial, y tiene por medida la masa del móvil multiplicada por la aceleracion que produciria si la fuerza quedase constante durante la unidad de tiempo. La fuerza centrífuga y la centrípeta están siempre representadas por $F = \frac{mv^2}{R}$. Es preciso observar aquí que la velocidad al variar de un instante á otro, la fuerza centrípeta debe variar tambien de manera de ser, siempre igual á la centrífuga, sin lo que el móvil se saldria de la circunferencia.

XXXV

Nociones generales acerca de la medida del efecto de las fuerzas.—Definicion del trabajo de una fuerza.—Su medida.—Qué se entiende por kilográmetro y por caballo de vapor.

Nociones generales acerca de la medida del efecto de las fuerzas.—Desde el momento en que una fuerza empieza á ejercer su accion, produce en su sentido flexiones y compresiones: su punto de aplicacion cede, marcha, se desplaza en el sentido de esta accion hasta que la resistencia de las fuerzas moleculares, siendo igual á la accion que tiende á cambiar de lugar á las moléculas, hace cesar este desplazamiento relativo. Entonces, si el cuerpo está retenido por obstáculos ó por resistencias superiores, la accion de la fuerza es anulada: su efecto es nulo, en este sentido, porque no hay movimiento producido: tal es el caso del soporte de una columna.

Para que las fuerzas produzcan un efecto mecánico. es pues preciso que hagan recorrer á su punto de aplicacion un cierto camino en su direccion propia.

Vemos, pues, que para apreciar el efecto de una fuerza es preciso considerar no solamente la intensidad con que obra, sino tambien la cantidad que hace mover á su punto de aplicacion.

Definicion del trabajo de una fuerza.—Se llama *trabajo de una fuerza constante*, al cabo de un cierto tiempo, al producto de su intensidad por el camino recorrido por su punto de aplicacion, suponiendo que este último cambie de lugar en la direccion misma de la fuerza.

Si esta última condicion no se verifica, será preciso descomponer la fuerza en dos, una en la direccion del movimiento, la otra perpendicularmente á él, la que será destruida. El trabajo de la primera componente será entonces el de la fuerza dada, y se le puede definir diciendo que es el camino recorrido por el punto de aplicacion, por la proyeccion de la fuerza en esa direccion; ó bien el producto de la intensidad de la fuerza, por la proyeccion del camino recorrido sobre su propia direccion.

Si la fuerza no es constante, se dividirá el tiempo en instantes infinitamente pequeños, durante los cuales se supone constante á la fuerza, y el producto de esta intensidad, por la proyeccion del camino recorrido durante cada uno de estos instantes, se llama trabajo elemental de la fuerza; la suma de los trabajos elementales, al cabo de un cierto tiempo, será el *trabajo total* durante él.

Relaciones entre el trabajo y el camino recorrido y la resistencia vencida: el trabajo es proporcional al camino recorrido; en efecto, si representamos por T el trabajo necesario para elevar un peso P á la altura h, para elevar el mismo peso á la altura $2h$, necesitaremos un trabajo representado por $2T$, y así sucesivamente, y si la altura recorrida por el peso es n veces h, el trabajo necesario es $n \times T$; luego el trabajo es proporcional al camino recorrido.

El trabajo es proporcional á la resistencia vencida. Para probarlo, sea T el trabajo necesario para elevar el peso P á la altura h. Para elevar á la misma altura el peso $2P$, se necesitará doble trabajo, y en general, si el peso se hace n veces mayor, el trabajo tambien será n veces mayor; luego el trabajo es proporcional á la resistencia vencida.

De estos dos principios se deduce que dos trabajos cualesquiera son proporcionales á los productos de las resistencias vencidas por los caminos recorridos. Sea, en efecto, T el trabajo necesario para elevar el peso P á la altura h; T' el trabajo necesario para elevar el peso P' á la altura h', y llamemos T'' el trabajo necesario para elevar el peso P á la altura h'.

Los trabajos T y T'' necesarios para elevar el peso

P á las alturas h y h' son proporcionales á estas alturas; luego

$$\frac{T}{T''}=\frac{h}{h'}$$

Los trabajos T'' y T' necesarios para elevar los pesos P y P' á la misma altura h' son proporcionales á estos pesos; luego

$$\frac{T''}{T'}=\frac{P}{P'}$$

y multiplicando ordenadamente ambas proporciones, tendremos

$$\frac{T}{T'}=\frac{P\times h}{P'\times h'}$$

Luego dos trabajos cualesquiera son proporcionales á los productos de las resistencias vencidas por los caminos recorridos.

Su medida.—Para medir un trabajo, se compara con otro que se toma por unidad.

Se ha convenido en tomar por unidad de trabajo el necesario para elevar un kilogramo de peso á un metro de altura; de manera que haciendo estas hipótesis en la fórmula anterior, tendríamos

$$T=P\times h$$

lo que nos dice que el trabajo de una fuerza tiene por medida el producto de esta fuerza valuada en kilogramos, por el camino recorrido por el punto de aplicacion expresado en metros.

Cuando la fuerza se emplea en el mismo sentido del camino recorrido, el trabajo tambien tiene por medida el producto del esfuerzo expresado en kilogramos, por el camino recorrido valuado en metros.

Si la fuerza forma un ángulo con la direccion que sigue el móvil, se descompone la fuerza en dos componentes por la regla del paralelógramo de las fuerzas, de manera que una de las componentes esté en direccion del camino recorrido, y la otra sea perpendicular á esta direccion: el trabajo se valúa multiplicando la componente de la fuerza en el sentido del movimiento por el camino recorrido. Supongamos un móvil empujado por una fuerza EF (fig. 67), inclinada con respecto á la direccion del camino OX que ha de recorrer y aplicada en el punto E. Se descompone la fuerza EF en las dos componentes EL y ED, segun la direccion del camino y segun una perpendicular á él. La componente ED tiende á hacer salir al móvil de su direccion, y es destruida por la resistencia del camino; la componente EL segun la direccion EX, es la proyeccion DF sobre OX, y es tanto mayor, cuanto menor es el ángulo LEF: cuando este ángulo sea cero, la componente EL será igual á EF. El trabajo, en este caso, es $T = EL \times S$, siendo S el camino recorrido por el móvil.

Trabajo de una fuerza tangente á la circunferencia de una rueda: supongamos (fig. 68) que una fuerza F actúa segun la direccion de la tangente á la circunferencia de una rueda. Cuando la rueda gira una pequeña cantidad aa', este pequeño movimiento se verifica en el sentido de la fuerza F y el trabajo es

$$T_1 = F \times aa'.$$

Entonces la fuerza cambia de direccion para recorrer el camino $a' a''$; el trabajo en este segundo período es

$$T_2 = F \times a'a''$$

y así sucesivamente.

Si la fuerza F recorre una circunferencia entera, el trabajo total T será la suma de todos los trabajos parciales, y tendremos:

$$T = F \times aa' + F \times a'a'' + \ldots = F(aa' + a'a'' + \ldots)$$

pero $(aa' + a'a'' + \ldots)$ es igual á la circunferencia rectificada ó sea $2\pi R$; luego el trabajo en una vuelta será

$$T = F \times 2\pi R$$

Qué se entiende por kilográmetro y por caballo de vapor.—Se llama kilográmetro al trabajo necesario para elevar el peso de un kilogramo á un metro de altura en un segundo. El kilográmetro se toma por unidad de trabajo de una fuerza.

El trabajo de una fuerza cualquiera se mide en kilográmetros, efectuando el producto de la fuerza expresada en kilogramos, por el camino recorrido expresado en metros. Elevar 30 kilogramos á cinco metros de altura en un segundo es producir un trabajo igual á $30 \times 5 = 150$ kilográmetros. Los dos factores que comp onen un mismo trabajo varían en razon inversa uno del otro, y puede éste componerse de una infinidad de maneras diferentes.

Caballo de vapor.—El kilográmetro es una unidad muy pequeña para los usos industriales. Tratando de comparar la cantidad de trabajo desarrollado por una máquina de vapor con el que pueden producir los caballos, se observó que los caballos vigorosos, no trabajando más que cuatro horas por dia, podian elevar 75 kilogramos á un metro de altura en un segundo. Se tomó esta cantidad de trabajo por unidad, y se la llamó caballo de vapor.

XXXVI

Qué se entiende por resistencias pasivas.—Enumeracion de las más principales.—Rozamientos por deslizamiento y por rodadura.

Qué se entiende por resistencias pasivas.—Segun la ley de inercia, un cuerpo puesto en movimiento y abandonado á sí mismo, se moveria indefinidamente con un movimiento uniforme y rectilíneo, es decir, con la misma velocidad y en la misma direccion. Sin embargo, la experiencia nos hace ver que la velocidad de un cuerpo va poco á poco disminuyendo, quedando al cabo de un cierto tiempo en reposo, debido á las pérdidas de fuerza viva que experimenta á causa de las resistencias que encuentra en su movimiento, llamadas *resistencias pasivas*.

Enumeracion de las más principales.—Las resistencias pasivas más principales que experimentan los cuerpos en sus movimientos son los *rozamientos*, que pueden ser de dos clases: *rozamientos por deslizamiento y rozamientos por rodadura*; la *rigidez de las cuerdas*, y, por último, la *resistencia de los fluidos*.

Rozamientos por deslizamiento y por rodadura.—Cuando un cuerpo pesado insiste sobre una mesa, por ejemplo, y se trata de hacerlo deslizar sobre esta superficie, se experimenta una resistencia: existe entre las moléculas del cuerpo y las de la mesa una adherencia que se opone á su separacion, y esta adherencia no es vencida más que cuando se aplica al cuerpo una fuerza de traccion suficientemente grande. La magnitud de esta fuerza sirve de medida á la resistencia que ha vencido, resistencia que se llama *rozamiento por resbalamiento*.

Desde el momento en que el cuerpo empieza á deslizarse, se tiene necesidad, para entretener su movimiento, sin que su velocidad disminuya, de aplicarle constantemente una cierta fuerza de traccion. Esta fuerza es empleada por completo á vencer el rozamiento que se desarrolla entre el cuerpo y la superficie sobre la que resbala; puede, pues, servir para medir el rozamiento ocasionado por el deslizamiento.

La fuerza de traccion que se tiene que emplear para poner el cuerpo en movimiento, es diferente de la que hay que aplicar al cuerpo ya puesto en movimiento para que conserve la misma velocidad.

Cuando se trata de hacer rodar un cuerpo cilíndrico sobre una superficie plana y horizontal, se experimenta una resistencia debida á la deformacion que experimenta el cuerpo y la superficie sobre la cual insiste, en razon á la presion que se ejerce en los puntos de contacto. El cilindro se aplasta, la superficie que lo soporta se deprime en forma de surco, y para producir la rodadura, es preciso aplicar al cuerpo una fuerza que venza á la resistencia que se opone al movimiento del cuerpo; esta resistencia se llama *rozamiento por rodadura*.